



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

MEDICIONES DIFUSAS EN SISTEMAS CUÁNTICOS PARA N PARTÍCULAS

Rubí Esmeralda Ramírez Milián

Asesorado por:

Dr. Carlos Francisco Pineda Zorrilla

Ing. Rodolfo Samayoa

Guatemala, julio de 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**MEDICIONES DIFUSAS EN SISTEMAS DE N
PARTÍCULAS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

RUBÍ ESMERALDA RAMÍREZ MILIÁN
ASESORADO POR
DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA
ING. RODOLFO SAMAYOA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, JULIO DE 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M. Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
REPRESENTANTE DOCENTE	Arqta. Ana Verónica Carrera Vela
REPRESENTANTE DOCENTE	M. A. Pedro Peláez Reyes
REPRESENTANTE DE EGRESADOS	Lic. Urías Amitaí Guzmán Mérida
REPRESENTANTE DE ESTUDIANTES	Elivs Enrique Ramíez Mérida
REPRESENTANTE DE ESTUDIANTES	Oscar Eduardo García Orantes
SECRETARIO ACADÉMICO	M. Sc. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DIRECTOR	M. Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
EXAMINADOR	Dr. Enrique Pazos Avalos
EXAMINADOR	M. Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
EXAMINADOR	M. Sc. Osmar Hernández
SECRETARIO ACADÉMICO	M. Sc. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada

Ref. D.DTG. 009-2024
Guatemala 24 de julio de 2024

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del jefe de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación titulado: " **MEDICIONES DIFUSAS EN SISTEMAS CUÁNTICOS PARA N PARTÍCULAS**", presentado por la estudiante universitaria, Rubí Esmeralda Ramírez Milián, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"



M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

AGRADECIMIENTOS

A mi mamá, por su apoyo incondicional en cada una de las decisiones que he tomado en este proceso. A mi papá, por su apoyo y constante preocupación por mi desarrollo académico y personal. Agradezco a mis hermanos, Oscar, Luis y a mi hermana Irma, por ser un ejemplo a seguir, por sus consejos y su ayuda cuando fue necesaria.

A mi asesor el Dr. Carlos Francisco Pineda por su increíble paciencia y dedicación en el asesoramiento de este trabajo. A mis catedráticos, en especial al Ing. Rodolfo Samayoa por su empeño y su pasión por transmitir sus conocimientos académicos.

A mis amigos y amigas que me acompañaron a lo largo de este trayecto, que compartieron ideas, conocimientos y risas conmigo.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	XIII
LISTA DE SÍMBOLOS	XV
OBJETIVOS	XVII
INTRODUCCIÓN	XIX
1. OPERADORES DE DENSIDAD Y OPERACIONES CUÁNTICAS	1
1.1. Introducción	1
1.2. Operador de densidad	2
1.2.1. Propiedades del operador de densidad	3
1.2.2. El operador de densidad reducido	7
1.3. Medidas POVM	10
1.3.1. Medidas proyectivas PVM	11
1.3.2. Operadores POVM	11
1.4. Operaciones cuánticas	13
1.4.1. Aproximación axiomática de las operaciones cuánticas	13
1.4.2. Operadores de Kraus	15
2. MEDICIONES DIFUSAS	19
2.1. Introducción	19
2.2. Mediciones no ideales	19
2.3. Medición difusa en sistemas cuánticos	21
2.3.1. Operador difuso	21
2.3.2. Valores esperados en mediciones difusas	24
2.4. Medidas POVM y operadores de Kraus para mediciones difusas	27
2.5. Instrumentos cuánticos	29
3. RESULTADOS	35
3.1. Introducción	35
3.2. Mediciones difusas en sistemas de dos partículas	35

3.2.1. POVM y operadores de Kraus para mediciones difusas en sistemas de dos partículas	36
3.2.2. Instrumentos cuánticos para dos partículas	37
3.2.3. Equivalencia de los instrumentos	45
3.2.4. Ejemplos sobre una medición difusa utilizando distintas herramientas	50
3.3. Generalización de operadores de Kraus en sistemas de N partículas . .	57
3.3.1. Medidas POVM y operadores de Kraus en sistemas de varias partículas	58
3.3.2. Instrumento cuántico en sistemas de varias partículas	59
4. CONCLUSIONES	63
BIBLIOGRAFÍA	65
APÉNDICE A	67
A.1. Lemas útiles	67

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	Representación gráfica del mapeo de resultados al medir el observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$, con valores propios $\lambda = \pm 1$. (a) La imagen indica la probabilidad de obtener cada una de las salidas del estado inicial ρ . La línea azul punteada, indica el valor esperado del observable. (b) La gráfica indica la probabilidad de obtener cada una de las salidas en el estado $\mathcal{F}_{2p}(\rho)$. La línea roja punteada, indica el valor esperado del observable. En esta imagen se toma el valor de la probabilidad p de que las partículas se intercambien como $\frac{1}{4}$	26
3.1.	(a) En la primera imagen se ilustran un estado inicial ρ , sin embargo el entorno no es ideal y es posible que ocurra una identificación errónea, en las que las salidas clásicas registradas para los observables σ_z y σ_x fueron 1 y -1 respectivamente. (b) En esta imagen se ilustra que con una probabilidad p la identificación del sistema sea correcta y se realice la medición del observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$. (c) La imagen muestra que debido al ruido del entorno, las partículas experimentan un intercambio y con una probabilidad $(1 - p)$ se realiza la medición del observable $\sigma_x \otimes \sigma_z$.	36
3.2.	(a) Con una probabilidad p se realiza una medición ideal del observable $A \otimes B$, con un estado posterior dado por $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$, cuando la salida indicada es $a_j b_k$. (b) Con probabilidad $1 - p$ ocurre un intercambio de las partículas y estado posterior correspondiente a la salida $a_j b_k$ será $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$	38
3.3.	(a) Con una probabilidad p , se mide el observable $A \otimes B$ y el resultado es una medición ideal, con un estado posterior $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$ con la salida clásica indicándolo correctamente. (b) Con una probabilidad $1 - p$, ocurre un error en los resultados clásicos de la medición y en su lugar, la salidas se intercambian aunque el resultado en el sistema cuántico indique ser el correcto $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$	41

3.4. **(a)** Con una probabilidad q se realiza una medición ideal del observable $A \otimes B$, con un estado posterior dado por $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$, cuando la salida indicada es $a_j b_k$. **(b)** Con probabilidad $1 - q$ ocurre un error y no se conoce con certeza el estado posterior correspondiente a la salida $a_j b_k$, estará dado por una superposición de dos estados $\frac{P_{a_j, b_k} + P_{b_k, a_j}}{2} \rho_{1,2} \frac{P_{a_j, b_k} + P_{b_k, a_j}}{2}$. 43

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$ \psi\rangle$	<i>ket</i> , vector de estado en la notación de Dirac
$\langle\psi $	<i>bra</i> , funcional en la notación de Dirac
$\{p_i, \psi_i\rangle\}$	ensamble de estados
p_i	i -ésima probabilidad
$\langle\psi \phi\rangle$	<i>braket</i> , producto interno en la notación de Dirac
Λ	operador que actúa sobre el espacio de Hilbert
Λ^\dagger	operador adjunto de Λ
$\langle\Lambda\rangle$	valor esperado de Λ
$\langle\psi_i \Lambda \psi_j\rangle$	elemento de matriz Λ_{ij}
$\langle\psi \phi\rangle$	producto externo entre $ \psi\rangle$ y $ \phi\rangle$ en la notación de Dirac
ρ	matriz densidad
ρ^{AB}	matriz densidad de un sistema compuesto A y B
$\text{Tr}\Lambda$	traza de Λ
$\text{Tr}_A(\rho^{AB})$	traza parcial sobre A de ρ^{AB}
$\mathbb{1}$	operador identidad
\mathcal{E}	operación cuántica
U	operador unitario
σ_i	matrices de Pauli
$ \psi\rangle \phi\rangle$	producto tensorial $ \psi\rangle \otimes \phi\rangle$
\mathcal{H}	espacio de Hilbert
$A \otimes B$	producto tensorial del operador A con el operador B
$\bigotimes_{i=1}^N A_i$	el producto de los operadores A_i , para $i = 1, \dots, n$
δ_{ij}	delta de Kronecker
λ_i	valores propios

OBJETIVOS

Objetivo General

Se le llama medición difusa al proceso en el cual al medir un sistema de varias partículas, existe una posibilidad de identificar erróneamente a las partículas. El objetivo general de este proyecto es describir completamente dichas mediciones. Para realizar la descripción es necesario un mapeo que proporcione la probabilidad obtener las posibles salidas de una medición difusa, así como el estado posterior a la medición.

Objetivos Específicos

1. Estudiar los operadores de Kraus y las medidas POVM que describan completamente las mediciones difusas para sistemas de dos partículas.
2. Examinar instrumentos cuánticos equivalentes que describan completamente mediciones difusas en un sistema de dos partículas.
3. Generalizar los operadores de Kraus que describan completamente las mediciones difusas en sistemas de N partículas.
4. Analizar mediciones difusas con observables no factorizables en sistemas de N partículas.
5. Crear un programa que exhiba el mapa de probabilidades y el estado resultante luego de la medición, a partir de un estado inicial y un observable dado.

INTRODUCCIÓN

En el transcurso del último siglo, la medición ha destacado como uno de los campos de estudio más notables dentro del ámbito de la mecánica cuántica. La medición es un tipo de evolución que puede experimentar un sistema cuántico, y que permite recuperar información clásica de un estado cuántico, y es la forma en la cual la información puede ser interpretada [1]. El esfuerzo de muchos investigadores por comprender el proceso de medición en sistemas cuánticos ha llevado al desarrollo de instrumentos y técnicas que se utilizan ampliamente en ramas de investigación aplicadas [2].

La mayoría de literatura introductoria a la mecánica cuántica suele enfocarse en las mediciones proyectivas en sistemas ideales. En este enfoque, es posible seleccionar una base del observable que se desea medir y al hacerlo se encontrará que el sistema se proyecta a uno de los estados de la misma. Aunque pudo haber estado en cualquier estado antes de la medición [3]. Este estado es aleatorio y la probabilidad de que se encuentre en cualquiera de estos estados está dictada por la regla de Born. Naturalmente, en la práctica las mediciones que se realizan son imperfectas, es por ello que es necesario emplear un formalismo más extenso, tal como el de las operaciones cuánticas y las mediciones POVM o generalizadas. Dichas herramientas pueden proporcionar una descripción total de las mediciones no ideales.

Este trabajo se enfoca en *mediciones difusas*, las cuales son un tipo concreto de mediciones imperfectas. Estas ocurren cuando se lleva a cabo el proceso de medición en un sistema de múltiples partículas y hay una posibilidad de error en la identificación de las partículas. Aun así, es posible cuantificar los resultados de esta medición utilizando las herramientas formales mencionadas previamente. Estas detecciones imperfectas se exponen en la referencia [4].

En los siguientes tres capítulos se expone un marco que facilita la comprensión del proceso de medición, diseñado específicamente para mediciones difusas. A continuación, se ofrece una breve descripción de la estructura de esta tesis y el contenido de los distintos capítulos.

En el capítulo 1 se aborda un marco conceptual que contiene las herramientas

más básicas en la descripción de mediciones en sistemas cuánticos. En primer lugar, se exponen los operadores de densidad los cuales permiten expresar al estado de un sistema cuántico de una forma general. Por otro lado, se presenta el formalismo de las mediciones POVM y se aborda el tema de las operaciones cuánticas, las cuales desempeñan un papel importante en la configuración de la evolución que experimenta un sistema cuántico debido al proceso de medición.

En el capítulo 2, se presenta el problema de las mediciones difusas de manera formal. En este capítulo se describe los elementos clave del problema que se utilizarán como marco de referencia en el resto de la tesis, los cuales son el valor esperado de las mediciones difusas y el operador difuso. Asimismo se introduce los instrumentos cuánticos, los cuales constituyen una nueva herramienta, que describe enteramente las mediciones.

El capítulo 3, aborda los resultados obtenidos utilizando como base las herramientas desarrolladas en los capítulos 1 y 2, para sistemas simples que estén conformados por dos partículas. Posteriormente, se generalizan los resultados y se formulan en un sistema de N partículas, tomando en cuenta observables no factorizables.

1. OPERADORES DE DENSIDAD Y OPERACIONES CUÁNTICAS

1.1. Introducción

Con el propósito de lograr los objetivos de esta tesis primero será indispensable examinar el formalismo de algunas herramientas tales como el operador densidad, las medidas POVM y las operaciones cuánticas. El operador de densidad también conocido como «matriz de densidad» describe el estado cuántico de un sistema físico y generaliza los vectores de estado, puesto que éstos pueden representar estados mixtos. Este operador contiene todas las propiedades estadísticas de un sistema cuántico, incluso cuando no es posible describir el sistema mediante un estado puro. Por otro lado, las medidas POVM, también llamadas medidas generalizadas, son apropiadas debido a que consideran la interacción del sistema con su entorno. Estas medidas son especialmente útiles porque proporcionan las estadísticas de medición. Por último, el formalismo de las operaciones cuánticas describe los efectos de la medición en un sistema cuántico y representa la descripción de los cambios de estados discretos, esto es transformaciones entre el estado inicial ρ y el estado final ρ' , sin necesidad de referenciar al paso del tiempo [5].

En la sección 1.2, se presentan la definición y las propiedades del operador de densidad y se reformulan los postulados de la mecánica cuántica utilizando este operador. Además se expone el operador de densidad reducido, una de las aplicaciones más importantes del operador de densidad. En la sección 1.3, se hablará de un caso particular de las mediciones, las mediciones proyectivas, así como se discutirá acerca de los operadores POVM. Finalmente, en la sección 1.4 se aborda el formalismo de las operaciones cuánticas que permitirá familiarizarse con la teoría básica de las mismas e involucra a los operadores conocidos como operadores de Kraus. Asimismo se presenta un teorema importante sobre la libertad unitaria en la representación de suma de operadores para una operación cuántica.

1.2. Operador de densidad

El lenguaje de los operadores de densidad proporciona un medio conveniente para describir los sistemas cuánticos, tales que su estado no es completamente conocido. Cuando un sistema cuántico está representado por un único vector de estado $|\psi_j\rangle$, completamente conocido, se le llama estado puro. No obstante, es posible que un sistema esté en un conjunto estadístico de distintos vectores puros de estado, por esta razón se puede enunciar la siguiente definición.

Definición 1.1 (Operador de densidad). El operador de densidad ρ correspondiente al ensamble de estados puros $\{p_j, |\psi_j\rangle\}$ es definido como [1]

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|. \quad (1.1)$$

A menudo se utiliza el término matriz de densidad para referirse al operador de densidad, en la práctica estos dos términos se utilizan indistintamente. Esta formulación, es equivalente a la aproximación del vector de estado, sin embargo a veces es mucho más fácil acercarse a problemas desde este nuevo punto de vista.

Considérese una medición en un ensamble, de algún observable \mathcal{O} . Una pregunta importante sería, ¿cuál es el valor promedio de \mathcal{O} cuando se reproduce un número muy grande de mediciones? La respuesta está dada por el promedio $\langle\mathcal{O}\rangle$ del ensamble, el cual se define por [6]

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{O}\rangle &= \sum_i p_i \langle\psi_i|\mathcal{O}|\psi_i\rangle \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k p_i \langle\psi_i|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\mathcal{O}|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\psi_i\rangle \\ &= \sum_j \sum_k \langle\phi_k| \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) |\phi_j\rangle\langle\phi_j|\mathcal{O}|\phi_k\rangle, \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $\{|\phi_j\rangle\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert del sistema. La matriz que se encuentra dentro del paréntesis en última línea en la ecuación (1.2) es una motivación para definir el operador de densidad en la forma de la ecuación (1.1). Notar que $\langle\phi_k|\rho|\phi_j\rangle$ son los elementos de la matriz ρ , escrita en la base $|\phi_j\rangle$. Por lo tanto, el valor promedio del observable es [6]

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{O}\rangle_\rho &= \sum_j \sum_k \langle\phi_k|\rho|\phi_j\rangle\langle\phi_j|\mathcal{O}|\phi_k\rangle \\ &= \text{tr}(\rho\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.2.1. Propiedades del operador de densidad

En esta sección se desarrolla algunas de las características y propiedades de los operadores de densidad. Asimismo se presenta la formulación de los postulados de la mecánica cuántica.

Para iniciar se enuncia la siguiente proposición y el siguiente teorema.

Proposición 1.1. *El operador de densidad es un operador hermítico.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\rho^\dagger &= \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right)^\dagger \\ &= \sum_i p_i (|\psi_i\rangle \langle \psi_i|)^\dagger \\ &= \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \\ &= \rho.\end{aligned}\tag{1.4}$$

■

De acuerdo a Nielsen y Chuang [5]:

Teorema 1.2 (Caracterización del operador de densidad). *Un operador ρ es un operador de densidad, asociado a algún ensamble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y solo si este satisface las siguientes condiciones:*

1. ρ tiene una traza igual a uno.
2. ρ es un operador positivo semidefinido.

Ahora se procede a demostrar formalmente este teorema.

Demostración. Primero se supondrá que ρ es un operador de densidad por lo que debe

cumplir con la definición (1.1), al computar la traza se obtiene que

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\rho) &= \text{Tr} \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) \\
&= \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \\
&= \sum_i p_i \sum_j \langle \psi_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \\
&= \sum_i \sum_j p_i \delta_{ij} \delta_{ij} \\
&= \sum_i p_i = 1.
\end{aligned}$$

Ahora para la segunda condición, se toma un vector de estado arbitrario $|\varphi\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle &= \sum_i p_i \langle \varphi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \varphi \rangle \\
&= \sum_i p_i |\langle \psi_i | \varphi \rangle|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

La desigualdad se sigue porque cada p_i es una probabilidad y por lo tanto no es negativa. Por la definición de operadores positivos semidefinidos, ρ cumple la segunda condición.

Ahora se debe mostrar el converso del enunciado anterior. Suponiendo ρ es un operador que cumple las dos condiciones, entonces se debe demostrar que es un operador de densidad.

Dado que ρ es un operador positivo semidefinido entonces tiene una descomposición espectral dada por la siguiente ecuación [5]

$$\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|,$$

con $|i\rangle$ vectores ortogonales y λ_i son valores propios reales no negativos, de la matriz ρ . Además satisface que la traza es uno

$$\text{Tr}(\rho) = 1 = \sum_i \lambda_i.$$

Luego, un sistema estado $|i\rangle$ con una probabilidad λ_i tendrá un operador asociado ρ . Esto significa que, el ensamble $\{\lambda_i, |i\rangle\}$ corresponde al operador ρ que cumple con (1.1).

■

Este teorema permite obtener una definición equivalente del operador de densidad y con ello es posible reformular los postulados de la mecánica cuántica utilizando este operador. Nielsen y Chuang [5] presentan la siguiente reformulación.

Postulado 1: Cualquier sistema físico tiene asociado un espacio de Hilbert \mathcal{H} , conocido como el *espacio de estado* del sistema. El sistema está completamente descrito por su *operador de densidad*, el cual es un operador ρ positivo semidefinido con traza uno, actuando en el espacio de estado del sistema. Si un sistema cuántico está en el estado ρ_i con una probabilidad p_i , entonces el operador de densidad para el sistema es $\sum_i p_i \rho_i$.

Postulado 2: La evolución de un sistema cuántico cerrado está descrita por una *transformación unitaria*. Esto es, el estado ρ del sistema en el tiempo t_1 está relacionado con el estado ρ' del sistema en el tiempo t_2 por un operador unitario U que depende solamente de t_1 y t_2 ,

$$\rho' = U\rho U^\dagger. \quad (1.5)$$

Postulado 3: Las mediciones cuánticas están descritas por una colección $\{M_m\}$ de *operadores de medición*. Estos operadores actúan en el espacio de estado del sistema que se está midiendo. El índice m se refiere a las salidas de la medición que pueden ocurrir en el experimento. Si el estado del sistema cuántico es ρ inmediatamente antes de la medición, luego la probabilidad de obtener el resultado m está dada por

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho) \quad (1.6)$$

y el estado del sistema después de la medición es

$$\rho'_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (1.7)$$

Los operadores de medición satisfacen la relación de completitud

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}. \quad (1.8)$$

Postulado 4: El espacio de Hilbert de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de Hilbert individuales de cada uno de los sistemas que componen al sistema total. Es decir, si el sistema total se compone

de N subsistemas, entonces

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N. \quad (1.9)$$

Más aún, si el i -ésimo sistema, se encuentra en el estado ρ_i , entonces el estado del sistema total será

$$\rho_{\text{total}} = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_N. \quad (1.10)$$

Con esta reformulación de los postulados de la mecánica cuántica se tiene la ventaja que es más fácil trabajar en la descripción de sistemas cuánticos cuyos estados son mixtos y la descripción de subsistemas de un sistema cuántico compuesto. Ahora, es necesario discutir estos conceptos, nuevas definiciones y hechos sobre operadores de densidad.

