Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GRUPOIDES, UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATEGORÍAS Y GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE GRUPOS

Daniel Estuardo Tobar López

Asesorado por Sergio López-Permouth

Guatemala, agosto de 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

GRUPOIDES, UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATEGORÍAS Y GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE GRUPOS

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

DANIEL ESTUARDO TOBAR LÓPEZ

ASESORADO POR SERGIO LÓPEZ-PERMOUTH

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, AGOSTO DE 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO INTERINO

Director	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Representante Docente	Arqta. Ana Verónica Carrera Vela
Representante Docente	M.A. Pedro Peláez Reyes
Representante de Egresados	Lic. Urías Amitaí Guzmán García
Representante de Estudiantes	Elvis Enrique Ramírez Mérida
Representante de Estudiantes	Oscar Eduardo García Orantes
Secretario	M.Sc. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

Director	Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Examinador	Jose Carlos Bonilla Aldana
Examinador	Ronald Oliverio Chubay Gallina
Examinador	Hugo Allan García Monterrosa
Secretario	Edgar Damián Ochoa Hernández

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ref. D.DTG. 010-2024
Guatemala 22 de agosto de 2024

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del jefe de la Licenciatura en Matemáticca Aplicada, al trabajo de graduación titulado: " **GRUPOIDES, UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATEGORÍAS Y GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE GRUPOS**", presentado por el estudiante universitario, Daniel Estuardo Tobar López, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
USAC-ECFM

M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

135-2024
JMIC/Paola

DEDICATORIA

A mi abuelo, que me enseñó que preguntar «por qué» no era sólo para niños. A mi papá y mamá, que me apoyaron durante toda mi educación, siempre supieron que lo iba a lograr.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero a mi mamá, a mi papá, y en general a mi familia; sin su apoyo no estaría donde estoy. Le agradezco a Diana, por motivarme a crecer y acompañarme en este proceso. A mis amistades íntimas y personales, y a las personas con las que más hablo; gracias por su compañía.

A toda la gente que en mayor o menor medida fue parte de este logro, muchas gracias.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$:=$	es definido por
$\simeq$	es isomorfo a
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\varnothing$	conjunto vacío
$\subseteq$	subconjunto
$\subset$	subconjunto propio
A^C	complemento de A
$\mathscr{P}(X)$	conjunto potencia de X
Set	categoría de los conjuntos
Top	categoría de los espacios topológicos
Grp	categoría de los grupos
Cat	categoría de las categorías pequeñas
Grpd	categoría de los grupoides
$\pi(X)$	grupoide fundamental
I	grupoide de dos objetos, también llamado grupoide indiscreto

OBJETIVOS

General

Desarrollar la teoría preliminar de grupoides como una generalización natural de teoría de grupos a un nivel comprensible por un estudiante de licenciatura en matemática. Con esto, mostrar algunas aplicaciones y ventajas que esto presenta en diversas áreas.

Específicos

1. Desarrollar la teoría preliminar de categorías y teoría de conjuntos necesaria, a un nivel comprensible para estudiantes de la licenciatura en matemática con bases en teoría de grupos.

2. Profundizar en las generalizaciones de teoría de grupoides y mostrar sus aplicaciones y utilidades. Elaborando en las propiedades fundamentales de la categoría de los grupoides.

3. Demostrar los principales resultados relacionados con las categorías de los grupoides, especialmente enfatizando la estructura de las componentes conexas y los principales isomorfismos entre grupoides.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la teoría de categorías es una poderosa herramienta que generaliza las propiedades de diversas estructuras matemáticas, a lo largo del tiempo ha logrado capturar relaciones que se extienden a través de varias áreas de la matemática. Por esta razón, el estudio de la teoría de categorías será una útil herramienta para comprender las propiedades de diversas estructuras algebraicas. En este trabajo, nos centraremos en establecer los fundamentos de la teoría de grupos y teoría de conjuntos para motivar las generalizaciones de teoría de categorías a ser expuestas posteriormente.

Un aspecto central de esta monografía es el estudio de los grupoides, que generalizan la noción de grupo permitiendo múltiples objetos. Los grupoides capturan particularidades tanto de la teoría de grupos como de la teoría de categorías, y su estudio ofrece una perspectiva enriquecedora para la comprensión de estructuras algebraicas y sus propiedades. En particular, exploraremos la categoría de los grupoides, las generalizaciones más usuales de la teoría de grupos así como las prinicpales propiedades e isomorfismos dentro de la categoría de los grupoides.

A lo largo de esta monografía, presentaremos los conceptos y resultados fundamentales de la teoría de grupos, teoría de categorías y la teoría de grupoides. Se discutirá la categoría de los grupoides y cómo estas estructuras pueden ser utilizadas para extender y generalizar conceptos clásicos en matemáticas.

1. CONCEPTOS PRELIMINARES

En este capítulo se enlistan los principiales resultados y definiciones que tendrán relevancia en la presente monografía. Se asume que el lector cuenta con fundamentos sólidos de las áreas de teoría de conjuntos, topología y teoría de grupos.

1.1. Teoría de conjuntos

En a sección se estudian las ideas de relaciones de equivalencia y de orden, así como las propiedades de asociatividad de la composición de funciones y la existencia de la función identidad. La segunda sección del capítulo se centra en el estudio del producto cartesiano, así como sus principales propiedades.

1.1.1. Definiciones

Considerando que el lector conoce las prinicipales definiciones de conjunto, relación de pertenencia, de subconjunto, conjunto potencia y complemento; estudiamos la definición de una clase que motiva la distinción entre qué clases son y no son conjuntos.

1.1 Ejemplo (Paradoja de Russell)**.** Definimos la colección de conjuntos $V = \{x|x \notin x\}$. Si V es en sí mismo un conjunto, entonces podemos preguntar si $V \in V$.

- Si $V \in V$ entonces debería cumplir la condición de V y por lo tanto $V \notin V$.
- Si $V \notin V$ entonces V cumple la condición y por lo tanto $V \in V$.

Este comportamiento paradójico nace de la asunción que V es un conjunto. Esto nos muestra que no todas las colecciones de conjuntos definidas por una propiedad pueden ser un conjunto.

Ahora definimos la noción de las colecciones de conjuntos, las cuales no necesariamente son ellas mismas un conjunto.

1.2 Definición (Clase)**.** Una clase es una colección de conjuntos que pueden caracterizarse por una propiedad. Si una clase no es un conjunto, decimos que es una clase propia.

Dado un conjunto, cualquier forma de relacionar pares de ellos es una relación, en particular, algunas de ellas cumplen propiedades que ameritan una definición particular.

1.3 Definición (Relación)**.** Dados dos conjuntos A, B, definimos a una relación $\mathcal{R}$ entre ellos como cualquier subconjunto del producto cartesiano $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ decimos que a está relacionado con b y lo denotamos $a\mathcal{R}b$.

1.4 Definición (Propiedades de una relación)**.** Dada una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, decimos que la relación es

- **reflexiva:** si para todo $a \in A$ se cumple que $a\mathcal{R}a$.
- **transitiva:** si para todo $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ implica que $a\mathcal{R}c$.
- **simétrica:** si para todo $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ implica que $b\mathcal{R}a$.
- **antisimétrica:** si para todo $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ implica que $a = b$.

1.5 Definición (Relación de equivalencia)**.** Dado un conjunto A, decimos que una relación $\sim \subseteq A \times A$ es de equivalencia si es una relación reflexiva, transitivia y simétrica. Al conjunto de todos los elementos $y \in A, y \sim x$ se les llama la clase de equivalencia de x y en general se denota como $[x]$.

1.6 Definición (Relación de orden)**.** Dado un conjunto A, decimos que una relación $\preceq \subseteq A \times A$ es una relación de orden si es una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica. Si para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que $a \preceq b$ o $b \preceq a$ (i.e. todos los elementos son comparables) decimos que $\preceq$ es una relación de orden total, de otro modo decimos que $\preceq$ es una relación de orden parcial.

Por último, enunciamos dos teoremas importantes sobre las relaciones de equivalencia.

1.7 Teorema. *Sea $x \sim y$ una relación de equivalencia, la familia de clases de equivalencia $\{[x] : x \in A\}$ induce una partición.*

1.8 Teorema. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición del conjunto A entonces la relación $x \sim y$ si y sólo si existe un $j \in I$ tal que $x, y \in A_j$, induce una relación de equivalencia.*

Ahora, suponiendo que el lector conoce las definiciones de función, enunciamos dos teoremas que aunque parecen triviales, permiten asociar una estructura a las funciones y los conjuntos.

1.9 Teorema (Asociatividad de la composición)**.** *Dados conjuntos* A, B, C, D *y funciones* $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$*, se cumple que la composición de funciones es asociativa, por lo que* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$*.*

Demostración:

Tomando $x \in A$ *cualquier elemento tenemos la siguiente igualdad*

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x).$$

Como formalidad, definimos una función que juega un papel fundamental en muchas ramas de la matemática, paradójicamente es la idea de dejar a un cojnunto sin alterar.

1.10 Definición (Función identidad)**.** Dado un conjunto X definimos la función identidad $\mathbf{1}_X : X \to X$ como la función que mapea $\mathbf{1}_X : x \mapsto x$ o la función que cumple $\mathbf{1}_X(x) = x$ para cada $x \in X$.

1.1.2. Producto cartesiano

Definimos el producto cartesiano de familias arbitrarias de funciones. En general, la definición del producto cartesiano es importante pues también se extiende a diversas estructuras, como las topologías o los grupos.

1.11 Definición (Producto cartesiano)**.** Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos indizada por un conjunto I. Definimos al producto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$ como todos los elementos de la forma

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ (a_i)_{i \in I} | a_i \in A_i \forall i \in I \right\}.$$

En particular, si I es el conjunto finito $\{1, 2, \ldots, n\}$ entonces podemos escribir $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ y es el conjunto de las tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con $a_i \in A_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Formalmente, la definición es ligeramente distinta. Definimos al producto cartesiano como una familia de funciones

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i | f(i) \in A_i \forall i \in I \right\}.$$

1.12 Definición (Funciones de proyección)**.** Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y sea $\prod_{i\in I} A_i$ su producto cartesiano. Definimos para cada $j \in I$ la función de proyección $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ como la función que mapea cada tupla ordenada $(a_i)_{i\in I}$ a su corrdenada correspondiente a_j. Simbólicamente tenemos $\pi_j\left((a_i)_{i\in I}\right) = a_j$ para cada $j \in I$.

A continuación enunciamos dos teoremas que capturan la escencia de lo que es el producto cartesiano. En general, estas propiedades se generalizan cuando trabajamos con funciones de algún tipo de producto específico en alguna otra área de las matemáticas, por ejemplo los homomorfismos de grupos.

1.13 Teorema. *Dada una colección de conjuntos $\{B_i\}_{i\in I}$ y una colección de funciones $f_i : A \to B_i$, existe una única función $f : A \to \displaystyle\prod_{i\in I} B_i$ tal que $\pi_i \circ f = f_i$ para cada $i \in I$.*

Demostración:

Para mostrar la existencia definimos la función $f : A \to \prod_{i\in I} B_i$ de la forma $f : a \mapsto (f_i(a))_{i\in I}$, es decir aplicar cada una de las funciones a cada coordenada. Además dada cualquier otra función $g \neq f$, existe algún $a \in A, j \in I$ tal que $f(a) = (f_i(a))_{i\in I} \neq (b_i)_{i\in I} = g(a)$, pero esto sucede si y sólo si existe $j \in I$ tal que $b_j \neq f_j(a)$, es decir $f_j = \pi_j \circ f \neq \pi_j \circ g$. De ello la función f es la única que cumple dicha propiedad.

Con este teorema podemos mostrar el siguiente resutlado, dos funciones son iguales si y sólo si sus proyecciones son iguales.

1.14 Corolario. *Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos, y sea $B := \prod_{i\in I} B_i$ su producto cartesiano. Dadas cualesquiera dos funciones $f, g : A \to B$, $f = g$ si y sólo si $\pi_i \circ f = \pi_i \circ g$ para cada $i \in I$.*

Demostración:

Si $f = g$, la conclusión se sigue trivialmente. Por otro lado, suponiendo que $\pi_i \circ f = \pi_i \circ g$ para cada $i \in I$, por el teorema 1.13 aplicado a las funciones $(\pi_i \circ f)$, $i \in I$, existe una única función $h_f : A \to B$ tal que $\pi_i \circ h_f = \pi_i \circ f$. Puesto que f cumple esta propiedad, entonces necesariamente $h_f = f$. Análogamente existe una única función $h_g : A \to B$ tal que $\pi_i \circ h_g = \pi_i \circ g$, necesariamente $h_g = g$.

Puesto que f cumple que $\pi_i \circ f = \pi_i \circ g$, por el párrafo anterior necesariamente $f = g$.

Enunciamos el siguiente teorema que ilustra una propiedad fundamental del producto cartesiano, esta propiedad caracteriza al producto cartesiano salvo biyecciones. Además esta propiedad se extiende a más estructuras algebraicas, como los grupos e incluso las categorías.

1.15 Teorema. *Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una colección de conjuntos y sea P un conjunto con una familia de funciones $p_i : P \to B_i$ que cumplen el enunciado del teorema 1.13, entonces existe una biyección entre $\prod_{i\in I} B_i$ y P. Es decir, si P cumple que para cualquier conjunto A y cualquier colección de funciones $f_i : A \to B_i$ existe una única función $f : A \to P$ tal que $p_i \circ f = f_i$ entonces existe una biyección $h : P \to \prod_{i\in I} B_i$.*

Demostración:

Primero, puesto que el conjunto P con las funciones $p_i : P \to B_i$ cumplen la misma propiedad que el producto cartesiano con las funciones de proyección, entonces el corolario 1.14 aplica con la misma demostración a las funciones p_i y el conjunto P.

Llamando $B := \prod_{i\in I} B_i$, considerando las funciones $p_i : P \to B_i$, por la propiedad del conjunto B y las funciones π_i existe una única función $h : P \to B$ tal que $\pi_i \circ h = p_i$ para cada $i \in I$.

Análogamente, considerando la familia de funciones $\pi_i : B \to B_i$ por la propiedad del conjunto P y las funciones p_i existe una única función $g : B \to P$ tal que $p_i \circ g = \pi_i$ para cada $i \in I$.

Sustituyendo ambas ecuaciones tenemos las siguientes igualdades para cada $i \in I$,

$$p_i \circ (g \circ h) = p_i \circ \mathbf{1}_P, \qquad \pi_i \circ (h \circ g) = \pi_i \circ \mathbf{1}_B.$$

Luego, por el corolario 1.14 aplicado al conjunto B y las funciones π_i a la segunda igualdad tenemos $h \circ g = \mathbf{1}_B$. Análogamente para P con las funciones p_i tenemos $g \circ h = \mathbf{1}_P$. Mostrando que existe una biyección $h : P \to B$.

1.2. Topología

En la siguiente sección se estudian los prinicipales resultados de topología. Se asume que el lector conoce los prinicpales espacios topológicos, como el espacio de los reales $\mathbb{R}$ con la topología usual inducida por los conjuntos abiertos, así como los conceptos de función continua y ejemplos de funciones continuas en espacios conocidos.

1.2.1. Definiciones

Para iniciar, definimos lo que es una topología como colección de conjuntos abiertos.

1.16 Definición (Topología)**.** Sea X un conjunto, y sea $\mathscr{X}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que el par $(X, \mathscr{X})$ es un *espacio topológico* si $\mathscr{X}$ cumple las siguientes condiciones:

- $\varnothing \in \mathscr{X}$, y $X \in \mathscr{X}$,
- Dada cualquier familia de elementos de $\mathscr{X}$, $\{X_i\}_{i\in I}$, la unión $\bigcup_{i\in I} X_i$ también está en $\mathscr{X}$.
- Dada una colección finita de elementos de $\mathscr{X}$, $X_1, \ldots, X_n$, la intersección de esta colección $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ también está en $\mathscr{X}$.

En ese caso, decimos que $\mathscr{X}$ es una topología sobre X. A los elementos de $\mathscr{X}$ los llamamos *conjuntos abiertos.*

La idea de conjunto abierto es fundamental en el estudio de la topología, todas las propiedades y construcciones relevantes en la topología pueden anclarse finalmente en los conjuntos abiertos. Ahora definimos un concepto, en cierta forma, dual a la idea de un conjunto abierto.

1.17 Definición (Conjunto cerrado)**.** Dado un espacio topológico $(X, \mathscr{X})$ decimos que $B \subseteq X$ es un conjunto cerrado si su complemento es abierto, es decir si $B^C \in \mathscr{X}$.

En general, podemos pensar que una topología es una familia de subconjuntos tales que: el espacio completo y el vacío son elementos, es cerrada sobre uniones arbitrarias (finitas o infinitas), es cerrada sobre intersecciones finitas.

A continuación damos una definición de vecindad, que engloba la idea de «un conjunto que contiene al punto de interés y además algún abierto».

1.18 Definición (Vecindad)**.** Dado un espacio topológico X, si $x \in X$ es un punto del espacio entonces decimos que $V \subseteq X$ es una *vecindad* de x si existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U \subseteq V$.

La definición de vecindad resulta útil para estudiar propiedades locales de una topología, en general, toda la teoría y definición de topología puede realizarse desde la definición de familias de vecindades.

A continuación, estudiamos un tipo particular de funciones entre topologías que preserva su estructura.

1.19 Definición (Función continua)**.** Sean X, Y dos espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función entre ellos. Decimos que f es *continua* si para cualquier subconjunto abierto V del contradominio Y, su preimagen $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en el dominio X.

La definición de continuidad también puede hacerse con base en conjuntos cerrados.

1.20 Lema. *Una función $f : X \to Y$ si y sólo si para cualquier conjunto cerrado $C \subseteq Y$ del contradominio, el conjunto preimagen $f^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado del dominio.*

También mostraremos que una de las funciones más importantes, la función identidad, es una función continua. Además mostraremos que podemos conservar la continuidad de funciones a través de la composición.

1.21 Teorema. *Sea $(X, \mathscr{X})$ un espacio topológico, entonces la función identidad $\mathbf{1}_X : X \to X$ es una función continua.*[1]

Demostración:

---

[1]En este caso, X tiene la misma topología en el dominio y el contradominio.

Sea $A \subseteq X$ un conjunto abierto en el contradominio, entonces $\mathbf{1}_X{}^{-1}(A) = A$ es también un conjunto abierto en el dominio y por lo tanto la función identidad es una función continua.

1.22 Teorema. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas entre espacios topológicos. Entonces la función composición $g \circ f : X \to Z$ es una función continua.*

Demostración:

Sea $A \subseteq Z$ un conjunto abierto, entonces por la continuidad de g tenemos que $V := g^{-1}(A)$ también es un conjunto abierto; pero por la continuidad de f se cumple que $f^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ es un conjunto abierto y por lo tanto la composición de funciones continuas es una función continua.

Aunque estas propiedades son relativamente básicas y sencillas de demostrar, nos permiten darle una estructura de categoría a los espacios topológicos.

Ahora mostramos un teorema que nos permite tomar dos funciones continuas que coinciden en un subconjunto de sus dominios y «combinar» ambas funciones para crear una nueva función continua en la unión de los dominios[9].

1.23 Teorema (Lema del pegado)**.** *Sean A, B dos subconjuntos cerrados de un espacio topológico X tales que $A \cup B = X$, y sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ dos funciones continuas entre espacios topológicos tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Entonces la función $h : X \to Y$ dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

es una función continua en X.

Demostración:

Primero, h está bien definida pues si $x \in A \cap B$ entonces $h(x) = f(x) = g(x)$.

Sea $C \subseteq Y$ un conjunto cerrado, entonces $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Puesto que ambas funciones son continuas entonces los conjuntos $f^{-1}(C), g^{-1}(C)$ son conjuntos cerrados, y por lo tanto $h^{-1}(C)$ también es un conjunto cerrado, haciendo la función continua.

También definimos uno de los conceptos más importantes de la topología, la idea de dos espacios que aunque no son iguales tienen la misma estructura topológica.

1.24 Definición (Homeomorfismo)**.** Decimos que una función coninua $f : X \to Y$ es un *homeomorfismo* si existe una función continua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathbf{1}_X$ y $f \circ g = \mathbf{1}_Y$. Además, decimos que dos espacios topológicos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

En otras palabras, una función continua es un homeomorfismo si es una función invertible y su función inversa también es una función continua. No es suficiente con que una función sea invertible y continua para asegurar que es un homeomorfismo.

1.2.2. Espacio producto

Recordando el producto cartesiano de una familia de conjuntos definido en 1.11 y las funciones de proyección definidas en 1.12, definimos el producto de una familia de espacios topológicos.

1.25 Definición (Espacio producto)**.** Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ su producto cartesiano. Definimos al *espacio producto* como el producto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ dotado de la topología generada por la subbase

$$\mathscr{S} = \left\{\pi_i^{-1}(A_i) : i \in I, A_i \text{ abierto en } X_i\right\}.$$

Explícitamente, los conjuntos abiertos en $\prod_{i\in I} X_i$ son los conjuntos $\prod_{i\in I} A_i$ donde cada A_j es abierto en X_j y además $A_j \neq X_j$ únicamente para una cantidad finita de $j \in I$.

1.26 Teorema (Funciones de proyección)**.** *Las funciones de proyección del producto de espacios $\pi_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k$ son funciones continuas con la topología producto. Además, la topología producto es la topología más tosca que hace que dichas funciones sean continuas.*

1.27 Teorema. *Dados espacios topológicos X, Y_i para $Y_i, i \in I$ una familia indizada de espaicos, y sea $Y = \prod_{i\in I} Y_i$ el espacio producto. Dadas funciones $f_i : X \to Y_i, i \in I$; definimos la función $f : X \to Y$ de la forma $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$. Entonces f es continua si y sólo si cada una de las f_i es continua.*

A continuación presenamos un teorema análogo al teorema 1.13, pero en este caso agregamos la restricción que cada función $f_i : Y \to X_i$ sea continua. Eñ teorema en productos cartesianos, en conjunto con el teorema anterior, nos muestra el siguiente resultado.

1.28 Teorema. *Si* $\{X_i\}_{i\in I}$ *es una familia de espacios topológicos y* $X = \prod_{i\in I}$ *su espacio producto, entonces para cualquier espacio* Y *y cualquier familia de funciones continuas* $f_i : Y \to X_i$*, existe una única función continua* $f : Y \to X$ *tal que* $\pi_i \circ f = f_i$ *para todo* $i \in I$.

Con respecto al producto cartesiano, obtenemos la característica adicional que la función obtenida también es una función continua.

Así como en el producto cartesiano, la propiedad 1.13 de las funciones de proyección caracterizaba el producto cartesiano salvo biyecciones; el teorema 1.28 nos muestra que la topología producto es única salvo homeomorfismos.

1.29 Teorema. *Sea* $X_i, i \in I$ *una familia indizada de espacios topológicos y sea* P *un espacio topológio con un conjunto de funciones continuas* $p_i : P \to X_i,\ i \in I$ *tal que para cada familia de funciones continuas* $f_i : Y \to X_i$ *existe una única función continua* $f : Y \to P$ *tal que* $p_i \circ f = f_i$ *para cada* $i \in I$*. Entonces* P *es homeomorfo al espacio producto* $\prod_{i\in I} X_i$.

La demostración del teorema es exactamente igual que la demostración del teorema 1.15 de prouctos cartesianos, donde el teorema 1.28 nos asegura que la biyección obtenida es continua y tiene inversa continua.

1.3. Teoría de grupos

Para introductir propiamente los temas asociados a la topología algebraica, presentamos brevemente la teoría de grupos. Comenzamos con las definiciones relevantes sobre grupos y subgrupos.

Se asume que el lector tiene familiaridad con las principales propiedades de los grupos y sus elementos, los inversos y el neutro. Así como las principales definiciones y propiedades de las clases laterales y subgrupos normales.

1.3.1. Definiciones

Definimos los grupos como monoides, aunque no son el objetivo principal del trabajo, la similitud entre los grupos y monoides guarda mucha relación con la similitud entre los grupoides y las categorías.

1.30 Definición (Monoide)**.** Dado un conjunto M y una operación $\cdot : M \times M \to M$, generalmente para $a, b \in M$ denotamos $\cdot(a, b) = a \cdot b = ab$. Decimos que $(M, \cdot)$ es un *monoide* si cumple con las siguientes propiedades:

1. **Asociatividad:** Para cualesquiera $a, b, c \in M$ se cumple que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

2. **Identidad:** Existe un elemento $e \in M$ tal que para todo $a \in M$ se cumple que $ea = ae = a$. Llamamos a e el *elemento identidad* o *elemento neutro*.

1.31 Definición (Grupo)**.** Dado un conjunto G no vacío y una operación $\cdot : G \times G \to G$ decimos que $(G, \cdot)$ es un *grupo* si cumple con los siguientes axiomas:

1. $(G, \cdot)$ es un monoide.

2. **Inverso:** Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Al elemento a^{-1} se le llama *inverso* de a.

Muchas veces en matemática, es útil el considerar subcojuntos o únicamente partes específicas de un objeto que estamos estudiando. Esta idea de «restringir» el objeto que estamos trabajando también puede aplicarse a la teoría de grupos, y es de hecho el motor de gran parte de ésta.

1.32 Definición (Subgrupo)**.** Decimos que $H \subseteq G$ es un subgrupo de G si cumple las siguientes propiedades.

- **Cerradura:** Para cualesquiera $a, b \in H$ se cumple que $ab \in H$.

- **Elemento neutro:** El elemento neutro e de G pertenece al conjunto, es decir $e \in H$,

- **Inversos:** Para todo elemento $a \in H$ se cumple que $a^{-1} \in H$.

En ese caso decimos que H es un *subgrupo* de G y lo denotamos con $H \leq G$. Además denotamos $H < G$ cuando H es un subgrupo de G pero $H \neq G$, en ese caso llamamos a H un subgrupo propio.

Estudiamos la idea de una clase lateral, un «desfase» de un subgrupo al «multiplicarlo» por un elemento del grupo. Formalizamos estas ideas con las definiciones de congruencia módulo un subgrupo y de clases laterales[6].

1.33 Definición (Clase lateral). Sea H un subgrupo de G y sea $a \in G$. Definimos la clase lateral izquierda de H, denotada aH, como el conjunto $\{ah \in G, h \in H\}$. Es decir, la multiplicación de a (por la izquierda) con todos los elementos de H. Las clases laterales derechas Ha se definen de forma análoga.

Ahora mostraremos que las clases laterales de un subgrupo inducen una relación de equivalencia.

1.34 Teorema. *Sea H un subgrupo de G, entonces la relación $a \sim b \iff a^{-1}b \in H$ es una relación de equivalencia, donde la clase de equivalencia de $a \in G$ es precisamente su clase lateral izquierda aH.*

Puesto que toda relación de equivalencia induce una partición, en la que las clases de equivalencia son disjuntas o iguales; y en la que dos clases de equivalencia son iguales si y sólo si los elementos están relacionados, obtenemos inmediatamente los siguientes corolarios.

1.35 Corolario. *Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Entonces*

- *El grupo G es la unión de todas las clases laterales de H.*
- *Dos clases laterales aH, bH son ya sea iguales o disjuntas.*
- *Dados $a, b \in G$ se cumple que $aH = bH$ si y sólo si $a^{-1}b \in H$.*

Ahora en cuanto a las cardinalidades de las clases laterales, y la cantidad de clases laterales, tenemos los siguientes teoremas.

