



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Posgrado

ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL Y GENERAL EN VARIETADES NO RIEMANNIANAS

Licenciado Frank J. Fritzsche Barrios

Asesorado por Dr. Giovanni Ramírez

Guatemala, 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORÍA DE LA
RELATIVIDAD ESPECIAL Y GENERAL EN
VARIEDADES NO RIEMANNIANAS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO AL
DEPARTAMENTO DE POSGRADO
POR

LICENCIADO FRANK J. FRITZSCHE BARRIOS
ASESORADO POR DR. GIOVANNI RAMÍREZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
MAESTRÍA EN FÍSICA

GUATEMALA, 2024

A mi hermano

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Giovanni Ramírez por su invaluable apoyo y orientación durante el desarrollo de este trabajo. Sin su experiencia, paciencia y dedicación hubiera sido imposible culminar este proyecto. Aprecio profundamente el tiempo y esfuerzo que ha invertido en guiarme y en compartir sus conocimientos conmigo.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	III
INTRODUCCIÓN	V
1. Marco teórico	1
1.1. Variedades y Estructuras Finslerianas	1
1.2. Cálculo Multivariado	4
1.3. Espacios Tangentes y Derivadas	5
1.4. El Teorema de Rango Constante y Consecuencias	6
1.5. Valores Críticos	8
1.6. Geometría de Finsler	8
1.6.1. Variedades de Finsler	8
2. La Teoría General de la Transformación del Espacio-Tiempo	11
2.1. Definición de Simultaneidad y Orden Temporal	11
2.2. El Orden Temporal y la Cadena de Causalidad	14
2.3. Teoría de la Transformación de Coordenadas	16
3. La Teoría Especial de Relatividad en el Espacio-Tiempo ds^4 de Finsler	21
3.1. Grupo de Transformación de Espacio-Tiempo en la Métrica ds^4 de Finsler	21
3.2. Cinemática en la Invariante ds^4	22
3.3. Dinámica en la Invariante ds^4	25
3.4. Una Partícula Cargada en un Campo Electromagnético en el Espacio ds^4 de Finsler	27
4. Aspectos en la Teoría de la Relatividad General	31
4.1. Ecuaciones de Campo	31
4.2. Una Solución no Riemanniana	34
4.3. Consecuencias Físicas	37

CONCLUSIONES	45
BIBLIOGRAFÍA	47
A. Código en Maple para el capítulo 4	51

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Ejemplo de una variedad	2
1.2. Equivalencia de variedades topológicas	2
1.3. Frontera de una variedad e interior de una variedad	3
1.4. Ejemplo de un plano tangente en una variedad	5
1.5. Difeomorfismo local	7
1.6. Representación gráfica de una sumersión y una inmersión	7
1.7. Descripción gráfica de una proyección natural π . Fuente: Figura original de Mo [18].	9
2.1. Diagrama para la definición de simultaneidad	11
2.2. La figura del espacio-tiempo	14
3.1. Dependencia de la medida de longitud L respecto de β	23
3.2. Ejemplos de composición de velocidades	25
3.3. Diagrama $E - \beta$ y diagrama $P - \beta$	26

INTRODUCCIÓN

Este documento es el trabajo de graduación o tesis para el Programa de la Maestría en Física de la Universidad de San Carlos de Guatemala. Es un trabajo acerca de la teoría de la relatividad, y para el efecto es muy difícil hacer algún experimento que compruebe lo que se plantea en las siguientes páginas. Es un trabajo que se confina al área teórico-bibliográfico. La justificación y/o motivación de realizar un trabajo de esta naturaleza se plantea en dos sentidos:

Primero: la teoría de la relatividad especial y el principio de causalidad de Einstein implican que la velocidad de cualquier objeto en movimiento no puede exceder la velocidad de la luz en el vacío, c .

Sin embargo, existen varias propuestas para observar una propagación más rápida que c [28] de los pulsos de luz utilizando la dispersión anómala cerca de una línea de absorción, líneas de ganancia no lineal o lineal, o barreras de túnel. Sin embargo, en todas las demostraciones experimentales previas[12], los pulsos de luz experimentaron ya sea, una gran absorción o reorganización severa, resultando en controversias por sobre la interpretación.

Anteriormente, L.J. Wang, A. Kuzmich y A. Dogariu [28] usaron la dispersión anómala lineal asistida por ganancia para demostrar la propagación de luz superlumínica en el gas cesio atómico. La velocidad del grupo de un pulso láser en esta región excede a c y puede incluso convertirse en negativa, mientras que la forma del pulso se preserva. Los libros de texto por ejemplo Resnick, Rindler, etc [22, 24] dicen que nada puede viajar más rápido que la luz, ni siquiera la luz misma. Los nuevos experimentos muestran que esto ya no es verdad [28], planteando preguntas acerca de la velocidad máxima en la cual podemos enviar información. Por el otro lado, la reducción de la velocidad de la luz a 17m/s en un gas atómico ultra-frío [13] muestra que la velocidad de la luz podría haber tomado un valor numérico voluntario. Recientemente también se han presentado implementaciones completamente ópticas para estudiar la resonancia de dos fotones en un medio en un régimen de baja absorción[12].

En este trabajo muestra que si se toma en cuenta la posibilidad de la existencia de las velocidades superlumínicas y vuelve a describir la teoría especial de la relatividad, siguiendo la forma de Einstein, se podría suponer que el espacio-tiempo físico es un espacio-tiempo de Finsler, caracterizado por la métrica

$$ds^4 = g_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l.$$

Si es así, se podría encontrar una nueva transformación de espacio-tiempo por el invariante ds^4 y discutir la teoría de relatividad en base a esta transformación.

Es muy interesante que, en los campos de Schwarzschild, el cálculo teórico para las curvas espaciales deberá estar en acuerdo con la información de la expansión superlumínica de las fuentes de radio extra-galácticas observadas año tras año [9].

Se sabe que en su primer artículo sobre la teoría especial de la relatividad: *sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*, Einstein claramente establece (ver Einstein, 1923 [10]) que *las velocidades mayores que la de la luz no tienen posibilidad de existir*. Pero él descuidó señalar el rango aplicable de la transformación de Lorentz. De hecho, su descripción completa debe basarse en las velocidades menores que la velocidad de la luz, a las cuales se les llama velocidades sublumínicas. Así que, la teoría especial de relatividad no puede negar que un movimiento a una velocidad mayor que la velocidad de la luz al vacío, a la cual se le llama velocidad superlumínica, podría existir. La nueva teoría conservaría todo el significado de la teoría especial de relatividad cuando la materia se mueve a velocidad sublumínica y podría dar un nuevo contenido cuando la materia se mueva a una velocidad superlumínica. Si se asume que un movimiento a una velocidad superlumínica estará de acuerdo con las curvas espaciales en la teoría general de relatividad, entonces los cálculos indicarían que la expansión superlumínica de las fuentes de radio extra-galácticas corresponderían exactamente a las curvas espaciales de la geometría de Schwarzschild.

Esta discusión todavía se basa en el principio de relatividad y en el principio de la constante de la velocidad de la luz, los cuales han sido definidas por Einstein de la siguiente manera:

1. No son afectadas las leyes por las cuales se someten los estados de sistemas físicos y cambian, ya sea que estos cambios de estado se refieren a uno o el otro de los dos sistemas de coordenadas en movimiento de translación uniforme (ver Einstein, 1923; [10] p. 41).
2. Cualquier rayo de luz se mueve en el sistema *estacionario* de coordenadas

con la velocidad determinada c , ya sea que el rayo se emita por un cuerpo estacionario o por un cuerpo en movimiento.

Se debe notar que estos dos postulados no imponen ninguna restricción con respecto a la velocidad relativa v de los dos observadores inerciales.

Segundo: durante cien años, las variedades lorentzianas han servido como base geométrica para la física. Unidas al modelo estándar de física de partículas, condujo a la explicación de una gran cantidad de observaciones. Sin embargo, sobre esta base debemos concluir que el 95 % del universo aún es desconocido: llamado materia oscura y/o energía oscura[4]. Hoy la mayoría de los intentos de explicación para este hecho provienen de las modificaciones del modelo estándar de la física de partículas; pero posiblemente una extensión bien controlada del fondo geométrico para la física puede dar una nueva luz e ideas sobre el universo oscuro.

Aquí se presenta también el espacio tiempo de Randers, una generalización de los espacios de Finsler, que puede servir como fondo geométrico generalizado para la física que proporciona:

- una noción precisa de causalidad bien definida,
- una noción de observadores y sus medidas,
- un fondo geométrico para las teorías de campo,
- y una dinámica gravitacional consistente con la relatividad general.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera, en el capítulo 1 se discuten formalismos de las variedades con el objetivo de definir la métrica de Finsler. Un espacio métrico es necesario para poder definir medidas, que en este caso resultan necesarias para la definición de derivadas. Estas derivadas son las que permiten definir posteriormente las cantidades físicas como velocidad y aceleración que resultan necesarias para el estudio de la relatividad.

Una vez introducida la nueva métrica de Finsler, en el capítulo 2 se discuten los temas del ordenamiento temporal el cual que se ve afectado cuando se consideran velocidades superlumínicas. Además, en el capítulo 3 se presenta la interpretación de la relatividad especial según la métrica de Finsler haciendo énfasis en la descripción de la cinemática, la dinámica y el electromagnetismo. Como uno de los resultados de esta tesis un artículo [11] está aceptado para publicación en la Revista de la Escuela de Física de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras. En dicho artículo se presentan los resultados de los cálculos del tensor electromagnético en un espacio de

Finsler. Después, en el capítulo 4 se discuten las ecuación de campo de Einstein en el contexto de esta geometría generalizada en los espacios de Finsler. Finalmente se presentan conclusiones y trabajo a futuro.

1. Marco teórico

En este capítulo se presenta la geometría de Finsler que se basa en un elemento de arco cuya métrica fue introducida por Riemann. Antes de eso se presentan definiciones que son necesarias para describir adecuadamente las variedades de Finsler y su estructura. Este es un capítulo importante para comprender los capítulos siguientes.

1.1. Variedades y Estructuras Finslerianas

En forma breve, una *variedad de dimensión n* (real) es un espacio topológico M en el que cada punto, $x \in M$, tiene una vecindad homeomorfa al espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Para un ejemplo de una variedad ver la figura 1.1 donde se muestra un toro que es una variedad compacta.

Definición 1.1. (Sistema de Coordenadas, diagrama, parametrización): Sean M un espacio topológico y $U \subseteq M$ un conjunto abierto. Además, sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, $\phi(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u))$ se llama *sistema de coordenadas* en U y las funciones x_1, x_2, \dots, x_n , se llaman *funciones de coordenadas*. El par (U, ϕ) se llama *diagrama* en M . El mapa inverso ϕ^{-1} es una parametrización de U .

Definición 1.2. (Atlas, mapas de transición): Un atlas en M es una colección de diagramas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ en donde U_α abarca M . Los homeomorfismos $\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son los mapas de transición o *transformaciones de coordenadas*.

Definición 1.3. (Variedad topológica, variedad diferenciable): Un espacio topológico de Hausdorff, segundo contable M es una variedad topológica n -dimensional si admite un atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, $\phi_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. También es una variedad diferenciable si todos los mapas de transición son difeomorfismos C^∞ , lo que significa que, todas las derivadas parciales existen y son continuas.

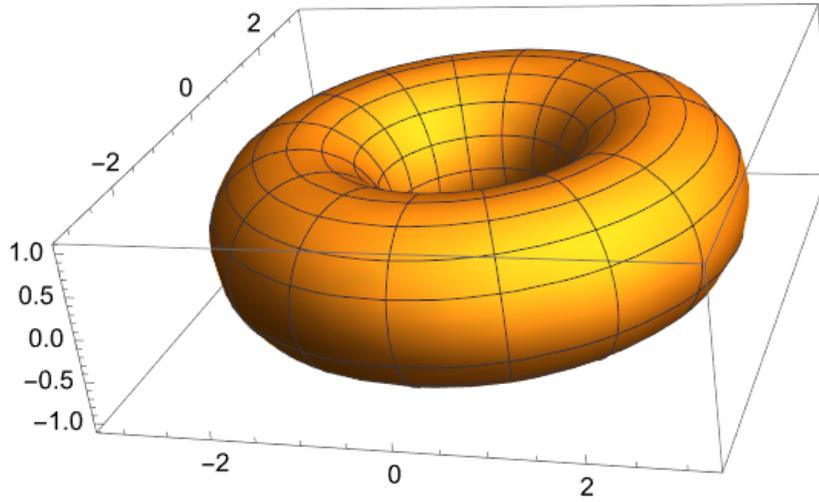


Figura 1.1. Ejemplo de una variedad. Fuente: elaboración propia.

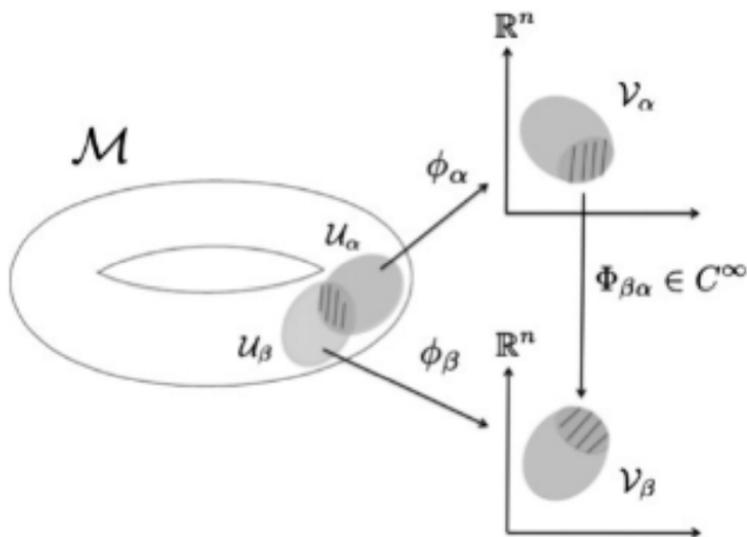


Figura 1.2. Equivalencia de variedades topológicas. Fuente: figura original de Jenny Wilson [29].

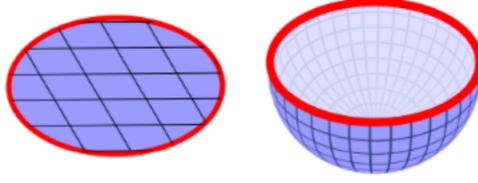


Figura 1.3. Frontera de una variedad e interior de una variedad. Fuente: figura original de Jenny Wilson [29].

Dos atlas diferenciables son *equivalentes* si su unión es un atlas diferenciable. En general, una *estructura diferenciable* en M puede definirse como la clase de equivalencia de atlas diferenciables o como un atlas maximal diferenciable. En la figura 1.2 se muestra un ejemplo de la equivalencia de variedades topológicas.

Definición 1.4. (Variedad con frontera, frontera, interior): Se define una variedad n -dimensional con frontera M como se indica anteriormente, pero ahora se permite que la imagen de cada diagrama sea un subconjunto abierto del espacio euclidiano \mathbb{R}^n o un subconjunto abierto de la mitad superior de espacio $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) | x_n \geq 0\}$. Las pre-imágenes de los puntos $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}_+^n$ son la *frontera* ∂M de M y $(M - \partial M)$ es el interior de M . En la figura 1.3 se muestra un ejemplo de la frontera y el interior de una variedad.

Una variedad con frontera es *diferenciable* si los mapas de transición son diferenciables. Se debe recordar que, dado un subconjunto arbitrario $X \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama diferenciable si cada punto en X tiene alguna vecindad donde f pueda extenderse a una función diferenciable.