Antes de pasar a la siguiente sección, es indispensable discutir qué clase de ensambles pueden dar una matriz de densidad particular y cuándo dos conjuntos de vectores $\{|\psi_i\rangle\}$ y $\{|\phi_j\rangle\}$ generan el mismo operador de densidad. La respuesta a estas interrogantes tiene muchas aplicaciones en información y computación cuántica. Para ello se presenta el siguiente teorema y su demostración que enuncian Nielsen y Chuang [5].

Teorema 1.3 (Libertad unitaria en el ensamble para matrices de densidad). *Los conjuntos $\{|\psi_i\rangle\}$ y $\{|\phi_j\rangle\}$, no necesariamente normalizados, generan la misma matriz de densidad si y solo si*

$$|\psi_i\rangle = \sum_j u_{ij} |\phi_j\rangle, \quad (1.11)$$

donde u_{ij} es una matriz unitaria compleja, con índices i y j . Se completa con vectores 0 adicionales en caso uno de los conjuntos tenga menos elementos.

Demostración. Primero, se supone que $|\psi_i\rangle = \sum_j u_{ij} |\phi_j\rangle$ para alguna matriz u_{ij} . Luego

$$\begin{aligned} \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| &= \sum_{ijk} u_{ij} u_{ik}^* |\phi_j\rangle\langle\phi_k| \\ &= \sum_{jk} \left(\sum_i u_{ki}^\dagger u_{ij} \right) |\phi_j\rangle\langle\phi_k| \\ &= \sum_{jk} \delta_{jk} |\phi_j\rangle\langle\phi_k| \\ &= \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|, \end{aligned}$$

con lo que se prueba que $\{|\psi_i\rangle\}$ y $\{|\phi_j\rangle\}$ generan el mismo operador. Notar que para estado normalizados $\{|\tilde{\psi}_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{\phi}_j\rangle\}$ y distribuciones de probabilidad p_i y q_j , si $\sqrt{p_i}|\tilde{\psi}_i\rangle = \sum_j u_{ij}\sqrt{q_j}|\tilde{\phi}_j\rangle$ se obtendrá el mismo operador de densidad $\rho = \sum_i p_i|\tilde{\psi}_i\rangle\langle\tilde{\psi}_i| = \sum_j q_j|\tilde{\phi}_j\rangle\langle\tilde{\phi}_j|$.

Por otro lado, se supone que ambos conjuntos generan el mismo operador

$$Q = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|.$$

Luego la descomposición espectral del operador es $Q = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|$ tal que los vectores $|k\rangle$ son ortonormales, y λ_k son estrictamente positivos. Sea $|\psi\rangle$ un vector ortonormal al espacio generado por $|\tilde{k}\rangle = \sqrt{\lambda_k}|k\rangle$, de ello $\langle\psi|\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}|\psi\rangle = 0$ para todo k , y luego se ve que

$$0 = \langle\psi|Q|\psi\rangle = \sum_i \langle\psi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle = \sum_i |\langle\psi|\psi_i\rangle|^2$$

y $\langle\psi|\psi_i\rangle = 0$ para todo i y todo $|\psi\rangle$ ortonormal al espacio generado por el $|\tilde{k}\rangle$. Esto se sigue que cada $|\psi_i\rangle$ puede expresarse como una combinación lineal de los vectores $|\tilde{k}\rangle$, $|\psi_i\rangle = \sum_k c_{ik}|\tilde{k}\rangle$.

Como $Q = \sum_k |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}| = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, se ve que

$$\sum_k |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}| = \sum_{kl} \left(\sum_i c_{ik}c_{il}^* \right) |\tilde{k}\rangle\langle\tilde{l}|,$$

los operadores $|\tilde{k}\rangle\langle\tilde{l}|$ es fácil ver que son linealmente independientes y debe ser que $\sum_i c_{ik}c_{il}^* = \delta_{kl}$. Esto asegura que se puedan agregar columnas extra a c para obtener una matriz v tal que $|\psi_i\rangle = \sum_k v_{ik}|\tilde{k}\rangle$, donde se han agregado vectores cero a la lista de $|\tilde{k}\rangle$. Similarmente, se puede encontrar una matriz unitaria w tal que $|\phi_j\rangle = \sum_k w_{jk}|\tilde{k}\rangle$. Luego $|\psi_i\rangle = \sum_j u_{ij}|\phi_j\rangle$, donde $u = vw^\dagger$ es unitaria. De manera similar se concluye que para ensambles que generan el mismo operador de densidad $\rho = \sum_i p_i|\tilde{\psi}_i\rangle\langle\tilde{\psi}_i| = \sum_j q_j|\tilde{\phi}_j\rangle\langle\tilde{\phi}_j|$ entonces se tiene una matriz unitaria u tal que $\sqrt{p_i}|\tilde{\psi}_i\rangle = \sum_j u_{ij}\sqrt{q_j}|\tilde{\phi}_j\rangle$. ■

1.2.2. El operador de densidad reducido

Una de las aplicaciones más importantes del operador de densidad es el operador de densidad reducido. Este operador es una herramienta descriptiva para subsistemas de un sistema cuántico y su discusión se llevará a cabo a continuación.

Supóngase que se tiene sistemas A y B , cuyos estados están descritos por el operador de densidad ρ_{AB} . El operador de densidad reducido o local para el sistema A es definido por

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}), \quad (1.12)$$

donde Tr_B es un mapeo de operadores conocidos como la traza parcial sobre el sistema B . La traza parcial tiene la siguiente definición, presentada por Wilde [1].

Definición 1.2 (Traza parcial). Sea ρ_{AB} un operador cuadrado actuando en un producto tensorial del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ y sea $\{|l\rangle_b\}$ una base ortonormal para el espacio \mathcal{H}_B . Luego la traza parcial sobre el sistema \mathcal{H}_B está definida como sigue:

$$\text{Tr}_B(\rho_{AB}) \equiv \sum_l (\mathbb{1} \otimes \langle l|_B) \rho_{AB} (\mathbb{1} \otimes |l\rangle_B). \quad (1.13)$$

Por simplicidad, no se suele escribir los operadores identidad y se escribe de la siguiente forma:

$$\text{Tr}_B(\rho_{AB}) \equiv \sum_l \langle l|_B \rho_{AB} |l\rangle_B. \quad (1.14)$$

Por la misma razón que la definición de la traza es invariante bajo la elección de una base ortonormal, lo mismo es cierto para la operación de traza parcial. También se observa, a partir de la definición anterior, que la traza parcial es una operación lineal.

En conclusión, dado un operador ρ_{AB} que describe un estado conjunto de los sistemas A y B , es posible calcular un operador de densidad local ρ_A , que describe el estado local de A si el sistema B es inaccesible para A .

Según Wilde [1], existe una forma alternativa de describir la traza parcial, la cual es útil estar consciente. Para un estado simple de la forma

$$|x_1\rangle\langle x_2|_A \otimes |y_1\rangle\langle y_2|_B, \quad (1.15)$$

la acción de la traza parcial es como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B(|x_1\rangle\langle x_2|_A \otimes |y_1\rangle\langle y_2|_B) &= |x_1\rangle\langle x_2|_A \text{Tr}(|y_1\rangle\langle y_2|_B) \\ &= |x_1\rangle\langle x_2|_A \langle y_2|y_1\rangle, \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde se calcula la traza del segundo sistema para obtener el operador de densidad local del primero.

Esto se puede generalizar para un operador de densidad arbitrario ρ_{AB} , con una

base ortonormal $\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\}_{i,j}$ para un estado conformado por dos sistemas:

$$\begin{aligned}\rho_{AB} &= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j;k,l} (|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B) (\langle k|_A \otimes \langle l|_B) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j;k,l} |i\rangle \langle k|_A \otimes |j\rangle \langle l|_B,\end{aligned}\tag{1.17}$$

los coeficientes $\lambda_{i,j;k,l}$ son los elementos de la matriz ρ_{AB} en la base respectiva.

Luego al aplicar la traza parcial y usando la linealidad de la traza, se obtiene

$$\begin{aligned}\rho_A &= \text{Tr}_B \left(\sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j;k,l} |i\rangle \langle k|_A \otimes |j\rangle \langle l|_B \right) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j;k,l} \text{Tr}_B (|i\rangle \langle k|_A \otimes |j\rangle \langle l|_B) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j;k,l} |i\rangle \langle k|_A \text{Tr}(|j\rangle \langle l|_B) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \lambda_{i,j;k,l} |i\rangle \langle k|_A \langle l|j\rangle \\ &= \sum_{i,k} \left(\sum_j \lambda_{i,j;k,j} \right) |i\rangle \langle k|_A.\end{aligned}\tag{1.18}$$

La razón principal para estudiar el operador de densidad reducido es que es la única operación que proporciona la descripción correcta de observables para subsistemas de un sistema compuesto.

Nielsen y Chuang [5] proponen la siguiente situación. Supóngase que \mathcal{M} es un observable en el sistema de Hilbert \mathcal{H}_A y se tiene algún dispositivo de medición, el cual es capaz de realizar la medición de \mathcal{M} . Además, sea $\tilde{\mathcal{M}}$ un observable para la misma medición, realizada en el sistema compuesto $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Entonces, es necesario mostrar que $\tilde{\mathcal{M}}$ debe ser igual a $\mathcal{M} \otimes \mathbb{1}_B$. Notar que si el sistema $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ está preparado en el estado $|m\rangle \otimes |\psi\rangle$, donde $|m\rangle$ es un vector propio de \mathcal{M} con valor propio m y $|\psi\rangle$ es algún estado de \mathcal{H}_B , luego el dispositivo de medición debe proporcionar el resultado m con una probabilidad igual a uno. En consecuencia, si P_m es el operador de proyección al espacio propio de m del observable \mathcal{M} , entonces el operador de proyector correspondiente para $\tilde{\mathcal{M}}$ es $P_m \otimes \mathbb{1}_B$. Luego, se tiene que

$$\tilde{\mathcal{M}} = \sum_m m P_m \otimes \mathbb{1}_B = \mathcal{M} \otimes \mathbb{1}_B.$$

El paso siguiente es mostrar que la traza parcial da como resultado las estadísticas

de medición correctas para las observaciones en una parte del sistema. Para probarlo, suponga que se realiza una medición en el sistema \mathcal{H}_A descrito por el observable \mathcal{M} . La consistencia física requiere que el *estado* ρ_A que se asocia al sistema \mathcal{H}_A , debe tener la propiedad que los valores esperados de la medición sean los mismos ya sea que se calculen a través de ρ_A o ρ_{AB} [5]

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{M}\rho_A) = \mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{M}}\rho_{AB}) = \mathrm{Tr}((\mathcal{M} \otimes \mathbb{1}_B)\rho_{AB}). \quad (1.19)$$

De acuerdo a Nielsen y Chuang [5] la ecuación (1.19) es satisfecha si se escoge $\rho_A \equiv \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})$. De hecho, la traza parcial debe ser la única función que cumpla esta propiedad. Para comprobar la propiedad de unicidad, se toma $f(\cdot)$ como algún mapeo de operadores de densidad en $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ a los operadores de densidad en \mathcal{H}_A tal que

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{M}f(\rho_{AB})) = \mathrm{Tr}((\mathcal{M} \otimes \mathbb{1}_B)\rho_{AB}),$$

para todos los observables \mathcal{M} .

Sea \mathcal{M}_i una base ortonormal de operadores para el espacio de operadores hermíticos con respecto al producto interno $(X, Y) \equiv \mathrm{Tr}(XY)$. Luego, la expansión $f(\rho_{AB})$ en esta base resulta como sigue

$$\begin{aligned} f(\rho_{AB}) &= \sum_i \mathcal{M}_i \mathrm{Tr}(\mathcal{M}_i f(\rho_{AB})) \\ &= \sum_i \mathcal{M}_i \mathrm{Tr}((\mathcal{M}_i \otimes \mathbb{1}_B)\rho_{AB}), \end{aligned}$$

de ello se sigue que f está únicamente determinada por la ecuación (1.19). Además, la traza parcial satisface (1.19), entonces es la única función que tiene esta propiedad [5].

1.3. Medidas POVM

Hasta ahora, se ha descrito el espacio de estados cuánticos. Ahora se abordará el tema del proceso de medición cuántica utilizando herramientas como las medidas proyectivas y las medidas POVM. Aunque el proceso de medición sigue siendo algo enigmático, aquí simplemente se toma como cierto el postulado relacionado al colapso de la función de onda, mencionado en el capítulo anterior (sección 1.2.1). Según Nielsen y Chuang [5], el postulado de la medición cuántica, involucra dos elementos. El primero, proporciona una regla que describe las estadísticas de medición, es decir, las probabilidades respectivas de los diferentes resultados de medición posibles. En segundo lugar, da una regla que describe el estado posterior a la medición del sistema.

1.3.1. Medidas proyectivas PVM

La medición cuántica realizada en un estado ρ produce la m -ésima salida con una probabilidad $p(m)$ dada por la ecuación (1.6) y transforma a ρ en ρ_m descrito por la ecuación (1.7). En tales mediciones, se registran resultados concretos etiquetados por el subíndice m y son llamadas *selectivas*. Si no se realiza una selección basada en la salida de la medición, el estado inicial es transformado en una combinación convexa de todas las salidas posibles, dado por

$$\rho' = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger. \quad (1.20)$$

En una medida proyectiva PVM (por sus siglas en inglés, projection-valued measure) los operadores de medición son operadores proyectores ortogonales tales que $M_m = M_m^\dagger = P_m$, y $P_m P_n = \delta_{mn} P_m$. Una medición proyectiva es descrita por un observable \mathcal{O} y las salidas de la medición están etiquetadas por los valores propios de \mathcal{O} . Dado que el \mathcal{O} es operador hermítico, se puede utilizar la descomposición espectral para representarlo como

$$\mathcal{O} = \sum_m \lambda_m P_m, \quad (1.21)$$

donde los operadores de medición del conjunto ortogonal $\{P_m\}$ satisfacen la relación de completitud [7].

En una medición proyectiva selectiva la salida etiquetada por λ_m ocurre con probabilidad $p(m) = \text{Tr}(P_m \rho P_m)$, y por la propiedad cíclica de la traza, $p(m) = \text{Tr}(P_m \rho)$; el estado inicial es transformado como

$$\rho \rightarrow \rho_m = \frac{P_m \rho P_m}{\text{Tr}(P_m \rho)}. \quad (1.22)$$

En una medición proyectiva no selectiva, el estado inicial es transformado así

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_m P_m \rho P_m. \quad (1.23)$$

1.3.2. Operadores POVM

En esta sección se discutirá sobre el formalismo POVM (el acrónimo POVM significa «medida valorada por el operador positivo»), el cual es bastante elegante y ampliamente utilizado [5]. Se procede a dar una definición de las medidas POVM.

Definición 1.3 (POVM). Una medida POVM (positive operator-valued measure)

es un conjunto $\{E_m\}$ de operadores llamados «efectos» que satisfacen las siguientes condiciones [7]:

1. Positividad: $\langle \psi | E_m | \psi \rangle \geq 0$ para cualquier vector $|\psi\rangle$.
2. Hermiticidad: $E_m = E_m^\dagger$.
3. Completitud: $\sum_m E_m = \mathbf{1}$.

Una medida POVM aplicada al estado ρ produce la m -ésima salida, con una probabilidad $p(m) = \text{Tr}(E_m \rho)$. Un ejemplo de medida POVM son las ya discutidas medidas proyectivas descritas por los operadores de proyección, tales que $P_m P_n = \delta_{mn} P_m$ y $\sum_m P_m = \mathbf{1}$. Solo en este caso todos los elementos POVM son los mismos que los propios operadores de medición, $E_m = P_m P_m^\dagger = P_m$ [5].

Los POVM se ajustan en el marco general del postulado de la medición cuántica, ya que se puede elegir $E_m = M_m M_m^\dagger$. Sin embargo es importante notar que los POVM no determinan los operadores de medición M_m de manera única, a excepción del caso particular de las mediciones proyectivas. Lo que sucede con el estado exactamente, cuando una medición es realizada depende en como los POVM son implementados en el laboratorio [7].

Según Nielsen y Chuang [5], en computación e información cuántica, el objetivo es lograr un buen nivel de control sobre las mediciones que se pueden realizar, por consiguiente utilizar un formalismo más completo para la descripción de las mediciones es de gran ayuda. Por supuesto, las medidas proyectivas son completamente equivalentes a las mediciones más generales cuando se toman en cuenta los demás axiomas.

Existen varias razones para utilizar el formalismo general de las mediciones. La primera es que matemáticamente las mediciones generales son menos restrictivas que las medidas proyectivas. Por ejemplo, estas mediciones generales no necesariamente exigen la condición de idempotencia $P^2 = P$ como si lo hacen las medidas proyectivas. Otra razón para utilizarlas es que existen muchos problemas en información y computación cuántica tales como la forma óptima de distinguir un conjunto de estados cuánticos cuya respuesta implica una medición general, en lugar de una medición proyectiva [5].

Una tercera razón para utilizar las mediciones generales esta relacionada con la propiedad de repetibilidad de las mediciones proyectivas. Las medidas proyectivas son repetibles en el sentido que si se realiza una medición proyectiva una vez y se obtiene un resultado m , al repetir la medición el resultado será nuevamente m y el estado también será el mismo. Este hecho indica que muchas medidas importantes en mecánica cuántica no son medidas proyectivas. Para tales mediciones, debe emplearse el postulado general de medición. Y en este contexto las medidas POVM son un caso especial

del formalismo de la medición general, que proporciona el medio más simple en el que se pueden estudiar las estadísticas generales de medición, sin necesidad de conocer el estado posterior a la medición. Son una conveniencia matemática que a veces brinda información adicional sobre las mediciones cuánticas [5].

1.4. Operaciones cuánticas

Los sistemas reales sufren interacciones indeseadas con el mundo exterior, y éstas aparecen como ruido en información cuántica. Las operaciones cuánticas son un herramienta capaz de describir dicho ruido cuántico y el comportamiento de sistemas cuánticos abiertos.

1.4.1. Aproximación axiomática de las operaciones cuánticas

En esta sección se abordan las operaciones cuánticas desde un punto de vista axiomático el cual será motivado por requerimientos físicos. Nielsen y Chuang [5] presentan la siguiente definición de operación cuántica

Definición 1.4 (Operación cuántica). Una operación cuántica \mathcal{E} es un mapeo de un conjunto de operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H}_A de entrada a otro conjunto de operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H}_B de salida, $\mathcal{E} : \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B$, con las siguientes propiedades axiomáticas:

- *Axioma 1:* La traza $\text{Tr}(\mathcal{E}(\rho))$ es la probabilidad de que el proceso representado por \mathcal{E} ocurra, cuando ρ es el estado inicial. Consecuentemente, $0 \leq \text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) \leq 1$ para cualquier estado ρ .
- *Axioma 2:* El mapeo \mathcal{E} es lineal en el conjunto de matrices de densidad. Esto es, para probabilidades $\{p_i\}$,

$$\mathcal{E} \left(\sum_i p_i \rho_i \right) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\rho_i).$$

- *Axioma 3:* El mapeo \mathcal{E} es completamente positivo. Esto significa que \mathcal{E} mapea operadores en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_A a operadores en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{A'}$, luego $\mathcal{E}(\rho)$ debe ser positivo para cualquier operador positivo ρ . Más aún, si se introduce un espacio de Hilbert \mathcal{H}_B y se considera el mapeo extendido $(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_B)(\rho)$, éste debe ser positivo también para cualquier operador positivo ρ en el sistema combinado $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

El primer axioma resulta conveniente en el caso de las mediciones. Para verlo

mejor, suponga que se realiza una medición proyectiva en la base computacional de un solo qubit. Entonces la operación cuántica \mathcal{E} describirá este proceso si se define el mapeo como $\mathcal{E}_0 \equiv |0\rangle\langle 0|\rho|0\rangle\langle 0|$ y $\mathcal{E}_1 \equiv |1\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 1|$. Las probabilidades de las salidas serán entonces $\text{Tr}(\mathcal{E}_0(\rho))$ y $\text{Tr}(\mathcal{E}_1(\rho))$ respectivamente. Con esta convención la normalización correcta para el estado final será

$$\frac{\mathcal{E}(\rho)}{\text{Tr}(\mathcal{E}(\rho))}.$$

En el caso que no se realice ninguna medición, esto se reduce al requisito de que $\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] = 1 = \text{Tr}(\rho)$, para todo ρ . En este caso la operación cuántica \mathcal{E} preserva la traza, ya que por sí sola proporciona una descripción completa del proceso cuántico [5].