1.36 Teorema. *Sea G un grupo y H un subgrupo de G, además sea $a \in G$ un elemento arbitrario, entonces $|aH| = |H| = |Ha|$.*

1.37 Teorema. *Sea $\mathcal{L} = \{aH, a \in G\}$ el conjunto de clases laterales izquierdas, y sea $\mathcal{R} = \{Ha, a \in H\}$ el conjunto de clases laterales derechas de H. Entonces $|\mathcal{L}| = |\mathcal{R}|$, es decir, un subgrupo H tiene la misma cantidad de clases laterales izquierdas que clases laterales derechas.*

Una vez hemos mostrado que hay la misma cantidad de clases laterales derechas e izquierdas, y que cada clase lateral tiene la misma cantidad de elementos, podemos dar definiciones respecto a dichas cantidades.

1.38 Definición (Índice de un subgrupo)**.** Sea H un subgrupo de un grupo G. Definimos al índice de H sobre G, denotado $[G : H]$, como la cardinalidad del conjunto de clases laterales izquierdas

$$[G : H] = |\{aH, a \in G\}| .$$

Es decir, es la cantidad de clases laterales izquierdas de un subgrupo.

Gracias al teorema 1.37, vemos que en la definición anterior, el índice de un subgrupo es el mismo ya sea que se defina por clases laterales derechas o izquierdas.

Notemos que si $H = \langle e \rangle = \{e\}$ el subgrupo trivial, entonces $aH = \{ae\} = \{a\}$, por lo que cada elemento induce una clase lateral distinta y cumple $[G : \langle e \rangle] = |G|$. Este hecho será importante para la demostración del teorema de Lagrange.

Brindamos uno de los teoremas más importantes en cuanto a la cantidad de clases laterales, y en particular su relación con el orden de sus elementos.

1.39 Teorema. *Sea G un grupo, H un subgrupo de G, y K un subgrupo de H; es decir, sean K, H, G grupos de la forma $K \leq H \leq G$. Entonces se cumple la ecuación $[G : K] = [G : H] [H : K]$.*

A continuación definimos una de las herramientas más importantes en la teoría de grupos, funciones que van de grupos a grupos y preservan su estructura.

1.40 Definición (Homomorfismo)**.** Sean G, H dos grupos y sea $f : G \to H$ una función entre ellos, decimos que esta función es un *homomorfismo* si para todo $a, b \in G$ se cumple que $f(ab) = f(a) f(b)$.

En analogía directa al caso de los conjuntos con las funciones, y las topologías con las funciones continuas, enunciamos dos propiedades fundamentales de los grupos y los homomorfismos.

1.41 Teorema. *Sean G, H, K subgrupos y sean $f : G \to H, g : H \to K$ homomorfismos entre ellos, entonces la composición $g \circ f : G \to K$ es un homomorfismo.*

Demostración:

Sean $a, b \in G$ elementos cualesquiera, entonces por definición de la composición y como tanto f como g son homomorfismos se cumple que

$$g \circ f(ab) = g(f(ab)) = g(f(a) f(b)) = g(f(a)) g(f(b)) = g \circ f(a) g \circ f(b) .$$

1.42 Teorema. *Dado un grupo G, la función identidad $\mathbf{1}_G : G \to G$ es un homomorfismo.*

Por otro lado, una propiedad importante de los homomorfismos es que deben mapear el elemento neutro de un grupo al elemento neutro de su contradominio.

1.43 Teorema. *Sean G, H subgrupos y sea $f : G \to H$ un homomorfismo entre ellos. Entonces si $e, 1$ son las identidades de G y H repectivamente se cumple que $f(e) = 1$.*

Vemos que hay cierta importancia en tanto los elementos que se mapean a la identidad del dominio, como el conjunto de imágenes del homomorfismo, por lo que hacemos las siguientes definiciones.

1.44 Definición (Kernel e imagen)**.** Sean G, H grupos con neutros $e, 1$ respecivamente, y sea $f : G \to H$ un homomorfismo entre ellos. Entonces definimos al *kernel* $\ker f$ como el conjunto $\ker f = \{g \in G, f(g) = 1\} = f^{-1}(1)$. Además, definimos la *imagen* de un homomorfismo como el conjunto $Im\, f = \{h \in H, h = f(g) g \in G\} = f(G)$.

Para continuar, definimos distintos tipos de homomorfimos acorde a las propiedades de la función subyacente.

1.45 Definición (Monomorfismo, epimorfismos, isomorfismos y automorfismos)**.** Sean G, H grupos y sea $f : G \to H$ un homomrfismo entre ellos. Demicimos que

- f es un *monomorfismo* si f es una función inyectiva.
- f es un *epimorfismo* si f es una función sobreyectiva.
- f es un *isomorfismo* si f es una función biyectiva.
- f es un *automorfismo* f es un isomorfismo y $G = H$, es decir un automorfimsmo es un isomorfismo de un grupo a sí mismo.

Además, si entre dos grupos G, H existe un isomorfismo $f : G \to H$ decimos que G es isomorfo a H, denotado $G \simeq H$.

En el caso en que un automorfismo $f_g : G \to G$ sea únicamente conjugar por un elemento dado $g \in G$, decimos que es un automorfismo interno.

1.46 Definición (Automorfismo interno)**.** Sea G un grupo y sea $g \in G$ un elemento del grupo. un homomorfismo $f_g : G \to G$ es un *automorfismo interno* si es de la forma $f_g(x) = gxg^{-1}$.

Puesto que todo automorismo interno f_g tiene un inverso $f_{g^{-1}}$ y que cualesquiera dos automorfismos internos pueden componerse pues tienen el mismo dominio y contradominio, podemos operarlos a través de la composición. En particular, motivamos el siguiente lema y definición.

1.47 Lema. *Sea G un grupo y sea $Aut(G)$ el conjunto de los automorfismos internos de G, entonces $Aut(G)$ es un grupo bajo la operación de la composición.*

1.48 Definición (Grupo de automorfismos internos)**.** Sea G un grupo, entonces definimos a $Aut(G)$ como el grupo de los automorfismos internos de G bajo la operación de la composicíon.

Por último, caracterizamos los grupos que tienen grupo de automorfismos internos trivial.

1.49 Teorema. *Un grupo G es abeliano si y sólo si su grupo de automorfismos $Aut(G)$ es el grupo trivial.*

Ahora enunciamos un teorema que permite caracterizar los monomorfismos de grupos.

1.50 Teorema. *Un homomorfismo de gurpos $f : G \to H$ es un monorfismo (i.e. es inyectivo) si y sólo si $ker\, f = \{e_G\}$.*

1.3.2. Subgrupos normales y grupos cociente

Estudiaremos un tipo específico de subgrupos que es funamental en el estudio de la teoría de grupos, el cual nos brinda una gran cantidad de herramientas y teoremas que nos permitirán desarrollar una gran cantidad de teoría. Son, en pocas palabras, los grupos invariantes bajo la conjugación[6].

1.51 Definición (Subgrupo normal)**.** Si N es un subgrupo de un grupo G, decimos que N es un *subrupo normal* de G, denotado $N \trianglelefteq G$, si para todo $a \in G$ y todo $n \in N$ se cumple que ana^{-1} pertenece a N. Es decir, $aNa^{-1} \subseteq N$.

Si N es un subgrupo normal de G, entonces podemos definir una multiplicación entre las clases de equivalencia que son las clases laterales. Esto será de gran utilidad pues nos permitirá definir un grupo sobre estas clases de equivalencia.

1.52 Teorema. *Si* $N \trianglelefteq G$ *un subgrupo normal de un grupo* G*, entonces el conjunto de todas las clases laterales (izquierdas) es un grupo bajo la operación* $aN \cdot bN = (a \cdot b)\, N$*, y tiene orden* $[G : N]$*.*

Este teorema nos permite hacer la siguiente definición sobre el conjunto de clases laterales.

1.53 Definición (Grupo cociente)**.** Sea G un grupo y sea N un subgrupo normal. Definomos al *grupo cociente* G/N como el conjunto de todas las clases laterales de N sobre G bajo la operación $aN \cdot bN = (a \cdot b)\, N$.

Los grupos cocientes son una de las construcciones más útiles de la teoría de grupos, y traen consigo una gran cantidad de relaciones con los homomorfismos. Introducimos un homomorfismo canónico que nos transporta de un grupo G a su grupo cociente G/N.

1.54 Teorema. *Si* $f : G \to H$ *es un homomorfismo entre dos grupos entonces* $\ker f$ *es un subgrupo normal de* G*. Por otro lado, si* $N \trianglelefteq G$ *entonces la función* $\pi : G \to G/N$ *dada por* $\pi\,(a) = aN$ *es un epimorfismo de grupos conocido como la proyección canónica, la cual cumple que* $\ker \pi = N$*.*

Por último, demostramos algunos de los teoremas más importantes en la teoría de grupos, estos teoremas son llamados en algunas fuentes los teoremas de isomorfía de Noether, en honor a Emmy Noether, quien los publicó en 1927.

1.55 Teorema. *Si* $f : G \to H$ *es un homomorfismo de grupos y* N *es un subgrupo normal de* G *tal que* $N \leq \ker f$*, entonces existe un único homomorfismo* $\overline{f} : G/N \to H$ *tal que* $\overline{f}\,(aN) = f\,(a)$ *para todo* $a \in G$*. Además,* $Im\,\overline{f} = Im\, f$*,* $\ker \overline{f} = \ker f/N$ *y* $\overline{f}$ *es un isomorfismo si y sólo si* $N = \ker f$ *y* f *es sobreyectiva.*

1.56 Teorema. *Si* $f : G \to H$ *es un homomorfismo de grupos y* $N \trianglelefteq G, M \trianglelefteq H$ *tales que* $f\,(N) \leq M$ *entonces* f *induce un homomorfismo* $\overline{f} : G/N \to H/M$ *dado por* $\overline{f}\,(aN) = f(a)M$*. Además* $\overline{f}$ *es un isoorfismo si y sólo si* $Im\, f \vee M = H$ *y* $f^{-1}\,(M) \subseteq N$*. En particular, si* f *es sobreyectiva,* $f(N) = M$ *y* $\ker f \subseteq N$ *entonces* $\overline{f}$ *es un isomorfismo.*

1.3.3. Grupo producto

En la siguiente sección, daremos una forma de crear grupos nuevos a través de «unir» grupos conocidos, esta sección guarda una profunda relación con las secciones

1.1.2 y 1.2.2, en las que se discuten las propiedades de los productos de conjuntos y productos de topologías.

1.57 Definición (Grupo producto). Si $G_i, i \in I$ es una familia indizada de grupos, entonces definimos el grupo producto $\prod_{i \in I} G_i$ como el producto cartesiano de los grupos con la operación $(a_i) \cdot (b_i) = (a_i \cdot b_i)$. Es decir, el grupo producto es el producto cartesiano donde la multiplicación se hace coordenada a coordenada.

1.58 Lema (Proyecciones). *Sea $\prod_{i \in I} G_i$ el grupo producto de una familia de grupos. Entonces las funciones de proyección, para cada $k \in I$, $\pi_k : \prod_{i \in I} G_i \to G_k$ son un homomorfismo.*

Es claro que las funciones de proyección son un homomorfismo, pues la multiplicación del grupo producto es coordenada a coordenada.

1.59 Teorema. *Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos y sea $G = \prod_{i \in I} G_i$ su grupo producto, entonces para cualquier grupo K y cualquier familia de homomorfismos $f_i : K \to G_i$, existe un único homomorfismo $f : K \to G$ tal que $\pi_i \circ f = f_i$ para todo $i \in I$.*

Demostración:

Puesto que todo homomorfismo hacia el grupo producto es una función hacia el producto cartesiano, el teorema 1.13 nos asegura que existe una única función $f : K \to G$ tal que $\pi_i \circ f = f_i \forall i \in I$. Únicamente queda verificar que es un homomorfismo.

En efecto, para cualesquiera $k, h \in K$

$$f(kh) = (f_i(kh))_{i \in I} = (f_i(k) f_i(h))_{i \in I} = (f_i(k))_i (f_i(h))_i = f(k) f(h).$$

Así como este teorema guarda una gran similitud con el teorema 1.13, enunciamos el análogo al teorema 1.15 el cual sigue la misma demostración usando el teorema demostrado anteriormente. Es decir, caracterizamos al producto de grupos, salvo isomorfismos, con esta propiedad.

1.60 Teorema. *Sea $\{G_i\}$, $i \in I$ una familia indizada de grupos y sea P un grupo con homomorfismos p_i tales que para cualquier familia de homomorfismos $f_i : K \to G_i$, $i \in I$ existe un únifo homomorfismo $f : K \to P$ tal que $p_i \circ f = f_i$ para todo $i \in I$. Entonces P es isomorfo a $\prod_{i \in I} G_i$.*

2. TEORÍA DE CATEGORÍAS

La teoría de categorías, por la generalidad y abstracción de sus definiciones y teoremas, es un área de la matemática que ha encontrado gran cantidad de aplicaciones y generalizaciones en el álgebra moderna y la topología. Puesto que la mayoría de objetos en matemática pueden verse como una categoría, el conocer y manejar esta teoría es muy útil para comprender de forma más general y diagramática muchos teoremas que aparecen a lo largo de diversas estructuras atgebraicas, tales como los teoremas de isomorfía. Comenzamos nuestro tratamiento de la teoría de categorías con algunas definiciones y nociones preliminares.

2.1. Definiciones

Comenzamos con una definición axiomática de una *categoría*, sin tomar en cuenta las restricciones que pueden surgir de la teoría de conjuntos[10].

2.1 Definición (Categoría)**.** Una *categoría* C es una colección O_C de *objetos* $a, b, c, \ldots$ y una colección A_C de *morfismos* o *flechas* $f, g, h, \ldots$ junto con cuatro operaciones. Cuano no exista ambigüedad, permitimos el abuso de notación diciendo que un objeto a pertenece a C o que un morfismo f pertenece a C.

- A cada flecha f en A_C se le asigna un objeto a en O_C llamado *dominio*, denotado $a = \mathbf{dom}\, f$.

- A cada flecha f en A_C se le asigna un objeto b en O_C llamado *codominio*, denotado $b = \mathbf{cod}\, f$.

Si una flecha, o morfismo, cumple que $\mathbf{dom}\, f = a, \mathbf{cod}\, f = b$ entonces podemos escribir $f : a \to b$ ó $a \xrightarrow{f} b$. Análogamente, escribimos $f : a \to b$ para denotar $\mathbf{dom}\, f = a, \mathbf{cod}\, f = b$.

- A cada objeto a en O_C se le asigna un morfismo $\mathbf{1}_a : a \to a$ llamado *identidad*.

- A todo par de morfismos $f : a \to b, g : b \to c$ en A_C tales que $\mathbf{cod}\, f = \mathbf{dom}\, g$, se les asigna un morfismo $h : a \to c$ llamado *composición* y denotado $g \circ f : \mathbf{dom}\, f \to \mathbf{cod}\, g$. Es decir, a morfismos en la configuración $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$, se les asocia un morfismo $a \xrightarrow{g \circ f} c$; notemos que el orden en el que se escribe la composición es el contrario al orden en el que se representa diagramáticamente, esto es para preservar la convención de la composición de funciones en la teoría de conjuntos.

Además de estas operaciones, las categorías deben cumplir los siguientes axiomas.

1. *Asociatividad de la composición:* Para morfismos cualesquiera $f : a \to b, g : b \to c, h : c \to d$, se cumple que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, por lo que la expresión $h \circ g \circ f$ está bien definida.

2. *Ley de unidad:* Para todo objeto b en O_C y para cualesquiera morfismos f, g en A_C tales que $b = \mathbf{cod}\, f = \mathbf{dom}\, g$, se cumple que $\mathbf{1}_b \circ f = f$ y $g \circ \mathbf{1}_b = g$.[1]

2.2 Definición ($\mathrm{Hom}_C(a, b)$)**.** Dada una categoría C, y dados los objetos a y b en O_C, denotamos $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ a la colección de todos los morfismos $f : a \to b$ de A_C entre ellos. Cuando no exista ambigüedad, pueden usarse las siguientes notaciones

$$\mathrm{Hom}_C(a, b) = \mathrm{Hom}(a, b) = C(a, b) = (a, b)_C = (a, b).$$

Por lo general, se usan las notaciones $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ o $C(a, b)$, la segunda es útil pues es breve, y la primera enfatiza que estamos trabajando con una colección de morfismos. Dependiendo del contexto se usará mayoritariamiente una u otra.

Ahora definimos formalmente la idea intuitiva de una subcategoría.

2.3 Definición (Subcategoría)**.** Sea C una categoría, una *subcategoría* S de C es un par de colecciones O_S, A_S donde O_S es una colección de elementos de O_C (i.e. $O_S \subseteq O_C$ en caso que O_C sea una clase) y A_S consiste de elementos de A_C ($A_S \subseteq A_C$). Además O_S y A_S cumplen las siguientes propiedades:

- Para todo f en A_S, los objetos $\mathbf{cod}\, f, \mathbf{dom}\, f$ pertenecen a O_S.

- Para todo a en O_S se cumple que $\mathbf{1}_a$ en A_S.

[1]Notar que $f \circ \mathbf{1}_b$ y $\mathbf{1}_b \circ g$ no tienen por qué estar definidos, pues no necesariamente $b = \mathbf{dom}\, f$ ni $b = \mathbf{cod}\, g$.

- Para morfismos cualesquiera f, g en A_S tal es que $\mathbf{cod}\, f = \mathbf{dom}\, f$ se cumple que $g \circ f$ pertenece a A_S.

Donde las funciones de dominio y codominio, así como la composición de S coinciden con las de C.

En pocas palabras, una subcategoría es una subcolección de una categoría que también es una categoría con la misma composición.

2.4 Definición (Subcategoría llena y ancha)**.** Dada una categoría C decimos que una subcategoría S es *ancha* si $O_S = O_C$, y decimos que es *llena* si para x, y objetos de S cualesquiera se cumple que $\mathrm{Hom}_S(x, y) = \mathrm{Hom}_C(x, y)$.

En general, una subcategoría ancha es una que tiene todos los objetos, y una subcategoría llena es una que preserva todos los morfismos de sus objetos.

Para comprender mejor la definición de categoría, veremos el ejemplo más emblemático y el que motivó muchos de los resultados en teoría de categorías: la categoría de los conjuntos.

2.5 Ejemplo (Categoría de conjuntos)**.** Definamos una categoría **Set** cuya colección de objetos $O_{\mathbf{Set}}$ es la colección $A, B, C, \ldots$ de todos los conjuntos, y su colección de flechas $A_{\mathbf{Set}}$ es la colección de todas las funciones entre conjuntos $f, g, h, \ldots$.

Para esta categoría las definiciones son bastante naturales. Por ejemplo, para cada conjunto A podemos tomar la función identidad $\mathbf{1}_A : A \to A$; y para cada función $f : A \to B$ podemos tomar $\mathbf{dom}\, f = A, \mathbf{cod}\, f = B$ como su dominio y codominio precisamente. Para todo par de funciones $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ podemos tomar como su composición a la composición de ambas funciones $g \circ f : A \to C$. Con las operaciones de una categoría ya definidas, únicamente basta con verificar que se cumplen los axiomas de una categoría.

1. **Asociatividad de la composición:** Sean f, g, h tres funciones de la forma $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, deseamos verificar que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Sea $x \in A$ cualquier elemento, aplicando f obtenemos $f(x) := y$, aplicando $h \circ g$ a y tenemos $h \circ g(y) = h(g(y))$, definiendo $z := h(y)$ tenemos que $((h \circ g) \circ f)(x) = h(z)$. Por otro lado, evaluando $(h \circ (g \circ f))(x)$ tenemos $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ y entonces $(h \circ (g \circ f))(x)\, h(z)$. Puesto que

x era arbitrario y f, g, h eran funciones cualesquiera se verifica que la composición es asociativa.

2. **Ley de unidad:** Puesto que $\mathbf{1}_B(y) = y$ para todo $y \in B$ entonces se cumple que para toda función $f : A \to B, g : B \to C$ tenemos $\mathbf{1}_B \circ f(x) = \mathbf{1}_B(f(x)) = f(x)$ y $g \circ \mathbf{1}_B(y) = g(\mathbf{1}_B(y)) = g(y)$. De ello, se verifican los axiomas de categoría y tenemos la categoría de todos los conjuntos.

Observamos que para los conjuntos, el definir las operaciones de identidad, dominio, codominio y composición fue bastante natural pues en los conjuntos ya se tienen estas nociones; que en este caso coinciden precisamente con las definiciones necesarias para definir una categoría.

Por esto, el verificar los axiomas de una categoría fue únicamente demostrar hechos que ya conocemos sobre las funciones: que la composición es asociativa y que la función identidad se comporta como esperamos. Este ejemplo nos ayuda a tener una idea concreta cuando hablemos de categorías, ya que para la mayoría de resultados y definiciones en teoría de categorías podemos encontrar un análogo en la categoría de los cojuntos para ayudarnos en la conceptualización de las ideas.

Aunque la idea de categoría es bastante general y engloba muchísimos conceptos familiares, surgen ciertas consideraciones al no haber definido rigurosamente a qué nos referimos con *colección*. Por este motivo, haremos unas definiciones del vocabulario que usaremos para definir las categorías dentro del marco de la teoría de conjuntos.

Las siguientes definiciones son formalizaciones de la definición de categoría dentro de la teoría de conjuntos. Éstas no son esenciales comprender los principales resultados de teoría de categorías y no es importante que el lector maneje estos conceptos con rigurosidad.

2.6 Definición (Categoría pequeña)**.** Una categoría pequeña C es una categoría cuya colección de objetos O_C y de morfismos A_C son un conjunto.

2.7 Definición (Categoría localmente pequeña)**.** Una categoría localmente pequeña es una categoría tal que para todo par de objetos C, D en O_C, la colección de morfismos $\mathrm{Hom}(C, D)$ es un conjunto.

2.8 Definición (Categoría grande)**.** Una categoría grande es una categoría cuya colección de objetos O_C o de morfismos A_C son una clase propia.

En este texto usaremos la formalización de clases y conjuntos para definir las categorías pequeñas, esto por la familiaridad de los conceptos a nivel de licenciatura. Una formalización más común en la literatura es la de los conjuntos pequeños (miembros de algún conjunto universo U) y conjuntos grandes (conjuntos que no pertenecen al universo, el universo U por ejemplo es un conjunto grande). En esta formalización, las categorías pequeñas son categorías cuyo conjunto de objetos es un conjunto pequeño, una categoría grande es una categoría cuyo conjunto de objetos es un conjunto grande, y una categoría localmente pequeña es una categoría cuyo conjunto de morfismos entre dos objetos siempre es un conjunto pequeño.

En el ejemplo 2.5, la colección de todos los conjuntos no puede ser en sí mismo un conjunto, por lo que la categoría **Set** que definimos en él no puede ser una categoría pequeña, pues O_C no es un conjunto.

2.9 Nota. A partir de ahora, para cualquier categoría C, los objetos O_C serán una clase, aunque no necesariamente una clase propia.

Ahora, veamos algunos ejemplos de categorías más allá de la categoría de los conjuntos. Los ejemplos a continuación ilustran lo versátiles que pueden ser las categorías y la gran cantidad de objetos que engloban. Comenzamos viendo las categorías como relaciones.

2.10 Ejemplo (Relaciones de equivalencia)**.** Recordemos que dado un conjunto A, una relación $\mathcal{R}$ en A es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times A$. Luego, si $(a, b) \in \mathcal{R} \subseteq A \times A$, podemos decir que *$a$ está relacionado con b*, y se denota $a\mathcal{R}b$.

Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ una relación, decimos que es una *relación de equivalencia* si es una relación reflexiva, transitiva y simétrica. Si $\mathcal{R}$ cumple estas tres propiedades, decimos que es una *relación de equivalencia.* Generalmente las relaciones de equivalencia se denotan por $\sim$.

Ahora mostraremos que todas las relaciones de equivalencia son una categoría. Sea $\sim \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia, definimos categoría $C_\sim$ de la siguiente forma:

Sea el conjunto $A := O_\sim$ el conjunto de objetos, y sea la relación $\sim = A_\sim$ el conjunto de morfismos. En este caso, los objetos de $C_\sim$ son los elementos del conjunto $a \in A$, y los morfismos de la categoría son pares ordenados $(a, b) \in \sim$ en la relación. Para comenzar, presentamos las operaciones de una categoría:

- Dado un morfismo $(a, b) \in A_\sim$, definimos el dominio y codominio como las proyecciones, es decir: $\mathbf{dom}\ (a, b) = a$, $\mathbf{cod}\ (a, b) = b$.

- Dados $(a, b), (b, c) \in \sim$, por transitividad sabemos que $(a, c) \in \sim$, esto pues $a \sim b$, $b \sim c$ implica $a \sim c$. Por lo tanto, podemos definir la composición de la forma $(b, c) \circ (a, b) := (a, c)$ y la transitividad nos asegura que está bien definida.

- Por último, puesto que una relación de equivalencia es reflexiva, entonces para todo $a \in A$ se cumple que $a \sim a$ y por lo tanto $(a, a) \in \sim$. Entonces para todo objeto $a \in O_\sim$, el morfismo identidad está definido por $\mathbf{1}_a := (a, a)$.

En este caso, puesto que las funciones de dominio y codominio son las proyecciones, es sencillo verificar las condiciones de dominio y codominio para la composición y la identidad. Por ejemplo, para la composición se cumple que si $\mathbf{cod}\ (a, b) = b = \mathbf{dom}\ (b, c)$ entonces $\mathbf{dom}\ (a, b) = a = \mathbf{dom}\ (b, c) \circ (a, b) = \mathbf{dom}\ (a, c)$ y $\mathbf{cod}\ (b, c) = c = \mathbf{cod}\ (b, c) \circ (a, b) = \mathbf{cod}\ (a, c)$.

Ahora verificamos que estas operaciones efectivamente cumplan los axiomas de una categoría.

1. **Asociatividad de la composición:** Una vez hemos verificado que la composición está bien definida, verificamos la asociatividad:

$$(c, d) \circ \Big((b, c) \circ (a, b) \Big) = (c, d) \circ (a, c) = (a, d)$$
$$\Big((c, d) \circ (b, c) \Big) \circ (a, b) = (b, d) \circ (a, b) = (a, d),$$

   y la composición es asociativa.

2. **Ley de unidad:** Para todo objeto $b \in A$ y para morfismos cualesquiera $(a, b), (b, c)$ se cumple que $\mathbf{1}_b \circ (a, b) = (b, b) \circ (a, b) = (a, b)$ y $(b, c) \circ \mathbf{1}_b = (b, c) \circ (b, b) = (b, c)$, por lo que $C_\sim$ cumple los axiomas y es una categoría.

Una vez hemos demostrado que todas las relaciones de equivalencia son una categoría, podemos tomar cualquiera de estas relaciones que conozcamos y automáticamente será también una categoría.

Por ejemplo, la relación $a \sim_n b \iff a \equiv b \pmod{n}$ es de equivalencia, por lo tanto dado un entero n, podemos definir una categoría C donde los objetos son los enteros $a \in \mathbb{Z}$ y dados dos enteros a, b, existe un único morfismo entre ellos si y sólo si $a \equiv b \pmod{n}$. Esta estructura es una categoría.

2.11 Ejemplo (Relaciones de preorden)**.** Notemos que en el ejemplo anterior, nunca usamos en la demostración que la relación de equivalencia fuera simétrica. Esto no es accidental, de hecho existe otro tipo de relación que también es una categoría, pero tiene menos restricciones.

Decimos que una relación $\preceq \subseteq A \times A$ es una *relación de preorden* si es una relación reflexiva y transitiva.

Definiendo una categoría $C_{\preceq}$, sea $O_{\preceq}$ el conjunto A y sea $A_{\preceq}$ la relación $\preceq \subseteq A \times A$. Usando exactamente las mismas definiciones y demostraciones del ejemplo 2.10 obtenemos que $C_{\preceq}$ es una categoría.

