

Universidad de San Carlos de Guatemala Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas Departamento de Física

ENTRELAZAMIENTO Y SEPARABILIDAD DE ESTADOS PUROS EN SUBESPACIOS BIDIMENSIONALES DE SISTEMAS BIPARTITOS DE DOS Y MÁS QUBITS

Carmen Subadra Echeverria Ayala

Asesorada por Dr. Carlos Francisco Pineda Zorrilla y Dr. Ángel Giovanni Ramírez García

Guatemala, junio de 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ENTRELAZAMIENTO Y SEPARABILIDAD DE ESTADOS PUROS EN SUBESPACIOS BIDIMENSIONALES DE SISTEMAS BIPARTITOS DE DOS Y MÁS QUBITS

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO A LA JEFATURA DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA POR

CARMEN SUBADRA ECHEVERRIA AYALA

ASESORADA POR DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA Y DR. ÁNGEL GIOVANNI RAMÍREZ GARCÍA

> AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE LICENCIADA EN FÍSICA APLICADA

> > GUATEMALA, JUNIO DE 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO INTERINO

Director	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Representante Docente	Arqta. Ana Verónica Carrera Vela
Representante Docente	M.A. Pedro Peláez Reyes
Representante de Egresados	Lic. Urías Amitaí Guzmán García
Representante de Estudiantes	Elvis Enrique Ramírez Mérida
Representante de Estudiantes	Oscar Eduardo García Orantes
Secretario	M.Sc. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

Director	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Examinador	Dra. Ana Beatriz Cosenza Muralles
Examinador	Dr. Ángel Giovanni Ramírez García
Examinador	Dr. Juan Adolfo Ponciano Castellanos
Secretario	M.Sc. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada



Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ref. D.DTG. 007-2024 Guatemala 10 de junio de 2024

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del jefe de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación titulado: "ENTRELAZAMIENTO Y SEPARABILIDAD DE ESTADOS PUROS EN SUBESPACIOS BIDIMENSIONALES DE SISTEMAS BIPARTITOS DE DOS Y MÁS QUBITS", presentado por la estudiante universitaria Carmen Subadra Echeverria Ayala, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.



"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera Director

88-2024 JMIC/Paola

AGRADECIMIENTOS

A mi querida madre, Carmencita, quien ha sido no solo mi ejemplo a seguir, sino una amiga incondicional que, durante todos estos años, se ha esforzado enormemente para que mi hermano y yo tengamos todo lo necesario en nuestro hogar. Por acompañarme en todo momento de enfermedad, alegría y tristeza, por escucharme cuando me costaban resolver los problemas de las tareas, por esas largas charlas sobre la vida y reírnos de nuestros chistes que solo nosotras entendemos, te amo mucho, madrecita.

A mi papá, Tavo (Q.E.P.D.), que aunque no esté presente, sigue en mi memoria como alguien que nunca se rindió ante nada y que me enseñó a valorar los pequeños momentos junto a las personas que quiero. Te llevaré en el corazón viejo, tu hija ha cumplido con varias metas, tal y como asegurabas.

A mi hermano Chejo y mi sobrina Sofi, por ser mis compañeros de vida y ser un gran apoyo para mí. Los quiero mucho, sigan luchando por sus metas, nunca se rindan.

A Carlos Pineda, por su paciencia para guiarme a lo largo de todo este proceso. Ha sido un gusto trabajar en esta área y aprender sobre varios temas que eran desconocidos para mí. Agradezco también a los proyectos UNAM-PAPIIT IG101421 y UNAM-PAPIIT IG101324.

A Karen Fonseca, de la Universidad Nacional de Colombia, por su valioso aporte para el desarrollo de este trabajo.

A Giovanni Ramírez, a quien aprecio y admiro por ser una persona dedicada, que comparte su conocimiento dentro y fuera de las aulas, le estoy agradecida por el apoyo que me ha brindado como profesor y como amigo, en momentos que han sido de gran dificultad para mí.

A Juan Diego Chang, por sus palabras de aliento desde el inicio de mis estudios en esta área, también por sus consejos, que me ayudaron a crecer como estudiante y por su valiosa colaboración en distintos proyectos que llevé a cabo.

A Rodolfo Samayoa, por su ardua labor como profesor, de quien he aprendido

mucho en los diversos cursos que ha impartido, así como por su constante apoyo en el desarrollo de la ECFM desde sus inicios. Ha sido un placer ser su estudiante y siempre lo admiraré por ser un profesor ejemplar.

A Rodrigo Sacahuí y Damián Ochoa, quienes además de ser mis profesores, han sido amigos que aprecio mucho por la confianza que han tenido en mí y por motivarme a luchar por mis metas.

A la AGF y la AEFM, por ser un apoyo no solo para mí sino para muchas de las personas que estudiamos física. Gracias por el esfuerzo que han realizado en todas y cada una de las actividades a favor de la ciencia en Guatemala.

A Claudia, Norma y a todas las personas que trabajan en la ECFM, por su paciencia al ayudarme y guiarme en los diversos trámites que fueron necesarios en todo este tiempo.

A las mujeres profesoras y estudiantes de la ECFM, por ser una inspiración para mí y para muchas de las futuras científicas.

A mis mejores amigos: Alex, Halisson, Mafer, Cristian y Carlos, por ser personas que me han brindado mucha alegría, que han estado conmigo en los buenos y malos momentos, los quiero mucho. A Alex: eres alguien increíble y con mucho talento, ¡sigue adelante con tus sueños! A Halisson: nos ha llegado la hora de más aventuras Ally, jaja. A Mafer: las risas y estrés nunca faltaron amiga. A Cristian: conocernos fue un buen evento canónico amistad. A Carlos: ¡tú puedes Charlie!, así como escuchaste.

A mis amigos de la universidad: Elser, Chepi, Lipe, Cindy, Félix, Luciano, Pablo, Marisol y Bryant, con quienes he tenido el placer de compartir alegrías, tristezas y demás. A Elser: no dudes de tus capacidades, sigue esforzándote como hasta ahora, como debe ser. A Chepi: le eché ganas mijo, jy sí pude!, jaja. A Lipe: gracias por ser mi gran amigo cuántico, ten paciencia y jmucho ánimo! A Cindy, Félix, Luciano, Pablo, Marisol y Bryant: estoy agradecida por la amistad que hemos tenido, me llevo bonitos recuerdos junto a ustedes y espero que continuemos así.