Asimismo, para ver una razón física para proponer el segundo axioma, supóngase que un estado inicial ρ_i está preparado con una probabilidad p_i y luego se realiza la medición. Si el estado es ρ_i luego la salida de la medición α ocurre con la probabilidad condicional $p(\alpha|i)$, y el estado de la medición posterior es $\mathcal{E}_\alpha(\rho_i)/p(\alpha|i)$; luego el ensamble de estado después de la medición está descrito por el operador de densidad

$$\rho' = \sum_i p(i|\alpha) \frac{\mathcal{E}_\alpha(\rho_i)}{p(\alpha|i)}, \quad (1.24)$$

donde $p(i|\alpha)$ es la probabilidad a posteriori que el estado ρ_i fuera preparado, tomando en cuenta la información obtenida haciendo la medición [8].

Por otro lado, aplicando la operación \mathcal{E}_α a la combinación convexa del estado inicial $\{\rho_i\}$

$$\rho' = \frac{\mathcal{E}_\alpha(\sum_i p_i \rho_i)}{p_\alpha}, \quad (1.25)$$

tomando en cuenta la regla de Bayes $p(i|\alpha) = \frac{p_i p(\alpha|i)}{p_\alpha}$ a la ecuación (1.24), se ve que \mathcal{E}_α debe ser lineal [8]

$$\mathcal{E}_\alpha \left(\sum_i p_i \rho_i \right) = \sum_i p_i \mathcal{E}_\alpha(\rho_i). \quad (1.26)$$

La tercera propiedad también se origina por un requerimiento físico. Es razonable exigir que un mapeo sea completamente positivo si se va a describir la evolución temporal de un sistema cuántico. Aunque el mapeo actúa solo en una parte del sistema, debe representar un estado inicial de todo el sistema hacia un estado final del sistema entero. Si ρ_{AB} es una matriz de densidad de un sistema conjunto de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B y \mathcal{E} actúa solamente sobre \mathcal{H}_A , entonces $\mathcal{E}(\rho_{AB})$ debe ser un operador de densidad también. Formalmente, supongamos que introducimos un segundo sistema B (de dimensión fi-

rita). Sea $\mathbb{1}_B$ el mapa identidad del sistema B . Entonces el mapa $\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_B$ debe llevar operadores positivos a operadores positivos [5, 8].

1.4.2. Operadores de Kraus

Una operación cuántica puede representarse en una forma elegante como *suma de operadores*. La representación de suma de operadores de una operación cuántica, también conocida como representación de Kraus¹, se puede escribir como $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$, para algún conjunto de operadores $\{K_i\}$ que satisfacen la condición $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbb{1}_N$. Los operadores $\{K_i\}$ son conocidos como *operadores de Kraus*. Así también, los mapeos completamente positivos que preservan la traza se conocen por varios nombres: *operaciones cuánticas deterministas*, *canales cuánticos* o *mapas estocásticos* [7].

Nielsen y Chuang [5] presentan un teorema y una prueba de que la representación de suma de operadores es equivalente a la definición de la sección anterior.

Teorema 1.4. *El mapeo \mathcal{E} satisface los axiomas de la definición (1.4) si y solo si*

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \quad (1.27)$$

para algún conjunto de operadores $\{K_i\}$ el cual mapea el espacio de Hilbert de entrada al espacio de Hilbert de salida, y $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbb{1}_N$.

Demostración. Suponiendo que \mathcal{E} satisface (1.4). Se introduce un sistema \mathcal{H}_B , con las mismas dimensiones del sistema cuántico original \mathcal{H}_A . Sea $|k_A\rangle$ y $|k_B\rangle$ bases ortonormales para \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente. Se define un estado conjunto del sistema $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ como

$$|\alpha\rangle \equiv \sum_k |k_A\rangle |k_B\rangle.$$

El estado $|\alpha\rangle$ es un estado máximamente entrelazado de los sistemas \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B . También se define un operador σ en espacio de estado de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ dado por

$$\sigma \equiv (\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_B)(|\alpha\rangle\langle\alpha|). \quad (1.28)$$

Se puede pensar en esto como un resultado de aplicar la operación cuántica \mathcal{E} a la mitad de un estado de máximo entrelazamiento del sistema $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. A continuación se probará el hecho que el operador σ especifica completamente la operación cuántica \mathcal{E} . Es decir para saber como actúa \mathcal{E} en un estado arbitrario de \mathcal{H}_A , es suficiente con

¹La representación de Kraus fue introducida por el físico alemán Karl Kraus en 1971, basada en el resultado del teorema de Stinespring [7].

saber cómo este actúa en un solo estado máximamente entrelazado de \mathcal{H}_A con otro sistema.

La estrategia que permite recuperar a \mathcal{E} de σ es la siguiente. Sea $|\psi\rangle = \sum_j \psi_j |j_A\rangle$ algún estado del sistema \mathcal{H}_A y $|\tilde{\psi}\rangle = \sum_j \psi_j^* |j_B\rangle$ un estado correspondiente del sistema \mathcal{H}_B . Notar que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi} | \sigma | \tilde{\psi} \rangle &= \langle \tilde{\psi} | \left(\sum_{kj} \mathcal{E}(|k_A\rangle\langle j_A|) \otimes |k_B\rangle\langle j_B| \right) | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \sum_{kj} \psi_k \psi_j^* \mathcal{E}(|k_A\rangle\langle j_A|) \\ &= \mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Luego, sea $\sigma = \sum_i |s_i\rangle\langle s_i|$ una descomposición del operador σ , donde los vectores $|s_i\rangle$ no necesitan ser normalizados. Adicionalmente, se define el siguiente mapeo

$$K_i(|\psi\rangle) \equiv \langle \tilde{\psi} | s_i \rangle. \tag{1.30}$$

Se puede notar que este mapeo es lineal, por consiguiente K_i es un operador lineal en el espacio de estado \mathcal{H}_A . Más aún, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_i K_i |\psi\rangle\langle\psi| K_i^\dagger &= \sum_i \langle \tilde{\psi} | s_i \rangle \langle s_i | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \langle \tilde{\psi} | \sigma | \tilde{\psi} \rangle \\ &= \mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|). \end{aligned} \tag{1.31}$$

De ello se obtiene la siguiente igualdad

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i K_i |\psi\rangle\langle\psi| K_i^\dagger,$$

para todos los estados $|\psi\rangle$ de \mathcal{H}_A . Por el segundo axioma, se sigue que

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger.$$

La condición $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbf{1}$ se obtiene del primer axioma, identificando la traza de $\mathcal{E}(\rho)$ con una probabilidad. Esto concluye la primera parte de la demostración.

Ahora se supone el recíproco de lo anterior, sea $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$, tal que $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbf{1}$. Es fácil ver que la operación cuántica \mathcal{E} es lineal, pero falta chequear la completa positividad.

Sea \mathcal{O} un operador positivo actuando en el espacio de estado del sistema extendido, $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ y $|\psi\rangle$ algún estado del sistema $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. De igual forma, se define el estado $|\varphi_i\rangle \equiv (K_i^\dagger \otimes \mathbb{1}_B)|\psi\rangle$, de ello se tiene que

$$\langle\psi|(K_i \otimes \mathbb{1}_B)\mathcal{O}(K_i^\dagger \otimes \mathbb{1}_B)|\psi\rangle = \langle\varphi_i|\mathcal{O}|\varphi_i\rangle \geq 0,$$

por la positividad de \mathcal{O} . Por la linealidad se sigue que

$$\langle\psi|(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_B)(\mathcal{O})|\psi\rangle = \sum_i \langle\varphi_i|\mathcal{O}|\varphi_i\rangle \geq 0,$$

esto se cumple para cualquier operador positivo \mathcal{O} . En consecuencia, el operador $(\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_B)(\mathcal{O})$ es positivo como se requiere. Finalmente, la condición $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbb{1}$ asegura que las probabilidades son menores o iguales a 1. ■

La representación de suma de operadores describe la dinámica del sistema principal sin tener que considerar explícitamente las propiedades del entorno; todo lo que se necesita saber está agrupado en los operadores $\{K_i\}$, que actúan solo en el sistema principal [5].

No unicidad en la representación de Kraus

La representación de Kraus provee una descripción bastante general de la dinámica de los sistemas cuánticos abiertos sin embargo esta representación no es única. Es decir que distintos conjuntos de operadores $\{K_i\}$ y $\{M_j\}$ pueden generar la misma operación cuántica. Esto es importante puesto que, diferentes procesos físicos pueden dar lugar a la misma dinámica del sistema. Nielsen y Chuang [5] proponen formalmente el siguiente teorema.

Teorema 1.5 (Libertad unitaria en la representación de Kraus). *Sean*

$$\{K_1, \dots, K_n\} \text{ y } \{M_1, \dots, M_m\}$$

conjuntos de operadores que generan operaciones cuánticas \mathcal{E} y \mathcal{F} , respectivamente. Además, se agregan operadores cero a la lista más corta de operadores, para asegurar que $m = n$. Luego $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ si y solo si existe números complejos u_{ij} tales que $K_i = \sum_j u_{ij} M_j$, y u_{ij} es una matriz unitaria de m por m

La prueba de este teorema se fundamenta en el teorema (1.11). Para ejemplificarlo, Nielsen y Chuang [5] proponen las siguientes operaciones $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$ y $\mathcal{F}(\rho) =$

$\sum_i M_i \rho M_i^\dagger$, donde los conjuntos $\{K_n\}$ y $\{M_m\}$ tienen elementos definidos por

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Esta operación \mathcal{E} representa 1/2 de probabilidad de aplicar el operador identidad y 1/2 de probabilidad de aplicarle Z al sistema cuántico y

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

la segunda operación \mathcal{F} corresponde a realizar una medición proyectiva en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, con el resultado de la medida desconocida.

Las operaciones \mathcal{E} y \mathcal{F} son, matemáticamente la misma operación cuántica. Para verlo, notar que existe la matriz unitaria

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

tal que

$$M_1 = \sum_j u_{1j} K_j = (K_1 + K_2)/\sqrt{2}$$

y

$$M_2 = \sum_j u_{2j} K_j = (K_1 - K_2)/\sqrt{2}$$

luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\rho) &= \frac{(K_1 + K_2)\rho(K_1^\dagger + K_2^\dagger) + (K_1 - K_2)\rho(K_1^\dagger - K_2^\dagger)}{2} \\ &= K_1 \rho K_1^\dagger + K_2 \rho K_2^\dagger \\ &= \mathcal{E}(\rho). \end{aligned} \quad (1.34)$$

2. MEDICIONES DIFUSAS

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan las mediciones de sistemas cuánticos en las que se pueden identificar partículas individuales, sin embargo siempre hay una probabilidad de identificarlas erróneamente. Adicionalmente, se explica detalladamente las herramientas que se utilizarán a lo largo de este trabajo para abordar la cuantificación de la información de estas mediciones difusas.

La estructura de este capítulo se presenta a continuación. En la sección 2.2 se exponen las mediciones no ideales y un ejemplo de una medición imperfecta. El problema de las mediciones difusas para un sistema cuántico se establece en la sección 2.3. En esa misma sección, se introduce una operación cuántica, llamada *operación difusa* y se profundiza en el concepto de valores esperados en mediciones difusas, el cual motiva la definición de esta operación. En la sección 2.4 se discute la aplicación de las mediciones POVM y de los operadores de Kraus específicamente para mediciones difusas. En la sección 2.5 se expone el concepto de instrumento cuántico, el cual es una operación cuántica que determina una evolución más extensa, al combinar las salidas de un sistema clásico y uno cuántico. Además, se presentan algunos instrumentos cuánticos con distintas interpretaciones para mediciones difusas.

2.2. Mediciones no ideales

Los sistemas cuánticos ideales son sistemas cerrados sujetos a la teoría cuántica, que no interactúan con su entorno y por lo tanto, no están sometidos a perturbaciones que pueden provocar pérdida de información en el sentido de ruido clásico [1]. La medición de estos sistemas puede describirse con mediciones proyectivas o ideales. Estos sistemas con mediciones ideales son una simplificación de la realidad difícil de justificar en la práctica. Las mediciones cuánticas proyectivas son inadecuadas por varias razones. Una de ellas es que se pueden realizar mediciones de tal manera que dispositivos

imprecisos agreguen ruido clásico al resultado de la medición. Otra razón es que en sistemas abiertos, en los que se intercambia constantemente información con su entorno de forma incontrolable, lo que resulta en una decoherencia del estado en estudio. En el caso de sistemas cuánticos no ideales puede utilizarse una definición más general de medición [1, 9].

El siguiente ejemplo permite visualizar el concepto de una medición no ideal de forma que clarifica la diferencia entre una medición ideal y una en la que se involucran imperfecciones en el sistema. A. Peres [10] ejemplifica una situación de una medición no ideal a la que llama «medición difusa», sin embargo, es importante subrayar que no es el enfoque que se trabajará en el documento. En este ejemplo existe una señal clásica extremadamente débil, por lo cual no es posible ignorar las propiedades cuánticas del detector y debe ser tratado como un sistema cuántico. El detector tiene que «medirse» por un aparato adecuado al que se le llama «el medidor», que luego produce otra señal clásica.

Considérese una partícula de espín- $\frac{1}{2}$ cuyo estado inicial está descrito por $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Se desea medir el observable σ_z , el cual tiene valores propios ± 1 . Además, se supone que el medidor tiene un solo grado de libertad y es adimensional, q , que indica el valor de la variable medida y su función de onda inicial está dada por $\phi(q)$.

Luego, el vector de estado se transforma de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \phi(q) \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \phi(q-1) + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \phi(q+1). \quad (2.1)$$

Suponiendo que antes de la medición es más probable encontrar el medidor cerca de $q = 0$. Entonces, existe una amplitud de probabilidad $\alpha\phi(q-1)$ para encontrar el medidor cerca de $q = 1$ y una amplitud de probabilidad $\beta\phi(q+1)$ para encontrarlo cerca de $q = -1$. Idealmente, $\phi(q \mp 1)$ debería tener un ancho cero y el resultado de la medición debería ser uno de los valores propios de σ_z . Sin embargo, el valor realmente observado de σ_z puede diferir del resultado ideal en una cantidad de orden $\Delta q > 2$. Esta discrepancia no es una «dificultad técnica trivial». La probabilidad de observar el medidor entre q_0 y $q_0 + dq_0$ es

$$P(q_0)dq_0 = [|\alpha|^2|\phi(q_0-1)|^2 + |\beta|^2|\phi(q_0+1)|^2]dq_0,$$

si el valor observado q_0 es tal que ambos términos del lado derecho contribuyen, el estado final de la partícula no es un estado propio de σ_z . Sino que viene dado por el lado derecho de la ecuación (2.1), evaluada en $q = q_0$. La ubicación inicial del medidor es incierta, de modo que a esta medición A. Peres la llama «difusa».

2.3. Medición difusa en sistemas cuánticos

En esta tesis, el concepto de «medición difusa», es distinta al planteado en el ejemplo del apartado anterior. Ahora, se procede a estudiar las ideas detrás de las mediciones difusas que se abordan en el resto del documento. Para esto se considera la siguiente situación presentada por Pineda, Davalos, Viviescas y Rosado [4]. Supóngase que se tiene una cadena de iones y se realiza una medición a uno solo de ellos. Se hace brillar la cadena de iones y se obtiene una señal fluorescente. Dicha señal se recibe con un dispositivo detector imperfecto, en consecuencia no se puede saber con seguridad de dónde provino [4]. No obstante, es posible cuantificar la información que se obtuvo incluso cuando ésta es borrosa. Con base en lo anterior, una medición difusa puede definirse como sigue.

Definición 2.1. Una medición difusa es un proceso no ideal en el cual, debido a ruido del entorno o a fallos en el dispositivo de detección, se presenta la probabilidad de una identificación errónea de las partículas del sistema.

Ahora, se considera un sistema cuántico solo de dos partículas, el cual tiene un espacio de Hilbert dado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, y en el que se desea medir un cierto observable $A \otimes B$. Por simplicidad, se analiza un observable factorizable, cuya representación tensorial se puede expresar en un solo término. Se realiza una medición difusa, si con cierta probabilidad p , el aparato mide al observable A en el sistema de la partícula en el espacio \mathcal{H}_1 y al observable B en el subsistema de la partícula en el espacio \mathcal{H}_2 . Sin embargo, existe una probabilidad de $1 - p$ de que el detector confunda las partículas y, en su lugar, se mida el observable B en el primer subsistema y a A en el segundo subsistema [4].

2.3.1. Operador difuso

El propósito de este apartado es introducir y establecer de manera formal el operador difuso aplicable a cualquier sistema cuántico que se analizará en las siguientes secciones. Para ello es necesario abordar el formalismo del «operador de intercambio» para sistemas de dos o más partículas.

Se iniciará estudiando el caso de un sistema cuántico que consta de solo dos partículas. El operador intercambio u operador SWAP, con respecto a las partículas en los espacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , se define de la siguiente forma

$$S_{12} : |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2 = \sum_{i,j} \psi_i \varphi_j |i, j\rangle \longmapsto \sum_{i,j} \varphi_i \psi_j |j, i\rangle = |\varphi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2. \quad (2.2)$$

Con esta definición es inmediato notar que el operador SWAP para dos partículas es igual a su adjunto y a su transformación inversa. Lo que significa que el operador cumple con las siguientes propiedades

1. Es *involutivo* $S_{12}^{-1} = S$ y $S_{12}^2 = \mathbb{1}$, esto es, aplicar el operador de intercambio a las partículas dos veces deja al sistema sin cambios.
2. Es *hermítico* $S_{12}^\dagger = S$.
3. Es *unitario* $S_{12}^\dagger S_{12} = \mathbb{1}$.

Continuando en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ para el sistema de dos partículas. Se construye una operación cuántica que cumpla con el teorema 1.4. A dicha operación se le llamará *operación difusa* u *operador difuso*

$$\mathcal{F}_{2p}(\rho) := p\rho + (1-p)S_{12}\rho S_{12}^\dagger. \quad (2.3)$$

El primer término indica que con una probabilidad p se aplica la identidad es decir que el estado se deja intacto. Además, el segundo término del operador difuso indica que con una probabilidad $(1-p)$ se aplica el operador SWAP al estado ρ , lo que implica que las partículas se intercambian con esa probabilidad.

Lo anterior se puede generalizar para sistemas con mayor complejidad, en los que se tiene más de dos partículas. Es relevante notar que, en sistemas con varias partículas es factible intercambiar solo dos elementos con un operador S_{ij} , (los subíndices denotan el intercambio respecto a las partículas i y j) dejando a los demás invariantes. Sin embargo, es viable que en el sistema se lleve a cabo el intercambio de más de dos partículas. Para describir estas acciones de intercambio, es necesario hablar de los operadores de permutación.

Los operadores de permutación, como el nombre lo sugiere, intercambian algunas partículas con otras. El proceso puede extenderse a permutaciones entre un número arbitrario de N partículas pero, no todas las propiedades obtenidas para el caso de dos partículas se aplican en general. Será más fácil, primero observar el caso $N = 3$ antes de generalizar los resultados. El operador de permutación Π_{mnp} es por definición tal que transforma el vector de estado $|\psi\rangle = |u_i\rangle_1 \otimes |u_j\rangle_2 \otimes |u_k\rangle_3$, de la siguiente forma [11]

$$\Pi_{mnp}|u_i\rangle_1 \otimes |u_j\rangle_2 \otimes |u_k\rangle_3 = |u_i\rangle_m \otimes |u_j\rangle_n \otimes |u_k\rangle_p.$$

Por ejemplo, el operador de permutación Π_{231} actúa en el estado $|\psi\rangle$ como

$$\Pi_{231}|u_i\rangle_1 \otimes |u_j\rangle_2 \otimes |u_k\rangle_3 = |u_i\rangle_2 \otimes |u_j\rangle_3 \otimes |u_k\rangle_1,$$

lo que es equivalente a

$$\Pi_{231}|u_i\rangle_1 \otimes |u_j\rangle_2 \otimes |u_k\rangle_3 = |u_k\rangle_1 \otimes |u_i\rangle_2 \otimes |u_j\rangle_3.$$

Existen $N!$ permutaciones, para este caso $N = 3$, existen 6 formas de permutar las partículas. Notar que realizar una permutación cíclica en un operador dado lo deja sin cambios.

En general, todo operador de permutación puede escribirse como producto de operaciones S_{ij} ,

$$\Pi_\alpha = S_{\beta_1} S_{\beta_2} \cdots S_{\beta_K}, \quad (2.4)$$

donde α denota una permutación y β un intercambio de algún par de partículas. Si para escribir el operador de permutación se requiere un número par de operadores de intercambio S_{ij} , se dice que ese operador es par, y si se requiere un número impar, se dice que es impar. A esto se le llama la «paridad del operador» [11].