Por ejemplo, la relación de divisibilidad en los enteros es una relación de preorden. Definiendo el conjunto de objetos como los enteros $\mathbb{Z}$, y existe un morfismo entre a y b si y sólo si $a \mid b$, obtenemos una categoría.

2.12 Ejemplo (Relaciones de orden)**.** Puesto que ya demostramos que cualquier relación transitiva y reflexiva es una categoría, cualquier propiedad extra que agreguemos seguirá siendo una categoría. Luego, una *relación de orden* es una relación que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Una vez más, como la relación es reflexiva y transitiva, ésta es automáticamente una categoría.

Dado un conjunto A, definimos la relación $\preceq$ en los conjuntos potencia $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(A)$, donde $B \preceq C$ si y sólo si $B \subseteq C$. Esta relación es una relación de orden, por lo tanto también es una categoría.

Como una nota, el ejemplo de la divisibilidad $a \mid b$ en los enteros $\mathbb{Z}$ visto en el ejemplo 2.12 no es una relación de orden, porque $1 \mid -1$ y $-1 \mid 1$ pero $1 \neq -1$. La relación de divisibilidad en los naturales $\mathbb{N}$ sí es una relación de orden.

En los ejemplos anteriores determinamos que podemos ver las relaciones de preorden como categorías. En dichos casos, dados cualesquiera dos objetos $a, b \in A$ existe a lo más un solo morfismo entre los objetos a, b en caso $(a, b) \in \mathcal{R}$. Ahora, exploraremos qué pasa cuando tenemos únicamente un objeto en la categoría.

2.13 Ejemplo (Monoides)**.** Recordemos que dado un conjunto M y una operación $\cdot : M \times M \to M$ que mapea $\cdot : (a, b) \mapsto a \cdot b = ab$, decimos que $(M, \cdot)$ es un monoide si la operación cumple los siguientes axiomas.

1. **Asociatividad:** Dados cualesquiera $a, b, c \in M$ se cumple que $c \cdot (b \cdot a) = (c \cdot b) \cdot a$.

2. **Identidad:** Existe un $e \in M$ tal que para todo $a \in M$ se cumple que $e \cdot a = a \cdot e = a$.

Notamos que la operación $\cdot$ cumple axiomas que recuerdan a los axiomas de la composición de morfismos en una categoría. Por lo que tiene sentido pensar que los elementos del monoide $a, b, c \ldots$ sean precisamente los morfismos, y la composición $b \circ a$ de los morfismos sea el producto $b \cdot a$.

Sólo queda determinar quién será el conjunto de objetos. Puesto que para cualesquiera $a, b \in M$ el producto $a \cdot b$ está definido, necesitamos que $\mathbf{dom}\, a = \mathbf{cod}\, b$. Si existieran dos objetos x, y distintos, tales que $x \xrightarrow{a} y$ para algún $a \in M$, entonces tendríamos que el producto $a \cdot a$ no está definido, lo cual no respetaría la estructura del monoide que deseamos preservar. Por lo tanto, una definición del conjunto de objetos puede ser el conjunto de un solo elemento $\{\bullet\}$. Con estas consideraciones, pasamos a definir la categoría asociada a un monoide.

Sea $(M, \cdot)$ un monoide, definimos la categoría $\boldsymbol{C}M$. El conjunto de objetos O_M será el conjunto de un elemento $\{\bullet\}^2$. Las funciones dominio y codominio son las funciones que mapean los morfismos al elemento $\bullet$, $\mathbf{dom}, \mathbf{cod} : A_M \to O_M$ de la forma $\mathbf{dom}\, a = \bullet, \mathbf{cod}\, b = \bullet$ para cualquier $a, b \in M = A_M$.

El conjunto de morfismos A_M será precisamente el monoide M, y dados dos morfismos $\bullet \xrightarrow{a} \bullet \xrightarrow{b} \bullet$ definimos la composición de la forma $b \circ a := b \cdot a$. Además, para el único objeto $\bullet$, definimos al morfismo identidad como la identidad del monoide $\mathbf{1}_\bullet := e$

[2] La naturaleza del elemenento $\bullet$ no es importante.

Por último, verificar los axiomas de una categoría es simplemente reescribir los axiomas del prducto en el lenguaje de la composición.

Por ejemplo, par cualesquiera morfismos a, b tales que $\mathbf{cod}\, a = \bullet = \mathbf{dom}\, b$ se cumple que $\mathbf{1}_\bullet \circ a = e \cdot a = a$ y $b \circ \mathbf{1}_\bullet = b \cdot e = b$. Por otro lado, dados morfismos $\bullet \xrightarrow{a} \bullet \xrightarrow{b} \bullet \xrightarrow{c} \bullet$ se cumple que $(c \circ b) \circ a = (c \cdot b) \cdot a = c \cdot (b \cdot a) = c \circ (b \circ a)$. Por lo tanto se cumplen los axiomas y $\boldsymbol{C}M$ es una categoría.

2.14 Ejemplo (Grupos)**.** Podemos dar un tratamiento similar a los grupos, definimos un grupo de la siguiente forma. Dado un conjunto G con una operación binaria $\cdot$, decimos que éste es un grupo si es un monoide y además para todo $a \in G$ existe un $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.
Puesto que todos los grupos son monoides, la demostración del ejemplo 2.13 puede copiarse textualmente y obtenemos una categoría asociada a un grupo $\boldsymbol{C}G$.

Ya estudiamos el caso con múltiples objetos y un único morfismo entre ellos, como el caso de las relaciones. También estudiamos el caso de un único objeto y varios morfimsos, en el caso de los monoides y los grupos. Ahora estudiaremos algunas de las categorías más usadas en matemática.

2.15 Ejemplo (Espacios topológicos **Top**)**.** Movemos nuestra atención a una de las áreas más estudiadas: los espacios topológicos. Para una definición formal de una topología y sus propiedades podemos dirigirnos a la sección 1.2. En analogía a la definición de la categoría **Set** del ejemplo 2.5, definiremos una categoría de los espacios topológicos.

Definimos la categoría **Top** de la siguiente forma, la colección de objetos $O_{\mathbf{Top}}$ es la clase de los espacios topológicos X, y la colección de morfismos $A_{\mathbf{Top}}$ es la clase de todas las funciones continuas entre espacios topológicos $f : X \to Y$. Puesto que estas son funciones entre conjuntos, podemos usar las mismas definiciones que usamos definiendo la categoría **Set**, con el único agregado de verificar que la operación identidad y la operación composición siguen obteniendo una función continua y por lo tanto un morfismo.

- Dado un morfismo $f \in A_{\mathbf{Top}}$, por ser una función continua, sigue siendo un a función. Las funciones $\mathbf{dom}\,, \mathbf{cod}$ son respectivamente el dominio y el contradominio de f.

- De la categoría **Set**, para cualesquiera dos funciones continuas $f : X \to Y, g : Y \to Z$ existe una función composición $g \circ f : X \to Z$. Luego, del teorema 1.22 tenemos que $g \circ f$ es una función continua y por lo tanto un morfismo de la categoría **Top**. De ello, dados dos morfismos $f, g \in A_{\mathbf{Top}}$ tales que $\mathbf{cod}\, f = \mathbf{dom}\, g$ existe el morfismo $g \circ f \in A_{\mathbf{Top}}$ que cumple $\mathbf{dom}\, g \circ f = \mathbf{dom}\, f$ y $\mathbf{cod}\, g \circ f = \mathbf{cod}\, g$.

- Para todo espacio topológico (un conjunto) X, existe una función identidad $\mathbf{1}_X : X \to X$, pero debemos verificar que esta función es un morfismo en la categoría (es decir, que es una función continua). Recordando el teorema 1.21, en efecto la identidad es una función continua y por lo tanto al objeto X podemos asociarle el morfismo $\mathbf{1}_X$.

Una vez hemos verificado que la composición de morfismos y la función identidad están bien definidas y coinciden con las definiciones de la categoría **Set**, las propiedades de asociatividad y ley de unidad se heredan automáticamente de ésta. Mostrando así que los espacios topológicos junto con las funciones continuas son una categoría.

A diferencia de los ejemplos de las relaciones y los monoides, donde tanto los objetos como los morfismos eran conjuntos; las categorías **Set**, **Top** no pueden ser categorías pequeñas, pues la clase de todos los conjuntos o la clase de todos los espacios topológicos no pueden ser un conjunto. Aún así, tanto **Set** como **Top** son categorías localmente pequeñas, pues dados dos conjuntos A, B, la colección de funciones $f : A \to B$ es un conjunto, por lo que $\mathrm{Hom}\,(A, B)$ es un conjunto y no una clase propia.

Así como definimos la categoría de los espacios topológicos, se pueden definir categorías para las principales estructuras matemáticas.

2.16 Definición. Siguiendo las herramientas usadas en el ejemplo 2.15, podemos definir las siguientes categorías grandes:

- **Set** es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y morfismos funciones entre conjuntos.

- $\mathbf{Set}_*$ es la categoría cuyos objetos son los conjuntos con un punto seleccionado y morfismos funciones entre conjuntos que preservan el punto distinguido.

- **Grp** es la categoría cuyos objetos son los grupos y morfismos son los homomorfismos entre grupos.
- **Ab** es la categoría cuyos objetos son los grupos abelianos y morfismos son los homomorfismos entre grupos.
- **Rng** es la categoría cuyos objetos son los anillos y morfismos son los homomorfismos entre anillos.
- **Vect** es la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales sobre un campo fijo $\mathbb{F}$ y morfismos son las aplicaciones lineales.
- **Top** es la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y morfismos son las funciones continuas.
- $\mathbf{Top}_*$ es la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos con un punto distinguido y morfismos son las funciones continuas que preservan dicho punto.
- **Toph** es la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y morfismos son las clases de homotopía de funciones continuas.
- **Cat** es la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y morfismos son los functores entre categorías[3].

Estas son algunas de las categorías más usuales, entre muchas otras, también podemos definir la categoría de los anillos conmutativos con los homomorfismos **CRng**, la categoría de los módulos sobre un anillo R con las aplicaciones lineales $R-\mathbf{Mod}$, o la categoría de las variedades suaves y las funciones suaves **Mfd**, y un largo etcétera. Las demostraciones de que estas estructuras son categorías siguen un camino muy similar al de **Top**: mostrar que la identidad es un morfismo de la categoría, mostrar que la propiedad que define los morfismos se preserva bajo la composición.

Una excepción interesante es **Toph**, los espacios topológicos con las clases de homotopía. Esta categoría surge naturalmente en la teoría de homotopía y por lo tanto en la topología algebraica. Esta categoría no tiene como morfismos ni funciones ni relaciones, ni elementos de los conjuntos; los morfismos de esta categoría son clases de equivalencia. Esta categoría, o su definición, será importante al momento

[3] Ver sección 2.3 para la definición de functor, notar que definimos la categoría de las categorías *pequeñas*.

de estudiar el grupoide fundamental, pues los morfismos de estas categorías se definen como clases de homotopía.

Así como en diversas estructuras, tenemos una idea de equivalencia de objetos vía isomorfismo, homeomorfismo, biyección, etc. En la teoría de categorías, una de las definiciones más importantes es la definición de morfismo inverso y de isomorfismo.

2.17 Definición (Isomorfismo)**.** Decimos que un morfismo $f \in A_C$ es un *isomorfismo* si existe un morfismo $g : \mathbf{cod}\, f \to \mathbf{dom}\, f$ (es decir, si $a \xrightarrow{f} b$ entonces $b \xrightarrow{g} a$) tal que

$$g \circ f = \mathbf{1}_a$$
$$f \circ g = \mathbf{1}_b.$$

En ese caso, decimos que f es el *morfismo inverso* de g. Además, dados dos objetos $a, b \in O_C$, decimos que son *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos y generalmente se denota $a \simeq b$.

Con esta definición podemos mostrar que si un morfismo tiene inverso, éste es único. La demostración es análoga a muchas áreas distintas del ágebra, con el único agregado que debemos cuidar las condiciones de domino y contradominio.

2.18 Teorema (Unicidad del inverso)**.** *Dada una categoría C y un morfismo $f \in Hom(a, b)$, si f tiene un inverso $g \in A_C$ entonces este inverso es único.*

Demostración:

Sean $g, g' \in Hom(b, a)$ dos inversos de f, entonces

$$g = \mathbf{1}_a \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ \mathbf{1}_b = g'.$$

Mostrando que $g = g'$ y por lo tanto el inverso único.

Con este resultado que parece tan trivial podemos mostrar una gran cantidad de corolarios en diversas áreas distintas, gracias a la generalidad de la teoría de categorías. Una vez hemos demostrado que una estructura es una categoría, obtenemos los resultados de forma directa.

2.19 Corolario. *En un monoide M, si un elemento es invertible entonces su inverso es único.*

2.20 Corolario. *En un grupo G, el elemento inverso es único.*

2.21 Corolario. *Dada la categoría de espacios topológicos* **Top***, si una función continua tiene inversa continua, entonces ésta es única.*

2.22 Corolario. *En la categoría* **Set***, si una función es invertible, entonces la inversa es única.*

Podemos obtener resultados análogos para todas las estructuras que hemos mostrado que son categorias, esto incluye los anillos, espacios vectoriales, relaciones de preorden, relaciones de equivalencia, etc. Mostrando la generalidad y el alcance que tiene la teoría de categorías para obtener resultados en muchas de las estructuras matemáticas de interés.

Antes de continuar con más temas propios de la teoría de categorías, exploramos una forma usual de trabajar visualmente con los objetos y morfismos de una categoría.

2.2. Diagramas

Estudiaremos una herramienta que nos será muy útil para entender gráficamente cómo actúan los morfismos y se relacionan los objetos, la cual además preserva el rigor necesario.

Introducimos el concepto de diagramas y diagramas conmutativos. Formalmente, la definición se da en términos de functores, por el momento introduciremos los diagramas de forma informal, haciendo hincapié en su uso y utilidad [10].

2.23 Definición (Diagramas)**.** Un diagrama en una categoría C es un multigrafo dirigido (no necesariamente finito) en el que los vértices del grafo son objetos de la categoría, y las aristas son morfismos de la categoría. Además, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

- cada objeto puede aparecer más de una vez en distintos vértices del grafo,
- entre cualesquiera dos vértices puede aparecer más de un morfismo,
- para cada objeto b en el diagrama, la función identidad $\mathbf{1}_b$ está implícitamente presente como un ciclo de cada vértice a sí mismo.

- para cada 2−camino $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ en el grafo, el morfismo composición $g \circ f$ aparece implícitamente de a a c.

Por ejemplo, en el diagrama 2.1,

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& c
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1. Diagrama triangular

aparecen explícitamente los morfismos $f : a \to b$, $g : b \to c$, $h : a \to c$. Implícitamente aparecen los morfismos $\mathbf{1}_a$, $\mathbf{1}_b$, $\mathbf{1}_c$ y el morfismo $g \circ f : a \to c$. Es importante resaltar que aunque en el diagrama hay dos morfismos, h y $g \circ f$, entre los objetos a y c, estos no necesariamente son iguales.

Por otro lado, en el diagrama 2.2,

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & b \arrow[d, "h"] \\
c \arrow[r, "g"'] & d
\end{tikzcd}$$

Figura 2.2. Diagrama cuadrado

aparcen los siguientes morfismos:

- **Explícitamente:** Los morfismos $f : a \to b$, $g : c \to d$, $k : a \to c$, $h : b \to d$.
- **Implícitamente:** Las identidades $\mathbf{1}_a$, $\mathbf{1}_b$, $\mathbf{1}_c$, $\mathbf{1}_d$, y las composiciones $f \circ g : a \to d$ y $k \circ g : a \to d$.

Una vez más, las composiciones $f \circ g$ y $k \circ g$ no necesariamente son iguales.

Cuando en un diagrama, el tomar caminos distintos da el mismo resultado, recibe un nombre especial y es una de las herramientas más usadas para expresar identidades entre morfismos.

2.24 Definición (Diagrama conmutativo)**.** Decimos que un diagrama en una categoría C es conmutativo si para cualquier par de objetos, todos los caminos entre ellos son iguales.

Por ejemplo,

- el diagrama 2.1 conmuta si y sólo si $h = g \circ f$, pues hay dos caminos de a hacia c.

- el diagrama 2.2 conmuta si y sólo si $g \circ k = f \circ h$, que son todos los caminos de a a d.

Ahora, veamos un par de lemas en los que se ilustrará perfectamente la utilidad del uso de los diagramas en demostraciones categóricas.

2.25 Lema. *Sea C una categoría, la asociatividad de la composición se cumple si y sólo si, para f, g, h morfismos cualesquiera, el siguiente diagrama conmuta.*

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] \arrow[r, "g\circ f", near start] \arrow[dr, "g\circ f"] & d \\
b \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "h\circ g"] & c \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.3. Asociatividad de la composición.

Demostración:

Notemos que el siguiente diagrama conmuta si y sólo si:

1. *entre a y c se cumple que* $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c = a \xrightarrow{g\circ f} c$*, lo cual es verdadero por definición. Análogamente entre b y d*

2. *entre a y d se cumple que* $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{h\circ g} d = a \xrightarrow{g\circ f} c \xrightarrow{h} d = a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$*, es decir si* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.

Notemos que 2 es verdadero si y sólo si la composición es asociativa, mostrando así el lema.

En el lema anterior, expresamos fielmente el axioma de la asociatividad de la composición pidiendo únicamente que el diagrama 2.3 conmute. Podemos dar un tratamiento similar a la ley de unidad.

2.26 Lema. *En una categoría C, se cumple la ley de la unidad si y sólo si para todo objeto b y para morfismos cualesquiera $f : a \to b$ y $g : b \to c$ el diagrama 2.3 conmuta.*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "\mathbf{1}_b"] \arrow[dr, "g"] & \\ & b \arrow[r, "g"] & c \end{tikzcd}$$

Figura 2.4. Axioma de unidad

Demostración:

Analizando los caminos entre el vértice superior b y el vértice c, tenemos que ese subtriángulo conmuta si y sólo si $g = g \circ \mathbf{1}_b$. Por otro lado, entre el vértice a y el vértice inferior b, el triángulo conmuta si y sólo si $\mathbf{1}_b \circ f = f$. Esto es precisamente lo que necesitamos para que se cumpla la ley de unidad.

También aparecen dos caminos entre a y c que son gráficamente distintos y en realidad ambos caminos corresponden al morfismo $g \circ f$ por lo que son iguales por definición. Entre a y c también aparece el morfismo $g \circ \mathbf{1}_b \circ f$, pero este camino conmuta automáticamente con los dos anteriores de la conmutatividad de los dos triángulos del diagrama. En general, es posible que estos caminos sí sean iguales sin que los triángulos que lo conforman conmuten.

Por último, incluimos un diagrama conmutativo asociado a la definición de isomorfismo.

2.27 Lema. *Decimos que un morfismo $f : a \to b$ en una categoría es un isomorfismo si y sólo si existe un $g \in C$ tal que el diagrama 2.5 conmute.*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop left, "\mathbf{1}_a"] \arrow[r, shift right, "f"'] & b \arrow[l, shift right, "g"'] \arrow[loop right, "\mathbf{1}_b"] \end{tikzcd}$$

Figura 2.5. Definición de inverso

No se incluye la demostración formal, pero notemos que los caminos de a a sí mismo son precisamente $\mathbf{1}_a$ y $g \circ f$, por lo que para asegurar conmutatividad necesitamos que sean iguales. Análogamente con b, y obtenemos precisamente la definición de isomorfismo e inverso. Aunque los morfismos identidad aparecerían implícitamente sin que estuvieran sus ciclos en el diagrama, se inclyeron para enfatizar la condición de conmutatividad.

Por lo tanto, podemos expresar propiedades de ciertas categorías y morfismos, únicamente usando diagramas conmutaivos. Más aún, el trabajar con diagramas conmutativos captura fielmente las relaciones entre morfismos y composiciones, por lo que esto será una herramienta de la que haremos uso continuamente para simplificar la conceptualización cuando hayan varios morfismos y objetos involucrados.

A partir de ahora, haremos uso de los diagramas para expresar de forma gráfica algunas definiciones o teoremas.

2.3. Functores

Dada una estructura (como un grupo o una topología) tenemos una transformación entre objetos que preserva dicha estructura (como los homomorfismos o las funciones continuas), para las categorías también tenemos una herramienta similar: los functores entre dos categorías. Una categoría es una colección de objetos y una de morfismos; además de relaciones entre objetos y morfismos (dominio, codominio e identidad), y una relación entre morfismos (composición). Si queremos una transformación entre categorías, desearíamos que preserve de cierta forma estas relaciones. [4]

2.28 Definición (Functor)**.** Dadas dos categorías C, D, un functor $F : C \to D$ entre ellas consiste de una regla de asociación de C a D que cumple las siguientes propiedades:

- Para cada objeto de C, $a \in O_C$, asocia un objeto en D, $Fa \in O_D$.
- Para cada morfismo $f : a \to b$ en C, asocia un morfismo $Ff : Fa \to Fb$ en D. Notemos que el functor preserva el dominio y codominio, es decir $\mathbf{dom}\,(Ff) = F\,(\mathbf{dom}\,f)$ y $\mathbf{cod}\,(Ff) = F\,(\mathbf{cod}\,f)$.
- **Unidad** (o normalización): Para cada objeto $a \in C$ se cumple que $F\,(\mathbf{1}_a) = \mathbf{1}_{Fa}$. Es decir, la ientidad de un objeto a en la categoría C se mapea a la identidad de su imagen Fa en D.
- **Composicionalidad**: Para cada par de morfismos en C de la forma $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ el diagrama 2.6 conmuta.

[4]En este párrafo no estamos usando la palabra «relación» en el sentido matemáticamente riguroso.

$$\begin{tikzcd}
 & Fb \arrow[dr, "Fg"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "F(g\circ f)"'] & & Fc
\end{tikzcd}$$

Figura 2.6. Propiedad de composicionalidad.

Es decir, el functor cumple que $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.

En general, podemos pensar en un functor como una función que actúa en los objetos $F : O_C \to O_D$ y una función que actúa sobre los morfismos $F : A_C \to A_D$ que cumplen las propiedades descritas anteriormente[5].

Únicamente con esta definición, ya podemos enunciar uno de los teoremas más importantes y que le dan gran parte de su utilidad a los functores, estos preservan la relación de isomorfía.

2.29 Teorema. *Sea $F : C \to D$ un functor entre dos categorías, y sean $a, b \in O_C$ dos objetos en la categoría C. Si a, b son isomorfos entonces Fa es isomorfo a Fb,*

Demostración:

Si el morfismo $f : a \to b$ en la categoría C es un isomorfismo, esto implica que existe su morfismo inverso $g : b \to a$. Luego, por la propiedad de unidad y composicionalidad del functor F tenemos

$$Fg \circ Ff = F(g \circ f) = F(\mathbf{1}_a) = \mathbf{1}_{Fa}$$
$$Ff \circ Fg = F(f \circ g) = F(\mathbf{1}_b) = \mathbf{1}_{Fb}$$

por lo tanto los morfismos Ff, Fg son inversos en D, mostrando que Fa es isomorfo a Fb.

La contrapuesta de este teorema es extremadamente útil, pues nos ayuda a mostrar que dos objetos no son isomorfos. Por ejemplo, si tenemos dos objetos $a, b \in O_C$ de una categoría C y queremos saber si son isomorfos, podemos aplicarles un functor $F : C \to D$ y si se cumple que los objetos Fa y Fb no son isomorfos en la categoría D, entonces a y b no pueden ser isomorfos en C. Esta aplicación es

[5]Puesto que nos referiremos al functor F y no a cada una de las funciones individuales, permitimos el abuso de notación nombrando a dos funciones distintas de la misma forma.

especialmente importante en áreas como la topología algebraica, donde los cálculos en la teoría de grupos son más sencillos que en los espaicos topológicos.

Veamos el ejemplo más trivial de un functor, el functor que es no hacer nada. Presentamos a continuación el functor identidad.

2.30 Lema (Functor identidad)**.** *Sea C una categoría con su clase de objetos dada por O_C y su clase de morfismos A_C. Consideremos las siguientes funciones, la función identidad $\mathbf{1}_{O_C} : O_C \to O_C$ en los objetos, y la función identidad $\mathbf{1}_{A_C} : A_C \to A_C$ en los morfismos. Estas funciones componen un functor $\mathbf{1}_C : C \longrightarrow C$.*

Demostración:

Mostraremos que $\mathbf{1}_C$ es un functor mostrando cada una de las propiedades en la definición.

- *Puesto que para cualquier objeto $a \in O_C$, la función identidad lo mapea a sí mismo $\mathbf{1}_C\left(a\right) = a$, que es un objeto de la categoría contradominio, la función en los objetos está definida.*

- *Dado que a cada morfismo $f : a \to b$, para $f \in A_C$, se le asocia él mismo $\mathbf{1}_C f = f$ entonces se cumple que $\mathbf{dom}\left(\mathbf{1}_C f\right) = \mathbf{dom}\left(f\right) = a = \mathbf{1}_C a = \mathbf{1}_C\left(\mathbf{dom}\, f\right)$. Análogamente $\mathbf{cod}\left(\mathbf{1}_C f\right) = \mathbf{1}_C\left(\mathbf{cod}\, f\right)$.*

- *La propiedad de unidad se cumple trivialmente pues para cualquier objeto $a \in O_C$ se cumple que $\mathbf{1}_C\left(\mathbf{1}_a\right) = \mathbf{1}_a = \mathbf{1}_{\mathbf{1}_C a}$, ya que el functor $\mathbf{1}_C$ es la identidad en morfismos y objetos.*

- *Una vez más, puesto que el functor es la identidad, entonces la propiedad de composicionalidad para cualesquiera $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ se cumple por las igualdades*

$$\mathbf{1}_C\left(g \circ f\right) = g \circ f = \mathbf{1}_C g \circ \mathbf{1}_C f$$

Esto demuestra que la función identidad en objetos y morfismos en efecto compone un functor.

A continuación estudiamos qué pasa cuando componemos dos functores $S : C \to D, T : D \to E$, puesto que no es una garantía que el componer dos functores siga siendo un functor; afortunadamente es el caso.

2.31 Lema (Composición de functores)**.** *Sean $T : C \to D$ y $S : D \to E$ dos functores entre categorías C, D, E la composición $S \circ T : C \to E$ entre ambos también es un functor, con la composción de dos functores nos referimos a la composición de las dos funciones en los objetos y las dos funciones en los morfismos.*

Demostración:

El el functor $S \circ T : C \to E$ son las funciones composicion $S \circ T : O_C \to O_E$ y $S \circ T : A_C \to A_E$. Ahora verificamos que sigue cumpliendo los axiomas de functoralidad.

- *Puesto que la función en los objetos es la composición $S \circ T : O_C \to O_E$, entonces para cada objeto $a \in O_C$, existe $(S \circ T)\, a \in O_E$.*

- *Puesto que tanto S como T son functores, entonces para cada morfismo $f : a \to b$ en C se cumple que*

$$\begin{aligned}\mathbf{dom}\ ((S \circ T)\, f) &= \mathbf{dom}\ (S\, (T f)) \\ &= S\, (\mathbf{dom}\ (T f)) \\ &= S\, (T\, (\mathbf{dom}\, f)) = (S \circ T)\, (\mathbf{dom}\, f)\, .\end{aligned}$$

  Esto demuestra que la función dominio se preserva bajo los functores, análogamente con la función codominio **cod** *. Por lo tanto preserva los dominios y codominios de los morfismos.*

- ***Unidad:*** *Para todo objeto $a \in C$, puesto que tanto S como T son functores, tenemos que*

$$(S \circ T)\, \mathbf{1}_a = S\, (T \mathbf{1}_a) = S\, (\mathbf{1}_{Ta}) = \mathbf{1}_{(S \circ T) a},$$

  verificando la propiedad de unidad.