A mis amados compañeros de vida: Neka, Pillo, Mila y Pato, gracias por sus ronroneos, por cuidar de mí cuando más lo necesité y por darme tanto amor. Siempre los llevaré en mi corazón.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a Dios, a mi madre Carmen Ayala, a mi padre Gustavo Echeverría (Q.E.P.D.) y a mis amigos felinos Neka y Pillo.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDI	CE DE FIGURAS	IV
ÍNDI	CE DE TABLAS	VI
LIST	A DE SÍMBOLOS	VII
OBJI	ETIVOS	IX
INTF	RODUCCIÓN	XI
1. CO	ONCEPTOS PRINCIPALES	1
1.1.	Introducción	1
1.2.	Estados puros y mixtos	1
1.3.	Matriz densidad reducida	6
1.4.	Sistemas bipartitos	11
2. ES	STADOS PUROS SEPARABLES EN SUBESPACIOS BIDIMEN-	-
SI	ONALES	19
2.1.	Introducción	19
2.2.	El qubit y la esfera de Bloch \ldots	19
2.3.	Sistemas de dos qubits	22
2.4.	Resultados	26
2.5.	Estados puros de un qubit	32
3. ES	STADOS PUROS ENTRELAZADOS EN SUBESPACIOS BIDI-	
\mathbf{M}	ENSIONALES	37
3.1.	Introducción	37
3.2.	Concurrencia y entropía de entrelazamiento $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	37
3.3.	Construcción de estados entrelazados	41

4. SISTEMAS BIPARTITOS DE TRES Y MÁS QUBITS 4			
4.1. Introducción $\ldots \ldots 4$			
4.2. Estados de tres qubits	49		
4.3. Casos de cuatro y más qubits	54		
CONCLUSIONES 5			
TRABAJO FUTURO			
A. Pureza γ_A para estados puros de dos qubits 6			
B. Estados $ \phi_A\rangle$ y $ \phi_B\rangle$ de un qubit			
C. Estados base de tres qubits 7			

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	Visualización de estados puros de un qubit en la esfera de Bloch.	
	Fuente: elaboración propia.	22
2.2.	Estados $ 0\rangle$ y $ 1\rangle$ en la esfera de Bloch. Fuente: elaboración propia	23
2.3.	Valores θ , ϕ (puntos blancos) en donde γ_A es 1 para la base $ v_1^1\rangle$ y	
	$ v_2^1\rangle$. Fuente: elaboración propia	28
2.4.	Valores θ , ϕ (puntos blancos) en donde γ_A es 1 para la base $ v_1^2\rangle$ y	
	$ v_2^2\rangle$. Fuente: elaboración propia	28
2.5.	Pureza en el subespacio correspondiente a la base $\{ v_1^3\rangle, v_2^3\rangle\}$. En este	
	caso, existen varios estados separables en $\theta=0$ (área roja). Fuente:	
	elaboración propia.	31
3.1.	Concurrencia en el subespacio correspondiente a la base $\{\left v_{1}^{1}\right\rangle,\left v_{2}^{1}\right\rangle\}$	
	Fuente: elaboración propia.	38
3.2.	Concurrencia en el subespacio correspondiente a la base $\{ v_1^2\rangle, v_2^2\rangle\}$.	
	Fuente: elaboración propia.	38
3.3.	Entropía de entrelazamiento en el subespacio correspondiente a la	
	base $\{ v_1^1\rangle, v_2^1\rangle\}$. Fuente: elaboración propia	39
3.4.	Entropía de entrelazamiento en el subespacio correspondiente a la	
	base $\{ v_1^2\rangle, v_2^2\rangle\}$. Fuente: elaboración propia	39
3.5.	Concurrencia $C(\gamma_A)$ y entropía de entrelazamiento $E(\gamma_A)$, para esta-	
	dos de dos qubits. En este caso se tiene que $\frac{1}{2} \leq \gamma_A \leq 1$. Fuente:	
	elaboración propia.	40
3.6.	Pureza en el subespacio correspondiente a la base $\{ v_1^5\rangle, v_2^5\rangle\}$. En este	
	caso, existen varios estados con pureza $\gamma_{A\min} = 0.75$ en $\theta = \pi/2$	
	(área violeta). Fuente: elaboración propia	42
3.7.	Valores θ , ϕ (punto negro) en donde γ_A es mínima para la base B_1 .	
	Fuente: elaboración propia.	43
3.8.	Valores θ , ϕ (punto negro) en donde γ_A es mínima para la base B_3 .	
	Fuente: elaboración propia.	43

3.9.	Concurrencia y rectas que unen a los máximos con los mínimos, en	
	el subespacio asociado a la base B_4 . Cada valor de C en el rango	
	$[C_{\min}, C_{\max}]$, corresponde a algún punto sobre ambas rectas. Fuente:	
	elaboración propia.	45
3.10.	Concurrencia en el subespacio asociado a la base B_4 . Algunos de los	
	pares $\{\theta, \phi\}$, que corresponden a estados con una concurrencia de	
	0.42, se señalan con puntos rojos. Fuente: elaboración propia	46
4.1.	Valores θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\rm max}\approx$	
	0.97, para la base B_7 de la tabla C.1. Fuente: elaboración propia	51
4.2.	Valores θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx$	
	0.93, para la base B_{10} de la tabla C.1. Fuente: elaboración propia.	51
4.3.	Valores de $\{\theta, \phi\}$ (puntos blancos), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} =$	
	0.75, para la base $\{ v_1^4\rangle, v_2^4\rangle\}$. Fuente: elaboración propia	52
4.4.	Valores de $\{\theta, \phi\}$ (puntos blancos), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} =$	
	1, para la base $\{ v_1^5\rangle, v_2^5\rangle \}$. Fuente: elaboración propia	52
4.5.	Valores de θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx$	
	0.89, para el caso 2 de la tabla 4.2. Fuente: elaboración propia	55
4.6.	Valores de θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx$	
	0.39, para el caso 4 de la tabla 4.2. Fuente: elaboración propia	55
4.7.	Valores de θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx$	
	0.59, para el caso 5 de la tabla 4.2. Fuente: elaboración propia	56
4.8.	Valores de θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx$	
	0.27, para el caso 7 de la tabla 4.2. Fuente: elaboración propia	56
4.9.	Caso 2 de la tabla 4.2. Se muestran los valores θ y ϕ (puntos blancos),	
	correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} = 1$, para la base $\{ v_1^6\rangle, v_2^6\rangle\}$.	
	Fuente: elaboración propia.	57
4.10.	Caso 4 de la tabla 4.2. Pureza en el subespacio correspondiente a	
	la base $\{ v_1^7\rangle, v_2^7\rangle\}.$ En este caso existen varios estados asociados a	
	$\gamma_{A\max} = 1$, en $\theta = \pi$ (área roja). Fuente: elaboración propia	57