Definición 1.5. (Mapa de variedades topológicas): Una función $f : M \rightarrow N$ es un *mapa de variedades topológicas* si f es continua. También es un mapa diferenciable de variedades diferenciables M, N si por cualquier diagrama diferencial (U, ϕ) de M y (N, ψ) de N , la función

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V),$$

es un difeomorfismo C^∞ .

Definición 1.6. (Espacios proyectivos reales y complejos): La *proyektivización* de un espacio vectorial V es el espacio de los subespacios 1-dimensionales de

V. Los espacios proyectivos reales y complejos se definen así

$$\mathbb{R}P^n := \frac{(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})}{(x_0, \dots, x_n)} \sim (cx_0, \dots, cx_n) \quad \text{para } c \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{C}P^n := \frac{(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})}{(x_0, \dots, x_n)} \sim (cx_0, \dots, cx_n) \quad \text{para } c \in \mathbb{C}.$$

Usualmente, los puntos en $\mathbb{R}P^n$ y $\mathbb{C}P^n$ se escriben en *coordenadas homogéneas*, donde $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ denota la clase de equivalencia del punto (x_0, x_1, \dots, x_n) .

1.2. Cálculo Multivariado

Definición 1.7. (Derivada): Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la derivada de f en x es el mapa lineal $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$y \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{y}) - f(\vec{x})}{t},$$

que es la derivada direccional de f en x en la dirección \hat{y} , cuando f se escribe en coordenadas $f(x) = (f_1(x) \dots f_m(x))$. Si todas las primeras derivadas existen y son continuas en una vecindad de x , entonces df_x existe y está dada por jacobiano que es la matriz $m \times n$

$$\begin{pmatrix} dvf_{1x_1} & \cdots & dvf_{1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dvf_{mx_1} & \cdots & dvf_{mx_n} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

La regla de la cadena afirma que dados los mapeos diferenciables f, g relacionados según el esquema

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \mathcal{U} & \xrightarrow{f} & \mathcal{V} & \xrightarrow{g} & \mathcal{W} \\ \supset & & \supset & & \supset \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

para cada $x \in \mathcal{U}$, se conmuta siguiendo la regla

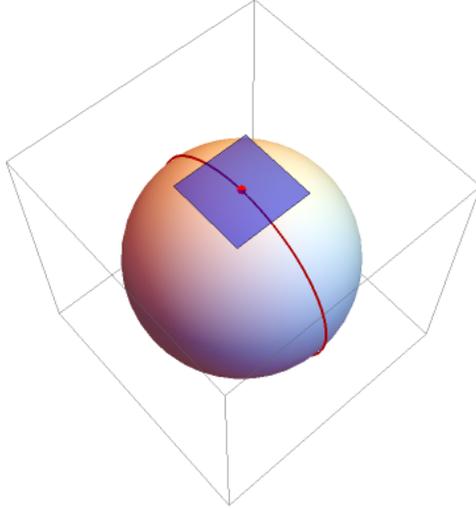


Figura 1.4. Ejemplo de un plano tangente en una variedad. Fuente: elaboración propia.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & d(g \circ f)_x & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{df_x} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{dg_{f(x)}} & \mathbb{R}^\ell
 \end{array}$$

1.3. Espacios Tangentes y Derivadas

Definición 1.8. (Espacio tangente $T_x M$, Derivadas): Si se supone que M es una subvariedad diferenciable m -dimensional de algún espacio euclidiano \mathbb{R}^N . Cada variedad puede realizarse de esta forma: sea $\phi : U \rightarrow M$, una parametrización local alrededor de algún punto, $x \in M$, con $\phi(0) = x$. Se define el espacio tangente $T_x M$ como la imagen del mapa $d\phi_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$. Se debe notar que $T_x M$ es un subespacio m -dimensional de \mathbb{R}^N ; su transformación $x + T_x M$ es la mejor aproximación fija de ϕ a x . Un ejemplo de un plano tangente en una variedad puede verse en la figura 1.4.

Dado un mapa diferenciable de variedades $f : M \rightarrow N$ y las parametrizaciones $\phi : U \rightarrow M$, $\phi(0) = x \in M$ y $\psi : V \rightarrow N$, $\psi(0) = y \in N$. Ahora, sea h un mapa tal que $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi : U \rightarrow V$. Se puede definir el *diferencial* de f en x tomando

$$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N,$$

de modo que

$$df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1}.$$

Los espacios $T_x(M)$, $T_{f(x)}(N)$ y el diferencial df_x son independientes de la elección de las parametrizaciones locales ϕ y ψ .

1.4. El Teorema de Rango Constante y Consecuencias

El teorema de rango constante establece que el comportamiento local de un mapa diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es gobernado por el rango del jacobiano, ver ecuación (1.1).

Teorema 1.4.1. (Teorema de rango constante): Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapa diferenciable. Si el jacobiano de f es un rango constante k en una vecindad de p , entonces hay sistemas locales de coordenadas g en p y h en $f(p)$, así que

$$hfg^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0).$$

En otras palabras, en las coordenadas apropiadamente elegidas, f es localmente la composición de la proyección $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_k$ y la inclusión $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

El caso del teorema de rango constante con $n = k = m$ implica el Teorema de función inversa

Teorema 1.4.2. (Teorema de función inversa): Sean M, N dos variedades diferenciables y se supone que $f : M \rightarrow N$ es un mapa diferenciable cuya derivada df_x en x es un isomorfismo. Entonces f es un difeomorfismo en x , lo que significa que f toma alguna vecindad de x de forma difeomórfica en su imagen. En este caso f tiene localmente un inverso diferenciable f^{-1} , con diferencial $df^{-1}_{f(x)} = (df_x)^{-1}$ en $f(x)$.

Un ejemplo de un difeomorfismo puede verse en la figura 1.5 donde se muestra que la vecindad de un punto de interés puede proyectarse a una imagen acotada y compacta.

Definición 1.9. (Sumersión; inmersión): Un mapa $f : M \rightarrow N$ de variedades diferenciables es una sumersión si su derivada df_x es sobreyectiva en cada x . El mapa es una inmersión si la derivada es inyectiva en cada x . La imagen de una inmersión se llama a veces una subvariedad inmersa, aunque puede no tener una estructura de variedad.

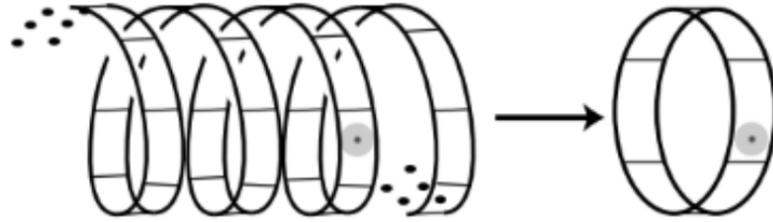


Figura 1.5. Difeomorfismo local donde se toma la vecindad del punto marcado y se hace una proyección a una imagen acotada y compacta. Fuente: figura original de Jenny Wilson [29].

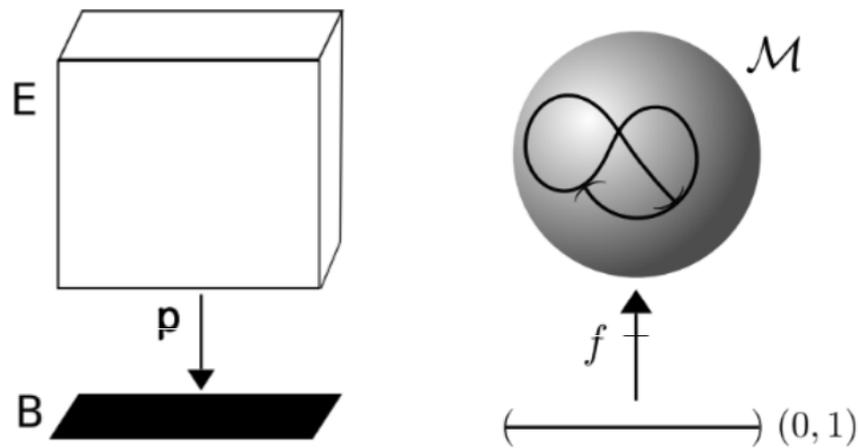


Figura 1.6. Representación gráfica de una sumersión (izquierda) y una inmersión (derecha). Fuente: figura original de Jenny Wilson [29].

En la figura 1.6 se pueden ver ejemplos de la sumersión en el panel izquierdo de la figura y de inmersión en el panel derecho de la figura.

Definición 1.10. (Encaje, Subvariedades): Una función $f : M \rightarrow N$ de variedades topológicas es un encaje *topológico* si es un homeomorfismo a su imagen. Si M y N son variedades diferenciables, entonces f es un encaje diferenciable si es una inmersión y un encaje topológico. Se refiere a la posibilidad de representar una variedad diferenciable como una subvariedad de un espacio euclídeo. En algunas ocasiones se requiere que adicionalmente los encajes sean mapas adecuados, lo que significa que las pre-imágenes de conjuntos compactos deben ser compactas. Con cualquier definición, la imagen de un encaje es una *subvariedad* (regular); la topología en M coincide con la topología de subespacio en $f(M)$.

1.5. Valores Críticos

Definición 1.11. (Valores críticos, Valores regulares): Dado un mapa diferenciable de variedades $f : M \rightarrow N$, el conjunto de *valores críticos* de f se define como

$$\{f(p) \in N \mid \text{Rango}(df_p) < \dim(N)\}.$$

Los valores regulares de f son el complemento de los valores críticos en N , lo que significa que

$$\{q \in N \mid \text{Rango}(df_p) = \dim(N) \text{ en cada preimagen } p \in f^{-1}(q)\} \cup \{q \in N \mid q \notin f(M)\}.$$

1.6. Geometría de Finsler

La geometría de Finsler es la geometría de Riemann sin la restricción cuadrática. Entre las aplicaciones más notables está: teoría de la relatividad, teoría de control y biología matemática [6]. En esta sección, se presentan las variedades de Finsler.

La geometría basada en el elemento de arco

$$ds = F(x^1, \dots, x^n; dx^1, \dots, dx^n), \quad (1.2)$$

donde F es positivamente homogéneo de grado uno en dx^i , se llama geometría de Riemann-Finsler [18] o también geometría Finsler para abreviar. A grandes rasgos, F es una colección de normas de Minkowski en el espacio tangente en x , de modo que F_x es diferenciable en x . De hecho, la métrica descrita en la ecuación (1.2) fue introducida por Riemann en su famoso *Habilitationsvortrag* de 1854 [23].

Riemann puso especial atención a una métrica definida por la raíz cuadrada positiva de una forma diferencial cuadrática definida positiva, es decir

$$F^2(x, dx) = g_{ij}(x)dx^i dx^j.$$

1.6.1. Variedades de Finsler

Sea M una variedad diferenciable n -dimensional. Se toma $T_x M$ como el espacio tangente en $x \in M$, y por $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ el espacio tangente de M . Cada elemento de TM tiene la forma (x, y) , donde $x \in M$ y $y \in T_x M$. La proyección

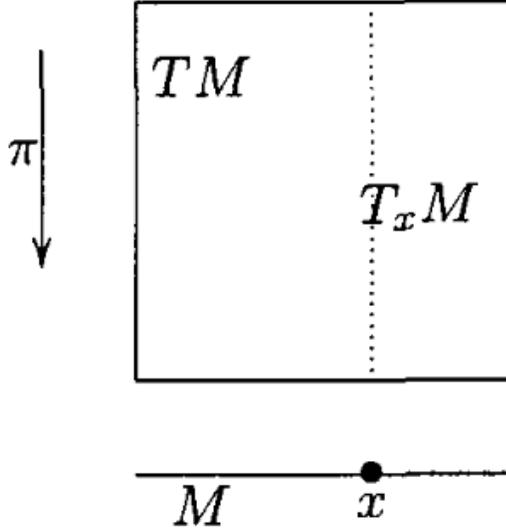


Figura 1.7. Descripción gráfica de una proyección natural π . Fuente: Figura original de Mo [18].

natural $\pi : TM \rightarrow M$ está dada por $\pi(x, y) = x$. Para una representación gráfica de una proyección natural en una variedad de Finsler se puede ver la figura 1.7.

Sea (φ, x^i) , un sistema local de coordenadas sobre un subconjunto $U \subset M$, es decir

$$\forall x \in U, \varphi(x) = (x^1, \dots, x^n).$$

Tomando la curva en U ,

$$\gamma_i(t) = \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^{i-1}, x^i, x^i + t, x^{i+1}, \dots, x^n),$$

entonces $\partial/\partial x^i|_x = \gamma_i'(0)$ son las bases coordinadas inducidas para $T_x M$.

Las x^i llevan a coordenadas locales (x^i, y^i) en $\pi^{-1}U \subset TM$ a través del mecanismo

$$y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Los y^i están globalmente fibrados. Siempre que sea posible, no se hace ninguna distinción entre (x, y) y su representación de coordenadas (x^i, y^i) .

La función H definida en TM puede expresarse localmente como

$$H(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n).$$

Se emplea la siguiente convención, para escribir la derivada parcial de H con respecto

a la coordenada y^i se usa H_{y^i} , para la derivada parcial de H con respecto a y^i y a y^j se usa $H_{y^i y^j}$, etc. De forma similar para la derivada parcial con respecto a la coordenada x^i .

Lema 1.1. *Sea V un subconjunto abierto de M tal que $V \cap U \neq O$, sea $(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)$ la coordenada local en $\pi^{-1}V \subset TM$. Entonces*

$$(i) \quad H_{\tilde{y}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} H_{y^i},$$

$$(ii) \quad H_{\tilde{x}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} H_{x^i} + \tilde{y}^k \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k} H_{y^i}.$$

La demostración es sencilla y se puede ver con suficiente detalle en Mo (2006)[18].

Definición 1.12. (Estructura de Finsler): Una función $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ se llama una estructura de Finsler si en un sistema de coordenadas locales (x^i, y^i) ,

$$F(x, y) = F \left(y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right),$$

satisface

$$(i) \quad F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y); \quad \lambda > 0.$$

$$(ii) \quad F(x, y) = C^\infty \text{ para } y \neq 0.$$

$$(iii) \quad \frac{1}{2}(F^2)_{y^i y^j} \quad (y \neq 0) \text{ es definida positivamente.}$$

Una C^∞ variedad M con una estructura de Finsler F se llama Variedad de Finsler o espacio de Finsler. Una variedad de Finsler es una variedad no Lorentziana.

Hasta aquí este capítulo con definiciones. Ahora que se han establecido las características de la geometría de Finsler se puede estudiar cómo esta nueva estructura geométrica permite nuevas definiciones para la simultaneidad de eventos y ordenamiento temporal. Esto servirá de base para entender después la teoría de la relatividad en este nuevo espacio-tiempo.