- ***Composicionalidad:*** *Análogamente a las demostraciones anteriores, dados morfismos f, g de la forma $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$, por la functoralidad de S y T, verificamos la composicionalidad de la forma*

$$(S \circ T)\, (g \circ f) = S\, (T\, (g \circ f)) = S\, (Tg \circ Tf) = S\, (Tg) \circ S\, (Tf)\, ,$$

  y se demuestra que $(S \circ T)\, (g \circ f) = (S \circ T)\, g \circ (S \circ T)\, f$.

Por lo tanto la composición de dos functores sigue siendo un functor.

Observamos que esta demostración es muy similar a la demostración para diversas estructuras algebraicas (grupos, anillos, monoides, etc.), donde obtenemos que la composición de homomorfismos sigue siendo un homomorfismo: aplicamos primero un homomorfismo, luego el siguiente; puesto que cada uno de los homomorfismos preserva alguna relación (suma, producto, conjuntos abiertos, etc.) entonces la composición preserva dicha relación. En la misma línea, mostramos que la composición de functores es asociativa.

Una vez hemos demostrado que la composición de dos functores sigue siendo un functor, obtenemos el siguiente corolario.

2.32 Corolario (Asociatividad de la composición de functores)**.** *La composición de functores es asociativa. Es decir, dados fuctores $T : A \to B, S : B \to C, R : C \to D$, se cumple que $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$*

Demostración:

Sean $T : A \to B, S : B \to C, R : C \to D$ functores entre categorías. Como la composición de functores sigue siendo un functor, entonces tanto $R \circ (S \circ T)$ como $(R \circ S) \circ T$ siguen siendo functores. El primer functor está conformado por las funciones $R(S \circ T) : O_A \to O_C$ y $R(S \circ T) : A_A \to A_C$; el segundo functor se conforma por las funciones $(R \circ S) \circ T : O_A \to O_C$ y $(R \circ S) \circ T : A_A \to A_C$.

Como la composición de funciones es asociativa, entonces tanto para los objetos como los morfismos se cumple que las funciones $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ son iguales, y por lo tanto los functores $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ son iguales y podemos escribir $R \circ S \circ T$.

Notemos que es necesario el lema anterior, pues aunque los objetos necesariamente son iguales (por la asociatividad de la composición de las funciones subyacentes), no necesariamente eran functores.

Así como con los conunjtos, grupos o espacios topológicos, damos la siguiente definición y lema.

2.33 Definición (Categoría de categorías)**.** Definimos la categoría **Cat** como la categoría cuya clase de objetos $O_{\mathbf{Cat}}$ es la clase de todas las categorías pequeñas y cuya clase de morfismos $A_{\mathbf{Cat}}$ es la clase de todos los functores entre categorías pequeñas. La composición de morfismos está dada por la composición de functores.

Mostraremos, con la ayuda de los lemas anteriores, que la categoría definida anteriormente efectivamente es una categoría.

2.34 Lema. *La categoría* **Cat** *es efectivamente una categoría.*

Demostración:

Mostraremos que las cuatro operaciones definidas en 2.1 cumplen los axiomas de una categoría.

- *Para las funciones* $\mathbf{dom}$, $\mathbf{cod}$, *si* $T : C \longrightarrow D$ *es un functor entre categorías pequeñas entonces* $\mathbf{dom}\, T = C$, $\mathbf{cod}\, T = D$.
- *Por el lema 2.30, a cada categoría pequeña* C *se le asocia el functor identidad* $\mathbf{1}_C : C \to C$.
- *Por el lema 2.31, para cualquier par de functores* $T : C \to D$, $S : D \to E$ *entre categorías pequeñas que cumplen* $\mathbf{cod}\, T = \mathbf{dom}\, S$, *existe el functor composición* $S \circ T$ *dado por la composición de sus funciones subyacentes. Esto demuestra que la composición de morfismos en la categoría* **Cat** *está bien definida.*

Estas operaciones cumplen los siguientes axiomas:

1. *Asociatividad: La composición de morfismos es asociativa pues, como se mostró en 2.32, la composición de funciones subyacentes es asociativa.*
2. *Unidad: Puesto que el functor identidad está compuesto de la función identidad en obetos y morfismos, para cualquier functor de categorías pequeñas* $T : C \to D$ *se cumple que* $\mathbf{1}_{O_D} \circ T = T = T \circ \mathbf{1}_{O_C} : O_C \to O_D$, *análogamente para morfismos* $\mathbf{1}_{A_D} \circ T = T = T \circ \mathbf{1}_{A_C} : A_C \to A_D$. *Mostrando la igualdad de functores* $\mathbf{1}_D \circ T = T = T \circ \mathbf{1}_C$.

Notemos que definimos la clase de las *categorías pequeñas*, pero en ningún momento de la demostración usamos el hecho de que los conjuntos de objetos y morfismos fueran conjuntos. De hecho, aunque no es necesario que un functor actúe

sobre categorías pequeñas (como veremos a continuación), sí es necesario trabajar con categorías pequeñas para poder definir su clase de objetos $O_{\mathbf{Cat}}$ y de morfismos $A_{\mathbf{Cat}}$.
La razón por la que no podemos definir la categoría de todas las categorías, es la misma por la que no podemos definir la clase de todas las clases; podemos definir la clase de todos los conjuntos, y análogamente podemos definir la cateogría de todas las categorías pequeñas.

Ahora definimos ciertas clases de functores que resultan útiles y nos ayudan a clasificar los functores con base en sus propiedades.

Dado un functor entre dos categorías $T : C \to D$, para cualesquiera dos objetos $x, y \in O_C$ el functor T induce una función $T_{x,y}$ del conjunto $\operatorname{Hom}_C(x, y)$ al conjunto $\operatorname{Hom}_D(Tx, Ty)$ que mapea $T_{x,y} : \operatorname{Hom}_C(x, y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_D(Tx, Ty)$, $T_{x,y} : f \longmapsto Tf$. Podemos definir propiedades importantes de los functores usando estas funciones en los conjuntos de morfismos.

2.35 Definición (Functor fiel)**.** Decimos que un functor $T : C \longrightarrow D$ entre dos categorías C, D es fiel si dados dos objetos $x, y \in C$ y dos morfismos $f.g : x \to y$ cualesquiera, $Tf = Tg$ implica $f = g$. Es decir, un functor es fiel si para todos los objetos $x, y \in O_C$ la función $T_{x,y} : \operatorname{Hom}(x, y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Tx, Ty)$ es inyectiva.

2.36 Definición (Functor lleno)**.** Decimos que un functor $T : C \longrightarrow D$ entre dos categorías C, D es lleno si dados dos objetos $x, y \in C$ cualesquiera, para cualquier $g : Tx \to Ty$ existe un $f : x \to y$ tal que $Tf = g$. Es decir, un functor es lleno si para todos los objetos $x, y \in O_C$ la función $T_{x,y} : \operatorname{Hom}(x, y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Tx, Ty)$ es sobreyectiva.

2.37 Definición (Functor ancho)**.** Un functor entre dos categorías es ancho si es sobreyectivo en la clase de los objetos.

La idea de un «isomorfismo de categorías» se define de una manera muy análoga a los isomorfismos del resto de categorías que hemos estudiado.

2.38 Definición (Functor isomorfismo)**.** Dado un functor $T : C \to D$, decimos que es un *isomorfismo* si existe un functor $S : D \to C$ tal que $S \circ T = \mathbf{1}_C$ y $T \circ S = \mathbf{1}_D$.

Observemos que los functores $T : C \to D$ que son llenos y fieles cumplen que la función $T_{x,y} : \operatorname{Hom}_C(x, y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_D(Tx, Ty)$ es una biyección para cada

$x, y \in O_C$. Esta condición no es suficiente para que un functor sea un isomorfismo, esto pues puede que la función $T : O_C \to O_D$ de los objetos no sea invertible, y por lo tanto no exista el functor inverso. A continuación mostramos condiciones necesarias y suficientes para que un functor sea un isomorfismo.

2.39 Teorema. *Un functor $T : C \to D$ es un isomorfismo si y sólo si todas las funciones inducidas $T_{x,y} : Hom_C(x, y) \longrightarrow Hom_D(Tx, Ty)$ son biyectivas y la función en los objetos $T : O_C \to O_D$ es biyectiva.*

Demostración:

($\Longrightarrow$) Si existe $S : D \to C$ functor inverso de T, entones S también induce una función inversa $S : O_D \to O_C$ de la función de T inducida en los objetos; pues para que las composiciones de los functores S, T sean los functores identidades, forzosamente las composiciones de las funciones en los objetos deben ser las identidades.

Análogamente para cualquier $x, y \in O_C$ se cumple que la función $S_{Tx,Ty}$ es la función inversa de $T_{x,y}$ pues S es la inversa de T en los morfismos también. Mostrando la primera implicación

($\Longleftarrow$) Puesto que tanto $T : O_C \to O_D$ como $T_{x,y} : Hom_C(x, y) \to Hom_D(Tx, Ty)$ son biyectivas para cada $x, y \in O_C$, entonces cada uno tiene inversas $T^{-1} : O_D \to O_C$, $T^{-1}_{x,y} : Hom_D(Tx, Ty) \to Hom_C(x, y)$.

Ahora definimos el functor $S : D \to C$, donde la función en los objetos $S : O_D \to O_C$ es la función inversa de $T : O_C \to O_D$; para la función en los morfismos $S : A_D \to A_D$ dado un morfismo $f \in A_D$ definimos $Sf = T^{-1}_{x,y}$ para $x, y \in O_C$ tales que $\mathbf{dom}\, f = Tx$, $\mathbf{cod}\, f = Ty$.

Puesto que la función $T : O_C \to O_D$ es invertible, entonces para cualquier $x' \in O_D$ existe un $x \in O_C$ tal que $Tx = x'$, de ello la función $S : A_D \to A_D$ está bien definida. Es claro de la definición que $S \circ T = \mathbf{1}_C$, y como S está definida en toda la categoría S entonces $T \circ S = \mathbf{1}_D$, ya que dondequiera que esté definido S, actúa como el inverso de T.

Una vez hemos definido las principales propiedades que poseen los functores, así como sus resultados más importantes, estudiamos una gran variedad de ejemplos de functoralidad.

2.4. Ejemplos Functores

Analizando los resultados anteriores, un functor es, en cierta medida, una función entre categorías que preserva su esctructura de categoría. Puesto que la definición de categoría es tan general, los functores pueden tener naturalezas muy distintas y pueden verse muy diferentes unos de otros. La siguiente sección se dedica a mostrar ejemplos ilustrativos acerca de functores en categorías conocidas.

2.40 Ejemplo (Functor olvidadizo de **Top** a **Set**)**.** Puesto que todos los espacios topológicos son un conjunto (y una familia de subconjuntos), y todas las funciones continuas siguen siendo funciones, hay una asociación muy natural de un espacio topológico a su conjunto subyacente. Definimos formalmente esta idea de olvidar la topología de un espacio.

Definimos el functor $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ de la siguiente forma:

1. En los objetos $U : O_{\mathbf{Top}} \to O_{\mathbf{Set}}$, el espacio topológico X se mapea al conjunto X.

2. En los morfismos $U : A_{\mathbf{Top}} \to A_{\mathbf{Set}}$, la función continua $f : X \to Y$ se mapea a la función $f : X \to Y$.

Ahora, verificamos que efectivamente esta transformación es un functor.

- Para cada espacio topológico $X \in O_{\mathbf{Top}}$ existe su cobjunto subyacente $UX = X \in O_{\mathbf{Set}}$.

- Para cada función continua $f : X \to Y, f \in A_{\mathbf{Top}}$ existe la función subyacente $Uf = f : X \to Y, f \in A_{\mathbf{Top}}$. Además puesto que $UX = X$ entonces se cumple que para toda función $\mathbf{dom}\,(Uf) = \mathbf{dom}\,(f) = X = UX = U(\mathbf{dom}\,f)$, análogamente para $\mathbf{cod}$. El dominio y contradominio se preservan justo como esperamos.

- La función continua identidad $\mathbf{1}_X \in A_{\mathbf{Top}}$ claramente se mapea a la funión identidad $\mathbf{1}_X \in A_{\mathbf{Set}}$.

- Puesto que la composición de funciones continuas es justamente la composición de funciones, entonces $U\,(g \circ f) = g \circ f = Ug \circ Uf$. Verificando todos los axiomas de functoralidad.

En este caso, el functor no tiene un a estructura muy complicada, lo único que hicimos fue precisamente olvidar que era un espacio topológico y trabjar únicamente con el conjunto subyacente. En este caso hemos formalizado con el lenguaje de functores la idea de olvidar cierta estructura.

2.41 Ejemplo (Functor olvidadizo de **Rng** a **Grp**)**.** Recordemos que un anillo $(R, +, \cdot)$ tiene un grupo abeliando subyacente $(R, +)$. Análogamente al caso anterior, definimos el siguiente functor $F : \mathbf{Rng} \to \mathbf{Grp}$.

En los objetos $F(A, +, \cdot) = (A, +)$ donde cada anillo se mapea al grupo (abeliano) subyacente de la suma. Además, puesto que cada homomorfismo de anillos preserva ambas operaciones (suma y multiplicación), entonces podemos mapear cada homomorfismo de anillos f a sí mismo $F(f)$ visto como un homomorfismo en el grupo de la suma.

Puesto que el functor mapea los objetos (anillos) a sí mismos (vistos como grupos), y los homomorfismos (de anillos) a sí mismos (en grupos), entonces los dominios y codominios se siguen preservando. Además, el homomorfismo identidad es el mismo en grupos y anillos, por lo que se cumple la propieda de unidad. Por último, como los homomorfismos se preservan bajo el functor, entonces la composición también se preserva, cumpliendo la última propiedad de composicionalidad y demostrando que en efecto la transformación es un functor.

2.42 Ejemplo (Functor olvidadizo de **Grp** a **Set**)**.** De una manera exactamente análoga a los ejemplos anteriores, podemos definir un functor olvidadizo $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, que olvida la estructura de grupo y nos mantiene únicamente los conjuntos subyacentes, olvidando que los homomorfismos preservan la operación y viéndolos únicamente como funciones.

Siguiendo los pasos de los ejemplos anteriores obtenemos la demostración formal, esta transformación es un functor.

Como podemos ver, la idea de «olvidar» cierta estructura adicional, es una transformación que se comporta como un functor. En general, un functor es la formalización de la idea de pasar de una categoría a otra preservando de cierta forma tanto los objetos como los morfismos.

Ahora, hacemos uso del lema 2.31 para obtener automáticamente un functor de **Rng** a la categoría **Set**.

2.43 Ejemplo (Functor composición de **Rng** a **Set**)**.** Recordando que en los ejemplos 2.42 y 2.41 definimos functores $F : \mathbf{Rng} \to \mathbf{Grp}$ y $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ donde el primero mapeaba el anillo $(R, +, \cdot)$ al grupo (abeliano) subyacente $(R, +)$, y el segundo mapea un grupo (usando notación aditiva) $(R, +)$ a su conjunto subyacente R. Por lo que podemos tomar el functor composición $U \circ F : \mathbf{Rng} \to \mathbf{Set}$, que mapea cada anillo en su grupo subyacente, y luego en su conjunto subyacente $U \circ F : (R, +, \cdot) \mapsto R$.

Además, siguiendo los pasos de los ejemplos anteriores, podemos definir un functor $T : \mathbf{Rng} \to \mathbf{Set}$, como el functor olvidadizo de **Rng** a **Set**, que olvida la estructura de anillo y nos devuelve el conjunto subyacente, y a cada homomorfismo de anillos f le asocia su función subyacente. Vale la pena resaltar que el functor olvidadizo T es igual que la composición de functores $U \circ F$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Grp} \arrow[dr, "T"] & \\
\mathbf{Rng} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "U"'] & & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.7. Composición de functores olvidadizos.

Por lo que pudimos expresar un functor conocido, como la composición de dos functores.

Ahora que hemos estudiado el comportamiento de los functores en algunas cateogrías familiares, estudiaremos los functores de manera más abstracta, haciendo uso de la generalidad de las categorías, e ilustrando también la gran expresividad de los functores.

2.44 Ejemplo (Homomorfismos de grupo)**.** Recordando que podemos ver a los grupos G como una cateogría de un sólo objeto, donde cada morfismo es invertible (ejemplo 2.14), donde los elementos del grupo pasan a ser los morfismos de la categoría, y el producto del grupo la composición de los morfismos. Puesto que un homomorfismo preserva el producto en el grupo, entonces preserva la composición en la categoría, por lo que es natural pensar que los homomorfismos se comportan como functores.

En efecto, sean $(G,\cdot),(H,\cdot)$ dos grupos y sea $f:(G,\cdot)\to(H,\cdot)$ un homomorfismo de grupo. Sean $\boldsymbol{C}G$ y $\boldsymbol{C}H$ las categorías asociadas a los grupos, con objetos $\{\bullet\},\{*\}$ respectivamente, en esas categorías definimos el siguiente functor.

El functor $F:\boldsymbol{C}G\to\boldsymbol{C}H$ actúa en la categoría de la siguiente forma, en los objetos O_G, O_H mapea el único objeto $\bullet$ en el único objeto $*$. En los morfismos A_G, A_H (que son los elementos del grupo), se mapea $F: a\longmapsto f(a)$.

Puesto que hay un único objeto en ambas categorías, las condiciones de preservar el domino y contradominio se cumplen trivialmente. Por lo que únicamente hay que verificar las propiedad es de unidad y composicionalidad.

- **Unidad:** Sea e el morfismo identidad del único objeto $\bullet$ en $\boldsymbol{C}G$, entonces $F(e)=f(e)$; sea 1 el morfismo identidad de $\boldsymbol{C}H$. Por el teorema 1.43, sabemos que el elemento identidad e se mapea al elemento identidad 1, por lo que $F(e)=1$ y se cumple la propiedad de unidad.

- **Composicionalidad:** Recordemos que la composición de morfismos $a\circ b$ en $\boldsymbol{C}G$ es precisamente el producto $a\cdot b$ en G. Luego, aplicando F a la composición $a\circ b$ tenemos

$$F(a\circ b)=F(a\cdot b)=f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)=F(a)\circ F(b).$$

De ello, todos los homomorfismos entre grupos G,H, son functores entre categorías $\boldsymbol{C}G,\boldsymbol{C}H$.

2.45 Ejemplo (Funciones crecientes)**.** Recordemos que en el ejemplo 2.12 obtuvimos que un conjunto X con una relación de orden parcial $\preceq$ es una categoría, con los elementos $x\in X$ como los objetos y las relaciones de orden $a\preceq b$ como los morfismos.

Dados dos órdenes parciales $(X,\preceq),(A,\leq)$, una función $f:X\to A$ es creciente si para todo $x,y\in X$ tales que $x\preceq y$ se cumple que $f(x)\leq f(y)$. Mostraremos que estas funciones son un functor entre dos órdenes parciales (vistos como categorías).

Definimos al functor F como $f : X \to Y$ en los objetos y en los morfismos (por la monotonía de la función) el morfismo $x \preceq y$ se mapea al morfismo $f(x) \leq f(y)$[6].

La propiedad de composicionalidad se cumple automáticamente dado que entre cualesquiera dos objetos existe a lo más un único morfismo. De cualquier manera, podemos mostrarlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
F\left((y \preceq z) \circ (x \preceq y)\right) &= F\left(x \preceq z\right) = f(x) \leq f(z) \\
F\left(y \preceq z\right) \circ F\left(x \preceq y\right) &= \left(f(y) \leq f(z)\right) \circ \left(f(x) \leq f(y)\right) = f(x) \leq f(z)
\end{aligned}$$

y de ello se cumple la propiedad de composicionalidad.

Por otro lado, puesto que toda relación de orden es reflexiva, se cumple que $F(x \preceq x) = f(x) \leq f(x)$ y se cumple la propiedad de unidad. Por lo tanto las funciones crecientes son un functor entre órdenes parciales.

2.46 Ejemplo (Conjunto potencia)**.** Ahora estudiaremos una transformación que va de la categoría **Set** a sí misma, a diferencia de los grupos (que tienen un único objeto) y las relaciones de orden (que tienen a lo más un único morfismo), este functor requiere una verificación más cuidadosa de los axiomas de functoralidad. Estudiaremos el conjunto potencia.

Por lo general, dada una función $f : X \to Y$, se permite el abuso de notación y para $A \subseteq X$ escribimos $f(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\}$, para este ejemplo usaremos la notación distinguida

$$\begin{aligned}
\tilde{f} &: \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(Y) \\
\tilde{f} &: A \longmapsto \tilde{f}(A) = \{f(a) \in Y : a \in A\}.
\end{aligned}$$

Definimos el siguiente functor $P : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, en los objetos mapeamos $P : X \mapsto \mathscr{P}(X)$, y dada una función $f : X \to Y$, el functor mapea los morfismos de la forma $P : f \mapsto \tilde{f}$.

De la definición de la función $\tilde{f}$ es claro que el functor respeta las condiciones de dominio y codominio. Por lo que basta con verificar los demás axiomas de functoralidad.

[6]Sabemos que esta relación se cumple por la definición de una función creciente.

- **Unidad:** Sea X un conjunto, entonces $\tilde{\mathbf{1}}_X : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ mapea a un subconjunto $A \subseteq X$

$$\tilde{\mathbf{1}}_X(A) = \{\mathbf{1}_X(a) \in X, a \in A\} = \{a \in A\} = A,$$

por lo que $\tilde{\mathbf{1}}_X = \mathbf{1}_{\mathscr{P}(X)}$, cumpliendo la propiedad de unidad.

- **Composicionalidad:** Para esto debemos mostrar que, dadas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, se cumple que

$$\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}.$$

Por doble contención, si $z \in \tilde{g}\left(\tilde{f}(A)\right)$ entonces existe $y \in \tilde{f}(A)$ tal que $g(y) = z$, pero como $y \in \tilde{f}(A)$ entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ y por lo tanto existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$, mostrando $\tilde{g}\left(\tilde{f}(A)\right) \subseteq \widetilde{g \circ f}(A)$.

Por otro lado, si $z \in \widetilde{g \circ f}(A)$, entonces existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. Puesto que $x \in A$ entonces $f(x) := y \in \tilde{f}(A)$. Y puesto que $g(y) = z$ entonces $z \in \tilde{g}\left(\tilde{f}(A)\right)$. Mostrando así la doble contención, y por lo tanto la functoralidad de $P : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$.

Puesto que gran parte del trabajo se enfocará en functores hacia la categoría de los grupos, vale la pena estudiar alguna de estas transformaciones y cómo se trabaja con los homomorfismos inducidos[8].

2.47 Ejemplo (Subgrupo de conmutadores $[G, G]$)**.** Dado un grupo G denotamos a $[G, G]$ como el conjunto todos los productos de conmutadores $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$, este subgrupo es un subgrupo de G. Además, dado un homomorfismo de grupos $f : G \longrightarrow H$, la imagen de un conmutador es un conmutador,

$$f([g, h]) = f\left(g^{-1}h^{-1}gh\right) = (f(g))^{-1}(f(h))^{-1} f(g) f(h) = [f(g), f(h)],$$

entonces $f([G, G]) \subseteq [H, H]$

De ello, la restricción del homomorfismo $f : G \to H$ en $f_{[G,G]} : [G, G] \to [H, H]$ donde $f_{[G,G]} := f\big|_{[G,G]}$, está bien definida. Por lo que podemos definir el siguiente functor $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ de la forma:

$$F : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Grp}$$
$$F : G \longmapsto [G, G]$$
$$F : f \longmapsto f_{[G,G]}$$

El cual cumple la propiedad de identidad trivialmente pues la función identidad en G es la función identidad en cualquier subconjunto de G. Además la propiedad de composicionalidad se cumple pues dados $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$

$$F(g \circ f) = (g \circ f)\Big|_{[G,G]} = g\Big|_{[H,H]} \circ f\Big|_{[G,G]} = Fg \circ Ff.$$

Donde en la segunda igualdad usamos el hecho que $f([G,G]) \subseteq [H,H]$

2.48 Ejemplo (Abelianización G_{Ab})**.** Dado un grupo G, puesto que para cualquier conmutador $[g,h] \in [G,G]$ y para todo $a \in G$ se cumple que

$$\begin{aligned} a^{-1}[g,h]\,a &= a^{-1}g^{-1}h^{-1}gha \\ &= \left(a^{-1}g^{-1}a\right)\left(a^{-1}h^{-1}a\right)\left(a^{-1}ga\right)\left(a^{-1}ha\right) \\ &= \left[a^{-1}ga, a^{-1}ha\right] \end{aligned}$$

entonces el subgrupo $[G,G]$ es un subgrupo normal de G.

Por otro lado, puesto que para cualesquiera $g,h \in G$ se cumple que $gh = hg\,[g,h]$ entonces el grupo cociente $G/[G,G]$ es un grupo abeliano. Por lo tanto a cada grupo $G \in \mathbf{Grp}$ podemos asignarle el grupo abeliano $G/[G,G] \in \mathbf{Ab}$. Además para cualquier homomorfismo $f : G \longrightarrow H$, haciendo uso del teorema 1.56 y el hecho que $f([G,G]) \subseteq f([H,H])$, tenemos un homorfismo inducido $\overline{f} : G/[G,G] \longrightarrow H/[H,H]$ dado por $\overline{f}(g\,[G,G]) = f(g)\,[H,H]$.

El teorema nos asegura que dicho homomorfismo inducido está bien definido. Por lo que podemos definir un functor

$$\begin{aligned} Ab : \mathbf{Grp} &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ Ab : G &\longmapsto G/\left[G,G\right] \\ Ab : f &\longmapsto \overline{f}. \end{aligned}$$

El cual cumple la condición de unidad puesto que, dada la identidad $\mathbf{1}_G : G \to G$, el homomorfismo inducido $Ab(\mathbf{1}_G) = \overline{\mathbf{1}_G}$ cumple para todo $x \in G$,

$$\overline{\mathbf{1}_G}\,(x\,[G,G]) = \mathbf{1}_G(x)\,[G,G] = x\,[G,G] = \mathbf{1}_{G/[G,G]}\,(x\,[G,G]),$$

y de ello $Ab(\mathbf{1}_G) = \mathbf{1}_{G/[G,G]} = \mathbf{1}_{Ab(G)}$.

La propiedad de composicionalidad se cumple pues dados homomorfismos $f : G \to H, g : H \to K$ y sus respectivos homomorfismos inducidos $\overline{f} : G/[G,G] \to H/[H,H], \overline{g} : H/[H,H] \to K/[K,K]$ se cumple que para todo $x \in G$

$$\begin{aligned}\overline{g \circ f}\,(x\,[G,G]) &= (g \circ f)\,(x)\,[K,K] \\ &= g\,(f\,(x))\,[K,K] \\ &= \overline{g}\,(f\,(x)\,[H,H]) \\ &= \left(\overline{g} \circ \overline{f}\right)(x\,[G,G])\,.\end{aligned}$$

Esto muestra que $Ab\,(g \circ f) = Ab\,(g) \circ Ab\,(f)$. Haciendo la transformación un functor.

2.49 Ejemplo (Centro del grupo $Z(G)$)**.** Por último, y motivado por los ejemplos anteriores, podríamos pensar que dado un grupo G, el asociarle el grupo abeliano dado por su centro $Z\,(G)$ es también un functor de **Grp** a **Ab**. Ahora veremos por qué dicho functor no puede existir.