ÍNDICE DE TABLAS

2.1.	Coeficiente A de los estados separables encontrados por ambos méto- dos para algunos de los subespacios explorados. Fuente: elaboración propia	32
2.2.	Coeficiente B de los estados separables encontrados por ambos méto- dos para algunos de los subespacios explorados. Fuente: elaboración propia.	32
3.1.	Valores de pureza mínima, encontrados en los subespacios correspon- dientes a las bases B_i , presentadas en la tabla B.1 (ver apéndice B).	
	Fuente: elaboración propia.	41
3.2.	Concurrencia máxima y mínima, en el subespacio generado por la base B_4 . Fuente: elaboración propia.	45
4.1.	Valores de pureza máxima, encontrados en los subespacios correspon-	
	dientes a las bases B_i , presentadas en la tabla C.1 (ver apéndice C).	
	Fuente: elaboración propia.	50
4.2.	Casos que serán considerados en la búsqueda de estados separables,	
	para sistemas bipartitos. Fuente: elaboración propia.	55
B.1.	Cinco de los estados base (de dos gubits) utilizados en la exploración	
	de subespacios bidimensionales. Fuente: elaboración propia	70
B.2.	Estados separables de dos qubits, $K_1 \Psi_1\rangle \ge K_2 \Psi_2\rangle$, encontrados en los subespacios correspondientes a las bases B_i de la tabla B.1. Se muestran los estados de un qubit $ \phi_i\rangle$ calculados para cada estado se- parable, $K_1 \Psi_1\rangle = \phi_1\phi_2\rangle \ge K_2 \Psi_2\rangle = \phi_3\phi_4\rangle$. Consultar el repositorio https://github.com/Subadra-E/Tesis para obtener más resultados y continuar con la exploración de subespacios bidimensionales. Fuente:	
	elaboración propia.	70

C.1.	Cinco de los estados base de tres qubits, que fueron utilizados en	
	la exploración de subespacios bidimensionales. Fuente: elaboración	
	propia	71

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
${\cal H}$	Espacio de Hilbert o espacio de estado.
$ \psi angle$	Representación del vector de estado en la notación de Dirac, mejor
	conocido como <i>ket</i> .
$\langle \psi $	Vector dual a $ \psi\rangle$ en la notación de Dirac. Se le conoce también
	como <i>bra</i> .
$\langle \psi \phi angle$	Producto interno entre dos vectores en la notación de Dirac. Suele
	conocerse como <i>braket</i> .
$ \psi angle\!\langle\phi $	Producto externo entre dos vectores en la notación de Dirac. Suele
	ser conocido como <i>ketbra</i> .
$\overline{\langle\psi \phi angle}$	Conjugado complejo de $\langle \psi \phi \rangle$.
$\operatorname{Tr}(M)$	Traza del operador M .
M^{\dagger}	Operador adjunto de M .
$\langle M \rangle$	Valor esperado del operador M .
1	Operador identidad.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
$\overline{c_i}$	Conjugado del número complejo c_i .
$\{p_i, \psi_i\rangle\}$	Ensamble estadístico de los estados puros $ \psi_i\rangle$.
p_i	Probabilidad asociada al estado $ \psi_i\rangle$.
ho	Matriz densidad.
ab angle	Producto tensorial $ a\rangle \otimes b\rangle$, de dos vectores.
$\langle \psi_i ho \psi_j angle$	Elemento ρ_{ij} de la matriz densidad, en la base $\{ \psi_k\rangle\}$.
$ ho^{AB}$	Matriz densidad de un sistema bipartito.
$\operatorname{Tr}_{B}\left(\rho^{AB}\right)$	Traza parcial de ρ^{AB} sobre el subsistema B .
$ ho^A$	Matriz densidad reducida asociada al subsistema A .
γ	Pureza.
γ_A	Pureza correspondiente a ρ^A .

Símbolo	Significado
λ_i	Coeficientes de Schmidt.
C	Concurrencia de ρ^{AB} .
E	Entropía de entrelazamiento de ρ^{AB} .
β_i	Autovalores de ρ^A .
θ	Ángulo polar en la esfera de Bloch.
ϕ	Ángulo azimutal en la esfera de Bloch.
$\gamma_{A\max}$	Valor máximo de γ_A en el subespacio considerado.
$\gamma_{A\min}$	Valor mínimo de γ_A en el subespacio considerado.
$\{ heta_{\max}, \phi_{\max}\}$	Valores de θ y ϕ que corresponden a $\gamma_{A\max}$.
$\{ heta_{\min},\phi_{\min}\}$	Valores de θ y ϕ que corresponden a $\gamma_{A\min}$.

OBJETIVOS

General

Estudiar el entrelazamiento y separabilidad de estados puros para sistemas bipartitos de dos y más qubits, en subespacios complejos bidimensionales.

Específicos

- 1. Estudiar analíticamente la existencia de estados puros separables de dos qubits en subespacios complejos bidimensionales.
- 2. Estudiar el entrelazamiento para el caso de estados puros de dos qubits en subespacios complejos bidimensionales, haciendo uso de la concurrencia y entropía de entrelazamiento.
- 3. Buscar numéricamente, en los subespacios complejos bidimensionales, estados puros de dos qubits asociados a un entrelazamiento determinado.
- Explorar numéricamente, la existencia de estados estados puros separables para sistemas bipartitos de tres y más qubits, en subespacios complejos bidimensionales.

INTRODUCCIÓN

El entrelazamiento es uno de los fenómenos más destacados y estudiados en el campo de la mecánica cuántica. Uno de los eventos que ha marcado a la historia de la ciencia inicia con un artículo publicado en 1935 por A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen [10]. En él se presenta a la conocida paradoja EPR [16], cuyo objetivo fue mostrar la aparente problemática que había con la mecánica cuántica y que condujo a clasificarla como una teoría incompleta. Sin embargo, fue el físico Erwin Schrödinger [20] quien utilizó el término entrelazamiento cuántico, para referirse al fenómeno responsable de la disputa ya mencionada. Más tarde, gracias a las propuestas realizadas por Jhon Bell [3], se comenzaron a realizar experimentos para comprobar la validez de la mecánica cuántica, por medio de la verificación de las desigualdades de Bell [16, 17]. Los resultados [1, 11] obtenidos a lo largo del tiempo, han favorecido a la mecánica cuántica, lo que a su vez motivó a estudiar el entrelazamiento y sus diversas aplicaciones. La teleportación cuántica [6] y la criptografía cuántica [13] son ejemplos de estas aplicaciones, en las cuales se continúa trabajando hoy en día.

En este trabajo se estudiará el entrelazamiento y separabilidad de estados puros bipartitos. A pesar de la existencia del entrelazamiento cuántico, no debe descartarse la posibilidad de que el sistema de interés, se encuentre en un estado no entrelazado o *separable* [7]. La tarea de determinar si un estado cuántico es separable, sigue tratándose en la actualidad y suele llamarse *problema de separabilidad* [12]. Estudiar la separabilidad de manera general, a menudo llega a ser un problema *NP-complejo*. Sin embargo, existen casos específicos en los que se logra simplificar el análisis, como sucede con los estados puros en sistemas bipartitos. Estos estados serán interés de acá de adelante, para los cuales se realizará un análisis de separabilidad y de entrelazamiento. Es por ello que, la primera parte de este trabajo, se enfocará en la presentación de herramientas teóricas que serán útiles en el desarrollo del análisis ya mencionado.