No todas las propiedades obtenidas para el operador de intercambio de dos partículas se mantienen. Las propiedades destacables de los operadores de permutación se enumeran a continuación

1. Son *unitarios* $\Pi_\alpha \Pi_\alpha^\dagger = \mathbf{1}$, esto es inmediato del hecho que son el producto de los operadores de intercambio de dos partículas S_{β_k} .
2. *No son hermíticos* para $N > 2$.
3. Su operador adjunto tiene la misma paridad.

Además, los operadores de permutación forman un grupo. Puesto que, existe un operador de permutación que es igual a la identidad, cada permutación admite una operación inversa y el producto de dos permutaciones produce otra permutación.

Los operadores de permutación fueron presentados puesto que son necesarios para ampliar el alcance del operador difuso, definido en la ecuación (2.3), para un sistema de más partículas. De forma general en un sistema de N partículas se define como sigue

$$\mathcal{F}(\rho) = \sum_{\Pi_i \in \mathcal{S}} p_i \Pi_i \rho \Pi_i^\dagger \quad (2.5)$$

donde \mathcal{S} es un subconjunto del grupo simétrico de N partículas y $\sum_{i=1}^{N!} p_i = 1$. La idea detrás de este operador es análoga a la anterior. Cada uno de los términos representa que con cierta probabilidad p_i el estado ρ sufre una permutación. En otras palabras, las partículas son intercambiadas en alguna disposición dictada por el operador Π_i , con dicha probabilidad.

2.3.2. Valores esperados en mediciones difusas

En esta sección se ahonda en la relevancia del valor esperado y su aplicación en este estudio. Se presenta el concepto del valor esperado y se detalla qué sucede con él en una medición difusa y su relación con el operador difuso. Además, se ejemplifica la diferencia entre los valores esperados en una medición ideal y una medición difusa. Por último, se argumenta la utilidad de esta medida y se expone para qué se usará en este proyecto.

El valor esperado es un término que se deriva de la teoría básica de la probabilidad y representa el promedio ponderado de los resultados posibles que se pueden obtener, cuando se dispone de muchos sistemas, todos en el mismo estado inicial, y se realiza la misma medición en cada uno de ellos. La ponderación que se le asigna a cada resultado se determina por la probabilidad de obtener dicho resultado [12, 6]. Es importante, discernir entre el valor esperado de un observable y las salidas que pueden resultar de una medición del observable. Esto significa que los resultados de la medición podrían diferir pero el promedio será lo presentado en la ecuación (1.3).

Ahora, se puede analizar una medición difusa en un sistema de dos partículas. En este sistema se desea realizar la medición del observable factorizable $A \otimes B$. Sin embargo, la medición es imperfecta, y con cierta probabilidad se realizará, en su lugar, la medición del observable $B \otimes A$. Como resultado, el valor esperado de la medición difusa se obtendrá mediante una combinación convexa de los valores esperados. Este se calculará sumando el valor esperado del observable $A \otimes B$, al cual se le asigna la probabilidad que se realice la medición correctamente, más el valor esperado de $B \otimes A$ ponderado por la probabilidad de medir este otro observable [4]

$$p\text{Tr}(\rho A \otimes B) + (1 - p)\text{Tr}(\rho B \otimes A) = \langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{F}_{2p}(\rho)}. \quad (2.6)$$

Es posible desarrollar la parte derecha de esta última ecuación con el fin de simplificar la expresión, aprovechando la linealidad y la propiedad cíclica de la traza

$$\begin{aligned} p\text{Tr}(\rho A \otimes B) + (1 - p)\text{Tr}(\rho B \otimes A) &= p\text{Tr}(\rho A \otimes B) + (1 - p)\text{Tr}(S\rho S^\dagger A \otimes B) \\ &= \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(\rho) A \otimes B). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Este desarrollo permite justificar la introducción del operador difuso explicado en la ecuación (2.3). En este escenario, el estado inicial sufre una transformación, donde con cierta probabilidad las partículas se intercambian. El operador difuso \mathcal{F}_{2p} registra esta evolución del estado inicial ρ . En consecuencia, si se tienen muchas copias del estado posterior $\rho' = \mathcal{F}_{2p}(\rho)$, entonces al realizar mediciones en cada una de ellas, el promedio

de las salidas estará dado por esta ecuación. La última expresión es análoga al lado derecho de la ecuación (1.3), con la diferencia que no se calcula con ρ sino con el operador $\mathcal{F}_{2p}(\rho)$.

El valor esperado de un observable en un sistema con más de dos partículas es análogo al anterior. En este sistema, la transformación es representada por el operador difuso general de la ecuación (2.5). En consecuencia, el valor esperado para un observable \mathcal{O} en una medición difusa es

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{F}(\rho)} = \sum_{\Pi_i \in \mathcal{S}} p_i \text{Tr}(\Pi_i \rho \Pi_i^\dagger \mathcal{O}) = \text{Tr}(\mathcal{F}(\rho) \mathcal{O}). \quad (2.8)$$

Ahora se propone un ejemplo para ilustrar la diferencia entre un valor esperado de un observable en una medición ideal y una medición difusa. Considere un sistema de dos partículas con el siguiente estado inicial

$$\rho = \left(\frac{1}{3} |0\rangle \langle 0| + \frac{2}{3} |1\rangle \langle 1| \right) \otimes (|+\rangle \langle +|) = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

en el que se quiere realizar la medición del observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$. En principio, el valor esperado para este observable se puede obtener de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma_z \otimes \sigma_x \rho) &= \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \right] = -1/3. \end{aligned}$$

Los valores propios del observable son ± 1 , como se ve las salidas de la medición no coinciden con el valor esperado. Puesto que, como ya se explicó este es el promedio ponderado de las salidas de la medición. En este estado ρ , la probabilidad de obtener la salida -1 es $\text{Tr}(\rho P_{0-}) + \text{Tr}(\rho P_{1+}) = 2/3$. Mientras que la probabilidad de obtener $+1$ es solamente $\text{Tr}(\rho P_{0+}) + \text{Tr}(\rho P_{1-}) = 1/3$. Donde, P_{0-}, P_{1+} son los operadores de proyección correspondientes al valor propio -1 y P_{0+}, P_{1-} , corresponden al valor propio $+1$. De lo anterior, es fácilmente comprobable el resultado obtenido con la traza calculada.

Sin embargo, en una medición difusa este valor esperado cambia puesto que el estado experimenta transformaciones aleatorias capturadas por el operador difuso. Para este caso el valor esperado estará dado por

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(\rho)\sigma_z \otimes \sigma_x) &= p\text{Tr}(\rho\sigma_z \otimes \sigma_x) + (1-p)\text{Tr}(\rho\sigma_x \otimes \sigma_z) \\
&= \frac{p}{3}\text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right] + \frac{(1-p)}{3}\text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= -\frac{p}{3}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Si $p < 1$, se obtiene un valor esperado distinto. Esto se debe a que las probabilidades de obtener cada una de las salidas son $\text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(\rho)P_{0+}) + \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(\rho)P_{1-}) = \frac{3-p}{6}$ y $\text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(\rho)P_{0-}) + \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(\rho)P_{1+}) = \frac{3+p}{6}$. Estas probabilidades ahora varían en función de la probabilidad p . En la siguiente figura puede apreciarse gráficamente estos resultados.

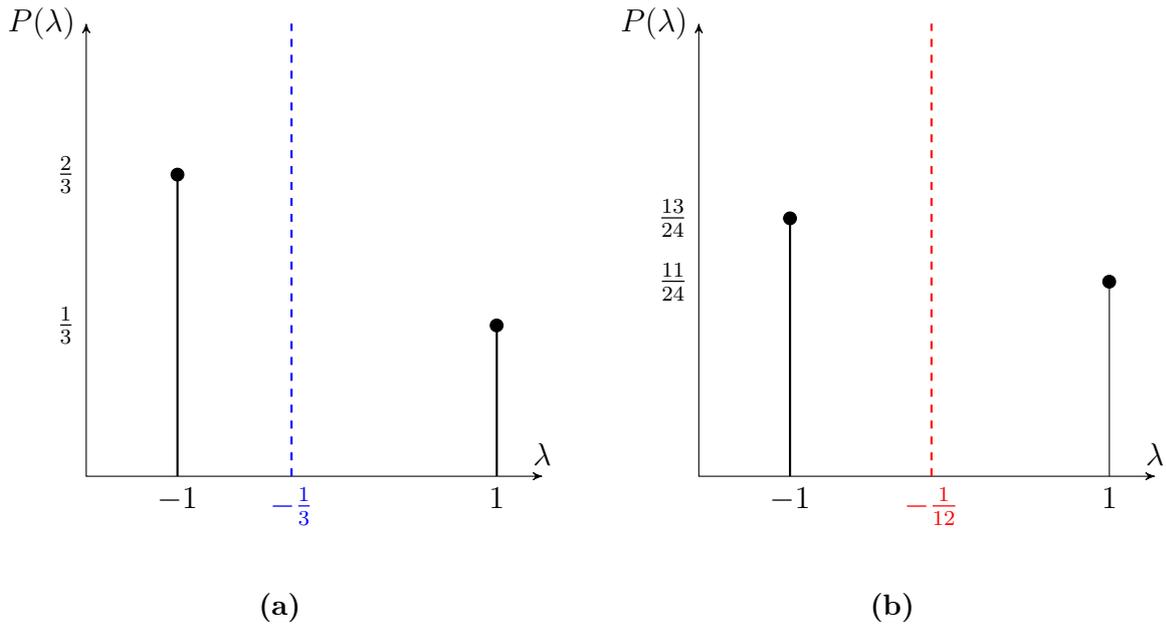


Fig. 2.1. Representación gráfica del mapeo de resultados al medir el observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$, con valores propios $\lambda = \pm 1$. **(a)** La imagen indica la probabilidad de obtener cada una de las salidas del estado inicial ρ . La línea azul punteada, indica el valor esperado del observable. **(b)** La gráfica indica la probabilidad de obtener cada una de las salidas en el estado $\mathcal{F}_{2p}(\rho)$. La línea roja punteada, indica el valor esperado del observable. En esta imagen se toma el valor de la probabilidad p de que las partículas se intercambien como $\frac{1}{4}$.

Fuente: elaboración propia.

Es importante destacar que el valor esperado es una medida de tendencia central

que proporciona una característica del mapeo que asocia las salidas de la medición, con la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellas. En otras palabras, el valor esperado permite caracterizar distribuciones de probabilidad. El valor esperado es útil porque la información capturada por un estado cuántico puede ser representada por una distribución de probabilidad. Aunque, el valor esperado solo proporciona una idea aproximada de dicha distribución, es una condición necesaria para identificarla.

En este trabajo se hará uso de distintas herramientas, en las que el valor esperado es indispensable. En primer lugar, el valor esperado servirá como punto de partida para implementar las medidas POVM, las cuales se detallarán en la siguiente sección. Además, se empleará para corroborar que distintas interpretaciones de los instrumentos cuánticos no describan mapeos de resultados distintos. En este contexto, el valor esperado, es una medida necesaria que se empleará como primera instancia para comprobar que dichos instrumentos sean equivalentes.

2.4. Medidas POVM y operadores de Kraus para mediciones difusas

En este apartado se revisitan las medidas POVM y los operadores de Kraus conjuntamente. Debido a que el formalismo de las mediciones ideales es insuficiente para describir mediciones imperfectas, en esta sección se introduce la forma en la que se implementan las medidas generalizadas, con el fin de explicar cómo se emplearán estas herramientas para asegurar una especificación completa de las mediciones difusas.

En una medición ideal en la que se desea medir el observable $A \otimes B$ sobre un estado inicial ρ , los operadores que proporcionan la descripción entera son los operadores de proyección del observable. En este caso, los operadores P_{a_j, b_k} son los que proporcionan tanto la probabilidad de obtener cada una de las salidas posibles, dada por $\text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho)$, siendo a_j y b_k los valores propios de los operadores A y B respectivamente. Además, determinarán el estado posterior a la medición, $P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k} / \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho)$. Además, utilizando estos operadores se puede calcular el valor esperado de esta medición como

$$\sum_{j,k} a_j b_k \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) = \text{Tr}(A \otimes B \rho) = \langle A \otimes B \rangle_\rho.$$

No obstante, este valor esperado no coincide en general con el valor observado de una medición difusa que se presenta en la ecuación (2.6). Por lo tanto, estos operadores por sí solos no son suficientes para especificar una medición difusa. En este tipo de mediciones, el sistema experimenta transformaciones aleatorias, como el intercambio potencial de partículas. Por consiguiente, al llevar a cabo la medición de un observable, la pro-

babilidad de obtener cada una de las salidas ahora está condicionada a la probabilidad p de identificar de manera incorrecta a las partículas, lo cual difiere de una medición ideal. En esta medición, la probabilidad de cada una de las salidas está capturada por la acción del operador difuso en el estado inicial $\text{Tr}(P_{a_j, b_k} \mathcal{F}(\rho)) \neq \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho)$, y a su vez el estado posterior no puede ser determinado por la simple proyección a los espacios propios del observable que se desea medir.

Por lo anterior, se recurre al formalismo de las medidas POVM. Estas medidas son útiles porque con ellas es posible realizar un mapeo que toma dos argumentos. El primero es una salida de medición $\alpha \in S$, donde S es el conjunto de todos los posibles resultados de la medición, y el segundo es un estado cuántico. El mapeo es de la forma

$$\begin{aligned} E : S \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\longrightarrow [0, 1] \\ E(\alpha, \rho) &= \text{Tr}(E_\alpha \rho), \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ denota el conjunto de operadores de densidad en algún espacio de Hilbert \mathcal{H} . Este proceso constituye el mapeo de resultados o la función de distribución de probabilidad necesaria para la especificación de las mediciones difusas.

Sin embargo, es necesario también proporcionar el estado posterior a la medición, lo cual no puede lograrse únicamente con una medida POVM. Por esta razón, para explicar el efecto de la medición difusa en un estado de entrada ρ , es conveniente definir un conjunto de operadores de Kraus $\{K_\alpha\}$ de manera que se cumpla la ecuación $E_\alpha = K_\alpha^\dagger K_\alpha$. Este proceso se conoce como la descomposición del operador de medición. Es importante destacar que la descomposición en operadores de Kraus no es única, ya que al multiplicar por la derecha una matriz unitaria U , UK_α también será un nuevo operador de Kraus que define la misma medida generalizada. Una vez introducidos los operadores de Kraus, el estado posterior a la medición POVM será

$$\rho'_\alpha = \frac{K_\alpha \rho K_\alpha^\dagger}{\text{Tr}(K_\alpha^\dagger K_\alpha \rho)}. \tag{2.11}$$

Para mediciones difusas, la medida que será útil para encontrar el conjunto de efectos $\{E_\alpha\}$, es el valor esperado junto con el operador difuso. En este apartado será más conveniente analizar inicialmente el ejemplo de dos partículas antes de extender la idea. Es posible utilizar el valor esperado calculado en la ecuación (2.6) y reescribirlo

de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
p\text{Tr}(\rho A \otimes B) + (1-p)\text{Tr}(\rho B \otimes A) &= \text{Tr}(\rho(pA \otimes B + (1-p)B \otimes A)) \\
&= \sum_{j,k} a_j b_k \text{Tr}(\rho(pP_{a_j, b_k} + (1-p)P_{b_k, a_j})) \\
&= \sum_{j,k} a_j b_k \text{Tr}(\rho \mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donde P_{b_k, a_j} son los operadores de proyección de $B \otimes A$. De esta última ecuación se puede obtener el conjunto de efectos $\{\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})\}$. Finalmente, los operadores de Kraus que servirán para proporcionar el estado posterior a la medición se obtendrán más adelante al realizar alguna descomposición apropiada de estos operadores. Esta idea será generalizada y analizada para sistemas con más partículas en el siguiente capítulo.

2.5. Instrumentos cuánticos

Un *instrumento cuántico* es una representación matemática que integra los conceptos de medición y operación cuántica, registrando tanto la información clásica como la cuántica. Esta herramienta es útil para aproximarse a describir completamente las mediciones de forma resumida y sin necesidad de considerar mediciones selectivas, siendo especialmente útil para trabajar con mediciones difusas. En esta sección se detalla algunas de sus características más importantes en la especificación de las mediciones difusas, además del cálculo para obtener su valor esperado. Adicionalmente, se presentan tres alternativas de instrumentos cuánticos que representan distintas interpretaciones para la especificación entera de mediciones difusas.

Un instrumento cuántico se define de la siguiente manera [1].

Definición 2.2 (Instrumento Cuántico). Es un mapeo que toma un operador de entrada y tiene como salida un ensamble que correlaciona un sistema clásico, que contiene la salida de la medición y un sistema cuántico, que contiene el estado posterior a la medición. Sea $\{|\alpha\rangle\}$ la base ortonormal para un espacio de Hilbert \mathcal{H}_α . Además, sea $\{\mathcal{E}_\alpha(\rho)\}$ el conjunto de mapeos completamente positivos que preservan la traza. El instrumento cuántico que actúa sobre un operador de densidad $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es el siguiente canal cuántico:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\text{cl}} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\text{qu}}, \\
\mathcal{I}(\rho) &= \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \mathcal{E}_\alpha(\rho).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

El sistema clásico, también llamado «ancilla», es una colección de operadores de proyección que representan al conjunto de salidas de la medición. Conforme a la definición, se puede apreciar que el sistema clásico funcionará como un apuntador que registra un resultado α e indica que operador actúa en el estado inicial. Por su parte, los operadores $\mathcal{E}_\alpha(\rho)$ serán usados para describir el estado posterior a la medición condicionados por la salida clásica de la medición α .

Esta nueva herramienta vincula los estados directamente a los resultados de la medición. Por esta razón, ya no es necesario considerar mediciones selectivas, explícitamente. Es importante destacar que, en principio, se puede obtener el mapeo de resultados trazando parcialmente sobre el sistema cuántico. De esta manera, se obtiene el operador que modela la salida de la medición y su respectiva probabilidad

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathrm{qu}}(\mathcal{I}(\rho)) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{qu}}\left(\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \mathcal{E}_\alpha(\rho)\right) \\ &= \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| \mathrm{Tr}(\mathcal{E}_\alpha(\rho)),\end{aligned}\tag{2.14}$$

siendo $\mathrm{Tr}_{\mathrm{qu}}(\mathcal{I}(\rho))$ el operador de densidad reducido para el sistema clásico. Por otro lado, con el operador de densidad reducido para el sistema cuántico $\mathrm{Tr}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{I}(\rho))$, se obtienen las operaciones completamente positivas que preservan la traza para mediciones no selectivas

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{I}(\rho)) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{cl}}\left(\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \mathcal{E}_\alpha(\rho)\right) \\ &= \sum_{\alpha} \mathrm{Tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|) \mathcal{E}_\alpha(\rho).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Teniendo en cuenta esto, se puede apreciar que la utilidad de los instrumentos cuánticos radica en que una medición difusa se puede describir enteramente de forma sucinta.

Debido a que con los instrumentos cuánticos se puede obtener un mapeo de resultados, vale la pena considerar una medida de tendencia central que caracterice el mapeo que se obtiene con ellos. Esta medida es obviamente el valor esperado, sin embargo calcularlo para un instrumento cuántico es un poco más general que la ecuación (2.8), puesto que el instrumento cuántico es un ensamble de sistemas.

El valor esperado para un instrumento cuántico se calcula de la siguiente forma

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{I}(\rho)} = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\rho)(\mathcal{O} \otimes \mathbf{1})]\tag{2.16}$$

La razón de calcularlo de esta manera puede entenderse al desarrollar la expresión de la derecha, utilizando la linealidad de la traza y algunas propiedades del producto

tensorial¹

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\mathcal{I}(\rho)(\mathcal{O} \otimes \mathbf{1})] &= \text{Tr} \left[\left(\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \mathcal{E}_{\alpha}(\rho) \right) (\mathcal{O} \otimes \mathbf{1}) \right] \\
&= \text{Tr} \left[\left(\sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}_{\alpha}(\rho) \right) \right] \\
&= \sum_{\alpha} \text{Tr} [|\alpha\rangle\langle\alpha| \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}_{\alpha}(\rho)] \\
&= \sum_{\alpha} \text{Tr} [|\alpha\rangle\langle\alpha| \mathcal{O}] \text{Tr} [\mathcal{E}_{\alpha}(\rho)].
\end{aligned}$$

Observe que $\text{Tr}[\mathcal{E}_{\alpha}(\rho)]$ es la probabilidad que el proceso representado por \mathcal{E}_{α} ocurra, condicionado a la salida dictada por el sistema clásico. Además, $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ es un operador de proyección ortonormal, por consiguiente, con $\text{Tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha| \mathcal{O})$ se obtiene el posible resultado de observar \mathcal{O} . Como se explicó en la sección 2.3.2, el valor esperado es el promedio ponderado de las salidas. En consecuencia, la última igualdad es un promedio ponderado de las posibles salidas de la medición, donde la probabilidad es el peso asignado a cada una de las salidas.