Podríamos intentar definir el functor que a cada grupo G le asocie su centro $Z(G)$, y a cada homomorfismo $f : G \to H$ le asocie algún homomorfismo $\overline{f} : Z(G) \to Z(H)$. Veremos que esta idea presenta un problema al momento de verificar la propiedad de composicionalidad.

Supongamos que existe dicho functor $Z : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$, tomando $G = \mathbb{Z}_2 = K$ el grupo de dos elementos y $H = \mathbb{S}_3$ el grupo de las permutaciones de 3 elementos el functor mapea $Z(G) = \mathbb{Z}_2 = Z(K)$ y puesto que $\mathbb{S}_3$ tiene centro trivial tenemos $Z(H) = \{e\}$.

Ahora consideremos los homomorfismos

$$\begin{aligned}&f : G \to H, \quad f : 1 \mapsto (1,2), \\ &g : H \to K, \quad g : \sigma \to 1 \iff \sigma \text{ es impar, 0 de otro modo}\end{aligned}$$

(en otras palabras, g es la proyección de $\mathbb{S}_3$ a $\mathbb{S}_3/\mathbb{A}_3$).

Si Z es un fuctor, entonces mapea a estos hoomorfismos en homomorismos de grupo $Z\,(f) : Z\,(G) \to Z\,(H)\,,\ Z\,(g) : Z\,(H) \to Z\,(K)\,.$

Notemos que $g \circ f = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_2}$, así que por la propiedad de unidad de los functores necesariamente

$$Z(g \circ f) = Z(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_2}) = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_2}.$$

Por otro lado, puesto que el centro de $\mathbb{S}_3$ es trivial, $Z(H) = Z(\mathbb{S}_3) = \{e\}$, entonces $Z(f) : Z(G) \to Z(H)$ debe ser el homomorfismo trivial $Z(f) = \mathbf{0}$. Por último $Z(g) : Z(H) \to Z(K)$ sólo puede ser la inclusión trivial que mapea el único elemento $e \in Z(H)$ en 0.

De ello, este functor cumpliría que

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_2} = Z(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_2}) = Z(g \circ f) = Z(g) \circ Z(f) = i \circ \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

una contradicción. Por lo tanto dicho functor no puede existir.

2.50 Nota. Auque el concepto de functor engloba una gran variedad de transformaciones de una categoría a otra, o de una categoría a sí misma, el ejemplo 2.49 es muy importante. Este ejemplo nos muestra que transformaciones muy similares a functores, pueden no serlo; por ejemplo la abelianizacion de un grupo podría parecer muy similar al centro del grupo, pero el primero sí es un functor y el segundo no.

A continuación estudiamos la construcción del producto de categorías, de una manera muy análoga al producto de conjuntos, topologías o grupos.

2.5. Productos de categorías

Como estuidiamos en la categoría de conjuntos **Set**, podemos definir el producto cartesiano de dos conjuntos A, B, además definimos el producto cartesiano de dos grupos G, H en la categoría **Grp**, en el cual la multiplicación coordenada a coordenada preserva la estructura de grupo. Estas ideas son las que definen el producto de dos categorías $C, D \in$ **Cat**.

2.51 Definición (Categoría producto)**.** Sean C, D dos categorías con clases de objetos O_C, O_D y clases de morfismos A_C, A_D respectivamente. Definimos la categoría $C \times D$ de la siguiente forma:

- La clase de objetos $O_{C\times D}$ está dada por el producto cartesiano $O_C \times O_D = \{(x, y) : x \in O_C, y \in O_D\}$.

- La clase de morfismos $A_{C\times D}$ está dada por el producto cartesiano $A_C \times A_D$.
- dado un morfismo $(f,g) \in A_{C\times D}$, definimos sus funciones dominio y codominio de la forma $\mathbf{dom}\,(f,g) = (\mathbf{dom}\,f, \mathbf{dom}\,g)$. Es decir, si $f : a \to b$ para $a,b \in O_C$, $g : x \to y,\ x,y \in O_D$, entonces $(f,g) : (a,x) \to (b,y)$.
- A cada objeto $(a,b) \in O_{C\times D}$ se le asocia el morfismo $(\mathbf{1}_a, \mathbf{1}_b) \in A_{C\times D}$, correspondiente al morfismo unidad.
- Dados dos morfismos $(f,f'), (g,g') \in A_{C\times D}$ tales que $(f,f') : (a,x) \to (b,y)$, $(g,g') : (b,y) \to (c,z)$, definimos el morfismo composición $(g,g') \circ (f,f')$ de la forma $(g,g') \circ (f,f') := (g \circ f, g' \circ f')$.

Con esta definición, la verificación de los axiomas de unidad y asociatividad de una categoría se heredan directamente de las categorías C, D de la siguiente manera. Si $(a,a'), (b,b'), (c,c'), (d,d') \in O_{C\times D}$ son objetos cualesquiera y dados morfismos de la forma

$$(a,a') \xrightarrow{(f,f')} (b,b') \xrightarrow{(g,g')} (c,c') \xrightarrow{(h,h')} (d,d')$$

entonces se verifican la propiedad de unidad

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_b, \mathbf{1}_{b'}) \circ (f,f') &= (\mathbf{1}_b \circ f, \mathbf{1}_{b'} \circ f') = (f,f') \\ (f,f') &= (f \circ \mathbf{1}_a, f' \circ \mathbf{1}_{a'}) = (f,f') \circ (\mathbf{1}_a, \mathbf{1}_{a'})\end{aligned}$$

y la propiedad de asociatividad

$$\begin{aligned}((h,h') \circ (g,g')) \circ (f,f') &= ((h \circ g) \circ f, (h' \circ g') \circ f') \\ &= (h \circ (g \circ f), h' \circ (g' \circ f')) = (h,h') \circ ((g,g'), (f,f')).\end{aligned}$$

Es decir, las propiedades de verifican coordenada a coordenada, de una manera análoga a la verifiacion de los axiomas de grupo del grupo producto.

Así como con la teoría de conjuntos y de grupos, definimos la idea de los morfismos de proyección en la categoría **Cat**, en este caso los morfismos son functores.

2.52 Definición (Functores de proyección)**.** Dadas dos categorías C, D y dada $C\times D$ su categoría producto, definimos los functores $\pi_1 : C \times D \to C$, $\pi_2 : C \times D \to D$ como los functores que en los objetos mapean $\pi_1(a,x) = a$, $\pi_2(a,x) = x$ para cualquier objeto $(a,x) \in O_{C\times D}$, y dado un morfismo $(f,g) : (a,x) \to (b,y)$ en $A_{C\times D}$ los functores actúan de la forma $\pi_1(f,g) = f : a \to b$, $\pi_2(f,g) = g : x \to y$.

Los principios de functoralidad se verifican directamente pues tenemos $\pi_1(\mathbf{1}_a, \mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_a, \ \pi_2(\mathbf{1}_a, \mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_x$ para las propiedades de unidad y para las propiedades de composicionalidad $\pi_1((g, g') \circ (f, f')) = \pi_1(g \circ f, g' \circ f') = g \circ f = \pi_1(g, g') \circ \pi_1(f, f')$, análogamente para π_2. De ello las funciones de proyección inducen un functor.

A continuación mostraremos una serie de resultados que ilustrarán la similitud del producto de categorías al resto de productos que hemos trabajado hasta ahora.

2.53 Teorema. *Dadas dos categorías C, D y dados dos functores $T_1 : E \to C, T_2 : E \to D$, existe un único functor $T : E \to C \times D$ tal que $\pi_1 \circ T = T_1, \ \pi_2 \circ T = T_2$.*

Demostración:

Por el teorema 1.13 del producto cartesiano de conjuntos, y considerando la funciones $T_1 : O_E \to O_C, \ T_2 : O_E \to O_D$ en los objetos y las funciones $T_1 : A_E \to A_C, \ T_2 : A_E \to A_D$ en los morfisms, existen unas únicas funciones $T : O_E \to O_{C\times D}, \ T : A_E \to A_{C\times D}$ dadas por $Ta = (T_1 a, T_2 a), \ Tf = (T_1 f, T_2 f)$ respectivamente, tales que lo siguientes diagramas (de clases y funciones) conmutan:

$$\begin{tikzcd}
 & O_E \arrow[dl, "T_1"'] \arrow[d, dashed, "T"] \arrow[dr, "T_2"] & \\
O_C & O_{C\times D} \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & O_D
\end{tikzcd}$$

Figura 2.8. Proucto de objetos de una categoría

$$\begin{tikzcd}
 & A_E \arrow[dl, "T_1"'] \arrow[d, dashed, "T"] \arrow[dr, "T_2"] & \\
A_C & A_{C\times D} \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A_D
\end{tikzcd}$$

Figura 2.9. Proucto de morfismos de una categoría

Definiendo el functor $T : E \to C \times D$ como las únicas funciones $T : O_E \to O_{C\times D}, \ T : A_E \to A_{C\times D}$ obtenidas en los diagramas anteriores, verificamos que en efecto estas funciones efectivamente inducen un functor.

Puesto que T_1, T_2 son functores entonces para cualquier objeto $a \in E$, dado el morfismo $\mathbf{1}_a \in A_E$, por la propiedad del producto cartesiano en $A_C \times A_D$ y en $O_C \times O_D$ tenemos que

$$T\mathbf{1}_a = (T_1\mathbf{1}_a, T_2\mathbf{1}_a) = (\mathbf{1}_{T_1a}, \mathbf{1}_{T_2a}) = \mathbf{1}_{(T_1a, T_2a)} = \mathbf{1}_{Ta},$$

adicionalmente para $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ morfismos en E,

$$\begin{aligned} T(g \circ f) &= (T_1(g \circ f), T_2(g \circ f)) \\ &= (T_1g \circ T_1f, T_2g \circ T_2f) \\ &= (T_1g, T_2g) \circ (T_1f, T_2f) = Tg \circ Tf. \end{aligned}$$

De ello T es un functor y se sigue el teorema.

Podemos ilustrar dicha propiedad con el siguiente diagrama conmutativo. Dadas categorías E, C, D y functores $T_1 : E \to C$, $T_2 : E \to D$, existe un único functor $T : E \to C \times D$ tal que el siguiente diagrama (de categorías y functores) es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "T_1"'] \arrow[d, dashed, "T"] \arrow[dr, "T_2"] & \\ C & C \times D \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & D \end{tikzcd}$$

Figura 2.10. Proucto de categorías

El teorema 2.53 es necesario pues aunque las funciones en los objetos y los morfismos existen y son únicas por la propiedad del producto cartesiano, esto no necesariamente produce un functor.

Una vez más, esta propiedad caracteriza al producto de categorías salvo isomorfismos.

2.54 Corolario. *Sean C, D dos categorías y sea P una categoría con functores $p_1 : P \to C$, $p_2 : P \to D$ tales que para cualesquiera dos functores $T_1 : E \to C$, $T_2 : E \to D$ existe un único functor $T : E \to P$ tal que $p_1 \circ T = T_1$, $p_2 \circ T = T_2$. Entonces la categoría P es isomorfa a $C \times D$.*

Demostración:

Por el teorema 1.15 de productos cartesianos, existen biyecciones $S : O_P \to O_{C\times D}$, $S : A_P \to A_{C\times D}$. Además, por el teorema 2.53 estas biyecciones inducen un functor invertible $S : P \to C \times D$, mostrando así que las categorías son isomorfas.

En los teoremas anteriores estudiamos todos los functores de la forma $T : E \to C \times D$ a partir de pares de functores $T_1 : E \to C$, $T_2 : E \to D$.

Por otro lado, dados dos pares de functores $T : C \to C'$ y $S : D \to D'$, podemos definir al functor $T \times S : C \times D \to C' \times D'$ como el único functor $T \times S$ que hace que el siguiente diagrama conmute [8].

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "T"'] & C \times D \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "T\times S"] & D \arrow[d, "S"] \\ C' & C' \times D' \arrow[l, "\pi_1'"] \arrow[r, "\pi_2'"'] & D' \end{tikzcd}$$

Figura 2.11. Functor $T \times S : C \times D \to C' \times D'$.

Sabemos que este functor existe y es único pues tenemos dos morfismos $T \circ \pi_1 : C \times D \to C', S \circ \pi_2 : C \times D \to D'$ hacia C' y D' respectivamente, por lo que aplicamos el teorema 2.53 a la categoría $C' \times D'$ y sus respectivas proyecciones π_1', π_2'.

Además, sabemos que el functor $T \times S$ hallado en el diagrama anterior cumple para (a, x) un objeto y (f, f') un morfismo de $C \times D$ las igualdades

$$T \times S\,(a, x) = (T \circ \pi_1\,(a, x), S \circ \pi_2\,(a, x)) = (Ta, Sx)\,,$$
$$T \times S\,(f, f') = (T \circ \pi_1\,(f, f'), S \circ \pi_2\,(f, f')) = (Tf, Sf')\,.$$

Esto muestra que el único producto $T \times S$ de dos functores T, S que tiene una definición sensible (que conmute con las funciones de proyección) es precisamente cada functor aplicado a cada coordenada, que es la definición más natural.

La condición que el diagrama 2.11 conmutara captura una característica de los functores de la forma $U : C \times D \to E$. En particular el exigir que cada uno de los cuadrados conmutara es precisamente la forma de encontrar functores de dominio $C \times D$ a partir de functores con domino C y D respectivamente.

A continuación, dadas dos categorías C, D, caracterizaremos todos los functores $T : C \times D \to E$ a partir de familias de funtores $C \to E$ y $D \to E$. Para ello definimos formalmente la idea de un fuctor de dos argumentos[8].

2.55 Definición (Bifunctor)**.** Dadas dos categorías C, D y dada cualquier cateogoría E definimos un bifunctor con argumentos en C y D como un functor entre las categorías $C \times D \to E$.

Es decir, análogamente a las funciones multivariadas $f(x, y)$ siendo funciones con domino $X \times Y$, los bifunctores son functores con dominio la categoría producto.

Dado un bifunctor $S : C \times D \to E$ y dados $a \in C, x \in D$ definimos los siguientes functores $S(-, x) : C \to E,\ S(a, -) : D \to E$ de la forma

$$S(-,x) : b \mapsto S(b,x), \quad S(-,x) : f \mapsto S(f, \mathbf{1}_x), b \in O_C, f \in A_C$$
$$S(a,-) : y \mapsto S(a,y), \quad S(a,-) : g \mapsto S(\mathbf{1}_a, g), y \in O_D, g \in A_D$$

En donde también usamos la notación $S_x = S(-,x), S^a = S(a,-)$. Permitimos el abuso de notación $S(f,x) := S(f, \mathbf{1}_x)$ para los morfismos $f \in A_C$. Estas restricciones efectivamente inducen un functor pues porque S es un functor entonces para cada $a \in O_C$ se cumple

$$S(\mathbf{1}_a, x) = S(\mathbf{1}_a, \mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_{S(a,x)} = \mathbf{1}_{S_x a}$$

verificando la propiedad de unidad. Para la propiedad de composicionalidad, dados $f, g \in A_C,\ \mathbf{cod}\, f = \mathbf{dom}\, f$,

$$S(g \circ f, x) = S(g \circ f, \mathbf{1}_x \circ \mathbf{1}_x) = S(g, \mathbf{1}_x) \circ S(f, \mathbf{1}_x) = S_x f \circ S_x g.$$

Análogamente para el functor $S(a, -) : D \to E$, por lo que dado un bifunctor $S : C \times D \to E$ obtenemos automáticamente dos familias de functores, un functor $S(-, x) : C \to E$ para cada $x \in O_D$ y un functor $S(a, -) : D \to E$ para cada $a \in O_C$. Conversamente, dadas dos familias de functores podemos definir un bifunctor si se cumplen las siguientes condiciones. En los párrafos anteriores teníamos un bifunctor y obtuvimos las familias de functores asociadas, en el siguiente teorema tenemos dos familias de functores y a partir de ellas definimos un bifunctor.

2.56 Teorema. *Sean C, D dos categorías dadas y sea E cualquier categoría. Entonces existe un bifunctor $S : C \times D \to E$ que cumple $S(-, x) = S_x,\ S(a, -) = S^a$*

para cada $x \in O_D, a \in O_C$ *si y sólo si para cada objeto* $a \in O_C,\ x \in O_D$ *existen* $S_x : C \to E,\ S^a : D \to E$ *functores tales que* $S_x a = S^a x$ *para todo* $a \in O_C,\ x \in O_D$ *y para cada par de morfismos* $f \in A_C,\ g \in A_D,\ f : a \to a',\ g : x \to x'$ *el siguiente diagrama en la categoría* E *conmuta*

$$\begin{tikzcd} S(a,x) \arrow[r, "S_x f"] \arrow[d, "S^a g"'] & S(a',x) \arrow[d, "S^{a'} g"] \\ S(a,x') \arrow[r, "S_{x'} f"'] & S(a',x') \end{tikzcd}$$

Figura 2.12. Compontentes bifunctor

donde $S(a,x) \in O_E$ *es el único objeto* $S_x a = S(a,x) = S^a x$*. En ese caso el bifunctor* $S : C \times D \to E$ *en los morfismos está dado por las igualdades del diagrama conmutativo*

$$S^{a'} g \circ S_x f = S(f,g) = S_{x'} f \circ S^a g. \tag{2.1}$$

Demostración:

Puesto que para cualquier morfismo de cualquier categoría arbitraria se cumple que $\mathbf{1}_{\mathbf{cod}\, f} \circ f = f = f \circ \mathbf{1}_{\mathbf{dom}\, f}$ *entonces para morfismos* $f \in A_C,\ g \in A_D$*, de la forma* $f : a \to a',\ g : x \to x'$ *tenemos la igualdad para cualquier par de categorías* C, D*.*

$$(\mathbf{1}_{a'}, g) \circ (f, x) = (\mathbf{1}_{a'} \circ f, g \circ \mathbf{1}_x) = (f \circ \mathbf{1}_a, \mathbf{1}_{x'} \circ g) = (f, \mathbf{1}_{x'}) \circ (\mathbf{1}_a, g). \tag{2.2}$$

$(\Longleftarrow)$ *Primero, suponiendo que existe* $S : C \times D \to E$*, definimos las familias de functores* $S_x := S(-,x)$ $S^a := S(a,-)$*, para cualquier* $a \in O_C,\ x \in O_D$*. Además, se cumple de la definición que* $S_x a = S(a,x) = S^a x$*.*

Aplicando el functor S *a ambos lados de la ecuación 2.2 y usando* a, a', x, x' *para sus respectivas identidades obtenemos*

$$S(a',g) \circ S(f,x) = S(f,g) = S(f,x') \circ S(a,g)$$

para morfismos cualesquiera. De ello, se cumple la ecuación 2.1 y por lo tanto el diagrama 2.12 conmuta precisamente con el valor $S(f,g)$*.*

($\Longrightarrow$) Sean C, D dos categorías, sea E una categoría tal que para cada $a \in O_C$, $x \in O_D$ existen functores $S_x : C \to E$, $S^a : D \to E$ tales que $S_x a = S^a x$ para cada par de objetos a, x. Además supongamos que para cualquier par de morfismos $f \in A_C$, $g \in A_D$, $f : a \to a'$, $g : x \to x'$ se cumple la ecuación 2.1 y por lo tanto hacen que el diagrama 2.12 conmute. Definiremos un functor $S : C \times D \to E$.

Consideremos el functor $S : C \times D \to E$ definido por

$$S(a, x) := S_x a = S^a x$$

para los objetos $(a, x) \in O_{C \times D}$; y para los morfismos $(f, g) : (a, x) \to (a', x')$ definido por

$$S(f, g) := S^{a'} g \circ S_x f = S_{x'} f \circ S^a g$$

Este functor cumple, por construcción, $S(-, x) = S_x$, $S(a, -) = S^a$ en los objetos. Para los morfismos $f \in A_C$ se cumple

$$S(f, x) = S(f, \mathbf{1}_x) = S^{a'} \mathbf{1}_x \circ S_x f = S_x f$$

pues $S^{a'}$ es un functor y mapea identidades en identidades, análogamente si $g \in A_D$

$$S(a, g) = S(\mathbf{1}_a, g) = S_{x'} \mathbf{1}_a \circ S^a g = S^a g.$$

Esto muestra que $S(-, x) = S_x$, $S(a, -) = S^a$, por lo tanto si S es efectivamente un functor hemos mostrado el teorema. A continuación los detalles.

Las igualdades

$$S_x a = S^a x, \quad S^{a'} g \circ S_x f = S_{x'} f \circ S^a g$$

muestran que efectivamente la función está bien definida, de otro modo no se preservaría la igualdad 2.2. Para verificar la propiedad de unidad, dadas las identidades $\mathbf{1}_a : a \to a$, $\mathbf{1}_x : x \to x$, tenemos

$$S(\mathbf{1}_a, \mathbf{1}_x) = S^a \mathbf{1}_x \circ S_x \mathbf{1}_a = \mathbf{1}_{S^a x} \circ \mathbf{1}_{S_x a} = \mathbf{1}_{S(a,x)} \circ \mathbf{1}_{S(a,x)} = \mathbf{1}_{S(a,x)}.$$

Para la propiedad de composicionalidad, dados morfismos $(g, g'), (f, f')$ de la forma $(a, x) \xrightarrow{(f,f')} (b, y) \xrightarrow{(g,g')} (c, z)$ tenemos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
S(a,x) \arrow[r, "S_x f"] \arrow[d, "S^a f'"] & S(b,x) \arrow[r, "S_x g"] \arrow[d, "S^b f'"] & S(c,x) \arrow[d, "S^c f'"] \\
S(a,y) \arrow[r, "S_y f"] \arrow[d, "S^a g'"] & S(b,y) \arrow[r, "S_y g"] \arrow[d, "S^b g'"] & S(c,y) \arrow[d, "S^c g'"] \\
S(a,z) \arrow[r, "S_z f"] & S(b,z) \arrow[r, "S_z g"] & S(c,z)
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.13. Composicionalidad del bifunctor

Este diagrama es conmutativo pues cada cuadrado es conmutativo por la propiedad 2.1 de las familias de functores $S_x,\ S^a$. Esto muestra que efectivamente la función $S : C \times D \to E$ es un functor que satisface las condiciones del teorema.

Explícitamente verificando la propiedad, a través las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
S(g \circ f, g' \circ f') &= S_z(g \circ f) \circ S^a(g' \circ f') \\
&= (S_z g \circ S_z f) \circ (S^a g' \circ S^a f') \\
&= S_z g \circ (S_z f \circ S^a g') \circ S^a f' \\
&= S_z g \circ \left(S^b g' \circ S_y f\right) \circ S^a f' \\
&= \left(S_z g \circ S^b g'\right) \circ (S_y f \circ S^a) = S(g, g') \circ S(f, f')
\end{aligned}
$$

mostramos que efectivamente el functor cumple las condiciones de composicionalidad, concluyendo así la demostración.

Ilustramos el teorema anterior usando el functor producto $T : C \to C',\ S : D \to D'$, puesto que el functor $T \times S : C \times D \to C' \times D'$ tiene como dominio un producto de categorías, podemos aplicar el teorema anterior. Una vez más, el siguiente ejemplo brinda el mismo functor que hallamos en la discusión anterior.

2.57 Ejemplo. Sean $T : C \to C',\ S : D \to D'$ dos functores, consideremos las siguientes familias de functores $U_x : C \to C' \times D',\ U^a : D \to C' \times D'$ para objetos $a \in O_C,\ x \in O_D$ definidos por

$$U_x = (T-, Sx), \quad U^a = (Ta, S-).$$

Explícitamente, para objetos y morfismos $a \in O_C,\ f \in A_C$ el functor U_x mapea

$U_x a = (Ta, Sx)\,,\ U_x f = (Tf, S\mathbf{1}_x)$. Análogamente para S^a. Ahora verificamos que estas familias de functores cumplen las condiciones del teorema 2.56

Primero, notemos que para objetos $a \in O_C,\ x \in A_C$ se cumple la igualdad $U_x a = (Ta, Sx) = U^a x$. Para morfismos $f \in A_C,\ g \in A_D$ con dominios y codominios $f : a \to b,\ g : x \to y$, se cumple

$$\begin{aligned} U_y f \circ U^a g &= (Tf, Sy) \circ (Ta, Sg) \\ &= (Tf \circ T\mathbf{1}_a, S\mathbf{1}_y \circ Sg) \\ &= (T\mathbf{1}_b \circ Tf, Sg \circ S\mathbf{1}_x) \\ &= (Tb, Sg) \circ (Tf, Sx) = U^b g \circ U_y f \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la ecuación 2.1 y por lo tanto existe un functor $U : C \times D \to C' \times D'$ dado por $U\,(a, x) = U_x a = U^a x = (Ta, Sx)$ para los objetos y $U\,(f, g) = U_y f U^a g = U^b g U_x f = (Tf, Sg)$ para los morfismos. Este es precisamente el morfismo $T \times S$ definido anteriormente.

Con este ejemplo concluimos la sección de productos de categorías. Esta sección contenía las propiedades estudiadas en el resto de productos de estructuras algebraicas (como grupos o topologías), así como teoremas adicionales que nos ayudarán para estudiar los grupoides a continuación.

3. GRUPOIDES

3.1. Definiciones y propiedades

Con las herramientas de teoría de grupos y de categorías a nuestra disposición, entramos a la definición que motivó este trabajo. Así como los monoides donde todos los elementos son invertibles es un grupo, una categoría donde todos los elementos son isomorfismos es un grupoide.

3.1 Definición (Grupoide)**.** Un *grupoide* es una categoría pequeña en la que todos los morfismos son isomorfismos.

La definición de subgrupoide se traduce casi literalmente de la definición de subcategorías dada en 2.3.

3.2 Definición (Subgrupoide)**.** Un subgrupoide de un grupoide G es una subcategoría de G tal que todos los morfismos son isomorfismos. Decimos que un subgrupoide es ancho o lleno si es una subcategoría ancha o llena respectivamente.

Ahora definimos algunos ejemplos ilustrativos de grupoides [3].

3.3 Ejemplo (Grupos)**.** Todos los grupos son categorías de un elemento, como vimos en el ejemplo 2.14. Dado un grupo G definimos una categoría con un único objeto y cuyo conjunto de morfismos son los elementos de G.
Puesto que en un grupo todos los elementos son invertibles, entonces en dicha categoría todos los morfismos tienen inverso y por lo tanto todo grupo es un grupoide.

3.4 Ejemplo (Relaciones de equivalencia)**.** En el ejemplo 2.10 vimos que una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto A es una categoría $A_\sim$ con conjunto de objetos $O = A$ y morfismos todos los pares (a, b) para $a \sim b$.
Puesto que la relación es simétrica entonces para cada $a \sim b$ se cumple que $b \sim a$ y entonces para todo morfismo (a, b) existe (b, a) tal que $(a, b) \cdot (b, a) = (a, a) = \mathbf{1}_a$ y por lo tanto todos los morfismos son invertibles y la categoría es un grupoide.

3.5 Ejemplo (Unión disjunta de grupos)**.** Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos indizada por un conjunto. Consideremos la siguiente categoría $\coprod_{i\in I} G_i$, donde el conjunto de objetos es el conjunto de índices I, y los morfismos están dados por $\operatorname{Hom}(i,j) = \varnothing$ si $i \neq j$ y $\operatorname{Hom}(i,i) = \{i\} \times G_i$ para cada i, donde el producto está dado por $(i,a)\cdot(i,b) = (i,ab)$ para $a,b \in G_i$. En este caso la identidad $\mathbf{1}_i$ es el elemento neutro de G_i.

En otras palabras, es la unión disjunta de todos los elementos de los grupos G_i, donde el producto entre dos elementos $a,b \in \coprod_{i\in I} G_i$ está definido si y sólo si a,b pertenecen al mismo grupo G_j para algún j. Podemos pensar en este grupoide como varias «islas» donde cada isla es un grupo y el producto sólo está definido entre elementos de la misma isla.