2. La Teoría General de la Transformación del Espacio-Tiempo

2.1. Definición de Simultaneidad y Orden Temporal

Según Cao [9] en su descripción acerca de la definición de simultaneidad, Einstein [10] establece: *tomemos un sistema de coordenadas en las cuales las ecuaciones de mecánica Newtoniana se mantengan bien, . . . , dejemos que un rayo de luz comience en el tiempo A , t_A , de A hacia B , dejémoslo que en el tiempo B , t_B , sea reflejado en B en la dirección de A , y llegue de nuevo a A en el tiempo A , t'_A . Se puede usar la figura 2.1 como una ayuda para este experimento mental. Si se continúa con la definición de simultaneidad de Einstein[10]: *los dos relojes se sincronizan si**

$$t_B - t_A = t'_A - t_B. \quad (2.1)$$

De acuerdo con la experiencia, asumimos que la cantidad

$$\frac{2AB}{t_B - t_A} = c, \quad (2.2)$$

sea una constante universal: la velocidad de la luz en espacio vacío. Es esencial que se defina el tiempo por medio de los relojes estacionarios en el sistema estacionario, y el tiempo definido ahora siendo apropiado para el sistema estacionario, y el tiempo ahora definido que sea apropiado al sistema estacionario, que llamamos 'el tiempo del sistema estacionario.' Y nuevamente Cao [9] llama la atención a que *Einstein concluyó su definición de simultaneidad. Pero él no consideró la condición aplicable de esta definición, menos el orden temporal y según parece para mí, estas discusiones son esenciales también. Primero que nada, asumamos que si el punto B se mueve con una velocidad v relativa al punto A , de acuerdo con la experiencia, debemos usar*

Figura 2.1. Diagrama para la definición de simultaneidad. Fuente: elaboración propia.

las siguientes ecuaciones en lugar de la ecuación anterior:

$$\frac{2AB}{t_A - t_B} = \begin{cases} c - v, & \text{cuando } B \text{ se está apartando de } A, \\ c + v, & \text{cuando } B \text{ está llegando a } A. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ahora se debe tener en cuenta que el primer caso de la ecuación anterior no se aplica en todos los casos porque es necesario que $v < c$. Sin embargo el segundo caso siempre se aplica, tanto para $v < c$ como para $v > c$. Por lo tanto, se puede pensar que toda la discusión de Einstein se basa en la siguiente fórmula

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c - v}, \quad \text{y} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c + v}. \quad (2.4)$$

Se debe tener en cuenta que $t_B - t_A > 0$ por lo tanto $v < c$, porque los dos relojes son estacionarios en su marco de referencia. La diferencia $t_B - t_A$ es el tiempo que le toma al rayo luz ir desde A hasta B mientras que $t'_A - t_B$ es el tiempo que le toma a la luz viajar desde el espejo en B hasta el punto A' . Estos dos intervalos son iguales cuando los relojes están sincronizados en el sentido de Einstein-Poincaré.

Continuamos citando a Cao [9]: *particularmente, para lograr la transformación de Lorentz, Einstein se basó en la siguiente fórmula (ver Einstein, 1923; p. 44) [10].*

$$\frac{1}{2} \left[r(0, 0, 0, t) + r\left(0, 0, 0, t + \frac{x'}{c - v} + \frac{x'}{c + v}\right) \right] = r\left(x, 0, 0, t + \frac{x'}{c - v}\right), \quad (2.5)$$

de donde se puede entender que $x'/(c - v)$ tiene dimensiones de tiempo y es igual a $t_B - t_A$ por lo que la condición de que $v < c$ escrita anteriormente debe mantenerse, es decir se debe tener un movimiento sublumínico. Este movimiento sublumínico también permite que se pueda aplicar la transformación de Lorentz. Citando a Cao [9] nuevamente: *la teoría especial de la relatividad no puede negar que la velocidad superlumínica exista.*

Como se tiene interés en el movimiento superlumínico, uno se puede enfocar en la segunda condición de la ecuación (2.3). Nuevamente, parafraseando a Cao [9]: *Ahora, dejamos que otro rayo de luz (debe distinguirse del primero) inicie en el tiempo A , t_{A1} , de A hacia B (cuando B esté en un nuevo lugar, B_1), dejamos que en el tiempo B , t_{B1} , se refleje en B en dirección de A , y llegue de nuevo a A en el tiempo A' t_{A2} [9].*

De acuerdo con el principio de relatividad y el principio de constancia de la

velocidad de la luz, obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\frac{1}{2}(t'_A - t_A) = t_B - t_A = \frac{AB}{c + v}, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{2}(t'_{A1} - t_{A1}) = t_{A1} - t_{B1} = \frac{AB_1}{c + v}, \quad (2.7)$$

$$AB - AB_1 = v(t_{A1} - t_A). \quad (2.8)$$

de donde podemos obtener los tiempos para A

$$\Delta t_A = t_{A1} - t_A, \quad \Delta t_B = t_{B1} - t_B \quad \text{y} \quad \Delta t'_A = t'_{A1} - t'_A, \quad (2.9)$$

en esta ecuación las cantidades Δt_A , Δt_B y $\Delta t'_A$ representan los intervalos temporales de los eventos: (i) emisión a partir de A , (ii) reflexión a partir de B y (iii) los dos rayos de luz llegan a A . Ahora los símbolos de los intervalos temporales cobran importancia ya que describen los órdenes temporales [9]. Cuando $\Delta t > 0$ se llamará el orden hacia adelante, y cuando $\Delta t < 0$, se llamará el orden hacia atrás.

De una manipulación algebraica de las ecuaciones (2.6)-(2.9) se pueden obtener expresiones para los intervalos de tiempo

$$\Delta t_B = \frac{c}{c + v} \Delta t_A, \quad (2.10)$$

y

$$\Delta t'_A = \frac{c - v}{c + v} \Delta t_A, \quad (2.11)$$

de donde se puede entender que si $\Delta t_A > 0$ los dos rayos fueron emitidos desde A y por lo tanto $\Delta t_B > 0$ para el observador ubicado en el punto A . Bajo este análisis, estos dos rayos de luz fueron reflejados por el orden hacia adelante a partir de B .

Pero, se obtiene que

$$\Delta t'_A \geq 0 \quad \text{sí y solo sí} \quad v \leq c,$$

y que

$$\Delta t'_A < 0, \quad \text{sí y solo sí} \quad v > c.$$

Esto significa que para el observador al sistema A , estos dos rayos de luz llegaron a A por el orden hacia adelante, sólo cuando el punto B se mueve con velocidad sublumínica, y por el orden hacia atrás sólo cuando fue con velocidad superlumínica. En otras palabras, el orden temporal no siempre es constante. Es constante sólo

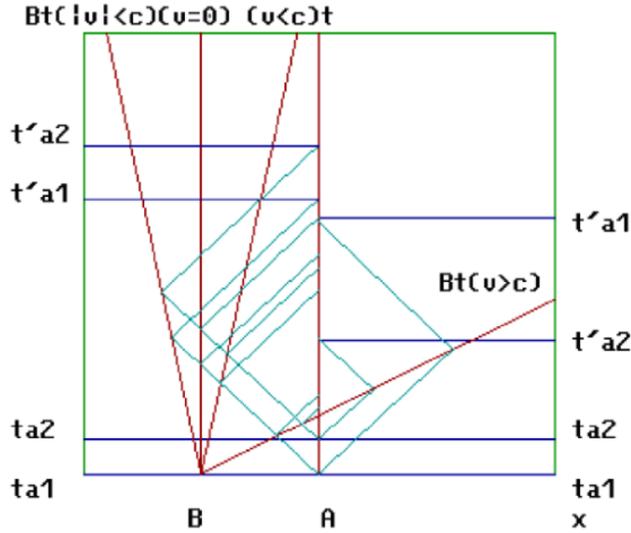


Figura 2.2. La figura del espacio-tiempo. Notar que hay líneas diagonales para $v > c$, otra para $v < c$, una vertical para $v = 0$ y otra diagonal para el caso $|v| < c$. Es importante notar el ordenamiento temporal en las marcas del eje vertical izquierdo. En el eje vertical derecho se pierde el ordenamiento temporal al tener una velocidad superlumínica. Fuente: Cao [9].

cuando $v < c$, y no es constante cuando $v > c$.

Usualmente, uno piensa que esto es un flujo de tiempo hacia atrás. De hecho, sólo es un proceso de tiempo en el sistema B con la velocidad superlumínica, que da al observador en el ‘sistema estacionario’ A una apariencia inversa del proceso del tiempo. Es un resultado inevitable cuando la velocidad del cuerpo en movimiento es más rápido de la velocidad de transmisión de la señal. Este resultado se llamará *relatividad del orden temporal*. Es una nueva naturaleza del tiempo cuando el cuerpo en movimiento alcanza la velocidad superlumínica. Se sabe que el espacio–tiempo no es el que impacta su forma sobre las cosas, sino las cosas y sus leyes físicas las que determinan el espacio–tiempo. Así que, la velocidad superlumínica no necesita ser negada por el carácter del espacio–tiempo de la teoría especial de relatividad, pero representará la nueva naturaleza del espacio–tiempo, la relatividad del orden temporal.

2.2. El Orden Temporal y la Cadena de Causalidad

Para explicar la disparidad entre el flujo de tiempo hacia atrás y la relatividad del orden temporal, usaremos la figura de espacio-tiempo (ver figura 2.2) y tomamos las siguientes definiciones según Cao [9]:

1. La cadena del evento $t_{A0}, t_{A1}, \dots, t_{Ai}, \dots$. El i -ésimo rayo de luz se inicia en t_{Ai} y $\Delta t_{Ai} = t_{A(i+1)} - t_{Ai} > 0$. Puede o no ser cadena de causalidad.
2. Las cadenas de transferencia de la luz $t_{A0}, t_{B0}, t'_{A0}; t'_{Ai}; \dots$. Cada cadena t_{Ai}, t_{Bi}, t'_{Ai} debe ser una cadena de causalidad, por ejemplo

$$\frac{1}{2}(t'_{Ai} - t_{Ai}) = t_{Bi} - t_{Ai} = t'_{Ai} - t_{Bi} > 0. \quad (2.12)$$

Si tienen un signo negativo, serán un flujo de tiempo hacia atrás y violarán el principio de causalidad.

3. Las cadenas del movimiento son los rayos de la luz, los cuales se reflejarán en B , pero no tendrán diferentes características cuando B se mueve a diferente velocidad. Asumamos que:

- a) $v > 0$ cuando B se acerca a A ;
- b) $v < 0$ cuando B se aleja de A ;
- c) $c > 0$ cuando el rayo de luz va de A de regreso a B ;
- d) $c < 0$ cuando el rayo de luz va de A hacia B .

Así que, si $v = 0$, debemos tener $c < 0$. Entonces

$$t_{A(i+1)} - t_{Ai} = t_{B(i+1)} - t_{Bi} = t'_{A(i+1)} - t'_{Ai}. \quad (2.13)$$

Si $v < c$, debemos tener $c < 0$ y cuando $v > 0$,

$$t_{A(i+1)} - t_{Ai} > t_{B(i+1)} - t_{Bi} > t'_{A(i+1)} - t'_{Ai} > 0, \quad (2.14)$$

pero cuando $v < 0$,

$$0 < t_{A(i+1)} - t_{Ai} < t_{B(i+1)} - t_{Bi} < t'_{A(i+1)} - t'_{Ai}, \quad (2.15)$$

Por último, si $v > c$, se debe tener $v > 0$; y cuando $c < 0$,

$$t_{A(i+1)} - t_{Ai} > t_{B(i+1)} - t_{Bi} > |t'_{A(i+1)} - t'_{Ai}| > 0. \quad (2.16)$$

Pero

$$t'_{A(i+1)} - t'_{Ai} < 0, \quad (2.17)$$

Cuando $c > 0$,

$$0 < t_{A(i+1)} - t_{Ai} < |t_{B(i+1)} - t_{Bi}| < |t'_{A(i+1)} - t'_{Ai}|, \quad (2.18)$$

y

$$t_{B(i+1)} - t_{Bi} < 0 \quad \text{y} \quad t_{A(i+1)} - t_{Ai} < 0 \quad (2.19)$$

Estas son relaciones rígidas de causalidad.

4. Las cadenas de observación $t'_{A0}, t'_{A1}, \dots, t'_{Ai}, \dots$ y $t_{B0}, t_{B1}, \dots, t_{Bi}, \dots$ no son cadenas de causalidad. La relatividad del orden temporal es solo que ellos puedan ser un positivo cuando $v < c$ o un negativo cuando $v > c$ y el vector v y c tienen la misma dirección.

En la ecuación (2.4) cuando $v > c$, $t_B - t_A < 0$ no significa que las velocidades mayores que la de la luz no tienen posibilidad de existir, sino que sólo la del rayo de luz no puede capturar los cuerpos con velocidad superlumínica.

En el experimento mental que se describe en la figura 2.2, hay un espejo en los puntos A y B que permite que se reflejen las señales de luz. La velocidad relativa entre A y B es v y en el caso de que tengamos una v sublumínica vamos a tener eventos ordenados temporalmente como se muestran en el eje vertical de la izquierda. Sin embargo cuando B se aleja a una velocidad superlumínica, los eventos pierden el ordenamiento temporal ya que no son eventos que sigan una cadena causal como se describió antes.

2.3. Teoría de la Transformación de Coordenadas

Si se toman las ecuaciones de los intervalos de tiempo dadas en las ecuaciones (2.10) y (2.11) se puede obtener

$$\Delta t_B = \frac{c}{c+v} \Delta t_A, \quad (2.20)$$

y

$$\Delta t_B = \frac{c}{c-v} \Delta t'_A. \quad (2.21)$$

Los intervalos Δt_A y $\Delta t'_A$ son medibles por el sistema A , pero A no tiene acceso a medir Δt_B . Así que el observador debe conjeturar Δt_B a partir de Δt_A o t'_A [9]. Entonces, Δt_B en la ecuación (2.20) y Δt_B , en la (2.21) son diferentes. Si se puede

encontrar una transformación de coordenadas, ésta satisfará la siguiente ecuación

$$\Delta\tau^2 = \Delta t_A \cdot \Delta t'_A, \quad (2.22)$$

ya que $\Delta\tau^2$ es un invariante y, de acuerdo con las ecuaciones (2.10) y (2.11), se obtendrá

$$\Delta\tau^2 = \begin{cases} > 0, & \text{ssi } v < c, \\ = 0, & \text{ssi } v = c, \\ < 0, & \text{ssi } v > c. \end{cases} \quad (2.23)$$

Luego, se obtiene

$$\Delta t_B^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2},$$

o

$$dt^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} d\tau^2. \quad (2.24)$$

Se tiene que $ds^2 = c^2 d\tau^2$. También se obtiene

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = (c^2 - v^2) dt^2. \quad (2.25)$$

Así que se puede concluir que

$$ds^2 = \begin{cases} > 0, & v < c \quad \text{tipo temporal,} \\ = 0, & v = c \quad \text{lumínica,} \\ < 0, & v > c \quad \text{tipo espacial.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Cao [9] llama la atención a que $ds^2 = (c^2 - v^2) dt^2$ y $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ no son idénticos y también propone que la teoría especial de relatividad no reconoce su diferencia porque el movimiento a velocidad sublumínica no involucra el cambio relativo de los órdenes temporales.

El símbolo ds^2 permanece sin cambio cuando el sistema inercial cambia. Ahora hay que encontrar una relación entre los dos valores distintos de ds , de modo que si

$$ds^2 = ds_v^2 + ds_0^2, \quad (2.27)$$

donde

$$ds_v^2 = (c^2 - v^2)dt^2, \quad (2.28)$$

$$ds_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.29)$$

entonces

$$ds^2 = \begin{cases} +ds_v^2 + ds_0^2, & v < c, \\ -ds_v^2 + ds_0^2, & v > c. \end{cases} \quad (2.30)$$

Entre dos sistemas inerciales

$$ds_v^2 + ds_0^2 = \begin{cases} +ds_v^2 + ds_0^2, & v < c, \\ -ds_v^2 + ds_0^2, & v > c. \end{cases} \quad (2.31)$$

Y esta relación, siguiendo el análisis de Cao [9], de acuerdo con la mecánica clásica, podemos determinar el estado de un sistema con n grados de libertad al tiempo t al medir la posición $2n$ y las coordenadas de momento $q^i(t)$, $p_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Estas cantidades conmutan entre sí, es decir, $q^i(t)p_j(t) = p_j(t)q^i(t)$. Pero, en mecánica cuántica, la situación es completamente diferente. Los operadores Q_{op} y P_{op} correspondientes a la posición clásica observable del vector q y el vector de momento p . Estos operadores no conmutan entre sí, es decir, $QP \neq PQ$.