Una de las ventajas de los instrumentos cuánticos, para mediciones difusas concretamente, es que permiten analizar las mediciones desde algunas perspectivas que se presentan a continuación, para un sistema de dos partículas y que se seguirán analizando en el siguiente capítulo.

La primera de las alternativas es pensar que debido a un ruido en el sistema, las partículas podrían experimentar un intercambio y por ello se realiza una medición borrosa. El operador difuso captura esta transformación del estado inicial ρ . Después de medir un observable $A \otimes B$ en el sistema, se obtiene un resultado que puede ser cualquiera de los valores propios $a_j b_k$. Para describir este estado posterior, se aplican los operadores de proyección del observable al estado difuso, condicionados a la salida obtenida. Es por ello que el instrumento cuántico que proporcionará una descripción completa de la medición difusa es

$$\mathcal{I}_1(\rho) = \sum_{a_j, b_k} P_{a_j, b_k} \otimes P_{a_j, b_k} \mathcal{F}_{2p}(\rho) P_{a_j, b_k}^{\dagger}, \quad (2.17)$$

donde P_{a_j, b_k} son los operadores de proyección del observable.

¹Si C, D, F y G son matrices de manera que se puedan formar los productos CF y DG , entonces

- $(C \otimes D)(F \otimes G) = CF \otimes DG$
- $\text{Tr}(C \otimes D) = \text{Tr}(C)\text{Tr}(D)$

La segunda alternativa tiene una interpretación distinta a la anterior. En este caso se realiza una medición ideal en el sistema cuántico, pero después por alguna imperfección en el dispositivo detector ocurre una confusión de los resultados en el sistema clásico. El detalle consiste en qué después de realizar la medición, es necesario realizar la lectura de los datos en el sistema clásico. Por esta razón, el operador difuso, se le aplica al sistema ancilla para representar la confusión en los resultados. El estado posterior a la medición está representado por la proyección de estado inicial ρ a los posibles espacios propios del observable. El instrumento cuántico para esta segunda perspectiva es

$$\mathcal{I}_2(\rho) = \sum_i \mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k}) \otimes P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k}^\dagger \quad (2.18)$$

Para la tercera alternativa se considera una interpretación de la medición difusa diferente a las dos anteriores. En esta alternativa se asume que con una probabilidad q se realiza una medida proyectiva ideal, pero con una probabilidad $(1 - q)$ se realiza una medición en la que no es posible distinguir entre los posibles estados.

Sea L el conjunto de pares ordenados (i, l) de índices de valores propios tales que el primer índice indica un valor propio del operador A y el segundo índice indica algún valor propio del operador B . Sus operadores cumplen con la característica $P_{a_i b_l} \neq P_{b_l, a_i}$ además de ser ortogonales. Ahora, se introduce un nuevo operador de proyección dado por,

$$P_{a_i, b_l}^L = |a_i b_l\rangle \langle a_i b_l| + |b_l a_i\rangle \langle b_l a_i| = P_{a_i, b_l} + P_{b_l, a_i}.$$

El operador P_{a_i, b_l}^L se interpreta como la falta de conocimiento si el estado se encuentra en el espacios de los operadores P_{a_i, b_l} o en P_{b_l, a_i} .

De igual forma, sea K el conjunto de pares ordenados (j, k) de los índices de valores propios tales que su primer índice indica un valor propio del operador A y el segundo índice indica algún valor propio del operador B . El operador de proyección asociado a los valores propios indexados por los elementos del conjunto K es tal que

$$P_{a_j, b_k}^K = |a_j b_k\rangle \langle a_j b_k| = |b_k a_j\rangle \langle b_k a_j|.$$

Luego, con una probabilidad q se tiene que la descripción sería

$$\sum_{m, n} P_{a_m, b_n} \otimes P_{a_m, b_n} \rho P_{a_m, b_n},$$

y con una probabilidad $(1 - q)$ es

$$\sum_{(j, k) \in K} P_{a_j, b_k} \otimes P_{a_j, b_k}^K \rho P_{a_j, b_k}^K + \sum_{(i, l) \in L} P_{a_i b_l} \otimes \frac{1}{2} P_{a_i, b_l}^L \rho P_{a_i, b_l}^L.$$

Entonces, este instrumento es la suma convexa de las posibilidades de realizar una medición ideal o la posibilidad de obtener una medición en la que no es posible diferenciar en qué estado se encuentra el sistema después de la medición

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3(\rho) = & q \sum_{m,n} P_{a_m,b_n} \otimes P_{a_m,b_n} \rho P_{a_m,b_n} \\ & + (1-q) \left[\sum_{(j,k) \in K} P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k}^K \rho P_{a_j,b_k}^K + \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \otimes \frac{1}{2} P_{a_i,b_l}^L \rho P_{a_i,b_l}^L \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

El factor $\frac{1}{2}$ en la última suma es la probabilidad con la que el sistema clásico indica que el sistema está en P_{a_i,b_l} o en P_{b_l,a_i} .

3. RESULTADOS

3.1. Introducción

En los capítulos anteriores se estableció un base conceptual para realiza un análisis de las mediciones difusas. En este capítulo se utilizará este marco para realizar la descripción completa de las mediciones difusas en sistemas cuánticos. Asimismo se presentan los resultado más relevantes que se obtuvieron al trabajar con las distintas herramientas presentadas anteriormente.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la sección 3.2 se inicia la discusión de los resultados principales que se obtuvieron al analizar el sistema más simple, el sistema de dos partículas. En esta sección se presentan tanto las medidas POVM como los operadores de Kraus que proporcionan una correcta descripción de la medición difusa. De igual manera, se presentan de manera intuitiva y más detallada las interpretaciones de los instrumentos cuánticos, así como las condiciones en las que éstos son equivalentes. Finalmente se expone un ejemplo específico que recopila todos estos elementos para ilustrar de mejor manera la base teórica trabajada. En la sección 3.3 se examina y aborda la generalización de todas las herramientas trabajadas en la sección 3.2, para sistemas de N partículas.

3.2. Mediciones difusas en sistemas de dos partículas

Las mediciones difusas solo cobran sentido en un sistema compuesto por dos o más partículas. Con fines explicativos en el capítulo anterior se comenzó a analizar una medición difusa en el sistema más simple, el cual está conformado únicamente por dos partículas. Antes de ampliar el análisis a sistemas más complejos, con el propósito de acabar de clarificar e ilustrar de manera intuitiva el concepto de medición difusa, en esta sección se presentan los resultados principales y algunos ejemplos obtenidos al trabajar con un sistema que tiene un estado inicial $\rho \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ y un observable de la forma $A \otimes B$.

En la siguiente imagen se ilustra un esquema de medición del observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$ en la que debido a ruido del entorno, existe una posibilidad de realizar la medición errónea y en su lugar medir el observable $\sigma_x \otimes \sigma_z$. La salida clásica de los observables es (1) para el observable σ_z y (-1) para el observable σ_x . Sin embargo su valor esperado será la suma ponderada de los valores esperados de realizar las dos mediciones que son verosímiles, es decir $p\text{Tr}(\sigma_z \otimes \sigma_x \rho) + (1 - p)\text{Tr}(\sigma_x \otimes \sigma_z \rho)$.

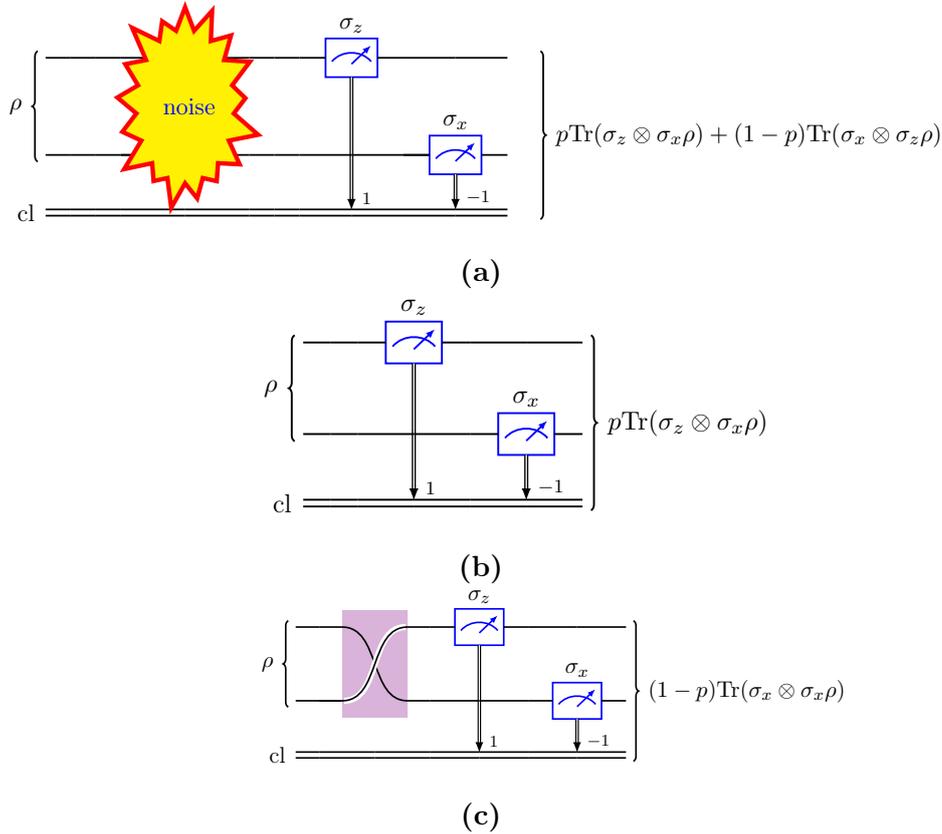


Fig. 3.1. (a) En la primera imagen se ilustran un estado inicial ρ , sin embargo el entorno no es ideal y es posible que ocurra una identificación errónea, en las que las salidas clásicas registradas para los observables σ_z y σ_x fueron 1 y -1 respectivamente. (b) En esta imagen se ilustra que con una probabilidad p la identificación del sistema sea correcta y se realice la medición del observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$. (c) La imagen muestra que debido al ruido del entorno, las partículas experimentan un intercambio y con una probabilidad $(1 - p)$ se realiza la medición del observable $\sigma_x \otimes \sigma_z$

Fuente: elaboración propia

3.2.1. POVM y operadores de Kraus para mediciones difusas en sistemas de dos partículas

A continuación se especifica la forma de utilizar las medidas generalizadas conjuntamente con los operadores de Kraus para aproximarse a describir enteramente estas mediciones. En la ecuación (2.12) se encontró intuitivamente que los efectos para una

medición difusa, son $\{\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})\}$. Estos efectos proporcionan el mapeo de probabilidades

$$E(a_j b_k, \rho) = \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})\rho). \quad (3.1)$$

Sin embargo para obtener el estado posterior es a la medición es necesario descomponer estos efectos. Debido a que los operadores P_{a_j, b_k} y P_{b_k, a_j} son positivos, entonces $\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})$ es positivo y por tanto se puede considerar los siguientes operadores

$$K_{a_j, b_k} = \sqrt{\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})}.$$

Luego de introducir los operadores de Kraus el estado de la medición es posterior a la medición POVM será

$$\begin{aligned} \rho'_{a_j, b_k} &= \frac{K_{a_j, b_k} \rho K_{a_j, b_k}^\dagger}{\text{Tr}(K_{a_j, b_k}^\dagger K_{a_j, b_k} \rho)} \\ &= \frac{\sqrt{\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})} \rho \sqrt{\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})}}{\text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k})\rho)} \\ &= \frac{\sqrt{pP_{a_j, b_k} + (1-p)SP_{a_j, b_k}S^\dagger} \rho \sqrt{pP_{a_j, b_k} + (1-p)SP_{a_j, b_k}S^\dagger}}{\text{Tr}((pP_{a_j, b_k} + (1-p)SP_{a_j, b_k}S^\dagger)\rho)} \\ &= \frac{\sqrt{pP_{a_j, b_k} + (1-p)P_{b_k, a_j}} \rho \sqrt{pP_{a_j, b_k} + (1-p)P_{b_k, a_j}}}{\text{Tr}((pP_{a_j, b_k} + (1-p)P_{b_k, a_j})\rho)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

La descomposición en operadores de Kraus no es única. No obstante, el conjunto de operadores $\{K_{a_j, b_k}\}$ es adecuado para ofrecer una especificación detallada de las mediciones difusas, puesto que con ellos se puede obtener tanto el mapeo de probabilidades $\text{Tr}(K_{a_j, b_k} K_{a_j, b_k}^\dagger \rho)$, como el estado posterior a la medición ρ'_{a_j, b_k} .

3.2.2. Instrumentos cuánticos para dos partículas

En este apartado se busca hacer un análisis sobre las formulaciones de las tres alternativas de los instrumentos presentadas en la sección 2.5. En éste, se obtiene el sistema clásico y cuántico para comparar las descripciones que proporcionan. Para una plena especificación de las mediciones difusas, las interpretaciones son intuitivamente equivalentes. Sin embargo, es indispensable verificar que las dos proporcionen el mismo mapeo de resultados. En principio, una condición necesaria para corroborar que tengan la misma distribución de probabilidad es que el valor esperado de los instrumentos genere el mismo resultado que el de la ecuación (2.6).

Primera alternativa de instrumento cuántico

El primer instrumento consiste en considerar que debido a un error en el sistema cuántico, las partículas posiblemente experimenten un intercambio. Al medir un ob-

servable $A \otimes B$ en el sistema representado por el estado ρ , se obtiene un resultado en el sistema clásico que puede ser cualquiera de los valores propios de este observable. Luego, con cierta probabilidad el estado posterior será la proyección del estado inicial del sistema al estado propio correspondiente a la salida proporcionada. Sin embargo también es posible que el estado inicial sufra una transformación, y sea este cambio del sistema el que se proyecte en el espacio propio correspondiente a la salida del observable $A \otimes B$.

En la imagen 3.2 se puede apreciar a lo que esto se refiere gráficamente. En la figura, con una probabilidad p se realiza una medición ideal en la que se mide el observable A en la primera partícula y el observable B en la segunda partícula. En esta medición ideal el estado posterior será la proyección de $\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho_{1,2})$ al espacio propio correspondiente a la salida proporcionada en el sistema clásico a_j , conjuntamente con la proyección de $\rho_2 = \text{Tr}_1(\rho_{1,2})$ al espacio propio de las salida b_k . No obstante, la figura también muestra la parte borrosa de la medición en la que con una probabilidad $1 - p$, la medición del observable B se realiza en el primer sistema y la medición del observable A se realiza en el segundo sistema, en consecuencia ρ_2 se proyecta al espacio propio que corresponde a la salida a_j y ρ_1 se proyecta al espacio de la salida b_k .

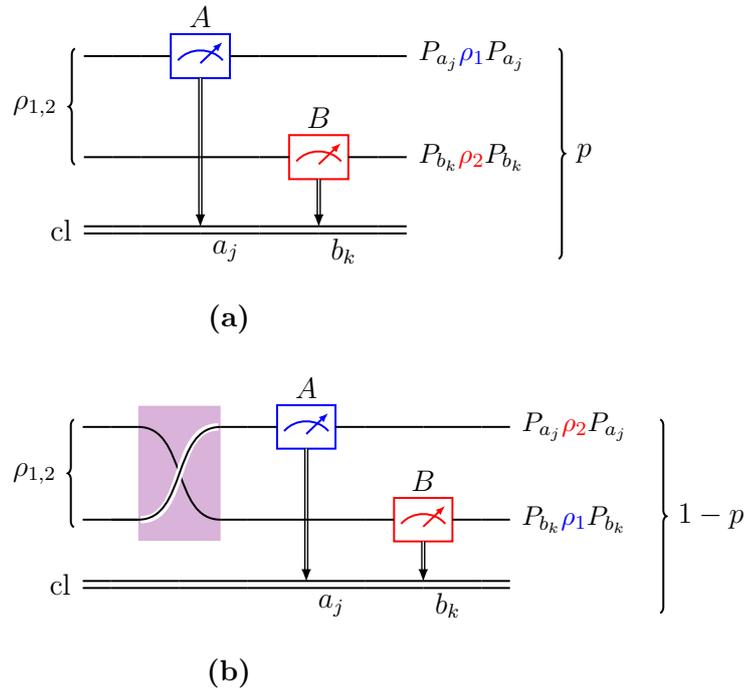


Fig. 3.2. (a) Con una probabilidad p se realiza una medición ideal del observable $A \otimes B$, con un estado posterior dado por $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$, cuando la salida indicada es $a_j b_k$. (b) Con probabilidad $1 - p$ ocurre un intercambio de las partículas y estado posterior correspondiente a la salida $a_j b_k$ será $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$.

Fuente: elaboración propia

Para un sistema de dos partículas el instrumento dado en la ecuación (2.17), puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(\rho) &= \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k} \mathcal{F}_{2p}(\rho) P_{a_j,b_k} \\
&= \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} \otimes [p P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + (1-p) P_{a_j,b_k} S \rho S^\dagger P_{a_j,b_k}] \\
&= \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k} [p \langle a_j b_k | \rho | a_j b_k \rangle + (1-p) \langle b_k a_j | \rho | b_k a_j \rangle],
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Es importante notar que el sistema clásico puede diferir del estado inicial, pero indica correctamente el estado posterior a la medición en todos los casos. Además, para una medida no selectiva el mapeo de resultados se obtiene simplemente aplicando una traza parcial sobre el sistema cuántico

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\text{qu}}(\mathcal{I}_1(\rho)) &= \sum_{j,k} \text{Tr}_{\text{qu}}(P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k} \mathcal{F}_{2p}(\rho) P_{a_j,b_k}) \\
&= \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} \text{Tr}(p P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + (1-p) P_{a_j,b_k} S \rho S^\dagger P_{a_j,b_k}) \\
&= \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} [p \langle a_j b_k | \rho | a_j b_k \rangle + (1-p) \langle b_k a_j | \rho | b_k a_j \rangle].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Para obtener el mapa de resultados para una medición selectiva simplemente se multiplica el operador de proyección correspondiente a la salida obtenida al resultado anterior, y se calcula la traza

$$\begin{aligned}
E(a_i, b_l, \rho) &= \text{Tr} \left(P_{a_i,b_l} \left[\sum_{j,k} \text{Tr}_{\text{qu}}(P_{a_i,b_l} \otimes P_{a_i,b_l} \mathcal{F}_{2p}(\rho) P_{a_j,b_k}) \right] \right) \\
&= \text{Tr} \left(\sum_{j,k} P_{a_i,b_l} P_{a_j,b_k} [p \langle a_j b_k | \rho | a_j b_k \rangle + (1-p) \langle b_k a_j | \rho | b_k a_j \rangle] \right) \\
&= \sum_{j,k} \text{Tr}(P_{a_i,b_l} P_{a_i,b_l}) [p \langle a_j b_k | \rho | a_j b_k \rangle + (1-p) \langle b_k a_j | \rho | b_k a_j \rangle] \\
&= \sum_{j,k} \delta_{j,k}^{i,l} [p \langle a_j b_k | \rho | a_j b_k \rangle + (1-p) \langle b_k a_j | \rho | b_k a_j \rangle] \\
&= p \langle a_i b_l | \rho | a_i b_l \rangle + (1-p) \langle b_l a_i | \rho | b_l a_i \rangle.
\end{aligned}$$

Es importante notar que este mapeo de probabilidades resultante es exactamente el mismo al de la ecuación (3.1)

Por otro lado, para obtener el estado posterior luego de haber realizado la medi-

ción, se debe realizar la traza parcial sobre el sistema clásico de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathrm{cl}}(\mathcal{I}_1(\rho)) &= \sum_{j,k} \mathrm{Tr}_{\mathrm{cl}}(P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k} \mathcal{F}_{2\mathrm{p}}(\rho) P_{a_j,b_k}) \\ &= \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} \mathcal{F}_{2\mathrm{p}}(\rho) P_{a_j,b_k}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Para una medida selectiva el estado posterior estará dado por

$$\mathcal{E}_{a_j,b_k}(\rho) = \frac{P_{a_j,b_k} \mathcal{F}_{2\mathrm{p}}(\rho) P_{a_j,b_k}}{\mathrm{Tr}(P_{a_j,b_k} \mathcal{F}_{2\mathrm{p}}(\rho))}.$$

Por otra parte, el valor esperado del primer instrumento se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_1} &= \mathrm{Tr}([(A \otimes B) \otimes \mathbb{1}] \mathcal{I}_1) \\ &= \mathrm{Tr} \left([(A \otimes B) \otimes \mathbb{1}] \sum_{j,k} P_{a_j,b_k} \otimes (p P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + (1-p) P_{a_j,b_k} S \rho S P_{a_j,b_k}) \right) \\ &= \sum_{j,k} \mathrm{Tr}((A \otimes B) P_{a_j,b_k}) \mathrm{Tr}((p P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + (1-p) P_{a_j,b_k} S \rho S P_{a_j,b_k})) \\ &= \sum_{j,k} \mathrm{Tr} \left(\sum_{il} a_{il} P_{a_i,b_l} P_{a_j,b_k} \right) \mathrm{Tr}((p P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + (1-p) P_{a_j,b_k} S \rho S P_{a_j,b_k})) \\ &= \sum_{j,k} p \mathrm{Tr}(a_j b_k P_{a_j,b_k}) \mathrm{Tr}(P_{a_j,b_k} \rho) + (1-p) \mathrm{Tr}(a_j b_k P_{a_j,b_k}) \mathrm{Tr}(P_{a_j,b_k} S \rho S P_{a_j,b_k}) \\ &= \sum_{j,k} (a_j b_k) p \mathrm{Tr}(P_{a_j,b_k} \rho) + (a_j b_k) (1-p) \mathrm{Tr}(P_{a_j,b_k} S \rho S P_{a_j,b_k}),\end{aligned}$$

finalmente el valor esperados del instrumento es

$$\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_1} = p \mathrm{Tr}(A \otimes B \rho) + (1-p) \mathrm{Tr}(B \otimes A \rho).\tag{3.6}$$

Claramente con este instrumento se obtiene el valor esperado correcto para describir una medición difusa.