3.6 Ejemplo (Grupoide discreto e indiscreto)**.** Sabiendo que las relaciones de equivalencia son un grupoide, podemos tomar los dos ejemplos extremos.

Primero, si X es un conjunto, podemos tomar la relación $x \sim y$ si y sólo si $x = y$, esta relación es de equivalencia y el grupoide generado G_X es el conjunto de objetos $O_{G_X} = X$ y el conjunto de morfismos A_{G_X} es la diagonal $diag(X) = \{(x,x), x \in X\}$, es decir consiste únicamente de las identidades $\mathbf{1}_x = (x,x)$ para cada $x \in X$. A este grupoide se le conoce como el *grupoide discreto* de un conjunto X. En particular, a cualquier conjunto podemos identificarlo con su grupoide discreto, ya que consiste únicamente de los elementos de X y sus identidades.

Por otro lado, tomamos la relación $x \sim y$ para cada $x,y \in X$. En este caso tenemos que el grupoide generado G_X es el conjunto de objetos $O_{G_X} = X$ y el conjunto de morfismos son todos los pares ordenados (x,y), $x,y \in X$, es decir $A_{G_X} = X \times X$. A este grupo se le conoce como el *grupoide indiscreto*, y se denota como $X \times X$.

En particular, el grupoide indiscreto de dos objetos será denotado como $\mathbf{I}$ y está dado por los objetos $O_{\mathbf{I}} = \{0,1\}$ y por los morfismos

$$A_{\mathbf{I}} = \left\{\mathbf{1}_0, \mathbf{1}_1, 0 \xrightarrow{\imath} 1, 1 \xrightarrow{\imath^{-1}} 1\right\}.$$

3.7 Ejemplo (Acciones de grupo)**.** Recordemos que una acción por la izquierda de un grupo G sobre un conjunto X es una función $G \times X \longrightarrow X$ que mapea $(g,x) \longmapsto g\cdot x$ y cumple que $e \cdot x = x$ para cada $x \in X$ y $g\cdot(h\cdot x) = gh\cdot x$ para cada $g, h \in G, x \in X$.

Ahora podemos definir la siguiente categoría $G(X)$, su conjunto de objetos es $O_{G(X)} = X$ y el conjunto de morfismos está dado por $A_{G(X)} = G \times X$ donde para cada morfismo $(g, x) \in A_{G(X)}$ tenemos los dominios y contradominios $\mathbf{dom}\,(g, x) = x, \mathbf{cod}\,(g, x) = g \cdot x$ y donde dados dos morfismos

$$g \xrightarrow{(g,x)} g \cdot x, \quad g \cdot x \xrightarrow{(h, g \cdot x)} h \cdot (g \cdot x)$$

considerando que $h \cdot (g \cdot x) = hg \cdot x$, definimos la composición de la forma

$$(h, g \cdot x) \circ (g, x) = (hg, x)\,.$$

La composición de esta categoría coincide con el producto del grupo (para cada $x \in X$) y por lo tanto esta es asociativa. Además, existe e el elemento neutro de G que cumple que $(g, x) \circ (e, x) = (g, x)$ y $(e, g \cdot x) \circ (g, x) = (g, x)$ por lo que $\mathbf{1}_x = (e, x)$ cumple las condiciones de identidad. Haciendo a esta definición una categoría.

Luego, puesto que para cada morfismo $(g, x) = (g, (g^{-1} g \cdot x))$ existe $(g^{-1}, g \cdot x)$ tal que $(g^{-1}, g \cdot x) \circ (g, x) = (e, x)$ y $(g, (g^{-1} g \cdot x)) \circ (g^{-1}, g \cdot x) = (e, g \cdot x)$ entonces la categoría cumple que todos sus morfismos son invertibles, haciéndola un grupoide.

3.8 Nota. Vale la pena resaltar que aunque la categoría de todos los conjuntos y las funciones biyectivas sí cumple con que todo morfismo es un isomorfismo, no es un grupoide puesto que no es una categoría pequeña.

Especialmente en el caso de los grupoides, si G es un grupoide entonces usaremos la notación $G\,(x, y)$ para denotar la colección de homomorfismos entre cada par de objetos $x, y \in O_G$ definida en 2.2. Además, hacemos el abuso de notación $G\,(x)$ para denotar a $G\,(x, x)$.

A continuaicón hacemos ciertas definiciones útiles para relacionar a los objetos con sus conjuntos de morfismos.

3.9 Lema. *Sea G un grupoide y sea x un objeto de G. Entonces el conjunto $G\,(x)$ es un grupo con elementos bajo la operación de la composición.*

Demostración:

Dado el grupoide G y un elemento $x \in O_G$, tomamos todos los morfismos $g \in G(x)$, puesto que $\mathbf{dom}\, g = \mathbf{cod}\, g = x$ para todo $g \in G(x)$ entonces la composición gh está definida para cada $g, h \in G(x)$.

Como el morfismo identidad $\mathbf{1}_x$ cumple que $g\mathbf{1}_x = \mathbf{1}_x g = g$ para cada $g \in G(x)$, se verifica el conjunto tiene identidad. Además por los axiomas de categoría se cumple que para todos $g, h, k \in G(x)$ la operación es asociativa, $(gh)\, k = g\,(hk)$. Por último, como todo morfismo en un grupoide es un isomorfismo entonces para cada $g \in G(x)$ existe g^{-1} tal que $gg^1 = g^{-1} = \mathbf{1}_x$ y por lo tanto los elementos son invertibles.

De ello se verifica que el conjunto $G(x)$ de morfismos con la operación de la composición es un grupo.

Con este lema, motivamos la siguiente definición.

3.10 Definición (Grupo objeto)**.** Dado un grupoide G y un objeto $x \in O_G$, definimos al grupo objeto $G(x)$ como el conjunto de morfismos $a \in G(x)$.

Para continuar encapsulamos la idea que dos elementos de un grupoide estén conectados, y en general que un grupoide esté conectado.

3.11 Definición (Grupoide conexo)**.** Decimos que un grupoide G es conexo si para cualesquiera objetos $x, y \in O_G$, se cumple que $G(x, y) \neq \varnothing$.

Aunque no todos los grupoides son conexos, podemos identificar las «componentes conexas» de un grupoide encontrando los subgrupoides maximales que son conexos. Para ello, nos valemos de la siguiente relación de equivalencia.

3.12 Lema. *Sea G un grupoide y sean $x, y \in O_G$, entonces la relación dada por $x \sim y$ si y sólo si $G(x, y) \neq \varnothing$ es una relación de equivalencia en el conjunto de objetos.*

Demostración:

Para ello, verificamos las propiedades de reflexividad, transitividad y simetría:

- *La relación es reflexiva pues para cada $x \in O_G$ se cumple que $\mathbf{1}_x \in G(x, x)$ y por lo tanto $x \sim x$.*

- *La relación es transitiva pues si $x \sim y, y \sim z$ esto implica que existen $f \in G(x, y), g \in G(y, z)$ y por lo tanto existe $gf \in G(x, z)$ mostrando $x \sim z$ y la relación es transitiva.*

- *La relación es simétrica pues si $x \sim y$ entonces existe un morfismo $g \in G(x, y)$, y por ser grupoide existe su inverso $g^{-1} \in G(y, x)$ que demuestra que $y \sim x$ y la relación es simétrica.*

De ello, la relación es de equivalencia.

3.13 Definición (Componentes de un grupoide)**.** Dado un grupoide G, las componentes del grupoide son los subgrupoides $\pi_0(G) := \{G_i\}_{i \in I}$ donde O_{G_i} son las clases de equivalencia de la relación $x \sim y \iff G(x, y) \neq \varnothing$ inducidas sobre O_G, y para cualesquiera $x, y \in O_{G_i}, i \in I$ los morfismos están dados por $G_i(x, y) = G(x, y)$.

Es decir, las componentes de un grupoide son las subcategorías llenas generadas por la partición de los objetos inducida por la relación de conexidad. Puesto que por definición dos objetos pertenecen a la misma componente si y sólo si existe un morfismo entre ellos, entonces claramente las componentes de un grupoide son subgrupoides conexos.

A continuación mostramos que cualquier grupoide puede escribirse como la unión disjunta de sus componentes.

3.14 Lema. *Sea G un grupoide y sean $\pi_0(G) = \{G_i\}_{i \in I}$ los subgrupoides correspondientes a sus componentes conexas. Entonces los grupodies G_i son disjuntos a pares y además $G = \bigcup_{i \in I} G_i = \coprod_{i \in I} G_i$.*

Demostración:

Puesto que $\{O_{G_i}\}$ es una partición de O_G entonces $O_{G_i} \cap O_{G_j} = \varnothing$ para todo $i \neq j$, además $\bigcup_{i \in I} O_{G_i} = O_G$. Por otro lado, puesto que los objetos de los diferentes G_i son disjuntos a pares, los morfismos A_{G_i} necesariamnente deben ser disjuntos a pares y por lo tanto $G_i \cap G_j = \varnothing$ para cada $i \neq j$.

Segundo, mostraremos que $\bigcup_{i \in I} A_{G_i} = A_G$, es decir, mostraremos que el particionar el grupoide en sus componentes no pierde ningún morfismo. En efecto si $f \in A_G$ entonces $G(\mathbf{dom}\, f, \mathbf{cod}\, f) \neq \varnothing$ y de ello existe un $j \in I$ tal que

$\mathbf{dom}\, f, \mathbf{cod}\, f \in G_j$ y por lo tanto $f \in A_{G_j}$. Esto muestra que efectivamente todos los morfismos de G pertenecen a alguna componente conexa. De ello concluimos que

$$G = \coprod_{i \in I} G_i = \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Ahora mostramos algunas propiedades que cumplen los grupoides conexos, y en particular que nos permiten identificar a todos los grupos objetos con uno solo, bajo isomorfismos.

3.15 Teorema. *Sea G un grupoide conexo y sean $x, y, x', y' \in O_G$ objetos cualesquiera. Entonces existe una biyección*

$$\varphi : G(x, x') \longrightarrow G(y, y').$$

Además, si $x = x', y = y'$ entonces existe un isomorfismo de grupos $G(x) \xrightarrow{\varphi} G(y)$.

Demostración:

Puesto que G es conexo entonces existen morfismos $a \in G(x, y)$, $b \in G(x', y')$, así que podemos definir la función $\varphi : G(x, x') \to G(y, y')$ dada por $\varphi : f \mapsto bfa^{-1}$, donde $\varphi(f)$ hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "\varphi(f)"] \arrow[d, "a^{-1}"] & y' \\
x \arrow[r, "f"] & x' \arrow[u, "b"']
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1. Biyección $G(x, x') \xrightarrow{\varphi} G(y, y')$.

Luego, definimos la función $\psi : G(y, y') \to G(x, x')$ dada por $\psi : g \mapsto b^{-1}ga$, con el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "g"] & y' \arrow[d, "b^{-1}"] \\
x \arrow[u, "a"] \arrow[r, "\psi(g)"] & x'
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2. Inversa $G(y, y') \xrightarrow{\psi} G(x, x')$.

De forma directa tenemos $(\psi \circ \varphi)(f) = \psi(bfa^{-1}) = b^{-1}bfa^{-1}a = \mathbf{1}_{x'}f\mathbf{1}_x = f$, *por lo tanto* $\psi \circ \varphi = \mathbf{1}_{G(x,x')}$. *De manera análoga* $\varphi \circ \psi = \mathbf{1}_{G(y,y')}$, *mostrando así que* φ *es una biyección.*

Adicionalmente, si $x = x'$, $y = y'$ *podemos tomar* $a = b$ *en la biyección anterior y entonces* $\varphi : G(x) \to G(y)$ *está dada por* $\varphi : f \mapsto afa^{-1}$. *Además si* $f, g \in G(x)$ *entonces* $\varphi(f)\varphi(g) = (afa^{-1})(aga^{-1}) = af\mathbf{1}_x ga^{-1} = afga^{-1} = \varphi(fg)$ *y por lo tanto* φ *es una biyección y un homomorfismo, mostrando que* $G(x) \simeq G(y)$.

Este teorema nos brinda el siguiente corolario de manera inmediata.

3.16 Corolario. *Sea* G *un grupoide y sean* $x, y \in O_G$ *dos objetos en la misma componente conexa. Entonces* $G(x)$ *es isomorfo a* $G(y)$, *es decir* $G(x) \simeq G(y)$.

En particular, el isomorfismo entre grupos objeto dado por la conjugación de un morfismo tiene su propia definición y notación.

3.17 Definición (Isomorfismo $\overline{a}$)**.** Sea G un grpoide y sea $a \in G(x, y)$ un morfismo entre los objetos x, y, entonces denotamos de la forma $\overline{a} : G(x) \to G(y)$ al isomorfismo de grupos definido por $\overline{a} : g \longmapsto aga^{-1}$. Es decir, es el isomorfismo entre $G(x)$ y $G(y)$ dado por la conjugación por a.

Además, en particular, si $x = y$ entonces $a \in G(x)$, por lo tanto $\overline{a} : g \mapsto aga^{-1}$ y $\overline{a}$ es un automorfismo interno de $G(x)$.

Ahora utilizamos un resultado de grupos para mostrar condiciones suficientes y necesarias para que todos los isomorfismos inducidos sean iguales.

3.18 Teorema. *Sea* G *un grupoide conexo y sean* $x, y \in O_G$ *dos objetos. Entonces* $\overline{a} = \overline{b}$ *para todo* $a, b \in G(x, y)$ *si y sólo si* $G(x)$ *es abeliano.*

Demostración:

Sean $\overline{a}, \overline{b}$ *los isomorfismos inducidos por* $a, b \in G(x, y)$, *entonces* $\left(\overline{b}^{-1} \circ \overline{a}\right)(g) = \left(\overline{b}\right)^{-1}(aga^{-1}) = (b^{-1}a)\, g\, (b^{-1}a)^{-1} = \overline{(b^{-1}a)}(g)$ *y puesto que* $b^{-1}a \in G(x)$ *entonces* $\overline{(b^{-1}a)}$ *es un automorfismo interno* $f_{b^{-1}a} : G(x) \to G(x)$.

Por otro lado, notemos que $\overline{a} = \overline{b}$ *si y sólo si* $\overline{(b^{-1}a)} = \mathbf{1}_{G(x)}$. *De ello* $\overline{a} = \overline{b}$ *para cada* $a, b \in G(x, y)$ *si y sólo si* $\overline{(b^{-1}a)} = \mathbf{1}_{G(x)}$ *para cada* $a, b \in G(x, y)$. *Por último, para cualquier* $g \in G(x)$, *tomando* $a = bg$, *tenemos* $\overline{(b^{-1}a)} = \overline{g} = f_g$, *cualquier* *automorfismo interno $f_g \in Aut\,(G\,(x))$.*

Entonces, un grupoide conexo G cumple que $\overline{a} = \overline{b}$ para cualquier $a, b \in G\,(x, y)$ si y sólo si el grupo de automorfismos internos $Aut\,(G\,(x))$ es el grupo trivial, pero por el teorema 1.49 esto sucede si y sólo si $G\,(x)$ es abeliano, mostrando así el resultado.

Como todos los grupos objeto de un grupoide conexo G son isomorfos, entonces si para algunos $x, y \in G$ se cumple que $(\overline{a} = \overline{b})\forall a, b \in G\,(x, y)$, todos los grupos objeto $G\,(z)$ son abelianos para cualquier $z \in G$.

Aunque estos resultados se enunciaron para grupoides conexos, el lema 3.14 nos asegura que todo grupoide puede descomponerse en componentes y por lo tanto estos teoremas pueden reformularse como *sea G un grupoide y sean $x, y \in O_G$ dos objetos en la misma componente de G...*, pues las componentes de un grupoide son subgrupoides conexos.

3.2. Grupoide fundamental

La topología algebraica se encarga del estudio de transformaciones (functores) de la categoría de los espacios topológicos hacia categorías agebraicas (como los grupos o grupoides), esta herramienta ha mostrado ser de gran utilidad para clasificar espacios y diferenciarlos a través de invariantes topológicas que se preservan de cierta forma a través de estas transformaciones,

Por lo general la topología algebraica se estudia desde la perspectiva de los grupos, dando paso a definiciones como el *grupo* fundamental; una definición que ha mostrado ser extremadamente útil para catalogar espacios. En esta sección introducimos una generalización de este concepto usando las herramientas estudiadas hasta ahora de la teoría de los grupoides, dando paso a la definiciónd el *grupoide fundamental.* Esta generalización nos libra de ciertas restricciones que, al trabajar con grupos, hacen algunos cálculos demasiado engorrosos o tediosos.

En general, el grupoide fundamental es una generalización del grupo fundamental que facilita grandemente el cálculo de algunos grupos fundamentales, tomando en cuenta el ejemplo emblemático del cálculo del grupo fundamental del círculo.

Para definir el grupoide fundamental definimos algunos conceptos topológicos importantes.

3.19 Definición (Camino)**.** Sea X un espacio topológico, definimos un *camino* en X como una función continua $\alpha : [0,1] \to X$.
Además consideramos a $x = \alpha(0)$ y $y = \alpha(1)$ como sus puntos inicial y final respectivamente, también llamados extremos. En ese caso decimos que α es un camino de x hacia y.

3.20 Definición ($P_X(x,y)$)**.** Sea X un espacio topológico y sean $x, y \in X$, denotamos como $P_X(x,y)$ al conjunto de todos los caminos $\alpha : [0,1] \to X$ de x hacia y. Simbólicamente

$$P_X(x,y) = \{\alpha : [0,1] \to X | \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}.$$

En pocas palabras, un camino es una función continua del intervalo unitario al espacio. A continuación, definimos la idea «un camino entre funciones», definimos la relación de homotopía.

3.21 Definición (Homotopía)**.** Sean X, Y espacios topológicos y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas. Una *homotopía* entre dichas funciones es una función continua $H : [0,1] \times X \to Y$ que cumple

$$H(0,x) = f(x), \qquad H(1,x) = g(x).$$

Además, si existe una homotopía entre f y g decimos que las funciones son *homotópicas* y lo denotamos como $f \simeq g$.

En general, y cuando no exista confusión, también podemos escribir las homotopías $H(t,x)$ de la forma $H_t(x)$.

Aunque los caminos son funciones continuas, y la definición de homotopía aplica atuomáticamente a ellos, hacemos una definición distinta para imponer una última condición en los extremos

3.22 Definición (Homotopía de caminos)**.** Sean $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ dos caminos en el espacio topológico X tales que $\alpha(0) = x = \beta(0)$ y $\alpha(1) = y = \beta(1)$, equivalentemente, sean $\alpha, \beta \in P_X(x,y)$. Una *homotopía de caminos* es una función continua

$H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que, usando la notación $H(s,t) = H_s(t)$,

$$\begin{aligned} H_0(t) &= \alpha(t), \qquad H_1(t) = \beta(t), \quad t \in [0,1] \\ H_s(0) &= x, \qquad H_s(1) = y, \quad s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Es decir, una homotopía de caminos es una homotopía que mantiene fijos los extremos del camino. En particular, todas las homotopías de caminos son homotopías.

En las homotopías de caminos resulta especialmente conveniente la notación $H_s(t)$ puesto que tanto s como t varían en $[0,1]$ por lo que el subíndice facilita distinguir la variable que varía a lo largo de la homotopía (el subíndice) con respecto a la que varía a lo largo del camino (el argumento).

3.23 Lema. *La relación de homotopía es una relación de equivalencia entre las funciones continuas.*

Demostración:

Mostraremos que la relación $f \simeq g$ es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

- *Es una relación reflexiva pues para cada función continua $f : X \to Y$ existe la homotopía $H(t,x) = f(x)$, implicando $f \simeq f$.*

- *Es una relación simétrica pues si H es una homotopía entre dos funciones $f, g : X \to Y$, i.e. $H(0,x) = f(x)$, $H(1,x) = g(x)$, entonces la función $F : [0,1] \times X \to Y$ dada por $F(t,x) = H(1-t,x)$ cumple $F(0,x) = G(1,x) = g(x)$ y $F(1,x) = G(0,x) = f(x)$. Además F es continua, de ello $g \simeq f$.*

- *Si $f, g, h : X \to Y$ son funciones continuas tales que $f \simeq g$ y $g \simeq h$, con F una homotopía de f hacia g, y G una homotopía de g hacia h entonces la función $H : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ definida por*

  $$H(t,x) = \begin{cases} F(2t,x) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2t-1,x) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

  Puesto que $F(1,x) = g(x) = G(0,x)$ entonces el lema del pegado 1.23 nos asegura que H es una función continua y por lo tanto F es una homotopía de f hacia h, pues $H(0,x) = F(0,x) = f(x)$, $H(1,x) = G(1,x) = h(x)$.

Puesto que toda relación de equivalencia induce una partición, entonces podemos hablar de la clase de homotopía de una función continua $f : X \to Y$, donde denotamos dicha clase de homotopía de la forma $[f] := \{g : X \to Y | g \simeq f\}$

De la misma manera, si en la demostración del lema anterior tomamos a f, g, h como caminos de x a y, y las homotopías como homotopías de caminos, entonces la misma demostración nos muestra que las homotopías de caminos también inducen una relación de equivalencia.

El único detalle por verificar es que las homotopías usadas en la demostración mantienen los extremos de los caminos.

3.24 Corolario. *La relación de homotopía de caminos es una relación de equivalencia entre los caminos de x a y.*

Demostración:

Tomando la demostración del lema 3.23 con $X = [0,1]$; $x, y \in Y$, únicamente debemos verificar que las homotopías usadas preservan los extremos, en efecto, tomando las mismas notaciones de dicha demostración

- *Dado el camino f, la homotopía de caminos $H(t,x) = f(x)$ cumple que $H(t,0) = f(0) = x$ y $H(t,1) = f(1) = y$.*
- *Dados los caminos f, g con homotopía de caminos H, la homotopía F cumple que $F(t,0) = H(1-t,0) = x$, $F(t,1) = H(1-t,1) = y$ por lo que también es una homotopía de caminos.*
- *Dados los caminos f, g, h con homotopías de caminos F, G, la homotopía H cumple que $H(t,0) = F(\xi,0) = x \vee H(t,0) = G(\eta,0) = x$ para $\xi, \eta \in [0,1]$, de igual forma $H(t,1) = F(\xi,1) = x \vee H(t,1) = G(\eta,1) = y$, por lo tanto H es una homotopía de caminos.*

De ello, dado un camino $\alpha \in P_X(a,b)$, podemos hablar de su clase de homotopía $[\alpha] := \{\beta \in P_X(a,b) : \beta \simeq \alpha\}$.

Permitimos el abuso de notación denotando las clases de homotopía de caminos y las clases de homotopía (en general) con la misma notación, bajo el entendido que cuando hablemos de caminos siempre nos referiremos a la clase de equivalencia de homotopía de caminos.

3.25 Teorema. *Dadas funciones $f_1, f_2 : X \to Y$ y $g_1, g_2 : Y \to Z$ tales que $f_1 \simeq f_2$ y $g_1 \simeq g_2$, entonces $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$. Es decir, la relación de homotopía se preserva bajo la composición.*

Demostración:

Si $F : [0,1] \times X \to Y$ es una homotopía entre f_1 y f_2, y $G : [0,1] \times Y \to Z$ una homotopía entre g_1 y g_2. Entonces definimos a $H : [0,1] \times X \to Z$ dada por

$$H(t,x) = G(t, F(t,x)).$$

Esta función es la composición de funciones continuas y por lo tanto es continua, además $H(0,x) = G(0, F(0,x)) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$ y $H(1,x) = G(1, F(1,x)) = g_2(f_2(x)) = (g_2 \circ f_2)(x)$. De ello $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

Esto implica que la composición de clases de homotopía definida de la forma $[g] \circ [f] := [g \circ f]$ está bien definida. Además la composición de clases de homotopía es automáticamente asociativa y cumple la ley de identidad de una categoría pues las funciones cumplen dichos axiomas. De ahí nace la demostración que **Toph** dado en el ejemplo 2.16, con objetos los espacios topológicos y morfismos las clases de homotopía de las funciones continuas, es efectivamente una categoría.

En general, si tenemos un camino α de a hacia b, y un camino β de b hacia c para puntos $a, b, c \in X$ en un espacio topológico, no tiene sentido definir la composición $\beta \circ \alpha$ pues $\mathbf{cod}\, \alpha = X$ y $\mathbf{dom}\, \beta = [0,1]$ así que $\beta \circ \alpha$ no necesariamente está definida. A continuación definimos la idea de «concatenar» caminos, haciendo uno primero y otro después.

3.26 Definición (Concatenación de caminos)**.** Sea X un espacio topológico y sean $x, y, z \in X$, además sean $\alpha \in P_X(x,y), \beta \in P_X(y,z)$ dos caminos tales que $\alpha(1) = y = \beta(0)$, definimos su concatenación $\beta \cdot \alpha : [0,1] \longrightarrow X$ como el camino dado por

$$\beta \cdot \alpha := \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Notemos que por la condición $\alpha(1) = \beta(0)$ y por el lema del pegado, el nuevo camino $\beta \cdot \alpha$ es una función continua y por lo tanto también un camino y de ello $\beta \cdot \alpha \in P_X(x,y)$.

3.27 Definición (Camino constante)**.** Sea X un espacio topológico y $x \in X$ un punto cualquiera del espacio. Denotamos como $e_x \in P_X(x, x)$ al camino constante $e_x : [0, 1] \to X$ con $e_x(t) = x$.

Vale la pena resaltar la concatenación de caminos en general no es asociativa, consideremos por ejemplo tomando $e_x \in P_X(x, x), \alpha \in P_X(x, y), e_y \in P_X(y, y)$. La concatenación $(e_y \cdot \alpha) \cdot e_x$ se mantiene en el camino constante e_x al menos para $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, mientras que la concatenación $e_y \cdot (\alpha \cdot e_x)$ se mantiene en e_x únicamente durante $t \in \left[0\frac{1}{4}\right]$.

En particular si $x \neq y$ entonces necesariamente $(e_y \cdot \alpha) \cdot e_x\left(\frac{1}{2}\right) = e_x(1) = x$ mientras que $e_y \cdot (\alpha \cdot e_x)\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \cdot e_x(1) = \alpha(1) = y \neq x$ y la concatenación de caminos no es asociativa.

El siguiente teorema nos permite trabajar con la concatenación de clases de homotopía de caminos, esto nos permite definir el grupoide fundamental y esquivar las dificultades como la que acabamos de mostrar.

3.28 Teorema. *Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in P_X(x, y)$, $\beta_1, \beta_2 \in P_X(y, z)$ caminos tales que $\alpha_1 \simeq \alpha_2$, $\beta_1 \simeq \beta_2$, entonces $\beta_1 \cdot \alpha_1 \simeq \beta_2 \cdot \alpha_2$.*

Demostración:

Sea $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ la homotopía entre α_1 y α_2, y sea $G : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ la homotopía entre β_1 y β_2. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} F_0(t) = \alpha_1(t), &\quad G_0(t) = \beta_1(t) \\ F_1(t) = \alpha_2(t), &\quad G_1(t) = \beta_2(t) \\ F_s(0) = x,\ F_s(1) = y, &\quad G_s(0) = y,\ G_s(1) = z. \end{aligned}$$

Ahora definimos la función $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$, con $H(s, t) = H_s(t)$, de la forma

$$H_s(t) = \begin{cases} F_s(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G_s(2t - 1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Una vez más el lema del pegado y el hecho que $F_s(1) = y = G_s(0)$ nos aseguran que

H es una función continua. Además haciendo $s = 0$

$$H_0(t) = \begin{cases} F_0(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G_0(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \begin{cases} \alpha_1(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta_1(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \beta_1 \cdot \alpha_1(t).$$

Análogamente mostramos que $H_1 = \beta_2 \cdot \alpha_2$.