Y Cao [9] plantea que podría pensarse que la mecánica cuántica no sea una buena teoría al principio pero, luego enfatiza que *la no conmutabilidad de los operadores está estrechamente relacionada con el principio de incertidumbre, es solo una distinción esencial entre la mecánica clásica y cuántica*. Cao [9] duda que las métricas definidas no positivas ds^2 sean la mejor naturaleza esencial en la teoría de la relatividad. Pero fueron desechadas por la teoría de Einstein.

Entonces ahora, se podría asumir que

$$ds^4 = ds_v^4 + ds_0^4, \quad (2.32)$$

donde se toma el exponente 4 porque es el menor entero par que está después del 2 y que ya permite tener una estructura no Riemanniana. A partir de esto, se puede obtener

$$ds^4 = g_{ijkl}dx^i dx^j dx^k dx^l, \quad i, j, k, l = 0, 1, 2, 3. \quad (2.33)$$

que definen una métrica de Finsler y que son el motivo de este trabajo de tesis y que son la base de las transformaciones de espacio-tiempo. A partir de este punto de vista físico, esto significa que podría existir una nueva simetría entre lo temporal

y lo espacial.

Cao [9] recuerda: *en su memoria de 1854, Riemann discute varias posibilidades con el fin que una variedad dimensional n pueda ser dotada por una métrica, y presta una particular atención a la métrica definida por la raíz cuadrada positiva de una forma diferencial cuadrática definitiva positiva. Además, los fundamentos de la geometría de Riemanniana están establecidos; sin embargo, también se sugiere que las raíz cuarta positiva de una forma diferencial de cuarto orden puede servir como función métrica (ver Rund, 1959; Introducción X)*¹.

Por otro lado, Cao también llama la atención a que *en su libro de 1977, Wolfgang Rindler establece: “Cuando se dé la distancia diferencial al cuadrado $d\sigma^2$ por una forma homogénea diferencial cuadrática en las coordenadas de superficie, como en (7.10)², decimos que $d\sigma^2$ es una métrica de Riemanniana, y que la superficie correspondiente es Riemanniana. Esto no es, por supuesto, una conclusión de que todas las métricas deben ser de esta forma: se puede definir, por ejemplo, una métrica no-Riemanniana $d\sigma^2 = \sqrt{dx^4 + dy^4}$ para algún espacio duodimensional, e investigar la geometría resultante. (Tales métricas más generales dan lugar a la geometría ‘Finsler’.)” (ver W. Rindler, 1997).*

En este capítulo se ha discutido la definición de simultaneidad, orden temporal y la cadena de causalidad para poder establecer la teoría de la transformación de coordenadas en una geometría de Finsler. Con esto ya es posible estudiar cómo afecta la estructura de la geometría de Finsler a la relatividad especial y general.

¹Nota del autor: ver referencia [25]

²Nota del autor: este número de ecuación corresponde al que fue dado por Rindler [24].

3. La Teoría Especial de Relatividad en el Espacio-Tiempo ds^4 de Finsler

La información presentada en este capítulo sirvió de base para la elaboración de un artículo [11] que, al momento de escribir este informe, ya ha sido aceptado para publicación en la Revista de la Escuela de Física de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras.

En este trabajo se replica el análisis relativista convencional de la métrica riemanniana usando una métrica de Finsler para mostrar la representación del tensor electromagnético en ese espacio-tiempo. Después se define el polinomio característico de cuarto grado para mostrar el cálculo de un invariante bajo transformaciones Finsler-Lorentz. Este invariante se presenta in the last sección of this captulo.

3.1. Grupo de Transformación de Espacio-Tiempo en la Métrica ds^4 de Finsler

Si se toma $v = v_x$, entonces se tiene que entre cualquiera de los dos sistemas inerciales

$$c^4 dt^4 + dx^4 - 2c^2 dt^2 dx^2 + dy^4 + dz^4 + 2dy^2 dz^2 = c^4 dt'^4 + dx'^4 - 2c^2 dt'^2 dx'^2 + dy'^4 + dz'^4 + 2dy'^2 dz'^2, \quad (3.1)$$

tomando en cuenta que

$$g_{ijkf} = \begin{cases} 1, & i = j = k = f, \\ +2, & i = j \neq k = f, \quad i, k \neq 0, \\ -2, & i = j \neq k = f, \quad i \text{ o } k = 0, \\ 0, & \text{para todos los otros casos.} \end{cases}$$

A partir de la ecuación (3.1) se pueden obtener las transformaciones

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad (3.2)$$

donde $\beta = v/c$. Estas son las transformaciones del espacio-tiempo. Todas las transformaciones de espacio-tiempo forman un grupo, que se llama el grupo de transformación del espacio-tiempo y el grupo de transformaciones de Lorentz sólo es un subgrupo de este grupo. Las transformaciones inversas son de la forma

$$\pm t' = \frac{t - \beta \frac{x}{c}}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}, \quad \pm x' = \frac{x - vt}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (3.3)$$

También se puede usar la *velocidad dual* definida mediante $v_1 \equiv c^2/v$ para representar las transformaciones de espacio-tiempo. De hecho, las transformaciones (3.2) pueden reescribirse como

$$t = \frac{\beta_1 t' + \frac{x'}{c}}{\sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}}, \quad x = \frac{\beta_1 x' + ct'}{\sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad (3.4)$$

y sus transformaciones inversas son de la forma

$$\pm t' = \frac{\beta_1 t - \frac{x}{c}}{\sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}}, \quad \pm x' = \frac{\beta_1 x - ct}{\sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}}, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (3.5)$$

donde $\beta_1 = \frac{v_1}{c} = \frac{c}{v} = \frac{1}{\beta}$.

Es muy interesante que todas las transformaciones de espacio-tiempo se aplican tanto a las velocidades sublumínicas (es decir, $\beta < 1$ o $\beta_1 > 1$) como a las velocidades superlumínicas (es decir, $\beta > 1$ o $\beta_1 < 1$). Ya sea que la velocidad sea superlumínica o sublumínica, las transformaciones se caracterizan por un signo menos o más de sus transformaciones inversas, respectivamente.

Por último, todas las transformaciones de espacio-tiempo tienen la misma singularidad que la transformación Lorentz cuando $\beta = \beta_1 = 1$.

3.2. Cinemática en la Invariante ds^4

El invariante ds^4 cumple con las condiciones de una métrica de Finsler que se describe anteriormente en el capítulo 1.

Ahora se debe considerar la pregunta de cómo se comportan la medida de

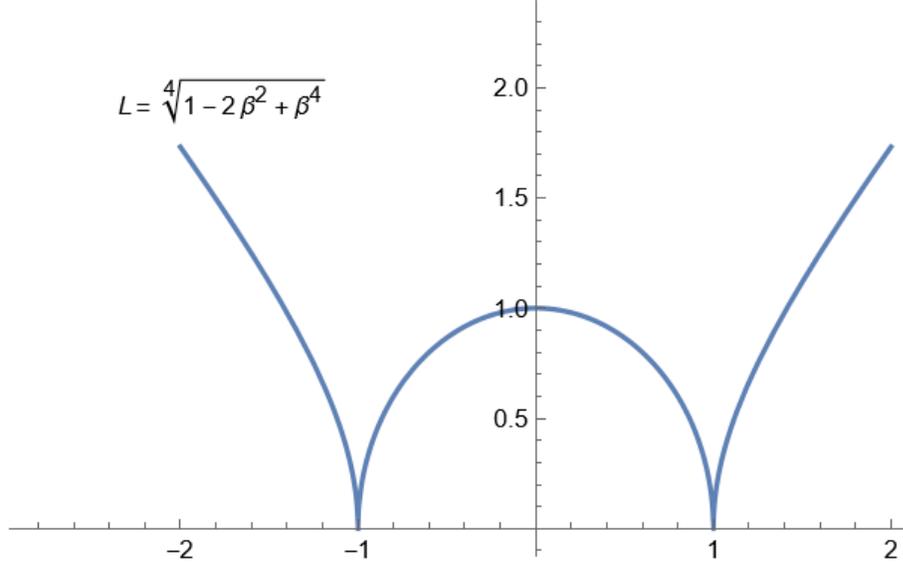


Figura 3.1. Dependencia de la medida de longitud L respecto de β . Fuente: elaboración propia.

longitud y el incremento de tiempo. Para averiguar la longitud de un cuerpo en movimiento, se debe trazar simultáneamente las coordenadas de sus extremos en un sistema fijo. A partir de las ecuaciones (3.2) y (3.4), una expresión para la longitud de una escala en movimiento $\Delta x'$, medida por un observador fijo, resulta así:

$$\pm \Delta x' = \Delta x \sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}, \quad (3.6)$$

y

$$\pm \Delta x' = c\Delta t \sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}, \quad (3.7)$$

revisar. Einstein [10] estableció que: *para $v = c$ en todos los objetos en movimiento –vistos desde el sistema ‘estacionario’– encogidos figuras planas. Para velocidades mayores que la de la luz, nuestras deliberaciones pierden sentido.* Sin embargo, la transformación (3.6) puede aplicarse al caso de velocidades mayores que la velocidad de la luz. La figura 3.1 muestra una relación entre la medida de longitud L y la velocidad β , hay que notar que L ahora puede ser cero cuando $\beta = \pm 1$.

Se tiene que Δt es el incremento de tiempo cuando el reloj está en reposo con respecto al sistema estacionario y $\Delta\tau$ es el incremento de tiempo cuando el reloj está en reposo con respecto al sistema en movimiento. Entonces

$$\pm \Delta\tau = \Delta t \sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}, \quad (3.8)$$

y

$$\pm\Delta\tau = \frac{\Delta x}{c} \sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}, \quad (3.9)$$

Diferenciando (3.3) o (3.5) y dividiendo dx' por dt' , se obtiene

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x = \frac{dx/dt - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}. \quad (3.10)$$

Se debe notar que $dy' = dy$, $dz' = dz$, así que se tiene una transformación de las componentes de velocidad perpendiculares a v :

$$\frac{dy'}{dt'} = v'_y = \frac{v_y \sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}, \quad \frac{dz'}{dt'} = v'_z = \frac{v_z \sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}, \quad (3.11)$$

donde

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (3.12)$$

Ahora es importante saber cómo se relacionan las velocidades mediante la operación de composición ya que el Grupo de Poincaré se define sobre esta operación. Analizando las ecuaciones (3.8)-(3.11) podemos identificar los siguientes casos [9]:

1. La composición de dos velocidades sublumínicas resulta en una velocidad sublumínica como se puede ver en el panel de la izquierda de la figura 3.2.
2. La composición de una velocidad superlumínica y una velocidad sublumínica resulta en una velocidad superlumínica como se puede ver en el panel central de la figura 3.2.
3. La composición de dos velocidades superlumínicas resulta en una velocidad sublumínica como puede verse en el panel de la derecha de la figura 3.2, poniendo atención únicamente a los rangos $|v_x| > 1$.
4. La composición de la velocidad de la luz con otra velocidad, sublumínica o superlumínica, resulta en la velocidad de la luz, esto de acuerdo con los postulados de la relatividad especial de Einstein.

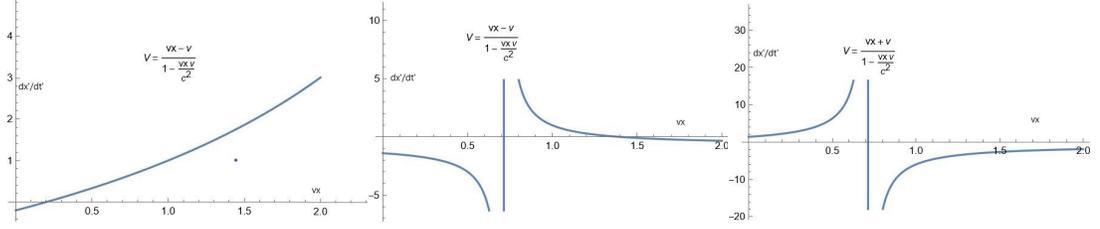


Figura 3.2. Ejemplos de composición de velocidades según la ecuación (3.10). Fuente: elaboración propia.

Existe la naturaleza esencial del grupo de transformación de espacio-tiempo. La transformación usual de Lorentz es un único sub grupo del grupo de transformación de espacio-tiempo.

Es necesario señalar que si $1 - \frac{vv_x}{c^2} = 0$, es decir,

$$v_x = \frac{v}{c^2}, \quad (3.13)$$

entonces $v_x \rightarrow \infty$. Esto implica que si dos velocidades son duales entre sí y en direcciones opuestas, entonces su velocidad de composición es una velocidad infinitamente mayor. Esto supone que esto puede llegar a ser una forma efectiva para realizar una evaluación de una partícula con la velocidad superlumínica [9].

3.3. Dinámica en la Invariante ds^4

En un espacio de Finsler el Lagrangiano para una partícula libre de masa m es

$$L = -mc^2 \sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}. \quad (3.14)$$

El momentum, la energía y la masa de la partícula tienen estas formas

$$p = \frac{mv}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}, \quad M = \frac{m}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}}. \quad (3.15)$$

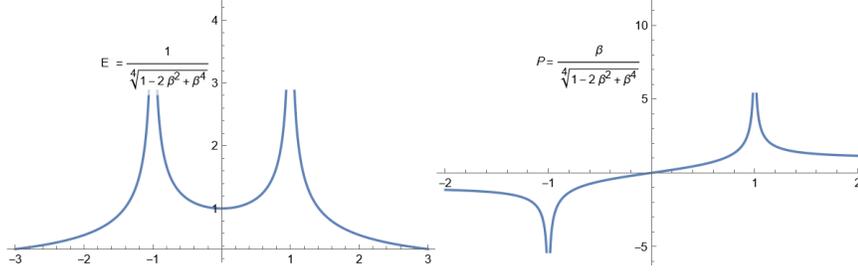


Figura 3.3. Diagrama $E - \beta$ (izquierda) y diagrama $P - \beta$ (derecha). Fuente: elaboración propia.

Estos también podrían representarse por la velocidad dual v_1

$$p(v) = \frac{mv}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}} = \frac{mc}{\sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}} = \frac{1}{c}E(v_1), \quad (3.16)$$

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}} = \frac{mv_1c}{\sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}} = cp(v_1), \quad (3.17)$$

$$M(v) = \frac{m}{\sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4}} = \frac{\beta_1 m}{\sqrt[4]{1 - 2\beta_1^2 + \beta_1^4}} = \beta_1 M(v_1). \quad (3.18)$$

Einstein estableció: *en consecuencia, cuando $v = c$, E se convierte infinito, las velocidades mayores que la de la luz no tienen, como sucede en nuestros resultados anteriores, ninguna posibilidad de existencia.* Pero, la ecuación (3.7) puede aplicarse también en el caso de velocidades mayores que la de la luz. El panel izquierdo de la figura 3.3 muestra la relación entre la energía de una partícula en movimiento y su velocidad; y el panel derecho de la figura 3.3 da la relación entre el momentum de una partícula en movimiento y su velocidad.

Si se pone atención a las ecuaciones (3.16) y (3.17) se nota que en la representación de v_1 la energía y el momentum se intercambian. Entonces, usando la ecuación (3.15) (o las ecuaciones (3.16) y (3.17)), se puede obtener la siguiente relación entre el momentum y la energía de una partícula libre

$$p(v) = \frac{v}{c^2}E(v), \quad \text{o} \quad p(v_1) = \frac{v_1}{c^2}E(v_1), \quad (3.19)$$

donde esta relación se mantiene de la misma forma que en la teoría especial de la relatividad. Sin embargo, sí se obtiene una nueva relación que permite identificar un nuevo invariante

$$E^4 + c^4 p^4 - 2c^2 p^2 E^2 = m^4 c^8, \quad (3.20)$$

esta relación es correcta para ambas representaciones de las velocidades v' y v_1 . Es

una nueva relación del invariante ds^4 .