Segunda alternativa de instrumento cuántico

Tras haber analizado el primer instrumento, el siguiente escenario involucra un error en la interpretación de los resultados. El segundo instrumento implica que, debido a un fallo en el sistema clásico, la lectura de las salidas sea incorrecta. Al medir un observable $A \otimes B$ en el sistema, con cierta probabilidad el estado posterior será la proyección del estado inicial del sistema al estado propio correspondiente a las salida proporcionada. No obstante, existe la posibilidad que el estado inicial sea proyecta-

do a algún estado propio del observable pero al leer las salidas de la medición estas correspondan a salidas del observable $B \otimes A$.

En la figura 3.3 se ilustra las dos posibilidades mencionadas anteriormente. En la primera de ellas se realiza una medición proyectiva ideal, donde se mide el observable A en el primer subsistema y el observable B en el segundo, con probabilidad p . El estado posterior a la medición será el estado $\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho_{1,2})$ proyectándose al espacio propio de la salida a_j , junto con la proyección del estado $\rho_2 = \text{Tr}_1(\rho_{1,2})$ al espacio propio de b_k . Adicionalmente, la figura muestra la parte imperfecta de la medición en la que con una probabilidad $1 - p$, se realiza la medición de A en la primera partícula y la medición de B en la segunda, sin embargo la salida de la medición para el primer subsistema es b_k , un resultado correspondiente al observable B , y la salida que se ofrece en la medición del segundo subsistema es un valor propio de A , a_j . Aunque los estados posteriores a la medición sean correctos, las salidas clásicas están intercambiadas.

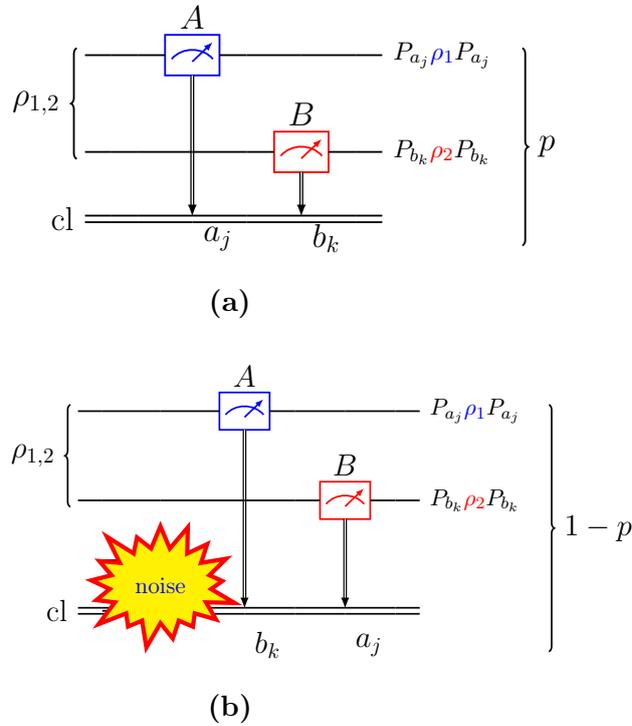


Fig. 3.3. (a) Con una probabilidad p , se mide el observable $A \otimes B$ y el resultado es una medición ideal, con un estado posterior $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$ con la salida clásica indicándolo correctamente. (b) Con una probabilidad $1 - p$, ocurre un error en los resultados clásicos de la medición y en su lugar, las salidas se intercambian aunque el resultado en el sistema cuántico indique ser el correcto $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$.

Fuente: elaboración propia

El segundo instrumento para un sistema de dos partículas es

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(\rho) &= \sum_{j,k} \mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k}) \otimes P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k} \\
&= \sum_{j,k} [pP_{a_j, b_k} + (1-p)SP_{a_j, b_k}S^\dagger] \otimes P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k} \\
&= \sum_{j,k} p|a_j b_k\rangle\langle a_j b_k| \otimes P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k} + (1-p)|b_k a_j\rangle\langle b_k a_j| \otimes P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En este caso es posible notar que el sistema clásico no siempre coincide con el estado posterior. La salida de la medición puede indicar que es $|b_k a_j\rangle$, y el estado posterior no será éste. De la misma manera al instrumento anterior, se desarrolla la traza parcial sobre el sistema cuántico del instrumento para obtener el mapeo de resultado para una medición no selectiva

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\text{qu}}(\mathcal{I}_2(\rho)) &= \sum_{j,k} \text{Tr}_{\text{qu}}(\mathcal{F}_{2p}(P_{a_j, b_k}) \otimes P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k}) \\
&= \sum_{j,k} (pP_{a_j, b_k} + (1-p)SP_{a_j, b_k}S^\dagger) \langle a_j, b_k | \rho | a_j, b_k \rangle.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Adicionalmente, el valor esperado de este instrumento, se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_2} &= \text{Tr}([(A \otimes B) \otimes \mathbb{1}] \mathcal{I}_2) \\
&= \text{Tr} \left([(A \otimes B) \otimes \mathbb{1}] \sum_{j,k} \mathcal{F}(P_{a_j, b_k}) \otimes P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k} \right) \\
&= \sum_{j,k} p \text{Tr}((A \otimes B) P_{a_j, b_k}) \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k}) \\
&\quad + (1-p) \text{Tr}((A \otimes B) S P_{a_j, b_k} S) \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho P_{a_j, b_k}) \\
&= \sum_{j,k} [a_j b_k p \text{Tr}(P_{a_j, b_k}) + (1-p) \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k})] \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho),
\end{aligned}$$

simplificando se obtiene que

$$\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_2} = p \text{Tr}(A \otimes B \rho) + \sum_{j,k} (1-p) \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho). \tag{3.9}$$

Nótese que el término remarcado en azul difumina la parte de los resultados. Sin embargo, en general esta ecuación no es igual a la ecuación (2.6), lo cual se discutirá más adelante, en la sección 3.2.3.

Tercera alternativa

Esta última interpretación de la medición difusa incluye la posibilidad de no saber en que estado se encuentra el sistema luego de realizar la medición. En este instrumento se representa la posibilidad que al medirse el observable $A \otimes B$ se realice con cierta probabilidad una medición proyectiva ideal. Pero, también es verosímil que se realice una medición en la que no sea posible saber en que espacio se haya proyectado el sistema. Es igual de posible que se haya proyectado sobre un espacio propio del observable $A \otimes B$ como es posible que se haya proyectado en un espacio propio de $B \otimes A$, condicionados ambos espacios por las salidas clásicas.

En la figura 3.4 se muestra esta tercera interpretación. Primero, se ilustra de la posibilidad de realizar una medición proyectiva ideal del observable $A \otimes B$ con una probabilidad q , al igual que en los dos casos anteriores. Sin embargo con una probabilidad $1 - q$, se realiza una medición en la que no es posible saber si la partículas se intercambian o no, por esta razón el estado será proyectado al espacio dado por la superposición de los operadores de proyección de $A \otimes B$ y $B \otimes A$ correspondientes a la salidas a_j y b_k , las cuales son indicadas por el sistema clásico, es decir los operadores P_{a_j, b_k} y P_{b_k, a_j} respectivamente.

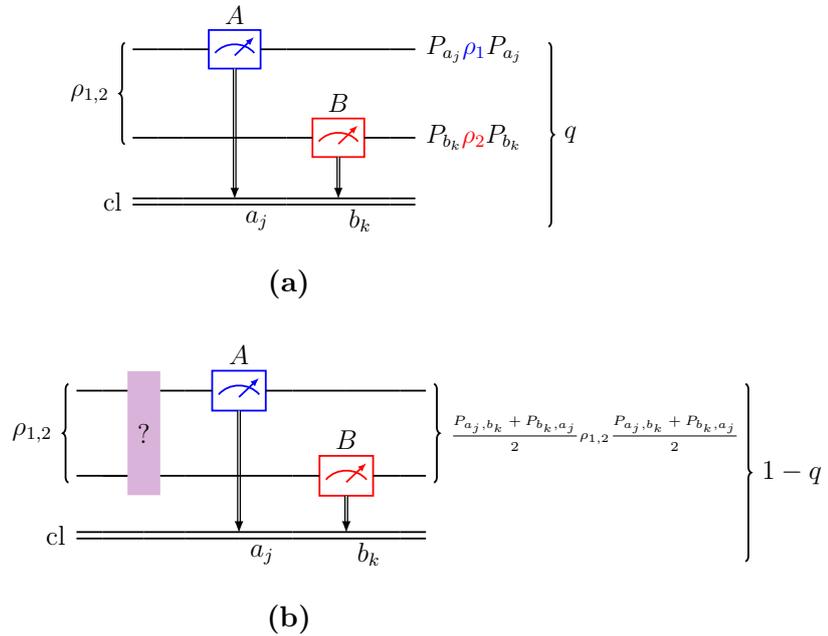


Fig. 3.4. (a) Con una probabilidad q se realiza una medición ideal del observable $A \otimes B$, con un estado posterior dado por $P_{a_j, b_k} \rho_{1,2} P_{a_j, b_k}$, cuando la salida indicada es $a_j b_k$. (b) Con probabilidad $1 - q$ ocurre un error y no se conoce con certeza el estado posterior correspondiente a la salida $a_j b_k$, estará dado por una superposición de dos estados $\frac{P_{a_j, b_k} + P_{b_k, a_j}}{2} \rho_{1,2} \frac{P_{a_j, b_k} + P_{b_k, a_j}}{2}$.

Fuente: elaboración propia

El tercer instrumento cuántico puede desarrollarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3(\rho) &= q \sum_{m,n} P_{a_m,b_n} \otimes P_{a_m,b_n} \rho P_{a_m,b_n} \\
&+ (1-q) \left[\sum_{(j,k) \in K} P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k}^K \rho P_{a_j,b_k}^K + \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \otimes \frac{1}{2} P_{a_i,b_l}^L \rho P_{a_i,b_l}^L \right] \\
&= \sum_{(j,k) \in K} P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + q \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \otimes P_{a_i,b_l} \rho P_{a_i,b_l} \\
&(1-q) \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \otimes \frac{1}{2} P_{a_i,b_l}^L \rho P_{a_i,b_l}^L \\
&= \sum_{(j,k) \in K} P_{a_j,b_k} \otimes P_{a_j,b_k} \rho P_{a_j,b_k} + q \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \otimes P_{a_i,b_l} \rho P_{a_i,b_l} \\
&(1-q) \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \otimes \frac{1}{2} [P_{a_i,b_l} + P_{b_l,a_i}] \rho [P_{a_i,b_l} + P_{b_l,a_i}].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En este instrumento se asume que los operadores de proyección de los observables $A \otimes B$ y $B \otimes A$ tales que comparten el mismo valor propio, son ortogonales. En este caso, la salida clásica no difiere del estado inicial pero existe la posibilidad que se desconozca si la salida clásica coincide o no con el estado posterior.

Para este instrumento, se obtiene el mapeo de resultados, de igual forma que los dos anteriores, realizando la traza parcial sobre el sistema cuántico como sigue

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\text{qu}}(\mathcal{I}_3(\rho)) &= \sum_{(j,k) \in K} P_{a_j,b_k} \text{Tr}(P_{a_j,b_k} \rho) + q \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \text{Tr}(P_{a_i,b_l} \rho) \\
&+ \frac{(1-q)}{2} \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \text{Tr}([P_{a_i,b_l} + P_{b_l,a_i}] \rho) \\
&= \sum_{(j,k) \in K} P_{a_j,b_k} \langle a_i b_l | \rho | a_i b_l \rangle + q \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \langle a_i b_l | \rho | a_i b_l \rangle \\
&+ \frac{(1-q)}{2} \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} [\langle a_i b_l | \rho | a_i b_l \rangle + \langle b_l a_i | \rho | b_l a_i \rangle]. \\
&= \sum_{(j,k) \in K} P_{a_j,b_k} \langle a_i b_l | \rho | a_i b_l \rangle \\
&+ \frac{(1+q)}{2} \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \langle a_i b_l | \rho | a_i b_l \rangle + \frac{(1-q)}{2} \sum_{(i,l) \in L} P_{a_i,b_l} \langle b_l a_i | \rho | b_l a_i \rangle.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Nótese que el último término de la primera igualdad se puede simplificar de esta manera puesto que se supone que los operadores P_{a_j,b_k}^L son de proyección.

Asimismo, es posible calcular el valor esperado de este nuevo instrumento

$$\begin{aligned}
\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_3} &= \text{Tr}([(A \otimes B) \otimes \mathbf{1}] \mathcal{I}_3) \\
&= \sum_{(j,k) \in K} \text{Tr}((A \otimes B) P_{a_j, b_k}) \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) + q \sum_{(i,l) \in L} \text{Tr}((A \otimes B) P_{a_i, b_l}) \text{Tr}(P_{a_i, b_l} \rho) \\
&\quad + \frac{(1-q)}{2} \sum_{(i,l) \in L} \text{Tr}((A \otimes B) P_{a_i, b_l}) \text{Tr}([P_{a_i, b_l} + P_{b_l, a_i}] \rho) \\
&= \sum_{(j,k) \in K} a_j b_k \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) + q \sum_{(i,l) \in L} a_i b_l \text{Tr}(P_{a_i, b_l} \rho) \\
&\quad + \frac{(1-q)}{2} \sum_{(i,l) \in L} a_i b_l \text{Tr}([P_{a_i, b_l} + P_{b_l, a_i}] \rho) \\
&= \sum_{(j,k) \in K} a_j b_k \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) \\
&\quad + \frac{(1+q)}{2} \sum_{(i,l) \in L} a_i b_l \text{Tr}(P_{a_i, b_l} \rho) + \frac{(1-q)}{2} \sum_{(i,l) \in L} a_i b_l \text{Tr}(P_{b_l, a_i} \rho).
\end{aligned}$$

En suma, el valor esperado para este instrumento es

$$\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_3} = \sum_{(j,k) \in K} a_j b_k \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) + \sum_{(i,l) \in L} a_i b_l \left[\frac{(1+q)}{2} \text{Tr}(P_{a_i, b_l} \rho) + \frac{(1-q)}{2} \text{Tr}(P_{b_l, a_i} \rho) \right]. \quad (3.12)$$

Este valor esperado puede conllevar más álgebra debido a la interpretación que se le da al estado posterior a la medición, sin embargo el este valor esperado equivale matemáticamente al del primer instrumento y esta equivalencia será discutida en la siguiente sección.

3.2.3. Equivalencia de los instrumentos

En esta sección se pretende comparar los valores esperados de los diferentes instrumentos cuánticos analizados previamente, con el fin de examinar sus equivalencias. Dado el enfoque con el que fueron concebidos los tres instrumentos, se anticipaba que el valor esperado de cada uno sería el apropiado. Como se observó en las secciones anteriores, los instrumentos propuestos no son idénticos. Por lo tanto, es importante preguntarse, ¿bajo qué condiciones estos instrumentos son equivalentes?

En primer lugar, se contrasta los valores esperados del primer y segundo instrumento. Con anterioridad se pudo apreciar que el valor esperado del primero corresponde exactamente al de una medición difusa, sin embargo al analizar el valor esperado del segundo, se puede apreciar que, en términos generales, la parte que distorsiona los resultados de la medición no se corresponde de manera similar con la parte que difumina

la medición en el primero. Para verificarlo basta con analizar un caso particular, por ejemplo si $A \otimes B = \sigma_z \otimes \sigma_x$, sin importar cuál sea el estado inicial ρ , el segundo término de la ecuación (3.9) es siempre cero. No obstante, la parte análoga del valor esperado del primer instrumento, el segundo término en la ecuación (3.6) no siempre es cero sino que dependerá del estado inicial del sistema.

Aunque no en todos los casos estos instrumentos son equivalentes, existen una condición en la que sí lo son. A continuación se presenta la proposición que detalla esta condición de equivalencia del valor esperado entre los dos primeros instrumentos y su demostración.

Proposición 3.1. *Para todo estado inicial ρ , los valores esperados de las alternativas de los instrumentos cuánticos (3.3) y (3.7), son equivalentes si y solo si*

$$\langle a_j b_k | B \otimes A | a_{j'} b_{k'} \rangle = 0, \forall j, k \neq j', k'. \quad (3.13)$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que para todo estado inicial ρ los valores esperados de los instrumentos son iguales. El primer término del lado derecho de la ecuación (3.6) y el primer término de la derecha en (3.9) son iguales, por lo tanto se igualan los segundos términos de estas ecuaciones, i.e.

$$\text{Tr}(B \otimes A \rho) = \sum_{j,k} \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) \text{Tr}(P_{a_j b_k} \rho). \quad (3.14)$$

Por la linealidad de la traza se puede reacomodar el lado derecho de esta última ecuación:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) \text{Tr}(P_{a_j b_k} \rho) &= \sum_{j,k} \text{Tr}[\text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) (P_{a_j b_k} \rho)] \\ &= \text{Tr} \left[\left(\sum_{j,k} \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) P_{a_j b_k} \right) \rho \right]. \end{aligned}$$

reescribiendo la ecuación 3.14

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B \otimes A \rho) &= \text{Tr} \left[\left(\sum_{j,k} \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) P_{a_j b_k} \right) \rho \right] \\ \text{Tr} \left[\left(B \otimes A - \left(\sum_{j,k} \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) P_{a_j b_k} \right) \right) \rho \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Al expandir $B \otimes A$ en la base de vectores propios de $A \otimes B$ obtenemos que

$$B \otimes A = \sum_{j,k,j',k'} \text{Tr}(B \otimes A |a_j b_k\rangle \langle a_{j'} b_{k'}|) |a_j b_k\rangle \langle a_{j'} b_{k'}|,$$

desarrollando la ecuación 3.15

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\left(B \otimes A - \left(\sum_{j,k} \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) P_{a_j, b_k} \right) \right) \rho \right] = 0 \\ \text{Tr} \left[\left(\sum_{j,k,j',k'} \text{Tr}(B \otimes A |a_j b_k\rangle \langle a_{j'} b_{k'}|) |a_j b_k\rangle \langle a_{j'} b_{k'}| - \left(\sum_{j,k} \text{Tr}((B \otimes A) P_{a_j, b_k}) P_{a_j, b_k} \right) \right) \rho \right] &= 0 \\ & \text{Tr} \left[\left(\sum_{j,k \neq j',k'} \text{Tr}(B \otimes A |a_j b_k\rangle \langle a_{j'} b_{k'}|) |a_j b_k\rangle \langle a_{j'} b_{k'}| \right) \rho \right] = 0 \\ & \text{Tr} \left[\left(\sum_{j,k \neq j',k'} \langle a_j b_k | B \otimes A | a_{j'} b_{k'} \rangle |a_j b_k\rangle \langle a_{j'} b_{k'}| \right) \rho \right] = 0. \end{aligned}$$

De la última ecuación, para cualquier estado inicial ρ , se obtiene que¹

$$\sum_{j,k \neq j',k'} \langle a_j b_k | B \otimes A | a_{j'} b_{k'} \rangle |a_j b_k\rangle \langle a_{j'} b_{k'}| = 0,$$

luego por independencia lineal de la base de vectores propios

$$\langle a_j b_k | B \otimes A | a_{j'} b_{k'} \rangle = 0 \quad \forall j, k \neq j', k'.$$

(\Leftarrow) Ahora si suponemos que los coeficientes $\langle a_j b_k | B \otimes A | a_{j'} b_{k'} \rangle = 0, \forall j, k \neq j', k'$. Entonces el operador $B \otimes A = \sum_{i,l} d_{i,l} P_{a_i, b_l}$ escrito en la base de vectores propios de $A \otimes B$.