Específicamente, la atención se centrará en trabajar con estados puros compuestos por qubits, en subespacios complejos bidimensionales. La teoría abordada en los primeros dos capítulos servirá para llevar a cabo una exploración de subespacios. Esta consistirá en analizar el entrelazamiento de estados puros en distintos subespacios complejos bidimensionales, y realizar una búsqueda de estados separables en los mismos. Se comenzará por determinar la existencia de estados puros separables en los subespacios de sistemas de dos qubits. Seguidamente, se evaluará entrelazamiento en los subespacios por medio del cálculo de la concurrencia [21] y entropía [5, 8]. Con ello, se dará paso al desarrollo de un método que permita ubicar estados puros, con el grado de entrelazamiento que sea de interés. Finalmente, para completar la exploración, se van a tomar distintos casos de sistemas bipartitos compuestos por tres y más qubits. En esta última tarea, se volverá a realizar una búsqueda de estados separables para cada caso considerado en los nuevos subespacios. Es así como se invita a observar con más detalle, los cálculos y resultados que se presentan en los capítulos siguientes.

1. CONCEPTOS PRINCIPALES

1.1. Introducción

En el estudio de sistemas cuánticos, se necesita de una herramienta analítica que pueda representar al estado en el que se encuentra el sistema en consideración, ya que con su ayuda puede obtenerse información variada y de interés. Esta herramienta es de la que se hablará en la sección 1.2, en donde primero se establecerá la diferencia entre estados puros y mixtos, lo que dará lugar a definir a la *matriz densidad*, que es utilizada para describir ambos tipos de estados. Además, también se estará definiendo a la *pureza*, la cual depende de la matriz densidad y ayuda a determinar si el estado que se tiene es puro o mixto, dependiendo de su valor.

Una vez teniendo conocimiento sobre los conceptos descritos en la primer parte, se estará analizando la forma de la matriz densidad para sistemas compuestos en la sección 1.3, donde aparecerá otra herramienta útil al contar con varios subsistemas, llamada *matriz densidad reducida*. A partir de acá se estará trabajando con sistemas bipartitos y en la sección 1.4, se analizarán a los estados puros de estos sistemas y para los cuales se estudiará el entrelazamiento cuántico, que es uno de los objetivos de este trabajo. Al terminar este capítulo, se contará con tres formas para distinguir si un estado es separable o entrelazado; estas son: por medio del cálculo de la pureza, *concurrencia* y *entropía de entrelazamiento*.

1.2. Estados puros y mixtos

Para comenzar con la descripción de estados cuánticos, es útil presentar las características del vector de estado. Si se considera que el estado de un sistema es descrito por el vector complejo o ket $|\psi\rangle$, de dimensión d, entonces este vector

conocido como vector de estado del sistema, será de la siguiente forma

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} c_i |v_i\rangle.$$
(1.1)

En la expresión anterior, el conjunto de vectores $\{|v_i\rangle\}$, forman una base ortonormal en el espacio de Hilbert o espacio de estado \mathcal{H} , y c_i son coeficientes complejos que satisfacen la condición de normalización [9],

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{i} |c_i|^2 = 1.$$
(1.2)

Si el estado de un sistema cuántico está determinado por un único vector, de la forma colocada en (1.1), entonces se trata de un estado *puro*. En este caso, los cálculos de interés pueden realizarse con ayuda de $|\psi\rangle$; pero existe otra forma de representar a este estado y es por medio de la *matriz densidad*

$$\rho = |\psi\rangle\!\langle\psi|\,,\tag{1.3}$$

que es una matriz de dimensión $d \times d$ y que actúa sobre \mathcal{H} [9]. Además, los elementos de ρ pueden calcularse con ayuda de la ecuación (1.1)

$$\rho_{ij} = \langle v_i | \rho | v_j \rangle = \langle v_i | \psi \rangle \langle \psi | v_j \rangle = \underbrace{\langle v_i | \psi \rangle}_{c_i} \underbrace{\overline{\langle v_j | \psi \rangle}}_{\overline{c_j}} = c_i \overline{c_j}.$$
(1.4)

Se observa entonces que ρ depende de los elementos c_i que acompañan a $|\psi\rangle$; de este modo, se tiene que puede utilizarse al vector de estado o a la matriz densidad asociada a $|\psi\rangle$ en los análisis a realizar.

Por otro lado, el sistema puede encontrarse en un ensamble estadístico de estados puros $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ o también conocido como *estado mixto*. En cambio, ahora se tiene a un conjunto de estados que pueden describir al sistema, por lo que ya no es posible utilizar a un único vector de estado. Es por ello que se utiliza a la matriz densidad

$$\rho = \sum_{i} p_i \left| \psi_i \right\rangle \!\! \left\langle \psi_i \right|, \tag{1.5}$$

que corresponde a un estado mixto, siendo p_i la probabilidad de que al medir, el

sistema se encuentre en el estado $|\psi_i\rangle^*$; además, estas probabilidades deben cumplir con lo siguiente [9]

$$0 \le p_i \le 1, \qquad \sum_i p_i = 1.$$
 (1.6)

Cabe notar también, que a partir de la ecuación (1.5), puede obtenerse el caso puro; esto se observa recordando que se tiene un solo elemento con una probabilidad p = 1

$$\rho = p |\psi\rangle\!\langle\psi| = |\psi\rangle\!\langle\psi| \,. \tag{1.7}$$

Como ayuda para terminar de entender la diferencia entre estados puros y mixtos, se presentarán dos ejemplos. Considerar a las siguientes matrices densidad,

$$\rho_1 = \frac{3}{4} |\phi_1\rangle \langle \phi_1| + \frac{\sqrt{3}}{4} |\phi_1\rangle \langle \phi_2| + \frac{\sqrt{3}}{4} |\phi_2\rangle \langle \phi_1| + \frac{1}{4} |\phi_2\rangle \langle \phi_2|, \qquad (1.8)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{3} |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + \frac{2}{9} |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + \frac{4}{9} |\psi_3\rangle \langle \psi_3|.$$
(1.9)

La matriz densidad ρ_1 , describe a un estado puro; mientras que ρ_2 , corresponde a un estado mixto. Para poder distinguir que ρ_1 es puro, puede reescribirse a la ecuación (1.8) como sigue

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} |\phi_1\rangle \left(\sqrt{3} \langle \phi_1 | + \langle \phi_2 | \right) + \frac{1}{4} |\phi_2\rangle \left(\sqrt{3} \langle \phi_1 | + \langle \phi_2 | \right)$$
(1.10)

$$= \frac{1}{4} \left(\sqrt{3} |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle \right) \left(\sqrt{3} \langle \phi_1| + \langle \phi_2| \right)$$
(1.11)

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} |\phi_1\rangle + \frac{1}{2} |\phi_2\rangle\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \langle\phi_1| + \frac{1}{2} \langle\phi_2|\right).$$
(1.12)

De la última igualdad, se observa que ρ_1 corresponde al estado puro $\frac{\sqrt{3}}{2} |\phi_1\rangle + \frac{1}{2} |\phi_2\rangle$; mientras que el estado ρ_2 es de la forma escrita en (1.5), con las probabilidades $p_1 = 1/3$, $p_2 = 2/9$ y $p_3 = 4/9$, asociadas a los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ y $|\psi_3\rangle$ respectivamente; por lo que corresponde a un estado mixto.