3.4. Una Partícula Cargada en un Campo Electromagnético en el Espacio ds^4 de Finsler

Ahora se puede empezar con las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada en un campo electromagnético, con un campo gauge A , un flujo de campo Φ , un campo eléctrico E_c y un campo eléctrico H_c . Su lagrangiano es

$$L = -mc^2 \sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4} + \frac{e}{c}Av - e\Phi. \quad (3.21)$$

La derivada $\frac{\partial L}{\partial v}$ es el momentum generalizado de la partícula que es

$$p_e = -mv \sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4} + \frac{e}{c}A = p + \frac{e}{c}A, \quad (3.22)$$

donde p denota el momentum en ausencia de un campo.

A partir del lagrangiano se puede encontrar la función hamiltoniana para una partícula en un campo de la fórmula general

$$H = mc^2 \sqrt[4]{1 - 2\beta^2 + \beta^4} + e\Phi. \quad (3.23)$$

Sin embargo, el hamiltoniano no debe expresarse en términos de velocidad, sino en términos del momentum generalizado de la partícula. Para las ecuaciones (3.2) y (3.3), se puede obtener la relación

$$\left[\left(\frac{H - e\Phi}{c} \right)^2 - \left(p - \frac{e}{c}A \right)^2 \right]^2 = m^4 c^4. \quad (3.24)$$

Ahora se escribe la ecuación Hamilton-Jacobi para una partícula en un campo electromagnético en el espacio-tiempo de Finsler. Se obtiene al reemplazar, en la ecuación para el hamiltoniano, P por $\partial S/\partial r$, y H por $-\partial S/\partial t$. Así se consigue a través de la ecuación (3.24):

$$\left[\left(\nabla S - \frac{e}{c}A \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi \right)^2 \right]^2 - m^4 c^4 = 0. \quad (3.25)$$

Ahora se debe considerar la ecuación de movimiento de una carga en un campo

electromagnético. También podría escribirse por el lagrangiano de la ecuación (3.21) como

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt[4]{1-2\beta^2+\beta^4}} = eE_e + \frac{e}{c} v \times H_e, \quad (3.26)$$

donde

$$E_e = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \cdot \Phi, \quad H_e = \nabla \times A. \quad (3.27)$$

Es fácil verificar $dE_e = v dP$, es decir,

$$v \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt[4]{1-2\beta^2+\beta^4}} = mc^2 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt[4]{1-2\beta^2+\beta^4}}. \quad (3.28)$$

Entonces a partir de (3.26), se tiene

$$\frac{dE}{dt} = eE_e v. \quad (3.29)$$

Se integra (3.29) para obtener

$$\frac{mc^2}{\sqrt[4]{1-2\beta^2+\beta^4}} - \frac{mc^2}{\sqrt[4]{1-\beta_0^2+\beta_0^4}} = eU, \quad (3.30)$$

donde

$$\beta_0 = \frac{v_0}{c}, \quad U = \int_{r_0}^r E_e dr. \quad (3.31)$$

A partir de (3.26) y (3.29), si se escribe en términos de componentes, es fácil obtener las ecuaciones de transformación de espacio-tiempo para las componentes de campo, y se puede obtener la ecuación de transformación de campo

$$\left\{ \begin{array}{l} H'_x = H_x, \quad E'_x = E_x \\ H'_y = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt[4]{1-2\beta^2+\beta^4}}, \quad E'_y = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt[4]{1-2\beta^2+\beta^4}} \\ H'_z = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt[4]{1-2\beta^2+\beta^4}}, \quad E'_z = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt[4]{1-2\beta^2+\beta^4}} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

También se puede usar la velocidad dual v_1 para representar la ecuación de transformación de campo

$$\left\{ \begin{array}{l} H'_x = H_x, \quad E'_x = E_x \\ H'_y = \frac{\beta_1 H_y + E_z}{\sqrt[4]{1-2\beta_1^2+\beta_1^4}}, \quad E'_y = \frac{\beta_1 E_y - H_z}{\sqrt[4]{1-2\beta_1^2+\beta_1^4}} \\ H'_z = \frac{\beta_1 H_z - E_y}{\sqrt[4]{1-2\beta_1^2+\beta_1^4}}, \quad E'_z = \frac{\beta_1 E_z + H_y}{\sqrt[4]{1-2\beta_1^2+\beta_1^4}} \end{array} \right. \quad (3.33)$$

El tensor electromagnético en este caso tiene la misma forma antisimétrica

$$(F^{ab}) = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Se omite la transición a cuadvectores pero de forma clara y detallada se puede consultar en Aceña (2017) [1]. El polinomio característico que se calculó usando Wolfram Mathematica es

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^2 cB_x^2 + \lambda^2 cB_y^2 + \lambda^2 cB_z^2 + \lambda^2 cE_x^2 - \lambda^2 cE_y^2 + cB_x^2 E_x^2 - 2cB_x cB_y E_x E_y \\ - 2cB_x cB_z E_x E_z - 2cB_y cB_z E_y E_z - \lambda^2 cE_z^2 - cB_z^2 E_z^2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

Que es un polinomio de cuarto grado, sin monomios de tercer grado. Queda ahora averiguar cual es la estructura algebraica de este tensor. Un invariante se obtendrá como $B_e^4 + E_e^4 - 2B_e^2 E_e^2 = constante$.

Este resultado fue publicado en un artículo [11] y permite concluir que, replicando el análisis relativista convencional pero usando la métrica de Finsler se puede obtener el polinomio característico para mostrar el cálculo de un invariante bajo transformaciones de Finsler-Lorentz.

El resultado del cálculo de este invariante es un preámbulo a la búsqueda de dichas simetrías para algunos sistemas simples. Además, es una invitación a explorar más propiedades de superficies que sean independientes del espacio-tiempo ya que actualmente hay mucho interés en cómo el espacio-tiempo determina la emergencia de distintos fenómenos.

4. Aspectos en la Teoría de la Relatividad General

En el presente capítulo se trabaja básicamente la ecuación de Einstein en el vacío utilizando las métricas de Finsler. Siguiendo este procedimiento se llega a la métrica de Schwarzschild como consecuencia del teorema de Birkhoff. Luego se plantean las geodésicas como idea de Friedmann-Lemaître.

La métrica de Friedmann-Lamître-Robertson-Walker o modelo FLRW es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general. Por último, mediante un programa de manipulación algebraica se encuentran las curvaturas de la métrica de Schwarzschild. El programa sigue el procedimiento de Berwald [2, 3], que se adjunta en el anexo A de la página 51 con las correcciones presentadas por Youssef y Elgendi [30].

4.1. Ecuaciones de Campo

Para verificar si los resultados de la Relatividad General se mantienen válidos en la geometría generalizada de los espacios de Finsler, es esencial desarrollar ecuaciones de campo gravitacional adaptadas a esta geometría. Una forma de verificar esta validez fue presentada por Rutz [26] y es el método que se sigue a continuación. Por supuesto, así como en cualquier generalización teórica, esto debe realizarse con el objeto de reproducir las mismas predicciones –al menos las que han sido verificadas por medio de experimentos– de la teoría anterior, dentro de sus límites de validez. Aquí, es crucial reproducir al menos los resultados observables de la Relatividad General cuando se utiliza la métrica de Riemann, el marco matemático original de esta teoría. Sin embargo, más allá de reproducir estos resultados, se busca generalizar la Relatividad evitando la introducción de nuevos principios o hipótesis, a excepción de la expansión de su geometría subyacente.

Es posible derivar un conjunto ampliado de ecuaciones de campo mediante una analogía con la Relatividad General, similar a la comparación que hizo Pirani [19] entre esta teoría y la teoría gravitacional de Newton. En la teoría de Newton, las

ecuaciones de movimiento de dos partículas de masa unitaria y con coordenadas $x^i(t)$ y $x^i(t) + \xi^i(t)$ respectivamente que se mueven en un campo gravitacional determinado por un potencial $\phi(x^i)$, se dan por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -n^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}, \\ \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -n^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} - \xi^k \eta^{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^k}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

donde η^{ij} es la métrica del espacio plano ($i, j, \dots = 1, 2, 3$) en las coordenadas cartesianas, las derivadas de ϕ siendo evaluadas en el punto x^i y los términos de segundo orden en ξ^i siendo dejados a un lado. Al sustraer estas ecuaciones se descubre que el vector de separación ξ^i entre las dos partículas vecinas, que da una medida de cuánto se desvía una trayectoria de la otra, cumple con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + H_k^i \xi^k = 0, \quad (4.2)$$

donde

$$H_k^i = \eta^{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^k}. \quad (4.3)$$

Ya que la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \phi = \eta^{ij} \partial^2 \phi / \partial x^i \partial x^j = 0$, que es válida fuera de la teoría Newtoniana, supone la condición que por la simetría de H_k^i tenga traza nula

$$H_k^k = 0. \quad (4.4)$$

En la Relatividad General, se representa una situación análoga por la ecuación de desviación geodésica

$$\frac{D^2 \xi^i}{Ds^2} + H_k^i \xi^k = 0, \quad (4.5)$$

donde ahora es

$$H_k^i = R_{jlk}^i \dot{x}^j \dot{x}^l, \quad (4.6)$$

siendo \dot{x}^i el vector tangente definido en cada punto de la geodésico $\dot{x}^i(s)$, R_{jlk}^i el tensor de curvatura de Riemann y $D^2 \xi^i / Ds^2$ la segunda derivada covariante con respecto al elemento del arco ds del vector de desviación ξ^i entre las dos geodésicas vecinas, lo que en esta teoría representa las trayectorias de las partículas de prueba (así como los rayos de luz) presentes sólo a la gravedad. Los índices ahora sólo corren de 1 a 4. Las ecuaciones de campo en el vacío de Einstein $R_{jl} = 0$, donde $R_{jl} = R_{jli}^i$ es el tensor de Ricci, también implican, así como la ecuación de Laplace en el caso

newtoniano, que

$$H_i^i = 0. \quad (4.7)$$

En los espacios de Finsler, la ecuación de desviación geodésica

$$\frac{\delta^2 \xi^i}{\delta s^2} + K_k^i \xi^k = 0, \quad (4.8)$$

puede estar escrita del mismo modo que

$$\frac{\delta^2 \xi^i}{\delta s^2} + H_k^i \xi^k = 0, \quad (4.9)$$

donde $\delta/\delta s$ es la derivada covariante δ con respecto al elemento del arco ds , ξ^i es de nuevo el vector de desviación entre las geodésicas vecinas, pero ahora el tensor simétrico H_k^i se define a partir del tensor de curvatura de Finsler K_{jlk}^i como

$$H_k^i = K_{jlk}^i \dot{x}^j \dot{x}^l. \quad (4.10)$$

El tensor de desviación de Finsler H_k^i puede también darse explícitamente en términos del tensor métrico y sus derivadas [8]

$$H_k^i = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial \dot{x}^k} \dot{x}^j + 2 \frac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} G^j - \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial G^j}{\partial \dot{x}^k}, \quad (4.11)$$

donde los G^i se dan por medio de

$$G^l = \frac{1}{2} \gamma_{jk}^l \dot{x}^j \dot{x}^k. \quad (4.12)$$

Usando una analogía parecida a la aplicada entre la teoría newtoniana y la Relatividad General, la generalización propuesta para las ecuaciones de campo en el vacío de Einstein sugiere que el tensor de desviación de Finsler H_k^i sea de traza nula

$$H = 0, \quad (4.13)$$

donde, obviamente, $H = H_i^i$.

Aún se puede definir un tensor parecido al Ricci en espacios de Finsler como

$$K_{jl} = K_{jli}^i, \quad (4.14)$$

en términos de los cuales se puede escribir

$$H = K_{jl}\dot{x}^j\dot{x}^l. \quad (4.15)$$

Al expresar H de esta forma, se vuelve más fácil ver que la ecuación propuesta (4.13) reproduzca las ecuaciones de campo en el vacío de Einstein si el espacio es de Riemann, debido a que en este caso el tensor (4.14) realmente se reduce al tensor de Ricci. Entonces, como el último no depende de las coordenadas direccionales \dot{x}^i , la ecuación (4.13) se divide naturalmente en un sistema de ecuaciones diferenciales separadas, a saber, $K_{jl} = R_{jl} = 0$. Pero dos puntos importantes deben realizarse con respecto a la expresión de la ecuación de campo (4.13) por medio de (4.15). Primero, el tensor de curvatura de Finsler K_{jlk}^i no tiene todas las propiedades simétricas que tiene el tensor de Riemann y, consecuentemente, a diferencia del tensor de Riemann-Ricci, (4.14) no está definido de forma única (aparte de una elección de signo) como la segunda contracción de rango del tensor de curvatura K_{jlk}^i . En segundo lugar, mientras que si el espacio es de Riemann la ecuación (4.13) implica que $K_{jl} = 0$, lo mismo no se justifica en absoluto en el caso general de Finsler. Por consiguiente, la mera *reescritura* de las ecuaciones de campo en el vacío de Einstein basadas solamente en las analogías entre los tensores de curvatura K_{jlk}^i y R_{jlk}^i , o sea que requieren que $K_{jl} = 0$ en general, no solo es menos general que (4.13) sino también incluso más difícil de resolver. De hecho, $K_{jl} = 0$ es un sistema de varias ecuaciones diferenciales para las funciones de x^i y \dot{x}^i , mientras (4.13) es una ecuación diferencial simple en estas variables.

4.2. Una Solución no Riemanniana

A continuación se analiza la generalización de las ecuaciones de campo en el vacío de Einstein propuestas de forma tensorial en la sección anterior. Para ello algunas sustituciones son necesarias y también se invoca el teorema de Birkhoff.

En esta sección se sigue la idea de Rutz [26] que trabajó una solución a las ecuaciones de campo de Einstein usando teoría de perturbaciones y apoyándose de un software para resolverlos. Sin embargo, aquí sólo se conserva el resultado principal que es la ecuación

$$ds^2 = gdr^2 + r^2d\Omega^2 - hdt^2, \quad (4.16)$$

donde

$$d\Omega = \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2}, \quad (4.17)$$

Del libro de Stephani y Kramer [27] se han tomado los argumentos direccionales de la métrica esféricamente simétrica de Finsler a dada, como sucede en [26], por

$$\begin{cases} \alpha = rd\Omega/dt \\ \beta = dr/dt. \end{cases} \quad (4.18)$$

Rutz [26] propone que un posible término de corrección, $\varepsilon h_2(r, t)\beta dt^2 = \varepsilon h_2(r, t)drdt$, podría ser realmente de Riemann y siempre se puede realizar una elección apropiada de coordenadas para asegurar que sea cero, así como para hacer que el coeficiente del término $d\Omega^2$ en (4.16) sea dado como r^2 en el orden de cero de la aproximación [15]. Esto es, por supuesto, un proceso común cuando se considera la métrica esféricamente simétrica y 4-dimensional de Riemann. Por cierto, nótese que, para simplificar, no se está considerando en este primer intento en una solución no-Riemannana, cualquier corrección al término $d\Omega^2$ de (4.16). Los posibles términos cruzados en $drdt$, $drd\Omega$ y $d\Omega dt$ fueron incorporados en el término dt^2 por medio del proceso presentado por McCarthy y Rutz[17].