Finalmente, se obtiene la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \text{Tr} \left(\sum_{i,l} d_{i,l} P_{a_i, b_l} P_{a_j, b_k} \right) \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) &= \sum_{j,k} \sum_{i,l} d_{i,l} \delta_{j,k}^{i,l} \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) \\ &= \sum_{j,k} d_{j,k} \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) = \text{Tr}(B \otimes A \rho). \end{aligned}$$

■

Según la proposición previa, se concluye que los dos primeros instrumentos tendrán el mismo valor esperado, si y solo si la matriz de $B \otimes A$ es diagonal en la base de vectores

¹ver lema A.1.1.

propios del observable $A \otimes B$. Esta conclusión podría sugerir que es lo mismo afirmar que los observables cumplen con esta condición si y solo si conmutan. No obstante, esta afirmación no es correcta puesto que no obedece la doble implicación. Es posible demostrar que si se cumple la condición (3.13), entonces los observables conmutan. Sin embargo, la afirmación recíproca no es cierta. A continuación se explora sobre estas aseveraciones.

Para iniciar se presenta de manera formal la primera implicación y su demostración.

Proposición 3.2. *Si se satisface la condición*

$$\langle a_j b_k | B \otimes A | a_{j'} b_{k'} \rangle = 0, \forall j, k \neq j', k',$$

entonces $[A \otimes B, B \otimes A] = 0$

Demostración. Con base en la condición es posible escribir el operador $B \otimes A$ en términos de los operadores de proyección del observable $A \otimes B$

$$B \otimes A = \sum_{i,l} c_{i,l} |a_i b_l\rangle \langle a_i b_l|,$$

donde los coeficientes $c_{i,l}$ se encuentran en la diagonal del operador $B \otimes A$ escrito en la base de $A \otimes B$. Luego, $A \otimes B$ también se puede expresar como

$$A \otimes B = \sum_{j,k} a_j b_k |a_j b_k\rangle \langle a_j b_k|.$$

Ahora es posible conmutar los observables

$$\begin{aligned} [A \otimes B, B \otimes A] &= (A \otimes B)(B \otimes A) - (B \otimes A)(A \otimes B) \\ &= \left(\sum_{j,k} a_j b_k |a_j b_k\rangle \langle a_j b_k| \right) \left(\sum_{i,l} c_{i,l} |a_i b_l\rangle \langle a_i b_l| \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i,l} c_{i,l} |a_i b_l\rangle \langle a_i b_l| \right) \left(\sum_{j,k} a_j b_k |a_j b_k\rangle \langle a_j b_k| \right) \\ &= \left(\sum_{j,k} \sum_{i,l} a_j b_k c_{i,l} \delta_{j,k}^{i,l} |a_j b_k\rangle \langle a_i b_l| \right) - \left(\sum_{i,l} \sum_{j,k} c_{i,l} a_j b_k \delta_{i,l}^{j,k} |a_i b_l\rangle \langle a_j b_k| \right) \\ &= \left(\sum_{j,k} a_j b_k c_{j,k} |a_j b_k\rangle \langle a_j b_k| \right) - \left(\sum_{j,k} a_j b_k c_{j,k} |a_j b_k\rangle \langle a_j b_k| \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Luego, tal como se mencionó previamente, la condición necesaria para cumplir con (3.13) es que los observables $A \otimes B$ y $B \otimes A$ conmuten, mas no es suficiente. Para probarlo basta con mostrar el siguiente contraejemplo. El observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$ conmuta con $\sigma_x \otimes \sigma_z$,

$$\begin{aligned} [\sigma_z \otimes \sigma_x, \sigma_x \otimes \sigma_z] &= \sigma_z \sigma_x \otimes \sigma_x \sigma_z - \sigma_x \sigma_z \otimes \sigma_z \sigma_x \\ &= \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_y \otimes \sigma_y = 0, \end{aligned}$$

sin embargo escribir al observable $\sigma_x \otimes \sigma_z$ en la base de vectores propios de $\sigma_z \otimes \sigma_x$, no es una matriz diagonal, basta con calcular lo siguiente

$$\langle 0+ | \sigma_x \otimes \sigma_z | 1- \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Por otro lado, debido a que el primer instrumento presenta el valor esperado correcto y el segundo no en todos los casos, lo razonable es comparar el tercer instrumento con el primero únicamente. Anteriormente se vio que estos instrumentos tenían un valor esperado similar matemáticamente. Sin embargo, es importante hacer la aclaración que el tercer instrumento solo tiene sentido, en el caso particular en el que los operadores de proyección de los observables $A \otimes B$ y $B \otimes A$ cumplen con $P_{a_m, b_n} P_{b_n, a_m} = \delta_{b_n, a_m}^{a_m, b_n} P_{a_m, b_n}$. Por esta razón, ahora se presenta la proposición que establece formalmente cuando estos instrumentos son análogos.

Proposición 3.3. *Para todo estado inicial ρ , los valores esperados de las alternativas de instrumentos cuánticos (3.3) y (3.10) son equivalentes si y solo si $p = \frac{1+q}{2}$.*

Demostración. El valor esperado del tercer instrumento está dado por la ecuación (3.12), en el que la primera suma toma los operadores de proyección indexados por los elementos del conjunto K , es decir que $P_{a_j, b_k} = P_{a_k, b_j}$. Por lo tanto esta ecuación puede

reescribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_3} &= \sum_{(j,k) \in K} a_j b_k \left[\frac{(1+q)}{2} \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) + \frac{(1-q)}{2} \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) \right] \\
&+ \sum_{(i,l) \in L} a_i b_l \left[\frac{(1+q)}{2} \text{Tr}(P_{a_i, b_l} \rho) + \frac{(1-q)}{2} \text{Tr}(P_{b_l, a_i} \rho) \right] \\
&= \sum_{(j,k) \in K} \frac{(1+q)}{2} a_j b_k \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) + \frac{(1-q)}{2} a_j b_k \text{Tr}(P_{b_k, a_j} \rho) \\
&+ \sum_{(i,l) \in L} \frac{(1+q)}{2} a_i b_l \text{Tr}(P_{a_i, b_l} \rho) + \frac{(1-q)}{2} a_i b_l \text{Tr}(P_{b_l, a_i} \rho) \\
&= \frac{(1+q)}{2} \left[\sum_{(j,k) \in K} a_j b_k \text{Tr}(P_{a_j, b_k} \rho) + \sum_{(i,l) \in L} a_i b_l \text{Tr}(P_{a_i, b_l} \rho) \right] \\
&+ \frac{(1-q)}{2} \left[\sum_{(j,k) \in K} a_j b_k \text{Tr}(P_{b_k, a_j} \rho) + \sum_{(i,l) \in L} a_i b_l \text{Tr}(P_{b_l, a_i} \rho) \right] \\
&= \frac{(1+q)}{2} [\text{Tr}(A \otimes B \rho)] + \frac{(1-q)}{2} [\text{Tr}(B \otimes A \rho)].
\end{aligned}$$

De la última igualdad se puede observar que los valores esperados serán equivalentes cuando la probabilidad $p = \frac{1+q}{2}$ y $(1-p) = \frac{1-q}{2}$. ■

Con base en esta proposición es posible analizar la equivalencia entre las interpretaciones de los instrumentos. Cuando la probabilidad de obtener una medición donde las partículas experimentan un intercambio, sea igual a la mitad de la probabilidad de no poder diferenciar en qué estado se encuentra el sistema después de la medición, el valor esperado de los instrumentos será exactamente el mismo.

3.2.4. Ejemplos sobre una medición difusa utilizando distintas herramientas

En esta sección se realizarán algunos ejemplos que ilustran la descripción completa de la medición de un observable de la forma $A \otimes B$ en un estado inicial ρ utilizando las distintas herramientas discutidas en los apartados anteriores, es decir, las medidas POVM conjunto a los operadores de Kraus, así como los distintos instrumentos cuánticos. Continuando con el ejemplo de la sección 2.3.2 en el que se quiere medir el observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$, con vectores propios $\{|0+\rangle, |0-\rangle, |1+\rangle, |1-\rangle\}$. El estado inicial del

sistema es

$$\rho = \left(\frac{1}{3} |0\rangle \langle 0| + \frac{2}{3} |1\rangle \langle 1| \right) \otimes (|+\rangle \langle +|) = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Ejemplo utilizando las mediciones POVM y los operadores de Kraus

Previamente se graficó el mapeo de probabilidades de obtener los valores propios del observables, los cuales son 1 y -1 . Este mapeo puede realizarse con los efectos discutidos como

$$\begin{aligned} E(1, \rho) &= \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0+})\rho) + \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{1-})\rho) = \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0+} + P_{1-})\rho) \\ &= \frac{1}{3} \text{Tr} \left[\left[p \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + (1-p) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{3-p}{6}, \end{aligned}$$

análogamente para el otro valor propio

$$E(-1, \rho) = \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0-})\rho) + \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{1+})\rho) = \text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0-} + P_{1+})\rho) = \frac{3+p}{6}.$$

Por ejemplo, se obtiene la salida $a_1 = 1$ y $b_1 = 1$, la probabilidad de obtener dicha salida será solamente $\text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0+})\rho)$, con una probabilidad $p = 0.25$ de intercambio de las partículas, el efecto es

$$\mathcal{F}_{2p}(P_{0+}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 & 3/8 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La operación cuántica que representa la medición difusa será

$$\mathcal{E}_{a_1, b_1}(\rho) = \frac{K_{a_1, b_1} \rho K_{a_1, b_1}^\dagger}{\text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0+})\rho)}.$$

El canal representará precisamente que con una probabilidad p el estado estará en el

espacio propio de $|0+\rangle$ y con una probabilidad $(1-p)$, en el espacio propio $|+0\rangle$

$$\rho'_{0+} = \frac{\sqrt{pP_{0+} + (1-p)P_{+0}}\rho\sqrt{pP_{0+} + (1-p)P_{+0}}}{\text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0+})\rho)}.$$

Para obtener estos operadores de Kraus se debe obtener primero los operadores de proyección del efecto, es decir

$$\mathcal{F}_{2p}(P_{0+}) = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|,$$

El efecto tiene rango tres y sus valores propios son $\frac{4+\sqrt{7}}{8}$, $\frac{4-\sqrt{7}}{8}$ y 0 con degeneración 2, los vectores propios de los primeros dos valores son

$$\frac{1}{\sqrt{28-2\sqrt{7}}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} \\ -2+\sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \frac{1}{\sqrt{28+2\sqrt{7}}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{7} \\ -2-\sqrt{7} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Para obtener la raíz cuadrada del operador se puede realizar el siguiente cálculo²

$$\sqrt{\mathcal{F}_{2p}(P_{0+})} = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|,$$

es decir

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{F}_{2p}(P_{0+})} &= \sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{8}} \left[\frac{1}{28-2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2(4+\sqrt{7}) & (5-\sqrt{7}) & 3(1+\sqrt{7}) & 0 \\ (5-\sqrt{7}) & (11-4\sqrt{7}) & 3(-2+\sqrt{7}) & 0 \\ 3(1+\sqrt{7}) & 3(-2+\sqrt{7}) & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &+ \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{8}} \left[\frac{1}{28+2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2(4-\sqrt{7}) & (5+\sqrt{7}) & 3(1-\sqrt{7}) & 0 \\ (5+\sqrt{7}) & (11+4\sqrt{7}) & 3(-2-\sqrt{7}) & 0 \\ 3(1+\sqrt{7}) & 3(-2-\sqrt{7}) & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Finalmente el operador de Kraus estará dado por las siguiente matriz

$$K_{0+} = \begin{pmatrix} 0.566947 & 0.188982 & 0.377964 & 0 \\ 0.188982 & 0.283473 & -0.094491 & 0 \\ 0.377964 & -0.094491 & 0.472456 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

²En general, los operadores de Kraus no son sencillos de calcular con lápiz y papel. Es por esta razón que se puede utilizar un programa, el cual se encuentra en el repositorio [13].

En virtud de lo anterior, el estado posterior a la medición resulta ser

$$\rho_{0+} = \frac{K_{0,+}\rho K_{0,+}^\dagger}{\text{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0+})\rho)} = \begin{pmatrix} 0.5275 & 0.1758 & 0.3516 & 0 \\ 0.1758 & 0.1483 & 0.0275 & 0 \\ 0.3516 & 0.0275 & 0.3242 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este escenario, el estado inicial se proyecta en el espacio dado por la superposición de dos de los estados propios del efecto correspondiente a la salida $a_1 b_1 = (1)(1) = 1$. El estado posterior a la medición, resulta ser un nuevo estado mixto, con el mismo rango del efecto. Entonces, ρ_{0+} se encuentra en el subespacio generado por los espacios propios del efecto, escalados por coeficientes que están asociados con la probabilidad que se encuentre en cada uno de los espacios propios.

Ejemplo utilizando los instrumentos cuánticos

En la sección 3.2.2 se ha analizado tres interpretaciones de las mediciones difusas utilizando instrumentos cuánticos, ahora es conveniente analizar un ejemplo para un estado específico para completar la comprensión de estos instrumentos. De igual manera se utilizará el estado propuesto en la ecuación (3.16) y el observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$.

Para el primer instrumento los operadores que integran el sistema clásico son $P_{0+}, P_{0-}, P_{1+}, P_{1-}$, y los operadores que conforman el sistema cuántico condicionados a sus respectivas salidas serán las proyecciones de estos operadores sobre el operador difuso aplicado a ρ . El primer instrumento para este caso es

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\rho) = & P_{0+} \otimes P_{0+} \mathcal{F}_{2p}(\rho) P_{0+} + P_{0-} \otimes P_{0-} \mathcal{F}_{2p}(\rho) P_{0-} \\ & + P_{1+} \otimes P_{1+} \mathcal{F}_{2p}(\rho) P_{1+} + P_{1-} \otimes P_{1-} \mathcal{F}_{2p}(\rho) P_{1-}, \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{F}_{2p}(\rho) = p \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} + (1-p) \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Aplicarle el operador difuso al estado inicial representa que al realizarse la medición con probabilidad p se experimenta un intercambio de partículas y con probabilidad $(1-p)$ no lo hace. Luego, este nuevo estado se proyecta en uno de los espacios propios de la salida obtenida. La descripción de esta medición queda condensada en estos cuatro términos, con lo que puede obtenerse su mapa de resultados y el estado posterior.

El mapa de resultados se obtiene utilizando la traza parcial sobre el sistema cuántico

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathrm{qu}}(\mathcal{I}_1(\rho)) &= P_{0+}\mathrm{Tr}(P_{0+}\mathcal{F}_{2p}(\rho)) + P_{0-}\mathrm{Tr}(P_{0-}\mathcal{F}_{2p}(\rho)) \\ &\quad + P_{1+}\mathrm{Tr}(P_{1+}\mathcal{F}_{2p}(\rho)) + P_{1-}\mathrm{Tr}(P_{1-}\mathcal{F}_{2p}(\rho)).\end{aligned}$$

Si se desea la probabilidad de cada una de las posibles salidas puede proyectarse en el espacio de cada una de ellas y obtener su traza, esto es análogo a utilizar las medidas POVM para los mapeos de cada una de las cuatro posibles salidas. La probabilidad de obtener la salida correspondiente al estado $|0+\rangle$, será

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(P_{0+}\mathrm{Tr}_{\mathrm{qu}}(\mathcal{I}_1(\rho))) &= \mathrm{Tr}(P_{0+})\mathrm{Tr}(P_{0+}\mathcal{F}_{2p}(\rho)) = \mathrm{Tr}(\mathcal{F}_{2p}(P_{0+})\rho) \\ &= \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\left[\left[p\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-p)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{3+p}{12}.\end{aligned}$$

Finalmente, si la salida que se obtiene es a_1b_1 correspondiente al estado propio $|0+\rangle$, el estado posterior será simplemente

$$\begin{aligned}\frac{P_{a_1,b_1}(p\rho + (1-p)S\rho S^\dagger)P_{a_1,b_1}}{\mathrm{Tr}(P_{a_1,b_1}\mathcal{F}_{2p}(\rho))} &= \frac{1}{\frac{3.25}{12}}\begin{pmatrix} 0.1354 & 0.1354 & 0 & 0 \\ 0.1354 & 0.1354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En esta situación, el estado que sufre un intercambio de partículas es proyectado al espacio del estado propio $|0+\rangle$. El estado resultante debe ser el operador P_{0+} , el cual es un estado puro, en contraste con el estado inicial. Por otro lado, el valor esperado del instrumentos es exactamente el mismo que el obtenido en la ecuación (2.9)

$$\langle A \otimes B \rangle_{\mathcal{I}_1(\rho)} = p\mathrm{Tr}(\rho\sigma_z \otimes \sigma_x) + (1-p)\mathrm{Tr}(\rho\sigma_x \otimes \sigma_z) = -\frac{p}{3}. \quad (3.17)$$

El segundo término se anula debido a que la traza del producto de cada uno de los operadores de proyección del observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$, con el observable $\sigma_x \otimes \sigma_z$ es cero, mientras

que el estado inicial es una superposición de dos de estos operadores de proyección.

Para la segunda alternativa, el error ocurre al realizar la lectura de los resultados por lo tanto el operador difuso se aplica a los operadores de proyección en el sistema clásico

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(\rho) &= \mathcal{F}_{2p}(P_{0+}) \otimes P_{0+}\rho P_{0+} + \mathcal{F}_{2p}(P_{0-}) \otimes P_{0-}\rho P_{0-} \\ &+ \mathcal{F}_{2p}(P_{1+}) \otimes P_{1+}\rho P_{1+} + \mathcal{F}_{2p}(P_{1-}) \otimes P_{1-}\rho P_{1-},\end{aligned}$$

en este caso el operador difuso captura la confusión de los resultados. Por ejemplo, con una probabilidad p indicaría que el estado es $|0+\rangle$ y con una probabilidad $1 - p$ se obtiene una salida correspondiente al estado $|+0\rangle$ sin embargo el estado posterior a la medición será la proyección en espacio propio del operador P_{0+} .

El valor esperado de este instrumento es

$$\begin{aligned}\langle \sigma_z \otimes \sigma_x \rangle_{\mathcal{I}_2(\rho)} &= p \text{Tr}(\sigma_z \otimes \sigma_x \rho) \\ &+ (1-p) \text{Tr}(\overbrace{(\sigma_x \otimes \sigma_z) P_{0+}}^0) \text{Tr}(P_{0+}\rho) + (1-p) \text{Tr}(\overbrace{(\sigma_x \otimes \sigma_z) P_{0-}}^0) \text{Tr}(P_{0-}\rho) \\ &+ (1-p) \text{Tr}(\overbrace{(\sigma_x \otimes \sigma_z) P_{1+}}^0) \text{Tr}(P_{1+}\rho) + (1-p) \text{Tr}(\overbrace{(\sigma_x \otimes \sigma_z) P_{1-}}^0) \text{Tr}(P_{1-}\rho) \\ &= -\frac{p}{3}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

En este caso en específico, el valor esperado del segundo instrumento es el mismo al de la ecuación (3.17). Esto se debe a que los últimos términos también se cancelan, de la misma forma que el último término del valor esperado del primer instrumento. Sin embargo, el observable no ejemplifica la proposición 3.1, puesto que la condición (3.13) no se cumple y por esta razón no serán equivalentes para todo estado inicial.