La *matriz densidad* debe cumplir con ciertas propiedades que se expondrán a continuación, donde se tomará como guía al libro de Nielsen y Chuang [16].

Teorema 1.2.1. (Caracterización de operadores densidad). Un operador densidad ρ es el operador densidad asociado a algún ensamble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y solo si

^{*}Esto es cierto si el conjunto $\{|\psi_i\rangle\}$ es ortonormal, de lo contrario se tendrá una expresión distinta para la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\psi_i\rangle$.

satisface las siguientes condiciones:

(1) (Condición de traza) ρ tiene una traza igual a uno.

(2) (Condición de positividad) ρ es un operador positivo.

Demostración. Consultar [16, p. 101]

La primer condición establece lo mencionado en la ecuación (1.6). La traza de la matriz densidad viene dada por la suma de las probabilidades p_i ; que a su vez, son los autovalores de ρ . Además, de la segunda condición, resulta que los autovalores de ρ son reales no negativos, como se espera para los valores p_i colocados en la ecuación (1.6). Teniendo lo anterior en consideración, se debe destacar que al calcular la transpuesta conjugada de ρ , se obtiene

$$\rho^{\dagger} = \left(\sum_{i} p_{i} |\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}|\right)^{\dagger} = \sum_{i} \left(p_{i} |\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}|\right)^{\dagger} = \sum_{i} \overline{p_{i}} |\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}| = \sum_{i} p_{i} |\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}| = \rho;$$

esto quiere decir que ρ satisface la condición de hermiticidad, la cual es de importancia al trabajar con observables. Habiendo presentado estas dos carácterísticas de la matriz densidad, un ejemplo en donde pueden verificarse es tomando al estado ρ_2 , que se encuentra en la ecuación (1.9). Se tiene que la suma de las probabilidades p_i es igual a 1 y luego si se calcula lo siguiente,

$$\langle \phi | \rho_2 | \phi \rangle = \frac{1}{3} \langle \phi | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | \phi \rangle + \frac{2}{9} \langle \phi | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \phi \rangle + \frac{4}{9} \langle \phi | \psi_3 \rangle \langle \psi_3 | \phi \rangle$$
(1.13)

$$= \frac{1}{3}|c_1|^2 + \frac{2}{9}|c_2|^2 + \frac{4}{9}|c_3|^2 > 0, \qquad (1.14)$$

en donde se ha denotado a $c_i = \langle \psi | \phi_i \rangle$, se verifica que ρ_2 también cumple con la condición de positividad. Esto es porque para todo estado $|\phi\rangle$, sobre el cual actúa ρ_2 , el resultado de $\langle \phi | \rho_2 | \phi \rangle$ es mayor a cero.

Una forma de distinguir entre estados puros y mixtos, es por medio del cálculo de la *pureza* de ρ . Para un estado ρ , la pureza se obtiene al calcular la traza de la matriz densidad al cuadrado

$$\gamma = \operatorname{Tr}(\rho^2), \tag{1.15}$$

la que su vez, está acotada por los valores 1/d y 1, donde d es la dimensión del

espacio de estado sobre el que actúa ρ

$$\frac{1}{d} \le \gamma \le 1. \tag{1.16}$$

Cuando $\gamma = 1$, se trata de un estado puro, pero si $\gamma < 1$ el estado será mixto [16]. La demostración de la ecuación (1.16), se realizará a continuación.

Demostración. Primero, considerar al caso finito en la desigualdad de Jensen [15, p. 204], que establece lo siguiente:

Teorema 1.2.2 (Desigualdad de Jensen: Forma finita). Sea $n \in \mathbb{N}$, y sean $a < x_1 \leq \ldots \leq x_n < b$ números reales. Además, sean q_1, \ldots, q_n números reales tales que para todo $k = 1, \ldots, n$ cumplan con $\sum_{i=1}^n q_i > 0$ y $0 \leq \sum_{i=k}^n q_i \leq \sum_{i=1}^n q_i$. Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función continua y convexa, entonces

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i x_i}{\sum_{i=1}^n q_i}\right) \le \frac{\sum_{i=1}^n q_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n q_i}.$$

Retomando la demostración; se
a $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\!\langle\psi_i|$ un operador densidad para el cual se calcula la pureza,

$$\gamma = \operatorname{Tr}\left(\sum_{i} p_{i} |\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}|\sum_{j} p_{j} |\psi_{j}\rangle\langle\psi_{j}|\right)$$
$$= \operatorname{Tr}\left(\sum_{i} \sum_{j} p_{i}p_{j} |\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}|\psi_{j}\rangle\langle\psi_{j}|\right)$$
$$= \operatorname{Tr}\left(\sum_{i} p_{i}^{2} |\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}|\right)$$
$$= \sum_{i} p_{i}^{2}\operatorname{Tr}\left(|\psi_{i}\rangle\langle\psi_{i}|\right) = \sum_{i} p_{i}^{2},$$

entonces, si se considera al teorema (1.2.2), con $f = x^2$, $x_i = p_i$, $q_i = 1$ y n = d; se tiene la siguiente desigualdad

$$\left(\frac{\sum_i p_i}{d}\right)^2 \le \frac{\sum_i p_i^2}{d},$$

pero $\sum_i p_i = 1$ y, de este modo

$$\frac{1}{d} \le \sum_{i} p_i^2 = \gamma,$$

por lo que se ha encontrado la cota inferior para el valor de γ .

Por otro lado, para un estado puro, existe un único vector $|\psi\rangle$ con probabilidad p = 1, y así $\gamma = \sum_i p_i^2 = 1$. Por lo tanto, se ha encontrado un valor mínimo y máximo para la pureza, completando así la demostración.

Como ejemplo, se calculará la pureza de los siguientes estados

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad \rho_4 = \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Al calcular el cuadrado de las matrices densidad se tiene

$$\rho_3^2 = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 4/9 \end{pmatrix}, \quad \rho_4^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

y así, la pureza resultante es

$$\gamma_3 = \operatorname{Tr}(\rho_3^2) = 5/9, \qquad \gamma_4 = \operatorname{Tr}(\rho_4^2) = 1.$$

Se concluye entonces que, ρ_3 es un estado mixto y ρ_4 es un estado puro; en este último caso, se observa que $\rho_4 = \rho_4^2$, lo cual se cumple para todos los estados puros. Para comprobarlo, se realiza el cálculo de ρ^2 tomando a la matriz densidad colocada en (1.3) y considerando la condición de normalización en (1.2), obteniendo así

$$\rho^{2} = (|\psi\rangle\!\langle\psi|) \, (|\psi\rangle\!\langle\psi|) = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1} \langle\psi| = |\psi\rangle\!\langle\psi| = \rho,$$

que es válido únicamente al tratar con estados puros, ya que en general $\rho^2 \neq \rho$, como se muestra en los cálculos realizados para la demostración de (1.16).