Además se deja de lado cualquier segunda o mayor potencia de ε a través de los cálculos; por consiguiente, como H es una ecuación lineal diferencial de segundo orden, una vez se tenga

$$\begin{cases} g_0(r, t) = 1/h_0, \\ h_0(r, t) = 1 - \frac{2m}{r}, \end{cases} \quad (4.19)$$

como en la solución de Schwarzschild[27]. Efectivamente no hay pérdida de generalidad al hacer eso, toda vez que el teorema de Birkhoff garantice que cualquier solución de orden de cero (que es de Riemann) a ecuaciones de campo en el vacío de Einstein y por consiguiente a ecuación (4.13) se puede transformar en una métrica de Schwarzschild por medio de un cambio de coordenadas [27].

Incluso después que todas estas simplificaciones se han considerado, la función de métrica (4.13) conduce a una expresión para H , dando un total de 594 términos [26], siendo, por consiguiente, muy extenso para presentarse de forma conveniente aquí. Pero se puede representar esquemáticamente como

$$H = \frac{\varepsilon P}{Q_0(1 + \varepsilon Q_1)}, \quad (4.20)$$

donde P , Q_0 y Q_1 son expresiones polinomiales en las funciones desconocidas g_1 , g_2 , h_1 , sus derivadas de primer y segundo orden y sus coordenadas x^i , dx^i . Debido que se está considerando que ε es pequeño se debe expresar H , por medio del teorema

binomial, como

$$H = \frac{\varepsilon P(1 - \varepsilon Q_1)}{Q_0} = \frac{\varepsilon P}{Q_0}, \quad (4.21)$$

lo que reduce su longitud a 554 términos. La expresión en el denominador, Q_0 , se da por

$$Q_0 = 4(d\theta + \sin^2 \theta d\theta^2)(2m - r)^3 r^7 dt^3,$$

y por consiguiente, se debe tener $r \neq 2m$ (lo que ya conduce a una singularidad en el caso de Schwarzschild) y $r \neq 0$ (lo que es una singularidad en coordenadas esféricas, en cualquier caso), aparte de tener $d\Omega \neq 0$, $dt \neq 0$.

Además, debido que las coordenadas direccionales dx^i no ocurren en las funciones g_1 , g_2 , h_1 , que deben determinarse, y debido que estas son coordenadas independientes que pueden darse arbitrariamente, se tiene que el polinomio P en el numerador de (4.21) se desvanece sí y solo sí cada uno de sus coeficientes, independientes de dx^i es cero. Estos coeficientes conducirán a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para las funciones g_1 , g_2 , h_1 , lo que es equivalente a $H = 0$ para la métrica $ds^2 = gdr^2 + r^2 d\Omega^2 - hdt^2$. Por ejemplo, si se consideran sólo los términos en $d\theta$ y $d\phi$ (por ejemplo, $dr = 0$) en el numerador de (4.21), se reducirá a

$$-4\varepsilon(d\theta^2 + \sin^2 \theta \phi^2)^{7/2} (2m - r)^4 r^9 g_1 = 0,$$

lo que ya implica que $g_1 = 0$. Si la expresión de arriba no fuera tan simple, se procedería a quitarla de la expresión completa para H y a desglosar el residuo. Pero es más simple poner $g_1 = 0$ en (4.21), y así, reducir la longitud de P a 310 términos. De forma similar, luego se obtienen algunos pasos como este,

$$-12\varepsilon(d\theta^2 + \sin^2 \theta \phi^2)^2 (2m - 1)^4 r^4 g_2 = 0,$$

lo que implica que $g_2 = 0$ también. Una vez se hayan considerado estos dos resultados en (4.21), P se reduce a solo 45 términos y se puede obtener finalmente un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para la función sobrante h_1 . Ignorando

los factores generales dados por las potencias de dx^i , $(2m - r)$ o r , se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial r^2} + 5 \frac{\partial h_1}{\partial r} \right) (2m - r)r - (4m + r)h_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} r^4 - \frac{\partial h_1}{\partial r} (2m - r)mr + (4m - r)mh_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 h_1}{\partial r \partial t} r - \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 h_1}{\partial r^2} (2m - r)^2 r^2 + \frac{\partial h_1}{\partial r} (11m - 4r)(2m - r)r + (20m^2 - 11mr + 2r^2)h_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 h_1}{\partial r \partial t} (2m - r)r + \frac{\partial h_1}{\partial t} (7m - 2r) = 0. \end{array} \right.$$

De donde las ecuaciones tercera y quinta son fácilmente integrables y ya implican que h_1 es una función sólo de la coordenada r

$$h_1 = \frac{B(r) - A(r)(2m - r)}{(9m - 3r)},$$

donde $A(r)$ y $B(r)$ son funciones arbitrarias de r que vienen de las integrales.

Por consiguiente, la segunda ecuación da que

$$\frac{dh_1}{dr} = \frac{-(4m - r)}{r(2m - r)} h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{(2m - r)}{r^2},$$

que satisface las ecuaciones primera y cuarta de forma idéntica. Por consiguiente, la primera perturbación de Finsler de la métrica de Schwarzschild, que es una solución para la generalización propuesta de las ecuaciones de campo en el vacío de Einstein, se lee

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(1 - 2m/r)} + r^2 d\Omega^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 - \varepsilon \frac{d\Omega}{dt} \right) dt^2, \quad (4.22)$$

que no es de Riemann, ya que el término en $d\Omega dt$ no es cuadrático en dx^i . Nótese que el término de corrección de Finsler permanece cuando $m = 0$ y no se desvanece cuando $r \rightarrow \infty$. Este ejemplo demuestra que la ecuación de campo en el vacío (4.13) admite las soluciones que no son de Riemann.

4.3. Consecuencias Físicas

En esta parte, se examinan las implicaciones físicas de una solución distinta a la de Riemann (4.22), especialmente en lo que respecta a la llamada prueba clásica, comparándola con los resultados de la Relatividad General. El procedimiento es completamente análogo al que se usa habitualmente en la teoría previa. La ecuación

geodésica $\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$ para la métrica (4.22) se transforma en

$$\ddot{r} + \frac{m}{r(2m-r)} \dot{r}^2 + (2m-r) \left(\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{m(2m-r)}{r^3} \dot{t}^2 - \varepsilon \frac{m(2m-r)}{r^3} \dot{t} \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} &= 0, \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} &= 0, \\ \ddot{t} - \frac{2m}{r(2m-r)} \dot{r} \dot{t} - \varepsilon \frac{(3m-r)}{r(2m-r)} \dot{r} \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2} &= 0 \end{aligned}$$

donde aquí se usa la notación de punto, es decir $\cdot \equiv d/d\tau$ y $d\tau^2 = -ds^2$.

Uno siempre puede satisfacer la condición inicial $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta} = 0$ por una rotación adecuada del sistema coordinado, y la segunda ecuación en el sistema anterior, entonces implica que $\ddot{\theta}$ también desaparece para que la órbita permanezca en el plano $\theta = \pi/2$. Por consiguiente, se puede proceder de la simplificación lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-2m/r} \dot{r}^2 + r \dot{\phi}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{\phi} \dot{t} \right], \quad (4.23)$$

ya que ϕ y t son coordenadas cíclicas, se sostienen dos leyes de conservación, a saber

$$r^2 \dot{\phi} + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = A, \quad (4.24)$$

y

$$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{\phi} = B. \quad (4.25)$$

Pero, recordando que se están dejando de lado a las segundas y superiores potencias de ε , también se podría escribir, por sustitución una ecuación dentro de la otra,

$$\dot{\phi} = \frac{A}{r^2} + \frac{\varepsilon B}{2r^2},$$

y

$$\dot{t} = \frac{-B}{1-2m/r} + \frac{\varepsilon A}{2r^2}.$$

En el lugar de la tercera ecuación de movimiento, se usa la ecuación definida

$$\frac{1}{1 - 2m/r} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{\phi} \dot{t} = -1, \quad (4.26)$$

para el tiempo propio τ , el cual, como las leyes de conservación de arriba, tiene la forma de la primera integral de la ecuación de movimiento. Para obtener las órbitas $r = r(\phi)$ se reemplaza la variable τ por ϕ y se simplifica la ecuación por la sustitución $u = r^{-1}$. Poniendo

$$\dot{\phi} = Au^2 + \frac{\varepsilon}{2} Bu^2, \quad \dot{t} = \frac{-B}{(1 - 2mu)} + \frac{\varepsilon}{2} Au^2, \quad \dot{r} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = -Au' - \frac{\varepsilon}{2} Bu',$$

en (4.26), se tiene, hasta el primer orden en ε ,

$$u'^{\textcircled{a}} + u^2(1 - 2mu) - \left(\frac{B}{A}\right)^2 + \varepsilon \frac{B}{A} [u'^2 + u^2(1 - 2mu)] = \frac{-(1 - 2mu)}{A^2}, \quad (4.27)$$

donde $u' \equiv \frac{du}{d\phi}$. Si se diferencia (4.27) se obtiene

$$u'' + u = \frac{m}{A^2} + 3mu^2 - \varepsilon \frac{B}{A} (u'' + u - 3mu^2). \quad (4.28)$$

El último término en el lado derecho de (4.28) está ausente en la Relatividad General, mientras que en la Teoría Newtoniana solamente se tiene la primera:

$$u''_0 + u_0 = \frac{m}{A^2} \implies u_0 = \frac{m}{A^2} (1 + \sigma \cos \phi), \quad (4.29)$$

donde σ es la excentricidad de la elipse. Así como se sabe, una solución aproximada a la ecuación relativista se puede obtener resolviendo

$$u''_1 + u_1 = \frac{m}{A^2} + 3mu_0^2 \implies u_1 = u_0 + \frac{3m^3}{A^4} \left[1 + \sigma \phi \sin \phi + \sigma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) \right], \quad (4.30)$$

la cual, ignorando correcciones constantes o periódicas, lleva a

$$u_1 = \frac{m}{A^2} \left[1 + \sigma \cos \left(1 - \frac{3m^2}{A^2} \right) \phi \right]. \quad (4.31)$$

El periodo de u_1 es más largo que 2π por la cantidad $\Delta\phi_p = 6\pi m^2/A^2$, la cual corresponde a la predicción relativista por el avance del perihelio de los planetas alrededor del Sol. Para Mercurio en particular, tenemos $\Delta\phi_p = 43.03''$ por siglos,

como se predijo por la Relatividad General y el valor observado de $\Delta\phi_p = 43.11'' \pm 0.45''$ por siglo [26]. Nótese que se puede escribir la ecuación de perturbación (4.28) simplemente como

$$\left(1 + \varepsilon \frac{B}{A}\right)(u'' + u - 3mu^2) = \frac{m}{A^2},$$

la cual, por el teorema de binomio, es hasta el primer orden en ε , equivalente a

$$u'' + u - 3mu^2 = \frac{m}{A^2} \left(1 - \varepsilon \frac{B}{A}\right). \quad (4.32)$$

Ahora, se puede obtener una solución aproximada si se soluciona similarmente

$$u'' + u_2 = \frac{m}{A^2} \left(1 - \varepsilon \frac{B}{A}\right) + 3 \frac{m^3}{A^4} (1 + \sigma \cos \phi)^2, \quad (4.33)$$

la cual, similarmente, admite como solución

$$u_2 = \frac{m}{A^2} \left(1 - \varepsilon \frac{B}{A}\right) (1 + \sigma \cos \phi) + 3 \frac{m^3}{A^4} \left[1 + \sigma \phi \sin \phi + \sigma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi\right)\right].$$

Si otra vez se considera solamente una corrección secular, entonces

$$u_2 = \frac{m}{A^2} \left(1 - \varepsilon \frac{B}{A}\right) \left\{1 + \sigma \cos \left[1 - 3 \frac{m^2}{A^2} \left(1 + \varepsilon \frac{B}{A}\right)\right] \phi\right\}, \quad (4.34)$$

donde otra vez se ha hecho uso del teorema de binomio. De (4.34) se puede ver que la perturbación introducida por el término de corrección de Finsler en (4.22) incrementa el valor predicho por el avance de perihelio por un factor de $\left(1 + \varepsilon \frac{B}{A}\right)$

$$\Delta\phi_p = \frac{6\pi m^2}{A^2} \left(1 + \varepsilon \frac{B}{A}\right), \quad (4.35)$$

y también incrementa el promedio de radio de la órbita por la misma cantidad

$$\langle r \rangle = \frac{1}{\langle u \rangle} = \frac{A^2}{m} \left(1 + \varepsilon \frac{B}{A}\right), \quad (4.36)$$

otra vez, por medio del teorema del binomio.

El avance del perihelio de Mercurio fue uno de los resultados más importantes y precisos de Relatividad General, y por ello se usa su margen de error experimental (bajo) para establecer un límite en el tamaño del parámetro de perturbación de

Finsler ε . De (4.35) se debe tener

$$\left| (\Delta\phi_p)GR^\varepsilon \frac{B}{A} \right| < \text{error experimental}, \quad (4.37)$$

donde $(\Delta\phi_p)GR$ es el resultado relativístico, ya que su diferencia del valor observado está dentro del margen de error. De (4.24) y (4.25) se tiene que el factor $\varepsilon B/A$ está dado, hasta el primer orden en ε , por

$$\varepsilon \frac{B}{A} = -\varepsilon \frac{(1 - 2m/r)\dot{t}}{r^2\dot{\phi}}, \quad (4.38)$$

lo cual significa que los valores de las constantes A y B pueden ser determinados de la Relatividad General (o tomando $\varepsilon = 0$). Ya que en el perihelio ($r = r_{min} \equiv (1 - \sigma)a$, donde a es el eje semimayor de la elipse) y en el afelio ($r = r_{max} \equiv (1 + \sigma)a$) se tiene $dr/d\phi = 0$, y por lo tanto $\dot{r} = dr/d\tau = dr/d\phi d\phi/d\tau = 0$, luego le sigue (4.24), (4.24) y (4.26) (con $\varepsilon = 0$) que

$$\frac{A^2}{r_{min}^2} - \frac{B^2}{(1 - 2m/r_{min})} = -1,$$

y

$$\frac{A^2}{r_{max}^2} - \frac{B^2}{(1 - 2m/r_{max})} = -1,$$

de donde se obtiene que

$$A = \sqrt{\frac{-(1 - 2m/r_{max}) - (1 - 2m/r_{min})}{\frac{(1 - 2m/r_{max})}{r_{max}^2} - \frac{(1 - 2m/r_{min})}{r_{min}^2}}}, \quad (4.39)$$

y

$$B = \sqrt{\frac{r_{max}^2 - r_{min}^2}{\frac{r_{max}^2}{(1 - 2m/r_{max})} - \frac{r_{min}^2}{(1 - 2m/r_{min})}}}. \quad (4.40)$$

Para Mercurio, $\sigma = 0.2056$, y $a = 57.91 \times 10^6$ km, mientras que para el Sol $m = \frac{MG}{c^2} = 1.475$ km en unidades geométricas [26] de esta manera se tiene $B = 1$ y $A = 9 \times 10^3$ km aproximadamente. Por lo tanto, (4.37) implica que $|\varepsilon| = |c\varepsilon| < 94.5$ km en unidades geométricas, o $|\varepsilon| < 3.15 \times 10^{-4}$ s. Con el mejoramiento progresivo en la exactitud experimental en estos datos, los efectos introducidos por el término de corrección de Finsler puede no ser observado aún.