Por otro lado, para determinar el mapeo de probabilidades, primero es necesario encontrar el operador de densidad reducido de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\text{Tr}_{\text{qu}}(\mathcal{I}_2(\rho)) &= \mathcal{F}_{2p}(P_{0+})\text{Tr}(P_{0+}\rho) + \mathcal{F}_{2p}(P_{0-})\text{Tr}(P_{0-}\rho) \\ &+ \mathcal{F}_{2p}(P_{1+})\text{Tr}(P_{1+}\rho) + \mathcal{F}_{2p}(P_{1-})\text{Tr}(P_{1-}\rho).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Particularmente, si se desea conocer la probabilidad de obtener la salida que corresponde al estado $|0+\rangle$, es necesario emplear el operador de proyección P_{0+} , junto con el

cálculo del operador reducido (3.19), como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(P_{0+} \text{Tr}_{\text{qu}}(\mathcal{I}_2(\rho))) &= \text{Tr}(P_{0+} \mathcal{F}_{2p}(P_{0+})) \text{Tr}(P_{0+} \rho) + \text{Tr}(P_{0+} \mathcal{F}_{2p}(P_{0-})) \text{Tr}(P_{0-} \rho) \\
&+ \text{Tr}(P_{0+} \mathcal{F}_{2p}(P_{1+})) \text{Tr}(P_{1+} \rho) + \text{Tr}(P_{0+} \mathcal{F}_{2p}(P_{1-})) \text{Tr}(P_{1-} \rho) \\
&= \text{Tr}(pP_{0+} + (1-p)P_{0+}P_{+0}) \text{Tr}(P_{0+} \rho) + \text{Tr}((1-p)P_{0+}P_{-0}) \text{Tr}(P_{0-} \rho) \\
&+ \text{Tr}((1-p)P_{0+}P_{+1}) \text{Tr}(P_{1+} \rho) + \text{Tr}((1-p)P_{0+}P_{-1}) \text{Tr}(P_{1-} \rho) \\
&= p \text{Tr}(P_{0+} \rho) + \frac{(1-p)}{4} \text{Tr}((P_{+0} + P_{-0} + P_{+1} + P_{-1}) \rho) = \frac{3+5p}{12}.
\end{aligned}$$

Para el tercer instrumento, el observable $\sigma_z \otimes \sigma_x$ no cumple con una de las condiciones para que esta última alternativa tenga sentido, puesto que los operadores de proyección del observable no son ortogonales con los operadores de proyección del observable $\sigma_x \otimes \sigma_z$. Es por ello que para ejemplificar este instrumento se utilizará el observable $\sigma_z \otimes \sigma_z$ con los operadores de proyección $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ y un estado inicial ρ . El instrumento es entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3(\rho) &= P_{00} \otimes P_{00} \rho P_{00} + P_{11} \otimes P_{11} \rho P_{11} + qP_{01} \otimes P_{01} \rho P_{01} + qP_{10} \otimes P_{10} \rho P_{10} \\
&+ \frac{1-q}{2} [P_{01} \otimes (P_{01} + P_{10}) \rho (P_{01} + P_{10}) + P_{10} \otimes (P_{10} + P_{01}) \rho (P_{10} + P_{01})] \\
&= P_{00} \otimes P_{00} \rho P_{00} + P_{11} \otimes P_{11} \rho P_{11} \\
&+ P_{01} \otimes \left[qP_{01} \rho P_{01} + \frac{1-q}{2} (P_{01} + P_{10}) \rho (P_{01} + P_{10}) \right] \\
&+ P_{10} \otimes \left[qP_{10} \rho P_{10} + \frac{1-q}{2} (P_{10} + P_{01}) \rho (P_{10} + P_{01}) \right].
\end{aligned}$$

En esta última ecuación, el sistema clásico indica que para las salidas correspondientes a los operadores P_{01} y P_{10} , con una probabilidad q al sistema se le aplicará una medición ideal, pero con una probabilidad $(1-q)$ no es posible distinguir entre los estados $|01\rangle$ y $|10\rangle$. Su mapa de resultado se puede obtener realizando la traza parcial sobre el sistema cuántico

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\text{qu}}(\mathcal{I}_3(\rho)) &= P_{00} \text{Tr}(P_{00} \rho) + P_{11} \text{Tr}(P_{11} \rho) + P_{01} \left[q \text{Tr}(P_{01} \rho) + \frac{1-q}{2} \text{Tr}((P_{01} + P_{10}) \rho) \right] \\
&+ P_{10} \left[q \text{Tr}(P_{10} \rho) + \frac{1-q}{2} \text{Tr}((P_{10} + P_{01}) \rho) \right] \\
&= P_{00} \text{Tr}(P_{00} \rho) + P_{11} \text{Tr}(P_{11} \rho) + P_{01} \left[\frac{1+q}{2} \text{Tr}(P_{01} \rho) + \frac{1-q}{2} \text{Tr}(P_{10} \rho) \right] \\
&+ P_{10} \left[\frac{1+q}{2} \text{Tr}(P_{10} \rho) + \frac{1-q}{2} \text{Tr}(P_{01} \rho) \right].
\end{aligned}$$

De esta última igualdad es posible notar fácilmente que para este observable el mapa de resultados coincide con el que se podría plantear en el primer instrumento cuando se

cumpla que $p = \frac{1+q}{2}$. Además es importante notar que aunque el observable es bastante sencillo, los resultados pueden verse difuminados para dos de los estados, cambiando la probabilidad de obtener las salidas correspondientes a los operadores P_{01} y P_{10} .

3.3. Generalización de operadores de Kraus en sistemas de N partículas

El estudio del sistema que se analizó en las secciones anteriores y sus implicaciones para la especificación completa de las mediciones difusas es útil desde un punto de vista ilustrativo, aunque no es general. En esta sección se pretende discutir el problema desde sistemas más generales, con más de dos partículas y en los que se tomen en cuenta observables que no sean factorizables.

Al generalizar las ideas anteriores para sistemas de $N > 2$ partículas, naturalmente se piensa realizar una medición de un observable de la forma $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_N$, en la cual, por ruido del entorno se produce un error en el aparato de medición y confunde los resultados. Ahora, existe una probabilidad de una identificación errónea. Por ejemplo puede realizarse la medición del observable $A_2 \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_N$ con cierta probabilidad p . Sin embargo, es posible que la partículas experimenten un intercambio de cierta forma tal que la medición que se produzca sea una de las $N!$ permutaciones en las que se puede configurar el operador original. En este caso el valor esperado de la medición será el promedio de los valores esperados ponderado por probabilidad de que se produzca alguna medición del observable incorrecto.

Para obtener el valor esperado de esta medición en el sistema de N partículas, es necesario el operador difuso presentado en la ecuación (2.5), el cuál utiliza los operadores de permutación previamente explicados. El valor esperado de medir al observable $\bigotimes_{i=1}^N A_i$, en un sistema inicial ρ , es el siguiente

$$\left\langle \bigotimes_{i=1}^N A_i \right\rangle_{\mathcal{F}(\rho)} = \text{Tr} \left(\mathcal{F}(\rho) \bigotimes_{i=1}^N A_i \right) = \sum_{\Pi_j \in S} p_j \text{Tr} \left(\Pi_j \rho \Pi_j^\dagger \bigotimes_{i=1}^N A_i \right).$$

Aunque lo anterior es válido no es la forma más general en la que una medición difusa puede ser estudiada. Estas mediciones pueden analizarse utilizando cualquier tipo de observables, incluyendo los observables no factorizables los cuales no pueden escribirse como un producto tensorial de N observables, pero pueden ser expresados como la superposición de todos los productos posibles de los operadores de una base del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Por lo tanto, al llevar a cabo una medición difusa de un observable $\mathcal{O} \in \mathcal{H}^{\otimes N}$, los operadores de cada término de la superposición que conforma

el observable original se pueden intercambiar de alguna manera. En consecuencia, es posible utilizar la linealidad del operador difuso para representar el valor esperado de cualquier observable, tal y como se presenta en el ecuación (2.8).

3.3.1. Medidas POVM y operadores de Kraus en sistemas de varias partículas

Anteriormente se describió el mapeo que puede realizarse con las medidas POVM en un sistema de dos partículas. Se propuso intuitivamente un conjunto de efectos, en los cuales a los operadores proyección se les aplicaba el operador difuso y con base en estos efectos era posible obtener el conjunto de operadores de Kraus que describen la medición. Para sistemas formados por más de dos partículas los efectos son ligeramente diferentes y en consecuencia los operadores de Kraus también.

La clave para lograr los efectos de manera correcta es también emplear el valor esperado de una medición difusa. A pesar de ello, la diferencia de la generalización reside en el hecho que los operadores de permutación para $N > 3$ no son hermíticos, por lo que la aplicación del operador difuso debe llevarse a cabo con precaución. Utilizando la propiedad cíclica de la traza, el valor esperado de la medición difusa puede escribirse también como

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{F}(\rho)} = \sum_{\Pi_j \in S} p_j \text{Tr} \left(\Pi_j^\dagger \mathcal{O} \Pi_j \rho \right). \quad (3.20)$$

De esta expresión es fácil interpretar que se está aplicando un operador al observable, sin embargo no es el mismo operador difuso que el de la ecuación (2.5) debido a que en cada término de la suma el operador aplicado por la izquierda es el adjunto del operador de permutación y por la derecha se aplica el operador de permutación. En este contexto, aplicar un operador por la izquierda es distinto a aplicarlo por la derecha, puesto que los operadores de permutación no son hermíticos. También es importante aclarar que tampoco se le está aplicando el adjunto del operador difuso puesto que este es hermítico³.

Por lo tanto los efectos ya no pueden ser simplemente la aplicación del operador difuso a los operadores de proyección puesto que esto resultaría en un valor esperado distinto a (2.8), puesto que las permutaciones estarían ponderadas con diferentes probabilidades. En su lugar, los efectos pueden escribirse como

$$\{E_{\lambda_i}\}_{\lambda_i \in \Lambda} = \left\{ \sum_{\Pi_j \in S} p_j \Pi_j^\dagger P_{\lambda_i} \Pi_j \right\}_{\lambda_i \in \Lambda}, \quad (3.21)$$

³ver lema A.1.2

donde P_{λ_i} es el operador de proyección correspondiente a cada vector propio que tiene asociado el valor propio $\lambda_i \in \Lambda$. Para un observable factorizable de N partículas, el valor propio λ_i es el producto de los a_{jk} valores propios, donde los subíndices indican que es k -ésimo valor propio correspondiente al observable que se desea medir en la j -ésima partícula. Adicionalmente, puede suceder que ninguno de los N observables sea degenerado y que algunos productos de los valores propios de los observables sean iguales, de manera que $\lambda_i = \lambda_l$, con $i \neq l$. En este escenario, es probable que los operadores de proyección se modifiquen y por lo tanto, los efectos sean distintos a los de la ecuación (3.21). No obstante, se requiere realizar más investigación para corroborar si existe algún inconveniente en estas circunstancias.

Luego, para obtener el estado posterior a la medición se requiere utilizar la descomposición de los efectos en operadores de Kraus $\{K_{\lambda_i}\}$. De manera análoga al sistema de dos partículas es fácilmente comprobable que estos operadores E_{λ_i} son hermíticos, cumplen con la propiedad de completitud y son positivos. Por lo tanto para este sistema se propone utilizar la raíz cuadrada de los efectos

$$K_{\lambda_i} = \sqrt{\sum_{\Pi_j \in S} p_j \Pi_j^\dagger P_{\lambda_i} \Pi_j}, \quad (3.22)$$

esto se puede realizar debido a la positividad de los efectos.

Finalmente, con el fin de mostrar el mapa de probabilidades y el estado resultante luego de la medición en un sistema de varias partículas, de forma práctica, se ha creado un programa. Éste utiliza como base los efectos y operadores Kraus descritos en esta sección y está disponible en el siguiente repositorio [13].

3.3.2. Instrumento cuántico en sistemas de varias partículas

En esta sección se generalizan la idea detrás de los dos primeros instrumentos cuánticos en sistemas más complejos que involucran varias partículas, así como los primeros resultados obtenidos en la sección 3.2.3, en la cual se comprobó que los instrumentos no generan las mismas distribuciones de probabilidad en todos los casos.

La primera alternativa es el instrumento en el que por ruido en el sistema ocurre una equivocación y al medir un observable \mathcal{O} es probable que las partículas experimenten un intercambio. Este instrumento representa que la salida clásica corresponderá a los valores propios del observable. Adicionalmente, con cierta probabilidad la medición ocurre de manera ideal, y el estado posterior a la medición será la proyección del estado inicial al espacio propio correspondiente a la salida brinda por el sistema clásico. Sin embargo, también es verosímil que el estado posterior sea la proyección al espacio

propio de la salida pero del estado inicial transformado, de forma que represente un sistema en el que las partículas se cambian

$$\mathcal{I}_1(\rho) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda} P_{\lambda_i} \otimes P_{\lambda_i} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_i}. \quad (3.23)$$

Por otra parte el valor esperado del resultado de la medición modelado con este instrumento puede calcularse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{I}_1} &= \text{Tr} \left([(\mathcal{O}) \otimes \mathbb{1}] \mathcal{I}_1 \right) \\ &= \text{Tr} \left([(\mathcal{O}) \otimes \mathbb{1}] \sum_{\lambda_j \in \Lambda} P_{\lambda_j} \otimes P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_j} \right) \\ &= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \text{Tr} \left((\mathcal{O}) P_{\lambda_j} \right) \text{Tr} \left(P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_j} \right) \\ &= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \text{Tr} \left(\sum_{\lambda_j, \lambda_k \in \Lambda} \lambda_k P_{\lambda_k} P_{\lambda_j} \right) \text{Tr} \left(P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_j} \right) \\ &= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \text{Tr} \left(\lambda_j P_{\lambda_j} \right) \text{Tr} \left(P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) P_{\lambda_j} \right) \\ &= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \lambda_j \text{Tr} \left(P_{\lambda_j} \mathcal{F}(\rho) \right) \end{aligned}$$

con lo que se puede concluir que el valor esperado correspondiente a este instrumento es

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{I}_1} = \text{Tr} \left(\mathcal{O} \mathcal{F}(\rho) \right), \quad (3.24)$$

el mismo que el valor esperado correcto (2.8).

La segunda alternativa es igualmente generalizable para un sistema de N partículas. Este instrumento representa una equivocación en el sistema clásico, y por esto al medir el observable \mathcal{O} , con alguna probabilidad el estado inicial se proyectará en el espacio propio de la salida correspondiente. Pero es probable que el estado inicial se proyecte de igual forma a un espacio propio del observable pero la lectura de los resultados de la medición sean las salidas de un observable distinto, el cual puede ser una transformación dada por el operador de permutación $\Pi_j \mathcal{O} \Pi_j$ para algún $\Pi_j \in \mathcal{S}$, lo que indica que las salidas corresponden a una medición en cada partícula, diferente a las que proporcionaría una medición ideal

$$\mathcal{I}_2(\rho) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda} \mathcal{F}(P_{\lambda_i}) \otimes P_{\lambda_i} \rho P_{\lambda_i}. \quad (3.25)$$

Con esta alternativa el valor esperado se calcula como

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{I}_2} &= \text{Tr} \left([(\mathcal{O}) \otimes \mathbf{1}] \mathcal{I}_2 \right) \\
&= \text{Tr} \left([(\mathcal{O}) \otimes \mathbf{1}] \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \mathcal{F}(P_{\lambda_j}) \otimes P_{\lambda_j} \rho P_{\lambda_j} \right) \\
&= \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \text{Tr}(\mathcal{O} \mathcal{F}(P_{\lambda_j})) \text{Tr}(P_{\lambda_j} \rho).
\end{aligned}$$

finalmente el valor esperado es

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathcal{I}_2} = \sum_{\lambda_j \in \Lambda} \text{Tr}(\mathcal{O} \mathcal{F}(P_{\lambda_j})) \text{Tr}(P_{\lambda_j} \rho). \quad (3.26)$$

Este valor esperado no corresponde a (2.8) por lo que análogamente se tiene una proposición más general para la equivalencia de estos instrumentos en sistema de N partículas.

Proposición 3.4. *Para todo estado inicial ρ , los valores esperados de los instrumentos cuánticos 3.23 y 3.25 son equivalentes si y solo si*

$$\left\langle \lambda_j \left| \Pi_l^\dagger \mathcal{O} \Pi_l \right| \lambda_k \right\rangle = 0, \forall j \neq k \text{ y } \forall \Pi_l \in \mathcal{S}.$$

La demostración es análoga a la de la proposición 3.1.

CONCLUSIONES

A lo largo de los capítulos anteriores se ha llevado a cabo una discusión sobre ciertos conceptos y herramientas apropiadas para lograr una descripción completa de un tipo de medición imperfecta, las mediciones difusas en sistemas de dos o más partículas. En concreto, esta tesis se emplearon dos enfoques principales que vale la pena enfatizar.

En primer lugar, las medidas POVM junto con los operadores de Kraus, los cuales son la primera forma de aproximarse al problema. Los efectos de las medidas POVM analizadas brindan una distribución de probabilidad de acuerdo a cada una de las posibles salidas que pueden ocurrir en una medición difusa. Estos efectos fueron originados a partir del valor esperado de la medición para asegurar su idoneidad. Asimismo, los efectos también pueden descomponerse para dar origen a los operadores de Kraus, los cuales proporcionan el estado posterior a la medición. Esta descomposición no es única, pero en este estudio se examinaron las características de los efectos, con el fin de utilizar una descomposición simple.

Como segundo enfoque, se han examinado tres diferentes instrumentos cuánticos para sistemas de dos partículas. Estos instrumentos se utilizaron con el fin de analizar las mediciones difusas con distintas interpretaciones. Igualmente, se usaron para describir las mediciones de una forma sucinta, de modo que vinculan tanto las salidas clásicas como las salidas cuánticas de la medición. A pesar de que se esperaba que los instrumentos propuestos de manera intuitiva, modelaran correctamente la medición difusa, no resultó ser así. Solo uno de los tres instrumentos estudiados resultó brindar una especificación concisa y general de la medición difusa. En consecuencia, las condiciones en las que los instrumentos resultaban ser similares fueron estudiadas de manera exhaustiva.

Las mediciones difusas también fueron analizadas en sistemas más grandes de N partículas en los cuales se generalizaron los operadores de Kraus que describen completamente la medición. Estos operadores proporcionan tanto el mapeo de probabilidades para obtener las posibles salidas, así como el estado posterior correspondiente a cada

una de ellas. Los operadores de Kraus generales son parecidos a los estudiados en sistemas de dos partículas, sin embargo no son exactamente análogos. Esto se debe a la construcción que se utilizó para obtenerlos tomando como base el valor esperado y la composición del operador difuso en sistema de $N \geq 3$ partículas. Particularmente, el análisis en un sistema en el que se desea realizar una medición de un observable no factorizable, es comparable al de un observable que sí lo es.

Por último, el análisis de las mediciones difusas para diferentes observables, con estados iniciales dados, puede ser estudiado de forma más práctica mediante el programa creado que exhibe el valor esperado de la medición, así como el mapeo de probabilidad y el estado resultante.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. M. Wilde, “From classical to quantum Shannon theory,” *arXiv:1106.1445*, 2011.
- [2] L. A. de Castro, O. P. d. S. Neto, and C. A. Brasil, “An introduction to quantum measurements with a historical motivation,” *arXiv preprint arXiv:1908.03949*, 2019.
- [3] K. Jacobs, *Quantum measurement theory and its applications*. Cambridge University Press, 2014.
- [4] C. Pineda, D. Davalos, C. Viviescas, and A. Rosado, “Fuzzy measurements and coarse graining in quantum many-body systems,” *Physical Review A*, vol. 104, oct 2021.
- [5] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [6] J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2017.
- [7] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] J. Preskill, “Lecture Notes for Physics: Quantum Information and Computation, Chapter 3.” <http://theory.caltech.edu/~preskill/ph229/index.html>, 2015.
- [9] G. Jaeger, *Quantum information*. Springer, 2007.
- [10] A. Peres, *Quantum theory: concepts and methods*, vol. 72. Springer, 1997.
- [11] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics*. No. v. 1 in A Wiley - Interscience publication, Wiley, 1977.
- [12] M. C. S. Gómez, *Introducción al formalismo de la mecánica cuántica no relativista*. Universidad Nacional de Colombia, 2010.
- [13] “Programa para la descripción completa de n partículas.” Disponible en: <https://>

[//github.com/Mohs9/Descripcion-completa-de-una-medicion-difusa.git](https://github.com/Mohs9/Descripcion-completa-de-una-medicion-difusa.git).

APÉNDICE A

A.1. Lemas útiles

Lema A.1.1. Si $\forall \rho, \text{Tr}(A\rho) = 0$, entonces $A = \mathbf{0}$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $A \neq \mathbf{0}$. Entonces, sea $\rho = |a\rangle\langle a|$, con $|a\rangle$ un vector propio ortonormal, de A . Luego, al calcular $A|a\rangle\langle a|$, tenemos $A|a\rangle\langle a| = a|a\rangle\langle a|$ entonces, la traza de $A\rho$ es exactamente a , que es distinto de cero. Entonces, hemos encontrado una matriz A distinta de cero tal que la traza de $A\rho$ sea distinta de cero. De ello se deduce que $A = \mathbf{0}$ si no existe un ρ distinto de cero. ■

Lema A.1.2. El operador difuso $\mathcal{F}(\rho)$ es hermítico.

Demostración.

$$\mathcal{F}^\dagger(\rho) = \left(\sum_{\Pi_j \in \mathcal{S}} p_j \Pi_j \rho \Pi_j^\dagger \right)^\dagger = \sum_{\Pi_j \in \mathcal{S}} p_j \left(\Pi_j \rho \Pi_j^\dagger \right)^\dagger = \sum_{\Pi_j \in \mathcal{S}} p_j (\Pi_j^\dagger)^\dagger \rho \Pi_j^\dagger = \mathcal{F}(\rho).$$

■