Por último, $H_s(0) = F_s(0) = x$, $H_s(1) = G_s(1) = z$, por lo que en efecto H es una homotopía de caminos, mostrando así el resultado.

Este teorema nos muestra que la concatenación de clases de homotopía, a continuación, está bien definida.

3.29 Definición. Sea X un espacio topológico y sean α, β dos caminos en X tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, y sean $[\alpha], [\beta]$ sus respectivas clases de homotopía. Definimos la concatenacnión de clases de homotopía de la forma

$$[\beta] \cdot [\alpha] := [\beta \cdot \alpha].$$

Para continuar, exponemos cómo a pesar que la concatenación de caminos no tenía muchas propiedades deseables, la concatenación de clases de homotopía cumple las propiedades fundamentales para construir una categoría (y en general un grupoide).

3.30 Lema. *La concatenación de clases de homotopía es asociativa, es decir para un espacio topológico X y caminos $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to X$ tales que $\alpha(1) = \beta(0), \beta(1) = \gamma(0)$ se cumple*

$$([\gamma] \cdot [\beta]) \cdot [\alpha] = [\gamma] \cdot ([\beta] \cdot [\alpha])$$

En otras palabras, $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha \simeq \gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$

Demostración:

Explícitamente definimos $\gamma\cdot\beta, \beta\cdot\alpha$ y las composiciones $(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha,\ \gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)$. Tenemos

$$\beta\cdot\alpha\,(t)=\begin{cases}\alpha\,(2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \beta\,(2t-1) & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases},$$

$$\gamma\cdot\beta\,(t)=\begin{cases}\beta\,(2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \gamma\,(2t-1) & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases},$$

$$(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha\,(t)=\begin{cases}\alpha\,(2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \beta\,(4t-2) & t\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\\ \gamma\,(4t-3) & t\in\left[\frac{3}{4},1\right]\end{cases},$$

$$\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)\,(t)=\begin{cases}\alpha\,(4t) & t\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\\ \beta\,(4t-1) & t\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\\ \gamma\,(2t-1) & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases},$$

Notemos que tanto $(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha$ como $\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)$ son funciones que recorren α en el intervalo $[0,a]$, recorren β en $[a,b]$ y recorren γ en $[b,1]$ con $0<a<b<1$. De hecho podemos definir esta función en general

$$F\,(t,a,b)=\begin{cases}\alpha\left(\frac{t}{a}\right) & t\in[0,a]\\ \beta\left(\frac{t-a}{b-a}\right) & t\in[a,b]\\ \gamma\left(\frac{t-b}{1-b}\right) & t\in[b,1]\end{cases}.$$

En este caso $(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha=F\left(t,\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$, $\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)=F\left(t,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$. Además F es continua para $t\in[0,1]$ y $0<a<b<1$, esto gracias al lema del pegado y que es la composición de funciones continuas. Además $F\,(0,a,b)=\alpha\,(0)\,,\ F\,(1,a,b)=\gamma\,(1)$ para cualquier $0<a<b<1$.

Luego consideremos la siguiente homotopía, con F la función definida anteriormente,

$$H_s(t)=F\left(t,\frac{s+1}{4},\frac{s+2}{4}\right).$$

Una vez más, puesto que $0<\frac{s+1}{4}<\frac{s+2}{4}<1$ para cada $s\in[0,1]$ entonces F es continua para todo $(s,t)\in[0,1]\times[0,1]$, esta función cumple que $H_0\,(t)=F\left(t,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)\,,\ H_1\,(1)=F\left(t,\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha$. Por lo tanto H_s es una homotopía de caminos, mostrando $(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha\simeq\gamma\cdot(\beta\cdot\alpha)$.

Gráficamente, lo que está sucediendo en la homotopía usada en el lema 3.30 es que estamos cambiando la *velocidad* a la que recorremos cada uno de los caminos α, β, γ. Aunque los caminos $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha,\ \gamma (\beta \cdot \alpha)$ no eran iguales, sí recorrían el mismo camino, pero con velocidades diferentes cada uno. Lo que hizo la homotpía fue cambiar gradualmente la velocidad de cada recorrido para hacerlos iguales.

En general, la idea de esta demostración fue notar que los caminos recorrían los mismos puntos, sólo en momentos distintos. Una idea similar motiva el siguiente lema.

3.31 Lema. *Sea X un espacio topológico, sea $x \in X$ un punto cualquiera con e_x su camino constante. Se cumple que para caminos α, β tales que $\alpha(1) = x = \beta(0)$,*

$$[e_x] \cdot [\alpha] = [\alpha], \qquad [\beta] \cdot [e_x] = [\beta].$$

Equivalentemente $e_x \cdot \alpha \simeq \alpha,\ \beta \cdot e_x \simeq \beta$.

Demostración:

Sea $x \in X$ un punto del espacio y sea $\alpha \in P_X(z, x)$ un camino que cumple $\alpha(1) = x$. Consideremos la siguiente función $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$:

$$H(s,t) = H_s(t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2t}{s+1}\right) & t \in \left[0, \frac{s+1}{2}\right] \\ x & t \in \left[\frac{s+1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Esta función es continua pues cumple $H_s\left(\frac{s+1}{2}\right) = \alpha(1) = x$, además

$$H_0(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x & t \in \left[\frac{1}{2}.1\right] \end{cases} = e_x \cdot \alpha(t),$$

$$H_1(t) = \alpha(t)$$

Puesto que $H_s(0) = \alpha(0) = z$, $H_s(1) = x$, H es una homotopía de caminos y $\alpha \simeq e_x \cdot \alpha$, una construcción análoga muestra $\beta \cdot e_x \simeq \beta$ para $\beta \in P_X(x, y)$.

El lema anterior remarca el hecho que el camino $e_x \cdot \alpha$ recorre el camino α y luego espera en el punto final x durante un tiempo. La homotopía lo que hace es, de manera continua, recorrer más lento el camino α y por lo tanto esperar menos tiempo en el punto final. Análogamente para $\beta \cdot e_x$ y su punto inicial.

El siquiente lema toma la misma idea de esperar en un punto, pero en lugar de esperar al inicio o al final del camino lo hace durante el recorrido.

3.32 Lema. *Dado un espacio topológico X con $x, y \in X$, para cualquier camino $\alpha \in P_X(x,y)$ existe un camino $\beta \in P_X(y,x)$ tal que*

$$[\beta] \cdot [\alpha] = [e_x], \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [e_y], \quad (i.e.\ \beta \cdot \alpha \simeq e_x, \alpha \cdot \beta \simeq e_y.)$$

A este elemento lo denotaremos α^{-1}.

Demostración:

Para $\alpha \in P_X(x,y)$ consideremos $\beta \in P_X(y,x)$ definido de la forma $\beta(t) = \alpha(1-t)$, en efecto $\beta(0) = \alpha(1) = y$, $\beta(1) = \alpha(0) = x$, por lo tanto $\beta \in P_X(y,x)$.

Explícitamente la composición $\beta \cdot \alpha \in P_X(x,x)$ es de la forma

$$\beta \cdot \alpha(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2-2t) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Ahora consideremos la siguiente función $H : [0,1] \times [0,1] \to X$, tomando $\beta(2t-1) = \alpha(1-(2t-1)) = \alpha(2-2t)$,

$$H(s,t) = H_s(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1-s}{2}\right] \\ \alpha(1-s) & t \in \left[\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}\right] \\ \alpha(2-2t) & t \in \left[\frac{1+s}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Notando que $\frac{1-s}{s} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1+s}{2}$ para $s \in [0,1]$, tenemos $H_s\left(\frac{1-s}{2}\right) = \alpha\left(2\left(\frac{1-s}{2}\right)\right) = \alpha(1-s)$, $H_s\left(\frac{1+s}{2}\right) = \beta\left(2\left(\frac{1+s}{2}\right) - 1\right) = \beta(s) = \alpha(1-s)$, por lo tanto H es una función continua.

Por otro lado, se cumple que

$$H_0(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2-2t) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \beta \cdot \alpha(t)$$
$$H_1(t) = \alpha(0) = e_x.$$

Puesto que $H_s(1) = H_s(0) = \alpha(0) = x$ entonces H es una homotopía de caminos de $\beta \cdot \alpha$ hacia e_x, mostrando $\beta \cdot \alpha \simeq e_x$.

Notando que $\beta(t) = \alpha(1-t)$ implica que $\alpha(t) = \beta(1-t)$, exactamente la misma demostración con β y α intercambiados de lugar nos muestra $\alpha \cdot \beta \simeq e_y$.

De ello, para cualquier $\alpha \in P_X(x,y)$ existe un $\beta \in P_X(y,x)$ que cumple las condiciones del teorema y lo denotamos α^{-1}.

Notemos que dado un camino $\alpha(t)$, el camino $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ es recorrer α en sentido contrario. Por este motivo podemos pensar en la homotopía del lema 3.32 como recorrer α hasta cierto punto, y «esperar» en ese mismo punto hasta que sea momento de que el camino α^{-1} «pase de regreso» para terminar con él el recorrido. Intuitivamente eso es lo que está sucediendo en esta homotopía.

Vale la pena resaltar la diferencia entre la composición de clases de homotopía de funciones y la concatenación de clases de homotopía de caminos. Las clases de homotopía de funciones heredaban todas estas propiedades de las propiedades de la composición de funciones; por otro lado, la concatenación de caminos no posee ninguna de estas propiedades que tienen las clases de homotopía.

Ahora tenemos las herramientas para finalmente definir el grupoide fundamental.

3.33 Definición (Grupoide fundamental)**.** Sea X un espacio topológico, definimos su *grupoide fundamental*, $\pi(X)$ con su conjunto de objetos $O_{\pi(X)} = X$ los puntos del espacio topológico, y su conjunto de morfismos como las clases de homotopía de caminos $A_{\pi(X)} = \{[\alpha] : \alpha \in P_X(x,y), x, y \in X\}$. La composición de morfismos está dada por la concatenación de clases de homotopía $[\beta] \cdot [\alpha]$.

3.34 Teorema. *El grupoide fundamental dado en la definición 3.33 es un grupoide.*

Demostración:

Puesto que la composición de la categoría es la concatenación de clases de homotopía de caminos, el lema 3.30 nos asegura que la composición de la categoría es asociativa. Acemás, el lema 3.31 nos asegura que cada objeto $x \in X$ cuenta con un elemento $e_x \in A_{\pi(X)}$ que cumple la propiedad de identidad. Esto muestra que $\pi(X)$ es una categoría.

Por último, el lema 3.32 nos muestra que cada morfismo de la categoría es invertible. Puesto que X es un conjunto, entonces $\pi(X)$ es una categoría pequeña en la que todos los morfismos son invertibles, entonces $\pi(X)$ es un grupoide.

Para cada espacio topológico X y grupoide fundamental $\pi(X)$, podemos siempre tomar la subcategoría llena en la que el conjunto de objetos es $A \cap X \subseteq X$ y el conjunto de morfismos es el conjunto de todas las clases de homotopía de caminos $[\alpha]$ donde $\alpha \in P_X(x,y)$, $x, y \in A \cap X$.

3.35 Definición ($\pi(X,A)$)**.** Sea X un espacio topológico, definimos al grupoide $\pi(X,A)$ como el sugrupoide de $\pi(X)$ donde el conjunto de objetos está dado por $O_{\pi(X,A)} = A \cap X$, y el conjunto de morfismos dado por

$$A_{\pi(X,A)} = \{[\alpha] : \alpha \in P_X(x,y), x, y \in A\}.$$

El caso en el que $A = \{x\}$ para un único punto es especial, pues este subgrupoide corresponde precisamente al grupo objeto asociado al objeto $x \in X$. Este grupo es tan importante en la topología algebraica y tiene tantas aplicaciones que en realidad su definición precede a la definición del grupoide fundamental.

3.36 Definición (Grupo fundamental)**.** Dado un espacio topológico X y un punto $x \in X$, definimos al *grupo fundamental* $\pi(X,x)$ como el conjunto de las clases de homotopía de caminos $[\alpha], \alpha \in P_X(x,x)$ de x a x con el producto dado por la concatenación de clases de homotopía $[\beta] \cdot [\alpha]$, $\alpha, \beta \in P_X$, $\alpha(1) = \beta(0)$.

Notemos que esta definición es precisamente el grupo objeto asociado a $x \in X$ de un grupoide fundamental $\pi(X)$. Por lo que la demostración que esta estructura es un grupo es automática del lema 3.9 y el hecho que el grupoide fundamental es un grupoide.

4. CATEGORÍA DE GRUPOIDES

4.1. Homomorfismos de grupoides

A continuación, así como dotamos a las categorías y los functores de una estructura categórica, definimos la categoría de todos los grupoides. Recordando que los grupoides son categorías pequeñas, hacemos la siguiente definición.

4.1 Definición (Homomorfismo de grupoides)**.** Sean G, H dos grupoides, un homomorfismo $F : G \to H$ entre ellos es un functor entre las categorías G, H.

En otras palabras, la definición anterior indica que un homomorfismo entre grupoides es simplemente otra forma de llamar a los functores eentre ellos. Ahora definimos una subcategoría de la categoría **Cat**, correspondiente a la categoría de los grupoides.

4.2 Definición (Categoría **Grpd**)**.** Definimos la categoría **Grpd** como la categoría cuyos objetos son todos los grupoides, y los morfismos de la categoría **Grpd** son los homomorfismos de grupoides.

La demostración que **Grpd** es una categoría es precisamente la demostración que la categoría **Cat** es una categoría. Más aún, podemos ver a **Grpd** como la subcategoría llena de **Cat** cuyos objetos son todas las categorías que son grupoides.

Vale la pena resaltar que no es necesario en la definición 4.2 hacer ninguna aclaración acerca de categorías pequeñas o clases propias, pues en la definición de grupoide 3.1 exigimos que sea una categoría pequeña, por lo que no hay problema con definir la clase de todos los grupoides en general.

Puesto que la categoría de los grupoides es una subcategoría de la categoría de las categorías pequeñas, el producto de categorías en **Cat** coincide con el producto de grupoides en **Grpd**.

4.3 Definición (Producto de grupoides)**.** Dados dos grupoides G, H definimos el grupoide $G \times H$ como el grupoide cuyos objetos son de la forma (a, x) para $a \in O_G,\ x \in O_H$ y cuyos morfismos son de la forma $(f, f') : (a, x) \to (b, y)$ para $f : a \to b,\ f' : x \to y$ con $f \in A_G,\ f' \in A_H$. La composición de morfismos $(a, x) \xrightarrow{(f,f')} (b, y) \xrightarrow{(g,g')} (c, z)$ está dada por

$$(g, g') \circ (f, f') = (g \circ f, g' \circ f') .$$

Primero, notemos que $G \times H$ efectivamente es un grupoide pues $G \times H$ es el producto de categorías entre G y H, además para morfismos $f \in A_C,\ g \in A_H$ cualesquiera, existen $f^{-1} \in A_G,\ g^{-1} \in A_H$ tales que $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_{\mathbf{dom}\, f},\ f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_{\mathbf{cod}\, f}$ y para g se cumple $g^{-1} \circ g = \mathbf{1}_{\mathbf{dom}\, g},\ g \circ g^{-1} = \mathbf{1}_{\mathbf{cod}\, g}$. Por lo tanto, para cualquier $(f, g) \in A_{G \times H}$ con $(f, g) : (a, x) \to (b, y)$ existe $(f^{-1}, g^{-1}) : (b, y) \to (a, x)$ tal que

$$\left(f^{-1}, g^{-1}\right) \circ (f, g) = (\mathbf{1}_a, \mathbf{1}_x) = \mathbf{1}_{(a,x)}, \qquad (f, g) \circ \left(f^{-1}, g^{-1}\right) = \mathbf{1}_{(b,y)}.$$

Por lo tanto todos los morfismos son invertibles y $G \times H$ es un grupoide.

Los homomorfismos de proyección $\pi_1 : G \times H \to G,\ \pi_2 : G \times H \to H$ son los functores de pryección definidos en el producto de categorías. De igual manera, todos los teoreamas desarrollados en la sección 2.5 correspodniente al producto de categorías aplican automáticamente al producto de los grupoides con sus respectivos homomorfismos.

Ahora, clasificamos todos los grupoides bajo isomorfismos usando el grupoide indiscreto definido en 3.6. Recordemos que dado un conjunto X definimos al grupoide indiscreto como el grupoide $X \times X$ como el grupoide cuyos objetos son el conjunto $O_{X \times X} = X$ y los morfismos son todos los pares $(x, y)\,,\ x, y \in X$, es decir $A_{X \times X} = X \times X$.

Con esto en mente, podemos clasificar a cualquier grupoide G conexo con su grupo objeto $G(x)$ y el grupoide indiscreto de sus objetos $O_G \times O_G$.

4.4 Teorema. *Sea G un grupoide conexo, sea $x \in O_G$ un objeto de G con grupo objeto $G(x)$ y sea $O_G \times O_G$ el grupoide indiscreto del conjunto de los objetos del grupoide. Entonces existe un isomorfismo de grupoides*

$$G \simeq G(x) \times (O_G \times O_G) .$$

Demostración:

Mostraremos que, para G un grupoide conexo con $x \in O_G$ un objeto, existen homomorfismos de grupoides $\varphi : G \to G(x) \times (O_G \times O_G)$, $\psi : G(x) \times (O_G \times O_G) \to G$ tales que $\psi \circ \varphi = \mathbf{1}_G$, $\varphi \circ \psi = \mathbf{1}_{G(x)\times(O_G \times O_G)}$.

Explícitamente, para cualquier objeto $a \in O_G$ tomamos un morfismo específico $\alpha_a : x \to a$, este morfismo existe porque G es un grupoide conexo[1]*. Con esta familia de morfismos $\{\alpha_a\}, a \in O_G$ definimos el siguiente homomorfismo de grupoides $\varphi : G \to G(x) \times (O_G \times O_G)$.*

Para la función en los objetos, recordando que los objetos de $G(x) \times (O_G \times O_G)$ son el conjunto $O_{G(x)\times(O_G\times O_G)} = \{x\} \times O_G = \{(x,a) : a \in O_G\}$, el homomorfismo φ mapea los objetos $a \in O_G$, $\varphi a = (x,a)$. En los morfismos, si $f \in A_G$ es un morfismo con dominio y codominios $f : a \to b$, el homomorfismo mapea

$$\varphi f = \left(\alpha_b^{-1} f \alpha_a, (a,b)\right).$$

Este homomorfismo está bien definido pues los dominios y codominios de las composiciones son $x \xrightarrow{\alpha_a} a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{\alpha_b^{-1}} x$ por lo tanto $\alpha_b^{-1} f \alpha_a \in G(x)$.

Efectivamente φ es un homomorfismo de grupoides pues para cualquier objeto $a \in O_G$ tenemos que

$$\varphi \mathbf{1}_a = \left(\alpha_a^{-1} \mathbf{1}_a \alpha_a, (a,a)\right) = (\mathbf{1}_x, (a,a)) = \mathbf{1}_{(x,a)} = \mathbf{1}_{\varphi a},$$

cumpliendo la propiedad de unidad, y para morfismos del grupoide f, g con $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \varphi(gf) &= \left(\alpha_c^{-1}(gf)\alpha_a, (a,c)\right) \\ &= \left(\left(\alpha_c^{-1} g \alpha_b\right)\left(\alpha_b^{-1} f \alpha_a\right), (b,c) \circ (a,b)\right) \\ &= \left(\alpha_c^{-1} g \alpha_b, (b,c)\right) \circ \left(\alpha_b^{-1} f \alpha_a, (a,b)\right) = (\varphi g)(\varphi f). \end{aligned}$$

En donde usamos las igualdades $\alpha_c^{-1}(gf)\alpha_a = (\alpha_c^{-1} g \alpha_b)\left(\alpha_b^{-1} f \alpha_a\right)$ en $G(x)$, así como la igualdad $(a,c) = (b,c) \circ (a,b)$ en el grupoide $O_G \times O_G$. Mostrando así que φ es

[1] En general, para obtener una función de selección para los morfismos α_a necesitamos el axioma de elección

un homomorfismo de grupoides. Ahora, definimos explícitamente su homomorfismo inverso $\psi : G(x) \times (O_G \times O_G) \to G$.

Para los objetos $(x,a) \in O_{G(x)\times(O_G\times O_G)}$ *el homomorfismo* ψ *mapea* $\psi(x,a) = a$, *y para un morfismo* $(g,(a,b)) \in A_{G(x)\times(O_G\times O_G)}$ *el homomorfismo* ψ *actúa de la forma*

$$\psi(g,(a,b)) = \alpha_b g \alpha_a^{-1},$$

donde $a \xrightarrow{\alpha_a^{-1}} x \xrightarrow{g} x \xrightarrow{\alpha_b} b$ *por lo que* $\psi(g,(a,b)) \in G(a,b)$. *Verificamos que efectivamente* ψ *es inversa de* φ *tenemos en los objetos*

$$\psi \circ \varphi a = \psi(x,a) = a, \qquad \varphi \circ \psi(x,a) = \varphi a = (x,a).$$

Por otro lado, para los morfismos $f \in G(a,b)$, $(g,(a,b)) \in A_{G(x)\times(O_G\times O_G)}$ *tenemos*

$$\psi \circ \varphi f = \psi\left(\alpha_b^{-1} f \alpha_a, (a,b)\right) = \alpha_b \left(\alpha_b^{-1} f \alpha_a\right) \alpha_a^{-1} = f,$$
$$\varphi \circ \psi(g,(a,b)) = \varphi\left(\alpha_b g \alpha_a^{-1}\right) = \left(\alpha_b^{-1}\left(\alpha_b g \alpha_a^{-1}\right)\alpha_a, (a,b)\right) = (g,(a,b)).$$

Mostrando que los homomorfismos cumplen $\psi \circ \varphi = \mathbf{1}_G$, $\varphi \circ \psi = \mathbf{1}_{G(x)\times(O_G\times O_G)}$, *por lo que* φ *es un isomorfismo de grupoides, mostrando el resultado deseado.*

Con este teorema, hemos clasificado todos los grupoides conexos bajo isomorfismo, usando el lema 3.14, sabiendo que cualquier grupoide es la unión disjunta de sus componentes conexas, hemos clasificado toda la categoría **Grpd** bajo isomorfismo; los grupoides conexos se clasifican usando el teorema 4.4 mostrado anteriormente, y los grupoides no conexos simplemente se descomponen en sus componentes conexas.

Una vez contamos con esta clasificación, podemos aplicarla al grupoide fundamental $\pi(X)$ para un espacio topológico X, en cuyo caso si $\pi_0(X)$ es el conjunto de componentes conexas por caminos de X y si $x, y \in X_i$ pertenecen a la misma componente por caminos entonces existe un camino $\alpha \in P_X(x,y)$ entre ellos y por lo tanto x, y pertenecen a la misma componente conexa del grupoide $\pi(X)$.

Además puesto que el grupo objeto del grupoide fundamental para un punto x en el espacio es precisamente el grupo fundamental $\pi(X,x)$, entonces el grupoide fundamental de un espacio puede clasificarse en función a los grupos fundamentales de todas sus componentes conexas.

Una vez hemos definido la categoría de todos los grupoides, podemos ver al grupoide fundamental como una transformación de la categoría de los espacios topológicos **Top** hacia los grupoides **Grpd**, donde a cada espacio topológico se le asocia un grupoide $\pi(X)$. Esta transformación es únicamente en los objetos de ambas categorías; ahora estudiamos una transformación de funciones continuas a homomorfismos de grupoides.

4.5 Definición (Homomorfismo inducido πf)**.** Sean X, Y dos espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua entre ellos. Definimos el homomorfismo entre los grupoides fundamentales $\pi f : \pi(X) \to \pi(Y)$ como el homomorfismo que en los objetos mapea

$$\pi f : O_{\pi(X)} \longrightarrow O_{\pi(Y)}, \quad \pi f : x \longmapsto f(x),$$

y en los morfismos para $[\alpha] \in P_X(x, y)$ una clase de homotopía de caminos mapea

$$\pi f : A_{\pi(X)} \longrightarrow A_{\pi(Y)}, \quad \pi f : [\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

4.6 Lema. *La función $\pi f : \pi(X) \to \pi(Y)$ definida en 4.5 es un homomorfismo de grupoides.*

Demostración:

Primero, puesto que si $\alpha \in P_X(x, y)$ es un camino entre x, y, se cumple que $f \circ \alpha : [0, 1] \to Y$ es un camino de $f(x)$ hacia $f(y)$ pues es la composición de dos funciones continuas.

Además si $\alpha, \beta \in P_X(x, y)$ son caminos tales que $[\alpha] = [\beta]$, entonces existe una homotopía H_t entre ellos tal que $H_0 = \alpha,\ H_1 = \beta$. Luego la función $f \circ H_t$ cumple que $f \circ H_0 = f \circ \alpha,\ f \circ H_1 = f \circ \beta$, por lo que $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ y por lo tanto

$$[\alpha] = [\beta] \implies \pi f[\alpha] = \pi f[\beta],$$

mostrando que la función está bien ddefinida.

Además, dado el camino constante $e_x \in P_X(x, x)$, sea $t \in [0, 1]$, se cumple que $f \circ e_x(t) = f(e_x(t)) = f(x)$, por lo tanto se verifica la propiedad de unidad de la forma

$$\pi f[e_x] = [f \circ e_x] = \left[e_{f(x)}\right] = \left[e_{\pi f(x)}\right]$$

Por otro lado, dados caminos $\alpha \in P_X(x,y)$, $\beta \in P_X(y,z)$, *por definición tenemos*

$$f \circ (\beta \cdot \alpha)(t) = \begin{cases} f \circ \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f \circ \beta(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = (f \circ \beta) \cdot (f \circ \alpha)(t)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \pi f([\beta] \cdot [\alpha]) &= \pi f([\beta] \cdot [\alpha]) \\ &= [f \circ (\beta \cdot \alpha)] \\ &= [(f \circ \beta) \cdot (f \circ \alpha)] \\ &= [(f \circ \beta)] \cdot [(f \circ \alpha)] \\ &= \pi f[\beta] \cdot \pi f[\alpha] \end{aligned}$$

verificando así la propiedad de composiconalidad y mostrando que πf *es un homomorfismo de grupoides.*

En efecto, hemos determinado que la transformación del grupoide fundamental $\pi : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grpd}$ mapea los objetos de **Top** (espacios topológicos) en objetos de **Grpd** (grupoides), y adicionalmente demostramos que las funciones continuas $f : X \to Y$ de la categoría **Top** se mapean en homomorfismos de grupoides $\pi f : \pi(X) \to \pi(Y)$. Ahora mostramos que en efecto esta transformación induce un functor entre categorías.

4.7 Teorema. *El grupoide fundamental* $\pi : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grpd}$*, que actúa de la forma* $\pi : X \to \pi(X)$ *en los objetos,* $\pi : f \to \pi f$ *en los morfismos, es un functor de categorías.*

Demostración:

En efecto el functor $\pi : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grpd}$ *preserva las propiedads de dominio y codominio pues si* $f : X \to Y$ *es una función continua con homomorfismo inducido* $\pi f : \pi(X) \to \pi(Y)$ *entonces* $\pi(\mathbf{dom}\, f) = \pi(X) = \mathbf{dom}\,(\pi f)$, *análogamente* $\pi(\mathbf{cod}\, f) = \mathbf{cod}\,(\pi f)$. *Ahora verifiamos las propiedades de unidad y composicionalidad.*

Para cualquier espacio topológico X, *dada la función identidad* $\mathbf{1}_X$ *(que es una función continua), el homomorfismo inducido* $\pi \mathbf{1}_X : \pi(X) \to \pi(X)$ *cumple para* *toda clase de equivalencia de caminos* $[\alpha]$ *la ecuación* $\pi\mathbf{1}_X[\alpha] = [\mathbf{1}_X \circ \alpha] = [\alpha]$ *y por lo tanto* $\pi\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_{\pi(X)}$.

Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *dos funciones continuas. La propiedad de composicionalidad se verifica de la ecuación*

$$\pi(g \circ f)[\alpha] = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = \pi g[f \circ \alpha] = (\pi g \circ \pi f)[\alpha]$$

Esto concluye la demostración y muestra que el gruopide fundamental π : **Top** $\to$ **Grpd** *es un functor.*

Una vez hemos mostrado que π : **Top** $\to$ **Grpd** es un functor, obtenemos todas las herramientas que hemos estudiado acerca de los functores en categorías. En específico, un corolario importantísimo del teorema 2.29 aplicado al grupoide fundamental es una herramienta que nos ayuda a mostrar una gran cantidad de resultados en topología.

4.8 Corolario. *Sean* X, Y *dos espacios topológicos tales que el grupoide fundamental* $\pi(X)$ *no es isomorfo al grupoide* $\pi(Y)$*, entonces* X *no es homeomorfo a* Y.

Por último, estudiaremos un teorema que nos permite calcular el grupoide fundamental de un producto de espacios $X \times Y$ a partir de los grupoides fundamentales de X y Y. En particular, el functor π preserva los productos de espacios topológicos y los mapea en productos de grupoides.

Para esta demostración usaremos $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ como las funciones de proyección de espacios topológicos y $\pi_1 : \pi(X) \times \pi(Y) \to \pi(X)$, $\pi_2 : \pi(X) \times \pi(Y) \to \pi(Y)$ para las funciones de proyección de los grupoides fundamentales.

4.9 Teorema. *Sean* X, Y *espacios topológicos y sea* $X \times Y$ *su espacio producto. Entonces existe un isomorfismo de grupoides*

$$\pi(X \times Y) \simeq \pi(X) \times \pi(Y).$$

Demostración:

Definiendo explícitamente el siguiente homomorfismo de grupoides

$$\varphi : \pi(X \times Y) \longrightarrow \pi(X) \times \pi(Y).$$

Notando que $O_{\pi(X\times Y)} = X\times Y = O_{\pi(X)\times\pi(Y)}$, *definimos en los objetos al homomorfismo como la identidad, es decir* $\varphi(x,a) = (x,a)$.

Por otro lado, para los morfismos, si $\gamma : [0,1] \to X\times Y$ *es cualquier camino en* $X\times Y$, *entonces* γ *está completamente determinado por sus componentes* $\alpha := p_1\circ\gamma,\ \beta := p_2\circ\gamma$, *por lo que para cualquier camino* $\gamma\in P_{X\times Y}$ *lo escribimos de la forma* $\gamma = (\alpha,\beta)$.

En los morfismos, definimos la función $\varphi : A_{\pi(X\times Y)} \to A_{\pi(X)\times\pi(Y)}$ *de la forma*

$$\varphi[\alpha,\beta] = ([\alpha],[\beta]).$$

El homomorfismo φ *está bien definido pues si* $(\alpha_1,\beta_1)\simeq(\alpha_2,\beta_2)$ *son dos caminos homotópicos en* $X\times Y$ *con homotopía* H_t *tal que* $H_0 = (\alpha_1,\beta_1),\ H_1 = (\alpha_2,\beta_2)$ *entonces* $\alpha_1\simeq\alpha_2,\ \beta_1\simeq\beta_2$ *con homotopías* $p_1\circ H_t,\ p_2\circ H_t$ *respectivamente, por lo tanto si* $[\alpha_1,\beta_1] = [\alpha_2,\beta_2]$

$$\varphi[\alpha_1,\beta_1] = ([\alpha_1],[\beta_1]) = ([\alpha_2],[\beta_2]) = \varphi[\alpha_2,\beta_2].$$

Mostraremos que en efecto φ *es un isomorfismo de grupoides. Recordando que los homomorfismos de grupoides son simplemente functores, haremos uso del teorema 2.39. Mostraremos que* φ *es biyectiva en los objetos y que para cualesquiera dos puntos* $x := (x_1,x_2),\ y := (y_1,y_2)\in X\times Y$, *la función* φ *induce una biyección en los conjuntos*

$$\pi(X\times Y)(x,y)\simeq\pi(X)(x_1,y_1)\times\pi(Y)(x_2,y_2).$$

En efecto, puesto que φ *es la identidad en los objetos entonces es biyectiva. Por otro lado, sean dos clases de homotopía* $[\alpha_0,\beta_0],\ [\alpha_1,\beta_1]$ *tales que tienen la misma imagen* $\varphi[\alpha_0,\beta_0] = \varphi[\alpha_1,\beta_1]$. *Esto implica que* $([\alpha_0],[\beta_0]) = ([\alpha_1],[\beta_1])$, *de ello existen homotopías de caminos* $H^\alpha : [0,1]\times[0,1]\to X, H^\beta : [0,1]\times[0,1]\to Y$ *tales que* $H^\alpha_0 = \alpha_0,\ H^\alpha_1 = \alpha_1$, *en* X, $H^\beta_0 = \beta_0,\ H^\beta_1 = \beta_1$ *en* Y. *Entonces la función* $H : [0,1]\times[0,1]\longrightarrow X\times Y$ *dada por*

$$H(s,t) = H_s(t) = \left(H^\alpha_s(t), H^\beta_s(t)\right).$$

Esta función H_t cumple

$$H_0 = \left(H_0^{\alpha}, H_0^{\beta}\right) = (\alpha_0, \beta_0)\,,$$

$$H_1 = \left(H_1^{\alpha}, H_1^{\beta}\right) = (\alpha_1, \beta_1)$$

y de ello H_t es una homotopía de caminos $(\alpha_0, \beta_0) \simeq (\alpha_1, \beta_1)$, mostrando que $[\alpha_0, \beta_0] = [\alpha_1, \beta_1]$, haciendo a la función φ inyectiva en los morfismos.

Por otro lado, sea $\alpha \in P_X(x_1, y_1)$ un camino en X, sea $\beta \in P_Y(x_2, y_2)$ un camino en Y. Consideramos el morfismo $([\alpha], [\beta]) \in \pi(X) \times \pi(Y)$, existe $[\alpha, \beta] \in \pi(X \times Y)$ tal que

$$\varphi[\alpha, \beta] = ([\alpha], [\beta])\,.$$

Mostrando así que φ es sobreyectiva en los morfismos y por lo tanto φ es un isomorfismo de grupoides.

Aunque la elección del isomorfismo φ es bastante natural, pareciera ser un tanto arbitraria. En realidad, dadas las proyecciones de espacios topológicos $p_1 : X \times Y \to X,\ p_2 : X \times Y \to Y$ y aplicando el functor del grupoide fundamental tenemos dos morfismos de grupoides $\pi p_1 : \pi(X \times Y) \to \pi(X)\,,\ \pi p_2 : \pi(X \times Y) \to \pi(Y)$, luego por el teorema 2.53 existe un único homomorfismo de grupoides $\varphi : \pi(X \times Y) \to \pi(X) \times \pi(Y)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(X \times Y) \arrow[dl, "\pi p_2"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi p_1"] & \\
\pi(X) & \pi(X) \times \pi(Y) \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\pi_1"] & \pi(Y)
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1. Isomorfismo $\pi(X \times Y) \simeq \pi(X) \times \pi(Y)$.

Este único homomorfismo φ es precisamente el homomorfismo φ usado en la demostración del teorema 4.9, pues para una clase de homotopía $[\alpha, \beta]$ tenemos $\pi p_1[\alpha, \beta] = [\alpha]\,,\ \pi p_2[\alpha, \beta] = [\beta]$. De ello el isomorfismo de la demostración anterior es precisamente el único homomorfismo inducido por $\pi p_1, \pi p_2$ y la propiedad de las proyecciones π_1, π_2.

De hecho, el grupoide $\pi(X \times Y)$ con los homomorfismos inducidos $\pi p_1,\ \pi p_2$ cumplen las condiciones del teorema 2.54, es decir, para cualquier grupoide G y homomorfismos $f : G \to \pi(X)$, $g : G \to \pi(Y)$ existe un único homomorfismo $\psi : G \to \pi(X \times Y)$ tal que $\pi p_1 \circ \psi = f$, $\pi p_2 \circ \psi = g$.

4.2. Homotopías de homomorfismos

En esta sección, estudiaremos la primera generalización de la teoría de grupoides que no tiene contraparte en la teoría de grupos, definimos la idea de homotopías de homomorfismos. Adicionalmente, mostramos que la definición de homotopías de homomorfismos de grupoides, preserva la homotopía de funciones continuas bajo la transformación del grupoide fundamental. Esto es de gran utilidad en áreas de estudio como la topología alebraica, donde la mayoría de estudios se hacen bajo la relación de homotopía.

Comenzamos la sección recordando al grupoide indiscreto $\mathbf{I}$, el grupoide con únicamente dos objetos $\{0,1\}$, las respectivas identidades y un único morfismo $\imath : 0 \to 1$ con su respectivo inverso $\imath^{-1}$. Así como dado un grupo G y un elemento $g \in G$ existe un único homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to G$ tal que $f(1) = g$, existe un resultado análogo para los grupodes y el grupoide indiscreto.

4.10 Teorema. *Sea G un grupoide y sea $f \in A_G$ un morfismo cualquiera. Entonces existe un único homomorfismo de grupoides $\psi : \mathbf{I} \longrightarrow G$ tal que $\psi(\imath) = f$.*

Demostración:

Definiendo ψ expícitamente, sea f un morfismo $f : a \to b$ entre los objetos $a, b \in O_G$ entonces definimos el homomorfismo $\psi : \mathbf{I} \to G$, de la forma $\psi(0) = a, \psi(1) = b$ en los objetos. En los morfismos definimos $\psi(\mathbf{1}_0) = \mathbf{1}_a$, $\psi(\mathbf{1}_1) = \mathbf{1}_b$, $\psi(\imath) = f$, $\psi(\imath^{-1}) = f^{-1}$. Este homomorfismo claramente cumple con las condiciones del teorema, puesto que las únicas composiciones no triviales en $\mathbf{I}$ son las composiciones $\imath\imath^{-1}$, $\imath^{-1}\imath$, entonces se verifica que ψ efectivamente es un homomorfismo directamente $\psi(\imath^{-1}\imath) = \psi(\mathbf{1}_a) = f^{-1}f = \psi(\imath^{-1})\psi(\imath)$.

Además ψ es único pues cualquier otro homomorfismo de grupoides $\varphi : \mathbf{I} \to G$ que cumpla $\varphi(\imath) = f$ debe cumplir necesariamente que $\varphi(\imath^{-1}) = f^{-1}$ y $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$ para que cumpla con las condiciones de un homomorfismo de grupoides. Esto concluye la demostración.

El grupoide indiscreto $\mathbf{I}$ juega un papel fundamental en la generalización del concepto de homotopías a los homomorfismos de grupoides. En particular, toma el papel del intervalo unitario $[0,1]$ de la teoría de homotopías.

4.11 Definición (Homotopías de homomorfismos)**.** Sean $T : G \to H,\ S : G \to H$ dos homomorfismos entre grupoides G, H. Dado un bifunctor $\mathcal{H} : \mathbf{I} \times G \to H$, decimos que $\mathcal{H}$ es una homotopía de homomorfismos entre T y S si es un bifunctor tal que $\mathcal{H}(0,-) = T,\ \mathcal{H}(1,-) = S$. En ese caso escribimos $T \simeq S$ y decimos que T y S son homomorfismos homotópicos.

En particular, y haciendo uso del teorema 2.56, podemos caracterizar todas las homotopías de homomorfismos dando familias de functores (homomorfismos de grupoides) $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1 : G \to H, \mathcal{H}^a : \mathbf{I} \to H$ para $a \in O_G$ cualquier objeto. Además, los funcotres $\mathbf{I} \to H$ están completamente determinados por la imagen del morfismo $\imath : 0 \to 1$. Por lo tanto, podemos dar la siguiente definición alternativa de homotopías de grupoides.

4.12 Teorema. *Sean $T, S : G \to H$ dos homomorfismos entre grupoides G, H. Entonces existe una homotopía $\mathcal{H} : \mathbf{I} \times G \to H$ entre ellos si y sólo si para cada objeto $a \in O_G$ existe un isomorfismo $\alpha_a : Ta \to Sa$ en A_G tal que para cualquier morfismo $f : a \to b$ en G el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
Ta \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "Tf"] & Sa \arrow[d, "Sf"] \\
Tb \arrow[r, "\alpha_b"] & Sb
\end{tikzcd}$$

Figura 4.2. Homotopía de homomorfismos

Demostración:

Por el teorema 2.56 sabemos que existe un bifunctor $\mathcal{H} : \mathbf{I} \times G \to H$ si y sólo si para cada objeto $a \in O_G$ existe un functor $\mathcal{H}_a : \mathbf{I} \to H$, y para cada objeto $x \in \{0,1\} = O_{\mathbf{I}}$ existe un functor $\mathcal{H}^x : G \to H$ tal que para cualquier par de morfismos $f \in G(a,b)$, $\imath \in \mathbf{I}(0,1)$ se cumple

$$\mathcal{H}^1(f) \circ \mathcal{H}_a(\imath) = \mathcal{H}_b(\imath) \circ \mathcal{H}^0(f).$$

Puesto que cualquier functor $\mathcal{H}_a : \mathbf{I} \to H$ está enteramente determinado por la imagen del morfismo $\imath : 0 \to 1$ entonces podemos identificar cada functor $\mathcal{H}_a$ con el morfismo $\mathcal{H}_a(\imath) := \alpha_a \in A_G$, luego, por el teorema 2.29, como α_a es la imagen de un isomorfismo, necesariamente debe ser un isomorfismo.

Además, para que el bifunctor $\mathcal{H}$ sea una homotopía entre los homomorfismos T, S es necesario que cumpla $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}(0, -) = T$, $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}(1, -) = S$. Con esta restricción, el dominio y codominio del isomorfismo α_a queda enteramente determinado pues deseamos $\mathbf{dom}\,(\mathcal{H}(\imath, a)) = \mathcal{H}(0, a) = Ta$, $\mathbf{cod}\,(\mathcal{H}(\imath, a)) = \mathcal{H}(1, a) = Sa$, *por lo que necesariamente el isomorfismo es de la forma $\alpha_a : Ta \to Sa$.*

Hemos mostrado entonces que existe una homotopía de grupoides $\mathcal{H} : \mathbf{I} \times G \to H$ si y sólo si para cada objeto $a \in O_G$ existe un isomorfismo $\alpha_a : Ta \to Sa$ tal que para cualquier $f \in G(a, b)$ se cumple la igualdad

$$Sf \circ \alpha_a = \alpha_b \circ Tf.$$

Esto es precisamente exigir que el diagrama 4.2 conmute, lo cual concluye la demostración.

Hemos mostrado que para definir una homotopía $\mathcal{H}$ entre dos homomorfismos de grupoides S, T únicamente necesitamos especificar la función $\alpha : O_G \to A_H$; por lo que obetenemos dos definiciones de homotopías de las cuales podemos hacer uso dependiendo de cuál resulte más útil.

Así como al bifunctor $\mathcal{H} : \mathbf{I} \times G \to H$ se le conoce como una homotopía de homomorfismos, a la función $\alpha : O_G \to A_H$ que le asocia a cada objeto a su isomorfismo α_a usado en teorema anteior, también se le llama función de homotopía. En general, qué definición se está usando es claro del contexto.

4.13 Teorema. *La homotopía de homomorfismos de grupoides es una relación de equivalencia.*

Demostración:

Mostraremos que dados dos homomorfismos de grupoides $T, S : G \to H$, la relación de homotopía $T \simeq S$ es una relación de equivalenci, para esta demostración especificaremos el isomorfismo $\alpha_a : Ta \to Sa$ del teorema 4.12.

- *La relación es reflexiva pues dado un functor $T : G \to H$, la función de homotopía $\alpha : O_G \to A_H$ dada por $\alpha : a \mapsto \mathbf{1}_{Ta}$, para cualquier morfismo $f : a \to b$ en G se cumple la igualdad $\mathbf{1}_{Tb}Tf = Tf\mathbf{1}_{Ta}$, haciendo que el diagrama 4.3 conmute y mostrando $T \simeq T$.*

$$\begin{tikzcd} Ta \arrow[r, "\mathbf{1}_{Ta}"] \arrow[d, "Tf"] & Ta \arrow[d, "Tf"] \\ Tb \arrow[r, "\mathbf{1}_{Tb}"] & Tb \end{tikzcd}$$

Figura 4.3. Reflexividad de la homotopía

- *La relación es simétrica pues si $T \simeq S$ entonces para cada $a \in O_G$ existe un isomorfismo $\alpha_a : Ta \to Sb$ que para cada morfismo $f \in G(a, b)$ se cumple la igualdad $\alpha_b Tf = Sf\alpha_a$. Tomando la función $\beta : O_G \to A_H$ dada por $\beta_a = \alpha_a^{-1}$ tenemos que $\beta_a : Sa \to Ta$ es un morfismo que cumple la igualdad*

$$\beta_b Sf = \alpha_b^{-1}(Sf\alpha_a)\alpha_a^{-1} = \alpha_a^{-1}(\alpha_b Tf)\alpha_a^{-1} = Tf\beta_a$$

haciendo que el diagrama 4.4 conmute para cada $f \in G(a, b)$.

$$\begin{tikzcd} Sa \arrow[r, "\beta_a"] \arrow[d, "Sf"] & Ta \arrow[d, "Tf"] \\ Sb \arrow[r, "\beta_b"] & Tb \end{tikzcd}$$

Figura 4.4. Simetría de la homotopía

- *Para mostrar la transitividad de la relación, sean $S, T, V : G \to H$ homomorfismos de grupoides tales que $S \simeq T$, $T \simeq V$ con funciones de homotopía $\alpha, \beta : O_G \to A_H$ consideramos el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} Sa \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "Sf"] & Ta \arrow[r, "\beta_a"] \arrow[d, "Tf"] & Va \arrow[d, "Vf"] \\ Sb \arrow[r, "\alpha_b"] & Tb \arrow[r, "\beta_b"] & Vb \end{tikzcd}$$

Figura 4.5. Transitividad de la homotopía

Como cada cuadrado es conmutativo, porque α, β son funciones de homotopía, el rectángulo exterior conmuta y se cumple la igualdad $(\beta_b \alpha_a) Sf = Vf(\beta_a \alpha_a)$ lo cual muestra que $a \mapsto \beta_a \alpha_a$ es una homotopía $T \simeq V$.

Ahora mostramos el teorema que justifica el llamarlas «homotopía» de homomorfismos, en profunda relación con las homotopías de funciones continuas. Mostramos que el functor del grupoide fundamental conserva la relación de homotopía[4].

Antes mostramos que el grupoide fundamental del intervalo unitario $\pi[0,1]$ es el grupoide indiscreto $[0,1] \times [0,1]$.

4.14 Lema. *Sea $\mathbb{I}$ el intervalo unitario $[0,1]$. Entonces el grupoide fundamental $\pi(\mathbb{I})$ es isomorfo al grupoide $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$.*

Demostración:

Sean $x, y \in \mathbb{I}$ dos puntos en el intervalo unitario, y sean $\alpha, \beta \in P_X(x,y)$ dos caminos entre ellos, entonces la función $H_s(t) = s\alpha(t) + (1-s)\beta(t)$ es una homotopía de caminos $\alpha \simeq \beta$. Por lo tanto entre cualesquiera dos puntos $x, y \in O_{\pi(\mathbb{I})}$ existe a lo más una clase de equivalencia de caminos $[\alpha]$.

Además, como entre cualesuqiera dos puntos $x, y \in \mathbb{I}$ existe el camino $\alpha(t) = tx + (1-t)y$, entonces entre cualesquiera dos elementos $x, y \in \mathbb{I}$ existe precisamente una clase de equivalencia de caminos $[\alpha]$.

Tomando la función identidad en los objetos $O_{\pi(\mathbb{I})} = \mathbb{I} = O_{\mathbb{I}\times\mathbb{I}}$ y la función $[\alpha] \mapsto (x,y)$ para $[\alpha] \in \pi(\mathbb{I})(x,y)$ la única clase de homotopía de caminos de x hacia y. Estas funciones inducen claramente un isomorfismo de categorías, mostrando $\pi(\mathbb{I}) = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$.

Puesto que el grupoide indiscreto $\mathbf{I} = \{0,1\} \times \{0,1\}$ es un subgrupoide del grupoide $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$, entonces podemos tomar el functor inclusión $\mathbf{I} \to \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, y tomando el isomorfismo del lema anterior podemos obtener una inclusión $\mathbf{i} : \mathbf{I} \to \pi(\mathbb{I})$ del grupoide indiscreto al grupoide fundamental del intervalo unitario [2]. Este functor inclusión será útil en la siguiente demostración.

[2]Formalmente, no obtenemos una inclusión sino un functor que mapea $\mathbf{I}$ a un subgrupoide de $\pi(\mathbb{I})$ que es isomorfo a $\mathbf{I}$.

4.15 Teorema. *Sean X, Y espacios topológicos, sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas y sean $\pi f, \pi g : \pi(X) \to \pi(Y)$ los homomorfismos de grupoides inducidos por el grupoide fundamental. Entonces la relación de homotopía de funciones continuas $f \simeq g$ implica la relación de homotopía de homomorfismos $\pi f \simeq \pi g$.*

Demostración:

Sea $H : \mathbb{I} \times X \to Y$ una homotopía $f \simeq g$ tal que $H(0, x) = f(x)$, $H(1, x) = g(x)$, consideremos entonces la siguiente sucesión de functores

$$\mathbf{I} \times \pi(X) \xrightarrow{\mathbf{i} \times \mathbf{1}_\pi} \pi(\mathbb{I}) \times \pi(X) \xrightarrow{\varphi} \pi(\mathbb{I} \times X) \xrightarrow{\pi H} \pi(Y)$$

Figura 4.6. Sucesión de functores $\mathbf{I} \times \pi(X) \to \pi(Y)$.

Donde $\mathbf{i} \times \mathbf{1}_\pi$ es el producto del functor inclusión $\mathbf{i} : \mathbf{I} \to \pi(\mathbb{I})$ con el functor identidad $\mathbf{1}_\pi : \pi(X) \to \pi(X)$, el functor φ es el isomorfismo obtenido en el teorema 4.9, y el functor πH es el homomorfismo inducido por la homotopía H. Llamando al functor composición $\mathcal{H} : \mathbf{I} \times \pi(X) \to \pi(Y)$ mostraremos que en efecto es una homotopía de homomorfismos que cumple $\mathcal{H}(0, -) = \pi f$, $\mathcal{H}(1, -) = \pi g$.

Puesto que los functores $\mathbf{i} \times \mathbf{1}_\pi, \varphi$ actúan como la identidad en los objetos entonces para los objetos el functor $\mathcal{H}(0, -)$ mapea

$$(0, x) \xrightarrow{\mathbf{i} \times \mathbf{1}_\pi} (0, x) \xrightarrow{\varphi} (0, x) \xrightarrow{\pi H} H(0, x) = f(x).$$

Adicionalmente, para $[\alpha] \in \pi(X)(x, y)$ una clase de homotopía de caminos el functor $\mathcal{H}(0, [\alpha])$ actúa de la forma

$$(\mathbf{1}_0, [\alpha]) \xrightarrow{\mathbf{i} \times \mathbf{1}_\pi} ([e_0], [\alpha]) \xrightarrow{\varphi} [e_0, \alpha] \xrightarrow{\pi H} [H(e_0, \alpha)].$$

Luego, dada la igualdad $H(e_0(t), \alpha(t)) = H(0, \alpha(t)) = f(\alpha(t))$, tenemos que $[H(e_0, \alpha)] = [f(\alpha(t))] = [f \circ \alpha]$. Por lo tanto se cumple $\mathcal{H}(0, -) = \pi f$. tanto en los objetos como los morfismos de $\pi(X)$.

Análogamente mostramos que $\mathcal{H}(1, -) = \pi g$, mostrando que $\mathcal{H}$ es una homotopía de homomorfismos y por lo tanto

$$\pi f \simeq \pi g.$$

Esto concluye la demostración. De este teorema se puede realizar una gran cantidad de equivalencias entre la teoría de homotopía y la teoría de los grupoides. Por ejemplo, si dos espacios son homotópicamente equivalentes, sus grupoides fundamentales también deben ser homotópicamente equivalentes.

Una de las ventajas de usar el grupoide fundamental sobre el grupo fundamental para el estudio de la topología algebraica es que permite computar una mayor cantidad de grupodies funamentales sin muchas de las restricciones de conexidad que se le imponen al grupo fundamental. Con este resultado concluimos la sección, motivando un estudio de la topología algebraica desde la perspectiva de los grupoides.

CONCLUSIONES

1. La teoría de categorías es abundante en ejemplos y generalizaciones. Ésta teoría captura las principales ideas que se encuentran en la mayoría de áreas de la matemática, que por lo general se ven por separado y sin ninguna relación.

2. Los grupoides como generalización de los grupos presentan ventajas en áreas como la topología algebraica pues nos permiten trabajar con una mayor variedad de espacios que no cumplen con las condiciones impuestas por los grupos. Por otro lado, esta generalidad hace que se pierdan algunos resultados conocidos, como los teoremas de isomorfía.

3. El estudio de los grupoides es una herramienta que en ciertos contextos nos permite extender el alcance, mas presenta poca teoría nueva al momento de clasificar los objetos dentro de la cateogoría de los grupoides. La clasificación de grupoides puede reducirse a la de los grupos.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda introducir a los estudiantes de licenciatura a la teoría de categorías para motivar y generar una intuición más profunda de los principales resultados en la matemática. El ver cómo un resultado en teoría de categorías puede tomar tantas formas en las distintas áreas de estudio podría desarrollar una comprensión más profunda de cada uno de los resultados individuales.

2. Al momento de trabajar con grupoides, se recomienda evaluar si la generalidad que se alcanza con estos vale la pérdida de algunas propiedades de los grupos. Esta respuesta dependerá del área de estudio y el enfoque.

3. En problemas de clasificación de grupoides o de espacios, la teoría de grupos es lo suficientemente robusta. Se recomienda limitar el uso de los grupoides a las áreas donde sí presenta nuevas generalizaciones.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aguilera, Raúl Toro: *Monografás Matemáticas.* https://docplayer.es/21056230-Monografias-matematicas-directrices-monografia-de-matematicas-2-est html, 2017.

[2] Bredon, Glen E.: *Topology and Geometry.* Springer, 1993.

[3] Brown, Ronald: «From Groups to Groupoids: A brief survey». *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1987, **19(2)**, pp. 113–134.

[4] ——: *Topology and Groupoids: A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid.* www.groupoids.org.uk, 2006.

[5] Fraleigh, John B.: *A First Course in Abstract Agebra.* Pearson, 2021.

[6] Hungerford, Thomas W.: *Algebra.* Springer, 1974.

[7] Lane, Saunders Mac: *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Springer, 1992.

[8] ——: *Categories for the Working Mathematician.* Springer, 2ª edición, 1998.

[9] Munkres, James: *Topology.* Pearson, 2ª edición, 2014.

[10] Perrone, Paolo: *Notes on Category Theory.* http://www.paoloperrone.org/, 2021.

[11] Shulman, Michael A.: «Set Theory for Category Theory». *arXiv*, 2008.

[12] Toro, Wanda Del: *Guía para la investigación monográfica CMU 796.* Universidad del Sagrado Corazón, 2017.