En el caso de luz debemos tener una geodésica nulo, y por consiguiente debemos usar un parámetro afín μ en lugar de τ y la relación

$$\frac{1}{1 - 2m/r} \left(\frac{dr}{d\mu} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\mu} \right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\mu} \right)^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{d\phi}{d\mu} \frac{dt}{d\mu} = 0, \quad (4.41)$$

en el lugar de (4.26) . Cuando se llega al mismo enunciado para una elección adecuada de coordenadas del viaje de los rayos de luz en una superficie $\theta = \pi/2$ realizamos la ecuación diferencial

$$u'' + u = 3mu^2 - \varepsilon \frac{B}{A} (u'' + u - 3mu^2),$$

o

$$\left(1 + \varepsilon \frac{B}{A} \right) (u'' + u - 3mu^2) = 0, \quad (4.42)$$

o, ya que $(1 + \varepsilon B/A) \neq 0$, la misma ecuación diferencial como en la Relatividad General. Por ello, la luz viaja en la misma dirección a lo predicho por la métrica de Schwartzschild. Respecto a la frecuencia de la luz medida por observadores, en reposo en diferentes puntos de un campo gravitacional dado por (4.22), considere dos observadores en P_1 , a P_2 y déjelo ser un dispositivo automático mandando radiación de P_1 , a P_2 . La frecuencia de la radiación será inversamente proporcional al intervalo de tiempo entre las crestas de ola sucesivas, medidas en P_1 como

$$d\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_1}} dt_1, \quad (4.43)$$

debido que el observador allí está en reposo (así como $dr = d\Omega = 0$). De forma similar, en P_2 el segundo observador mide

$$d\tau_2 = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_2}} dt_2. \quad (4.44)$$

Así como (4.22) describe un campo estacionario gravitacional, el intervalo de tiempo $\int_c dt$ para un viaje de cresta de ola de P_1 a P_2 será constante [26], y por consiguiente, el tiempo entre la llegada a P_2 de crestas de ola sucesivas igualará el tiempo entre su partida en P_1 , $dt_1 = dt_2$, Y por consiguiente, las frecuencias medidas en cada punto poseerán relación inversa con los intervalos de tiempo entre las crestas sucesivas, a saber,

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{1 - 2m/r_2}{1 - 2m/r_1}} \equiv 1 + z, \quad (4.45)$$

donde z se refiere al desplazamiento hacia el rojo entre las frecuencias.

La perturbación introducida por el término de corrección de Finsler en (4.22) no afecta el comportamiento de la luz como se describe a través del *Test Clásico* de la Relatividad General. Por consiguiente, efectos como la *desviación de la luz* y el *desplazamiento hacia el rojo* son lo mismo, ya sea como resultado de (4.22) o de la métrica de Schwarzschild.

La forma mas natural y general de trabajar una métrica de 4 dimensiones esféricamente simétrica es :

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}r^2d\Omega^2 + g_{44}dt^2 + 2(g_{12}drrd\Omega + g_{14}drdt),$$

que fue la que se trabajó y nos indujo a la métrica (4.22) de Schwarzschild, a esta métrica se le calcularon las curvaturas mediante el procedimiento de Berwald y con ayuda de Maple que son las ecuaciones tensoriales que se replican en el anexo.

CONCLUSIONES

A partir de la discusión de este trabajo, se pueden mencionar las siguientes conclusiones:

1. La teoría especial de la relatividad no puede negar la posibilidad de la existencia de velocidad superlumínica.
2. La naturaleza esencial de la velocidad superlumínica es la relatividad del orden temporal. Si uno no sabe cómo distinguir los órdenes temporales, una partícula en movimiento con velocidad superlumínica puede ser tomada por una en movimiento con una velocidad sublumínica de una naturaleza inusual.
3. La teoría especial de relatividad puede discutirse en el espacio-tiempo de Finsler. La transformación de espacio–tiempo de la métrica ds^4 de Finsler contiene una nueva simetría entre lo temporal y lo espacial.
4. La longitud x intercambiará la posición con el incremento de tiempo t entre la representación de v' y la representación de v'_1 . El momentum (o energía) en la representación temporal (o espacial) será transformado en energía (o momentum) en la representación espacial (o temporal).
5. La diferencia entre la velocidad sublumínica y la superlumínica sería descrita como se menciona a continuación: una partícula con velocidad sublumínica tiene momentum, energía y masa en movimiento positivos, y una partícula con velocidad superlumínica, los tiene negativos.
6. Normalmente, se cree que los taquiones tienen una energía-impulso espacial de cuatro vectores, así que

$$E^2 < c^2 p^2,$$

por consiguiente, el cuadrado de la masa m restante, definido por

$$m^2 c^4 = E^2 - c^2 p^2 < 0,$$

requiere que la *masa en reposo* sea imaginaria, ver Hawking y Ellis[14].

7. Se puede utilizar la métrica de Finsler para generalizar la ecuación de campo de Einstein en el vacío. Se pueden encontrar soluciones no Riemannianas para esta generalización.
8. Se puede utilizar la métrica de Finsler para generalizar la ecuación de campo de Einstein en el vacío. Se pueden encontrar soluciones no Riemannianas para esta generalización. Un método eficiente es utilizar el análisis numérico en la teoría de perturbaciones para encontrar dichas soluciones.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Aceña, A. La transición a la formulación covariante del electromagnetismo. *Rev. Bras. Ensino Fís.* **39**, e1304, 2017. DOI: 10.1590/1806-9126-rbef-2016-0072
- [2] Antonelli, P. L. (Ed), *Handbook of Finsler geometry* Vol. I. Kluwer Academic Publishers. 2003. ISBN 1-4020-1557-7.
- [3] Antonelli, P. L. (Ed), *Handbook of Finsler geometry* Vol. II. Kluwer Academic Publishers. 2003. ISBN 1-4020-1556-9.
- [4] Armitage-Caplan, C. et al. (Planck Collaboration). Planck 2013 Results. I. Overview of products and scientific results. *Astronomy and Astrophysics*, **571**, A1, 2014. DOI: 10.1051/0004-6361/201321529
- [5] Asanov, G. S. *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories*. D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland, 1985. ISBN 978-9027719607.
- [6] Bao, D. & S.-S. Chern & Z. Shen. *An introduction to Riemannian-Finsler Geometry*. (Graduate Texts in Math. Vol. 200). Springer, New York, 2000. DOI 10.1007/978-1-4612-1268-3
- [7] Bao, D. & R. L. Bryant & S.-S. Chern & Z. Shen. (Ed) *A Sampler of Riemannian-Finsler Geometry*. (Mathematical Sciences Research Institute Publications. Vol 50) Cambridge University Press, 2004.
- [8] Berwald, L. Über Finslersche und Cartansche Geometrie, IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslerische Räume skalarer Krümmung. *Ann Math.* **48**, 755-781, 1947. DOI: 10.2307/1969139
- [9] Cao, S. The theory of relativity and super-luminal speeds. *Astrophysics and Space Science.* **190**, 303-315, 1992. DOI: 10.1007/BF00644856
- [10] Einstein, A. *The principle of Relativity*. Dover, Nueva York, 1923.

- [11] Fritzsche, F. & G. Ramírez. El tensor electromagnético en un espacio de Finsler. *Aceptado para publicación en Revista de la Escuela de Física, Universidad Nacional Autónoma de Honduras*. Agosto, 2023.
- [12] Gładysz, P. & S. Pustelny & K. Słowik. Superluminal light propagation in a three-level ladder system. *Scientific Reports*, **14**, 15151, 2024. DOI: 10.1038/s41598-024-62220-x
- [13] Hau, L. V. & S. E. Harris & Z. Dutton & C. H. Behroozi. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, **397**, 594–598, 1999. DOI: 10.1038/17561
- [14] Hawking, S. W. & G. F. R. Ellis. *The Large-Scale Structure of space-time*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1973. DOI: 10.1017/CBO9780511524646
- [15] Landau, L. D. & E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. Course of Theoretical Physics, Vol 2. Butterworth Heinemann, 4th ed. 1994.
- [16] Maple (18). Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario.
- [17] McCarthy, Patrick J. and Solange F. Rutz, The General Four Dimensional Spherically Symmetric Finsler Metric. *General Relativity and Gravitation*. **25**, 589-602. 1993.
- [18] Mo, Xiaohuan. *An Introduction to Finsler Geometry*. Peking University Series in Mathematics, Vol. 1. World Scientific, 2006.
- [19] Pirani. *Lectures on General Relativity*. Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics Vol. 1. Prentice Hall, 1964.
- [20] Randers, G. On an Asymmetrical Metric in the Four-Space of General Relatively, *Physical Review*, **59**, 195-199, 1941. DOI: 10.1103/PhysRev.59.195
- [21] Recami, E. & A. Castellino & G. D. Maccarrone & M. Rodonò. Considerations about the apparent “superluminal expansions” observed in astrophysics. *Nuovo Cimento B*, **93B**:11, No. 2, 119–144, 1986. DOI: 10.1007/BF02722327
- [22] Resnick, R. *Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad*. Limusa, México, 1981.

- [23] Riemann, B. *Habilitationsvortrag: "Über die Hypotheser welche der geometric zugrund liegen"*. Göttingen, 1854.
- [24] Rindler, W. *Essential Relativity*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [25] Rund, H. *Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
- [26] Rutz, Solange F. A Finsler generalisation of Einstein's vacuum field equations. *General Relativity and Gravitation*, **25**, 1139-1158. 1993. DOI: 10.1007/BF00763757
- [27] Stephani H. and Kramer D. *Exact Solutions to Einstein's Field Equation*. Cambridge Monographs, Cambridge, 2003.
- [28] Wang, L. J. & A. Kuzmich & A. Dogariu. Gain-Assisted superluminal light propagation. *Nature*, **406**, 277-279. 2000. DOI: 10.1038/35018520
- [29] Wilson, J. *Manifold Theory*. Seminario para "The Warmup Program for entering graduate students" del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago, 2012.
- [30] Youssef, N. L & S. G. Elgendi. New Finsler package. *Computer Physics Communications*. **185**, 986-997, 2014.
- [31] Zeeman, E. C. *Catastrophe Theory*. (Selected Papers 1972 1977), Addison-Wesley, 1977.

A. Código en Maple para el capítulo 4

Este código se hizo en Maple[16] con ayuda del paquete `Finsler` desarrollado por Youssef y Elgendi [30] para corregir un paquete desarrollado inicialmente para el libro *Handbook of Finsler geometry* editado por Antonelli [2, 3], este código permite hacer cálculos en la geometría de Finsler.

La ejecución del código se enlista a continuación

```
> with (Finsler)
```

```
[Dcoordinates, Hdifff, K, connection, init, metricfunction, tddifff]
```

The coordinates are:

$$X^1 = r$$

$$X^2 = \theta$$

$$X^3 = \phi$$

$$X^4 = t$$

```
'Y assigned to DCoordinateName'
```

The d-coordinates are:

$$Y^1 = dr$$

$$Y^2 = dth$$

$$Y^3 = dph$$

$$Y^4 = dt$$

$$A := 1 - 2\frac{m}{r}$$

$$domg := \sqrt{dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2}$$

$$F4 := dr^2 \left(1 - 2\frac{m}{r}\right)^{-1} + r^2 (dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2) - \left(1 - 2\frac{m}{r}\right) dt^2 \\ + \varepsilon \left(1 - 2\frac{m}{r}\right) \sqrt{dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2} dt^2$$

$$F0 := dr^2 + r^2 (dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2) - dt^2 + \varepsilon \sqrt{dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2} dt^2$$

'The components of the metric are:'

$$g_{rr} = 1 \\ g_{\theta\theta} = r^2 + \frac{1}{2} \frac{dt^2 (\sin \theta)^2 dph^2}{(dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\ g_{\theta\phi} = -\frac{1}{2} \frac{dt^2 dth (\sin \theta)^2 dph}{(dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\ g_{\theta t} = \frac{dt dth}{\sqrt{dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2}} \varepsilon \\ g_{\phi\phi} = r^2 (\sin \theta)^2 + \frac{1}{2} \frac{dt^2 (\sin \theta)^2 dth^2}{(dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\ g_{\phi t} = \frac{dt (\sin \theta)^2 dph}{\sqrt{dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2}} \varepsilon \\ g_{tt} = -1 + \sqrt{dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2} \varepsilon$$

$$ds^2 = (\sin \theta)^2 dph^2 r^2 + dth^2 r^2 + dr^2 - dt^2 + 3\sqrt{dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2} dt^2 \varepsilon$$

$$F := \sqrt{(\sin \theta)^2 dph^2 r^2 + dth^2 r^2 + dr^2 - dt^2 + 3\sqrt{dth^2 + (\sin \theta)^2 dph^2} dt^2 \varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
G^r &= -\frac{1}{2}rdth^2 - \frac{1}{2}r(\sin\theta)^2dph^2 \\
G^\theta &= -\frac{1}{2}\frac{\sin\theta dph^2(\cos\theta)r - 2drdth}{r} \\
&\quad - 1/4\frac{(4(\sin\theta)^2dph^2 + 3dth^2)\cos\theta dph^2\sin\theta dt^2\epsilon}{(dth^2 + (\sin\theta)^2dph^2)^{3/2}r^2} + O(\epsilon^2) \\
G^\phi &= \frac{dph(\cos\theta dth r + \sin\theta dr)}{r\sin\theta} + \frac{1}{4}\frac{dt^2dph\cos\theta((\sin\theta)^2dph^2 + 2dth^2)dth\epsilon}{r^2\sin\theta(dth^2 + (\sin\theta)^2dph^2)^{3/2}} + O(\epsilon^2) \\
G^t &= \frac{1}{2}\frac{(-\sin\theta\cos\theta dph^2dth r + 2(\sin\theta)^2dph^2dr + 2dth^2dr)dt\epsilon}{r\sqrt{dth^2 + (\sin\theta)^2dph^2}} + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_\theta^r &= -dthr \\
N_\phi^r &= -r\sin^2\theta dph \\
N_r^\theta &= \frac{dth}{r} + O(\epsilon^2) \\
N_\theta^\theta &= \frac{dr}{r} + \frac{3}{4}\frac{dt^2dth^3\cos\theta\sin\theta dph^2}{r^2(dth^2 + \sin^2\theta dph^2)^{5/2}}\epsilon + O(\epsilon^2) \\
N_\phi^\theta &= -\sin\theta dph\cos\theta \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\sin\theta dph\cos\theta dt^2(2\sin^4\theta dph^4 + 5\sin^2\theta dph^2dth^2 + 6dth^4)}{r^2(dth^2 + \sin^2\theta dph^2)^{5/2}}\epsilon + O(\epsilon^2) \\
N_t^\theta &= -\frac{1}{2}\frac{(2\sin^2\theta dph^2 + 3dth^2)\cos\theta dph^2\sin\theta dt}{(dth^2 + \sin^2\theta dph^2)^{3/2}r^2}\epsilon + O(\epsilon^2) \\
N_r^\phi &= \frac{dph}{r} + O(\epsilon^2) \\
N_\theta^\phi &= \frac{dph\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{4}\frac{dt^2dph^3\cos\theta\sin\theta(\sin^2\theta dph^2 + 4dth^2)}{r^2(dth^2 + \sin^2\theta dph^2)^{5/2}}\epsilon + O(\epsilon^2) \\
N_\phi^\phi &= \frac{\cos\theta dth r + \sin\theta dr}{r\sin\theta} - \frac{1}{4}\frac{dt^2\cos\theta dth^3(\sin^2\theta dph^2 - 2dth^2)}{r^2\sin\theta(dth^2 + \sin^2\theta dph^2)^{5/2}}\epsilon + O(\epsilon^2) \\
N_t^\phi &= \frac{1}{2}\frac{dtdph\cos\theta(\sin^2\theta dph^2 + 2dth^2)dth}{r^2\sin\theta(dth^2 + \sin^2\theta dph^2)^{3/2}}\epsilon + O(\epsilon^2) \\
N_r^t &= \frac{\sqrt{dth^2 + \sin^2\theta dph^2}dt}{r}\epsilon + O(\epsilon^2) \\
N_\theta^t &= -\frac{1}{2}\frac{dt(\cos\theta\sin^3\theta dph^4 r - 2\sin^2\theta dph^2 drdth - 2drdth^3)}{(dth^2 + \sin^2\theta dph^2)^{3/2}r}\epsilon + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_\phi^t &= \frac{1}{2} \frac{\sin \theta dph dt (-\cos \theta \sin^2 \theta dph^2 dth r + 2 \sin^3 \theta dph^2 dr)}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\sin \theta dph dt (-2 \cos \theta dth^3 r + 2 \sin \theta dr dth^2)}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
N_t^t &= \frac{1}{2} \frac{1 - \sin \theta \cos \theta dph^2 dth r + 2 \sin^2 \theta dph^2 dr + 2 dth^2 dr}{r \sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
N_r^\theta &= -\frac{dth}{r} + O(\varepsilon^2) \\
N_r^\phi &= -\frac{dph}{r} + O(\varepsilon^2) \\
N_r^t &= -\frac{\sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2} dt}{r} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
N_\theta^r &= dth r + O(\varepsilon^2) \\
N_\theta^\theta &= \frac{dr}{r} - \frac{1}{4} \frac{dt^2 \sin \theta dph^2 \cos \theta dth (4 \sin^2 \theta dph^2 + dth^2)}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
N_\theta^\phi &= -\frac{dph \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{4} \frac{dt^2 dph \cos \theta (4 \sin^4 \theta dph^4 + 7 \sin^2 \theta dph^2 dth^2 + 6 dth^4)}{r^2 \sin \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad + O(\varepsilon^2) \\
N_\theta^t &= \frac{1}{2} \frac{dt dth (\sin \theta \cos \theta dph^2 dth r + 2 \sin^2 \theta dph^2 dr + 2 dth^2 dr)}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
N_\phi^r &= r \sin^2 \theta dph + O(\varepsilon^2) \\
N_\phi^\theta &= \sin \theta dph \cos \theta - \frac{1}{4} \frac{\sin \theta dph dt^2 \cos \theta (\sin^4 \theta dph^4 - 6 \sin^2 \theta dph^2 dth^2 - 4 dth^4)}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad + O(\varepsilon^2) \\
N_\phi^\phi &= \frac{1}{4} \frac{dth dt^2 \cos \theta (4 \sin^4 \theta dph^4 + 3 \sin^2 \theta dph^2 dth^2 + 2 dth^4)}{r^2 \sin \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad + \frac{\cos \theta dth r + \sin \theta dr}{r \sin \theta} + O(\varepsilon^2) \\
N_\phi^t &= \frac{1}{2} \frac{\sin \theta dph dt (3 \cos \theta \sin^2 \theta dph^2 dth r + 2 \sin^3 \theta dph^2 dr)}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\sin \theta dph dt (+2 \cos \theta dth^3 r + 2 \sin \theta dr dth^2)}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