1.3. Matriz densidad reducida

Un sistema puede a su vez, estar compuesto por n subsistemas y a cada uno de ellos, le corresponde su propio espacio de estado. Existen ocasiones en las que se trabaja con sistemas de varias partículas, las cuales pueden ser consideradas en distintas particiones, por lo que se contará con un espacio de Hilbert asociado a cada subsistema. Es por ello que ahora es conveniente hacer mención del cuarto postulado de la mecánica cuántica en el formalismo de la matriz densidad, presentado por Nielsen y Chuang [16, p. 102].

Postulado 4: El espacio de Hilbert total \mathcal{H}_T de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de Hilbert \mathcal{H}_i de los *n* sistemas físicos componentes

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_n$$

Además, si el sistema número *i* se prepara en el estado ρ_i , entonces el estado conjunto del sistema total es $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes ... \otimes \rho_n$.

El postulado anterior permite conocer la forma que tienen los operadores que actúan sobre \mathcal{H}_T , además de ser la principal guía a la hora de trabajar con el operador ρ_T que representa al estado del sistema completo.

Una de las herramientas importantes, al trabajar con sistemas compuestos, es la matriz densidad reducida, la cual posee información sobre uno de los subsistemas. Con el objetivo de presentar este nuevo concepto, se tomará el caso en donde se supondrá que el estado que describe al sistema de interés es ρ^{AB} ; el cual está compuesto a su vez, por los sistemas $A ext{ y } B$. Entonces, la matriz densidad reducida del sistema A, se define como

$$\rho^A \equiv \operatorname{Tr}_B\left(\rho^{AB}\right),\tag{1.17}$$

donde $\operatorname{Tr}_B(\rho^{AB})$ es la traza parcial de ρ^{AB} sobre el sistema B [16]. En el cálculo de (1.17), el subíndice B significa que se estará utilizando solamente a una base del espacio de Hilbert asociado a este sistema [19]; es decir,

$$\rho^{A} = \operatorname{Tr}_{B}\left(\rho^{AB}\right) = \sum_{p} \left\langle b_{p} \right| \rho^{AB} \left| b_{p} \right\rangle, \qquad (1.18)$$

donde $\{|b_j\rangle\}$ es una base ortonormal en \mathcal{H}_B .

Para entender la importancia y la interpretación física de la matriz densidad reducida, se profundizará en el análisis presentado por Benenti en [4]. Para ello, se retomará el caso en el que se tienen dos sistemas A y B, cuyo estado ρ^{AB} estará descrito por

$$\rho^{AB} = \sum_{lm} \sum_{kn} \rho^{AB}_{lm;kn} \left| a_l b_m \right\rangle \!\! \left\langle a_k b_n \right|, \qquad (1.19)$$

donde

$$\rho_{lm;kn}^{AB} = \left\langle a_l b_m \right| \rho^{AB} \left| a_k b_n \right\rangle$$

son los elementos de la matriz ρ^{AB} y $\{|a_i\rangle\}$, $\{|b_j\rangle\}$ son bases ortonormales de los espacios de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente.

Como siguiente paso, se calculará el valor esperado del operador

$$M = M_A \otimes \mathbb{1}_B,$$

que actúa sobre el sistema completo, mientras que M_A es un operador que actúa sobre el sistema A y $\mathbb{1}_B$ es la identidad en el espacio de Hilbert \mathcal{H}_B . Por otro lado, se tiene que si un sistema se encuentra en un estado ρ , entonces el valor esperado de un operador P, que actúa sobre el espacio de estado de ρ , es

$$\langle P \rangle = \operatorname{Tr}(\rho P).$$

Así, el valor esperado de M es

$$\langle M \rangle = \operatorname{Tr} \left(\rho_{AB} M \right) = \operatorname{Tr} \left(\rho_{AB} M_A \otimes \mathbb{1}_B \right)$$

=
$$\sum_{ij} \langle b_j a_i | \rho_{AB} M_A \otimes \mathbb{1}_B | a_i b_j \rangle ,$$

pero si se toma la expresión de la ecuación (1.19) y se sustituye en la ecuación anterior, se obtiene

$$\langle M \rangle = \sum_{ij} \langle b_j a_i | \left(\sum_{lm} \sum_{kn} \rho_{lm;kn}^{AB} | a_l b_m \rangle \langle a_k b_n | \right) (M_A \otimes \mathbb{1}_B) | a_i b_j \rangle$$

$$= \sum_{ij} \langle b_j a_i | \left(\sum_{lm} \sum_{kn} \rho_{lm;kn}^{AB} | a_l b_m \rangle \langle a_k b_n | \right) (M_A | a_i \rangle) \otimes | b_j \rangle$$

$$= \sum_{ij} \sum_{lm} \sum_{kn} \rho_{lm;kn}^{AB} \underbrace{\langle a_i | a_l \rangle}_{\delta_{il}} \underbrace{\langle b_j | b_m \rangle}_{\delta_{jm}} \langle a_k | M_A | a_i \rangle \underbrace{\langle b_n | b_j \rangle}_{\delta_{nj}}$$

$$\langle M \rangle = \sum_{ijk} \rho_{i,j;k,j}^{AB} \langle a_k | M_A | a_i \rangle .$$
 (1.20)

Cabe notar que se ha tomado solo a ρ^{AB} en los cálculos realizados; pero ahora se realizará otro análisis que involucrará a ρ^A . Si se toma la expresión para ρ^{AB} colocada en la ecuación (1.19) y se sustituye en (1.18), se obtiene

$$\rho^{A} = \sum_{p} \langle b_{p} | \left(\sum_{lm} \sum_{kn} \rho_{lm;kn}^{AB} | a_{l} b_{m} \rangle \langle a_{k} b_{n} | \right) | b_{p} \rangle$$
$$= \sum_{p} \sum_{lm} \sum_{kn} \rho_{lm;kn}^{AB} | a_{l} \rangle \langle a_{k} | \langle b_{p} | b_{m} \rangle \langle b_{n} | b_{p} \rangle = \sum_{plk} \rho_{lp;kp}^{AB} | a_{l} \rangle \langle a_{k} | ,$$

donde los elementos de la matriz ρ^A son

$$(\rho^{A})_{rs} = \langle a_{r} | \rho^{A} | a_{s} \rangle = \langle a_{r} | \left(\sum_{plk} \rho^{AB}_{lp;kp} | a_{l} \rangle \langle a_{k} | \right) | a_{s} \rangle$$
(1.21)

$$=\sum_{plk}\rho_{lp;kp}^{AB}\left\langle a_{r}|a_{l}\right\rangle \left\langle a_{k}|a_{s}\right\rangle =\sum_{p}\rho_{rp;sp}^{AB}.$$
(1.22)

Entonces, retomando la ecuación (1.20) y reescribiéndola,

$$\langle M \rangle = \sum_{ik} \left(\sum_{j} \rho_{ij;kj}^{AB} \right) \langle a_k | M_A | a_i \rangle,$$

luego, si se compara con la ecuación (1.22), $\langle M \rangle$ puede escribirse como sigue

$$\langle M \rangle = \sum_{ik} \langle a_i | \rho^A | a_k \rangle \langle a_k | M_A | a_i \rangle = \sum_i \langle a_i | \rho^A \underbrace{\left(\sum_k |a_k\rangle \langle a_k |\right)}_{\mathbb{1}_A} M_A | a_i \rangle \quad (1.23)$$
$$= \sum_i \langle a_i | \rho^A M_A | a_i \rangle = \operatorname{Tr} \left(\rho^A M_A\right). \quad (1.24)$$

Las ecuaciones (1.20) y (1.24) indican que, es posible calcular el valor esperado de un operador que actúa en el sistema A, utilizando a ρ^{AB} o a la matriz densidad reducida ρ^A . Es decir, que el operador de densidad reducida brinda las estadísticas de medición correctas para alguna medición realizada en el sistema A [9, p. 106].

Muchas veces el cálculo de la traza parcial, puede simplificarse dependiendo del operador al que se aplique esta operación. Por ejemplo, considerar un operador de la forma $|u_1\rangle\langle u_2|\otimes |v_1\rangle\langle v_2|$; donde $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ y $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ son dos pares de vectores

en los espacios de estado de los subsistemas C y D respectivamente. Entonces, la traza parcial de este operador sobre el segundo subsistema, puede expresarse como sigue

$$\operatorname{Tr}_{D}\left(\left|u_{1}\right\rangle\!\!\left\langle u_{2}\right|\otimes\left|v_{1}\right\rangle\!\!\left\langle v_{2}\right|\right)=\sum_{i}\left\langle d_{i}\right|\left(\left|u_{1}\right\rangle\!\!\left\langle u_{2}\right|\otimes\left|v_{1}\right\rangle\!\!\left\langle v_{2}\right|\right)\left|d_{i}\right\rangle$$
(1.25)

$$= |u_1\rangle\!\langle u_2| \otimes \sum_i \langle d_i | v_1 \rangle \langle v_2 | d_i \rangle \tag{1.26}$$

$$= |u_1\rangle\!\langle u_2| \otimes \underbrace{\operatorname{Tr}\left(|v_1\rangle\!\langle v_2|\right)}_{\langle v_2|v_1\rangle} = \langle v_2|v_1\rangle |u_1\rangle\!\langle u_2|, \qquad (1.27)$$

donde $\{d_i\}$ es la base ortonormal en el espacio de Hilbert del sistema D. La igualdad colocada en (1.27), será de utilidad en los cálculos que siguen a continuación.

También puede calcularse la pureza de los estados descritos por las matrices de densidad reducidas. Cada una de ellas representa un estado que puede ser puro o mixto, independientemente de la pureza del sistema completo. Por ejemplo, al tener un estado puro

$$|\beta\rangle = \frac{|a_1b_1\rangle + \sqrt{2} |a_2b_2\rangle}{\sqrt{3}},\tag{1.28}$$

que corresponde a la matriz densidad

$$\rho_{AB} = |\beta\rangle\langle\beta| = \frac{1}{3} \left(|a_1b_1\rangle\langle a_1b_1| + \sqrt{2} |a_1b_1\rangle\langle a_2b_2| + \sqrt{2} |a_2b_2\rangle\langle a_1b_1| + 2 |a_2b_2\rangle\langle a_2b_2| \right);$$

se tiene que la matriz densidad reducida ρ_A es

$$\rho_{A} = \operatorname{Tr}_{B}(\rho_{AB})$$

$$= \frac{1}{3} \left(\underbrace{\langle b_{1}|b_{1}\rangle}_{1} |a_{1}\rangle\langle a_{1}| + \sqrt{2} \underbrace{\langle b_{2}|b_{1}\rangle}_{0} |a_{1}\rangle\langle a_{2}| + \sqrt{2} \underbrace{\langle b_{1}|b_{2}\rangle}_{0} |a_{2}\rangle\langle a_{1}| + 2 \underbrace{\langle b_{2}|b_{2}\rangle}_{1} |a_{2}\rangle\langle a_{2}| \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(|a_{1}\rangle\langle a_{1}| + 2 |a_{2}\rangle\langle a_{2}| \right).$$

Del mismo modo, para ρ_B resulta

$$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{AB}) = \frac{1}{3} (|b_1\rangle\langle b_1| + 2 |b_2\rangle\langle b_2|),$$

por lo que la pureza de los estados ρ_A y ρ_B son

$$\gamma_A = \operatorname{Tr}\left(\rho_A^2\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{|a_1\rangle\langle a_1| + 4 |a_2\rangle\langle a_2|}{9}\right) = \frac{5}{9},$$

$$\gamma_B = \operatorname{Tr}\left(\rho_B^2\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{|b_1\rangle\langle b_1| + 4 |b_2\rangle\langle b_2|}{9}\right) = \frac{5}{9};$$

las cuales corresponden a estados mixtos, mientras que el estado completo ρ_{AB} posee una pureza igual a 1, debido a que es un estado puro como se planteó al inicio en (1.28).

1.4. Sistemas bipartitos

A los sistemas que se componen a su vez por dos subsistemas, se les conoce como bipartitos, y son los que se tratarán a continuación. Si A y B son los subsistemas que lo componen, existirán también espacios de Hilbert \mathcal{H}_A , de dimensión d_A y \mathcal{H}_B , de dimensión d_B , asociados a cada uno de ellos. Si $\{|a_i\rangle\}$, $\{|b_j\rangle\}$ son bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente, entonces un estado $|\psi\rangle$ en el espacio de Hilbert del sistema completo \mathcal{H}_T , tendrá la siguiente forma [9, p. 149]

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |a_i b_j\rangle, \qquad (1.29)$$

con c_{ij} como coeficientes complejos. Además, la base de \mathcal{H}_T es el conjunto de vectores $\{|a_ib_j\rangle\}$, mientras que su dimensión será d_Ad_B .

Existe otra manera de expresar a los estados presentados en (1.29), que puede encontrarse al utilizar la *descomposición de Schmidt*. Gracias a esta herramienta, es posible llegar a resultados que son de importancia al trabajar con estados puros en sistemas bipartitos, como se verá más adelante. A continuación se presentará el teorema correspondiente a la descomposición de Schmidt tomado de [16].