$$N_t^\theta = \frac{1}{2} \frac{dt \sin \theta dph^2 \cos \theta (3 \sin^2 \theta dph^2 + 2dth^2)}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$N_t^\phi = \frac{1}{2} \frac{dtdph \cos \theta (\sin^2 \theta dph^2 + 2dth^2) dth}{r^2 \sin \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$N_t^r = \frac{1}{2} \frac{-\sin \theta \cos \theta dph^2 dth r + 2 \sin^2 \theta dph^2 dr + 2dth^2 dr}{r \sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$B_\theta^r = \frac{1}{4} \frac{(5 \sin^2 \theta dph^2 + 9dth^2) dt^2 \sin \theta dph^2 \cos \theta}{r (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$B_\phi^r = \frac{(-\sin^2 \theta dph^2 - 2dth^2) dth \cos \theta dph dt^2 \sin \theta}{r (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$B_t^r = -\frac{1}{2} \frac{dtdth \sin \theta dph^2 \cos \theta}{\sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2} r} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$B_r^\theta = \frac{3}{4} \frac{(2 \sin^2 \theta dph^2 + 3dth^2) \cos \theta dph^2 \sin \theta dt^2}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r^3} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$B_\theta^\theta = \frac{1}{4} \frac{(3 \cos^2 \theta \sin^4 \theta dph^4 + 4 \sin^6 \theta dph^4 + 10 \sin^4 \theta dph^2 dth^2) dt^2 dph^2}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{(9 \cos^2 \theta dth^4 + 9 \sin^2 \theta dth^4) dt^2 dph^2}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$B_\phi^\theta = -\frac{1}{4} \frac{(2 \sin^6 \theta dph^4 + 5 \sin^4 \theta dph^2 dth^2) dt^2 dth dph}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon$$

$$- \frac{1}{4} \frac{(-10 \sin^2 \theta \cos^2 \theta dph^2 dth^2 + 6 \sin^2 \theta dth^4 + 2 \cos^2 \theta dth^4) dt^2 dth dph}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon$$

$$+ O(\varepsilon^2)$$

$$B_t^\theta = -\frac{1}{2} \frac{(3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^2 dth r + 2 \sin^4 \theta dph^2 dth r) dph^2 dt}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r^3} \varepsilon$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(6 \cos \theta \sin^3 \theta dph^2 dr + 7 \cos^2 \theta dth^3 r + 3 \sin^2 \theta dth^3 r) dph^2 dt}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r^3} \varepsilon$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(9 \cos \theta \sin \theta dr dth^2) dph^2 dt}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r^3} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$B_r^\phi = -\frac{3}{4} \frac{dt^2 dph \cos \theta (\sin^2 \theta dph^2 + 2dth^2) dth}{r^3 \sin \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned}
B_\theta^\phi &= -\frac{1}{4} \frac{(4 \cos^2 \theta \sin^4 \theta dph^4 + \sin^6 \theta dph^4) dt^2 dth dph}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} \sin^2 \theta r^2} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(-6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta dph^2 dth^2 + 2 \sin^4 \theta dph^2 dth^2) dt^2 dth dph}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} \sin^2 \theta r^2} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(2 \cos^2 \theta dth^4 + 4 \sin^2 \theta dth^4) dt^2 dth dph}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} \sin^2 \theta r^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
B_\phi^\phi &= -\frac{1}{4} \frac{(\cos^2 \theta \sin^6 \theta dph^6 - 2 \cos^2 \theta \sin^4 \theta dph^4 dth^2) dt^2}{\sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} r^2} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(11 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^2 dth^4 + \sin^4 \theta dph^2 dth^4) dt^2}{\sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} r^2} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(2 \cos^2 \theta dth^6 - 2 \sin^2 \theta dth^6) dt^2}{\sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} r^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
B_t^\phi &= \frac{1}{2} \frac{(\cos^2 \theta \sin^4 \theta dph^4 r + \cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^2 dth^2 r + \sin^4 \theta dph^2 dth^2 r) dt dph}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} \sin^2 \theta r^3} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{(3 \cos \theta \sin^3 \theta dph^2 dr dth + 4 \cos^2 \theta dth^4 r + 2 \sin^2 \theta dth^4 r) dt dph}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} \sin^2 \theta r^3} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{(6 \cos \theta \sin \theta dr dth^3) dt dph}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} \sin^2 \theta r^3} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
B_r^t &= \frac{dt dth \sin \theta dph^2 \cos \theta}{\sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2} r} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
B_\theta^t &= \frac{1}{2} \frac{(\sin^2 \theta dph^2 dth r - 4 \cos^2 \theta dph^2 dth r) \sin^2 \theta dph^2 dt}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{(-\sin \theta dph^2 dr \cos \theta + 2 dth^3 r) \sin^2 \theta dph^2 dt}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
B_\phi^t &= -\frac{1}{2} \frac{(\sin^3 \theta dph^2 dth r - 4 \sin \theta \cos^2 \theta dph^2 dth r) \sin \theta dt dph dth}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{(\sin^2 \theta \cos \theta dph^2 dr + 2 \sin \theta dth^3 r + 2 \cos \theta dr dth^2) \sin \theta dt dph dth}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon \\
&\quad + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_t^t &= \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^4 r^2 - 2 \sin^4 \theta dph^4 r^2 - 3 \cos^2 \theta dph^2 dth^2 r^2}{\sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2 r^2}} \varepsilon \\
&+ \frac{1}{2} \frac{(-5 \sin^2 \theta dph^2 dth^2 r^2 - 4 \cos \theta \sin \theta dph^2 dr dth r + 6 \sin^2 \theta dph^2 dr^2)}{\sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2 r^2}} \varepsilon \\
&+ \frac{1}{2} \frac{(-2 dth^4 r^2 + 6 dr^2 dth^2)}{\sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2 r^2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

$$NLR_{r\theta}^\theta = -\frac{3}{4} \frac{dth^3 \cos \theta dph^2 \sin \theta dt^2}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$NLR_{r\theta}^\phi = -\frac{1}{4} \frac{dt^2 dph^3 \cos \theta \sin \theta (\sin^2 \theta dph^2 + 4dth^2)}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$NLR_{r\theta}^t = \frac{1}{2} \frac{\sin^3 \theta dph^4 \cos \theta dt}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned}
NLR_{r\phi}^\theta &= \frac{1}{4} \frac{\sin \theta dph \cos \theta dt^2 (2 \sin^4 \theta dph^4 + 5 \sin^2 \theta dph^2 dth^2 + 6dth^4)}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&+ O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

$$NLR_{r\phi}^\phi = \frac{1}{4} \frac{dt^2 \cos \theta dth^3 (\sin^2 \theta dph^2 - 2dth^2)}{r^3 \sin \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$NLR_{r\phi}^t = \frac{1}{2} \frac{\cos \theta (\sin^2 \theta dph^2 + 2dth^2) \sin \theta dt dph dth}{r (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$NLR_{rt}^\theta = \frac{(2 \sin^2 \theta dph^2 + 3dth^2) \cos \theta dph^2 \sin \theta dt}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r^3} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$NLR_{rt}^\phi = \frac{(-\sin^2 \theta dph^2 - 2dth^2) dt dph \cos \theta dth}{r^3 \sin \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$NLR_{rt}^t = \frac{\sin \theta \cos \theta dph^2 dth r - 2 \sin^2 \theta dph^2 dr - 2dth^2 dr}{r^2 \sqrt{dth^2 + \sin^2 \theta dph^2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$NLR_{\theta\phi}^r = \frac{3 (\sin^2 \theta dph^2 + 2dth^2) dt^2 \cos \theta dph \sin \theta}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2} r} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned}
NLR_{\theta\phi}^\theta &= \frac{1}{4} \frac{(\cos^2 \theta \sin^4 \theta dph^4 + 2 \sin^6 \theta dph^4 - 5 \sin^2 \theta \cos^2 \theta dph^2 dth^2) dph dt^2}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} r^2} \varepsilon \\
&+ \frac{1}{4} \frac{(5 \sin^4 \theta dph^2 dth^2 + 6 \cos^2 \theta dth^4 + 6 \sin^2 \theta dth^4) dph dt^2}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} r^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
NLR_{\theta\phi}^{\phi} &= -\frac{1}{4} \frac{(3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^4 - 9 \cos^2 \theta dph^2 dth^2) dt^2 dth}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} r^2} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{(-\sin^2 \theta dph^2 dth^2 + 2dth^4) dt^2 dth}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2} r^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
NLR_{\theta\phi}^t &= \frac{1}{2} \frac{(\sin^2 \theta dph^2 - 4dph^2 \cos^2 \theta + 2dth^2) dth dt dph \sin^2 \theta}{(dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
NLR_{\theta t}^r &= \frac{1}{2} \frac{(2 \sin^2 \theta dph^2 + 3dth^2) \cos \theta dph^2 \sin \theta dt}{r (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
NLR_{\theta t}^{\theta} &= \frac{1}{2} \frac{dph^2 dt (2 \cos^2 \theta \sin^4 \theta dph^4 r + 2 \sin^6 \theta dph^4 r)}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{dph^2 dt (5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^2 dth^2 r + 5 \sin^4 \theta dph^2 dth^2 r)}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{dph^2 dt (3 \cos^2 \theta dth^4 r + 3 \sin^2 \theta dth^4 r - 3 \cos \theta \sin \theta dr dth^3)}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad + O(\varepsilon^2) \\
NLR_{\theta t}^{\phi} &= -\frac{1}{2} \frac{dtdph (\cos^2 \theta \sin^4 \theta dph^4 dth r + \sin^6 \theta dph^4 dth r)}{r^3 \sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{dtdph (\cos \theta \sin^5 \theta dph^4 dr + 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^2 dth^3 r)}{r^3 \sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{dtdph (3 \sin^4 \theta dph^2 dth^3 r + 4 \cos \theta \sin^3 \theta dph^2 dr dth^2)}{r^3 \sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{dtdph (2 \cos^2 \theta dth^5 r + 2 \sin^2 \theta dth^5 r)}{r^3 \sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
NLR_{\theta t}^t &= \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^4 dth r^2 + 3 \sin^4 \theta dph^4 dth r^2 + \cos \theta \sin^3 \theta dph^4 dr r}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta dph^2 dth^3 r^2 + 5 \sin^2 \theta dph^2 dth^3 r^2 - 2 \sin^2 \theta dph^2 dr^2 dth}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{2dth^5 r^2 - 2dr^2 dth^3}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
NLR_{\phi t}^r &= -\frac{1}{2} \frac{\cos \theta (\sin^2 \theta dph^2 + 2dth^2) \sin \theta dtdph dth}{r (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
NLR_{\phi t}^{\theta} &= \frac{1}{2} \frac{dtdph \cos \theta (\cos \theta \sin^4 \theta dph^4 dth r + 2 \sin^5 \theta dph^4 dr)}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{dtdph \cos \theta (5 \cos \theta \sin^2 \theta dph^2 dth^3 r + 5 \sin^3 \theta dph^2 dr dth^2)}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad \frac{1}{2} \frac{dtdph \cos \theta (4 \cos \theta dth^5 r + 6 \sin \theta dr dth^4)}{r^3 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
NLR_{\phi t}^{\phi} &= -\frac{1}{2} \frac{dt \cos \theta (\cos \theta \sin^6 \theta dph^6 r + \cos \theta \sin^4 \theta dph^4 dth^2 r)}{r^3 \sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad -\frac{1}{2} \frac{dt \cos \theta (2 \cos \theta \sin^2 \theta dph^2 dth^4 r - \sin^3 \theta dph^2 dr dth^3)}{r^3 \sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon \\
&\quad -\frac{1}{2} \frac{dt \cos \theta (2 \cos \theta dth^6 r + 2 \sin \theta dr dth^5)}{r^3 \sin^2 \theta (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{5/2}} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
NLR_{\phi t}^t &= -\frac{1}{2} \frac{dph (\cos^2 \theta \sin^4 \theta dph^4 r^2 - 2 \sin^6 \theta dph^4 r^2)}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\
&\quad -\frac{1}{2} \frac{dph (-\cos^2 \theta \sin^2 \theta dph^2 dth^2 r^2 - 4 \sin^4 \theta dph^2 dth^2 r^2)}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\
&\quad -\frac{1}{2} \frac{dph (-\cos \theta \sin^3 \theta dph^2 dr dth r - 2 \cos^2 \theta dth^4 r^2 + 2 \sin^4 \theta dph^2 dr^2)}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\
&\quad -\frac{1}{2} \frac{dph (-2 \sin^2 \theta dth^4 r^2 - 2 \cos \theta \sin \theta dr dth^3 r + 2 \sin^2 \theta dr^2 t dth^2)}{r^2 (dth^2 + \sin^2 \theta dph^2)^{3/2}} \varepsilon \\
&\quad + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$