Teorema 1.4.1 (Descomposición de Schmidt). Suponer que $|\psi\rangle$ es un estado puro de un sistema compuesto, AB. Entonces existen estados ortonormales $|p_i\rangle$ para el sistema A, y estados ortonormales $|q_i\rangle$ del sistema B tales que

$$|\psi\rangle = \sum_{i} \lambda_{i} |p_{i}q_{i}\rangle, \qquad (1.30)$$

donde λ_i son números reales no negativos que satisfacen $\sum_i \lambda_i^2 = 1$, conocidos como

Demostración. Consultar [16, p. 109]

Como ejemplo, se tomará a un sistema compuesto por los subsistemas C y D, cuyas bases en sus espacios de Hilbert son $\{|c_i\rangle\}$ y $\{|d_j\rangle\}$, respectivamente. Considerar entonces al estado

$$|\psi_{CD}\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2} |c_1 d_2\rangle - 3 |c_2 d_1\rangle + |c_2 d_2\rangle \right), \tag{1.31}$$

que pertenece al espacio \mathcal{H}_T del sistema completo. La expresión para $|\psi_{CD}\rangle$ puede reescribirse como $|\psi_{CD}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |u\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |v\rangle$, donde se ha tomado a $|u\rangle$ y $|v\rangle$ como

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-|c_1d_1\rangle + |c_1d_2\rangle - \sqrt{2} |c_2d_1\rangle + \sqrt{2} |c_2d_2\rangle \right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |c_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |c_2\rangle \right) \otimes \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} |d_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |d_2\rangle \right)$$

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\sqrt{2} |c_1 d_1\rangle + \sqrt{2} |c_1 d_2\rangle - |c_2 d_1\rangle - |c_2 d_2\rangle \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |c_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |c_2\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |d_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |d_2\rangle \right). \end{aligned}$$

Pero, por otro lado, si se definen a los siguientes vectores de estado,

$$|p_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |c_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |c_2\rangle, \qquad |p_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} |c_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |c_2\rangle, |q_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |d_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |d_2\rangle, \qquad |q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |d_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |d_2\rangle;$$

entonces $|\psi_{CD}\rangle$ puede escribirse como sigue

$$|\psi_{CD}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|u\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|v\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|p_1q_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|p_2q_2\rangle,$$

que es de la forma colocada en (1.30) y donde $\{|p_i\rangle\}, \{|q_j\rangle\}$ son vectores ortonormales en \mathcal{H}_C y \mathcal{H}_D respectivamente.

La descomposición de Schmidt facilita el cálculo de la matriz densidad reducida para cualquiera de los dos subsistemas. Considerando al vector de estado $|\psi\rangle$
colocado en (1.30), se tiene que la matriz densidad es

$$\rho^{AB} = |\psi\rangle\!\langle\psi| = \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j |p_i q_i\rangle\!\langle p_j q_j|, \qquad (1.32)$$

la cual posee dimensión $d_A d_B \times d_A d_B$ y actúa sobre \mathcal{H}_T . Entonces, si se realiza el cálculo de la matriz densidad reducida para el subsistema A, resulta

$$\rho^{A} = \operatorname{Tr}_{B}(\rho^{AB}) = \sum_{k} \langle b_{k} | \rho^{AB} | b_{k} \rangle = \sum_{k} \langle b_{k} | \left(\sum_{ij} \lambda_{i} \lambda_{j} | p_{i} q_{i} \rangle \langle p_{j} q_{j} | \right) | b_{k} \rangle \quad (1.33)$$

$$=\sum_{k}\sum_{ij}\lambda_{i}\lambda_{j}\left|p_{i}\right\rangle\!\left\langle p_{j}\right|\left\langle b_{k}|q_{i}\right\rangle\left\langle q_{j}|b_{k}\right\rangle$$

$$(1.34)$$

$$=\sum_{ij}\lambda_{i}\lambda_{j}|p_{i}\rangle\langle p_{j}|\langle q_{j}|\underbrace{\left(\sum_{k}|b_{k}\rangle\langle b_{k}|\right)}_{\mathbb{1}_{B}}|q_{i}\rangle$$
(1.35)

$$=\sum_{ij}\lambda_i\lambda_j |p_i\rangle\langle p_j|\underbrace{\langle q_j|q_i\rangle}_{\delta_{ji}} = \sum_i\lambda_i^2 |p_i\rangle\langle p_i|; \qquad (1.36)$$

mientras que para la matriz densidad reducida del subsistema B se tiene

$$\rho^{B} = \operatorname{Tr}_{A}(\rho^{AB}) = \sum_{k} \langle a_{k} | \rho^{AB} | a_{k} \rangle = \sum_{k} \langle a_{k} | \left(\sum_{ij} \lambda_{i} \lambda_{j} | p_{i} q_{i} \rangle \langle p_{j} q_{j} | \right) | a_{k} \rangle \quad (1.37)$$

$$=\sum_{k}\sum_{ij}\lambda_{i}\lambda_{j}|q_{i}\rangle\langle q_{j}|\langle a_{k}|p_{i}\rangle\langle p_{j}|a_{k}\rangle$$
(1.38)

$$=\sum_{ij}\lambda_i\lambda_j |q_i\rangle\langle q_j| \langle p_j| \underbrace{\left(\sum_k |a_k\rangle\langle a_k|\right)}_{\mathbb{I}_A} |p_i\rangle \tag{1.39}$$

$$=\sum_{ij}\lambda_i\lambda_j |q_i\rangle\langle q_j|\underbrace{\langle p_j|p_i\rangle}_{\delta_{ji}} = \sum_i^n \lambda_i^2 |q_i\rangle\langle q_i|.$$
(1.40)

Al comparar la expresión para la matriz densidad en (1.5), con los resultados (1.36) y (1.40), se observa que los autovalores para ambas matrices están dados por λ_i^2 . La importancia de lo mencionado anteriormente, es que ambos subsistemas compartirán las propiedades que dependan de λ_i^2 .

Luego de los resultados obtenidos para ρ^A y ρ^B , queda por analizar también a la pureza de cada estado. Si ahora se toma la expresión en (1.36), entonces la pureza

del subsistema A es

$$\gamma_A = \operatorname{Tr}\left((\rho^A)^2\right) = \operatorname{Tr}\left(\sum_{ij} \lambda_i^2 \lambda_j^2 |p_i\rangle \underbrace{\langle p_i | p_j \rangle}_{\delta_{ij}} \langle p_j | \right) = \operatorname{Tr}\left(\sum_i \lambda_i^4 |p_i\rangle \langle p_i | \right) \quad (1.41)$$

$$=\sum_{k} \langle a_{k} | \left(\sum_{i} \lambda_{i}^{4} | p_{i} \rangle \langle p_{i} | \right) | a_{k} \rangle = \sum_{i} \lambda_{i}^{4} \langle p_{i} | \underbrace{\left(\sum_{k} | a_{k} \rangle \langle a_{k} | \right)}_{\mathbb{1}_{A}} | p_{i} \rangle \tag{1.42}$$

$$=\sum_{i}\lambda_{i}^{4}\underbrace{\langle p_{i}|p_{i}\rangle}_{1}=\sum_{i}\lambda_{i}^{4};$$
(1.43)

mientras que para el cálculo de la pureza del subsistema B, se utiliza el resultado colocado en (1.40), teniendo entonces lo siguiente

$$\gamma_B = \operatorname{Tr}\left((\rho^B)^2\right) = \operatorname{Tr}\left(\sum_{ij} \lambda_i^2 \lambda_j^2 |q_i\rangle \underbrace{\langle q_i | q_j \rangle}_{\delta_{ij}} \langle q_j |\right) = \operatorname{Tr}\left(\sum_i \lambda_i^4 |q_i\rangle \langle q_i |\right) \quad (1.44)$$

$$=\sum_{k} \langle b_{k} | \left(\sum_{i} \lambda_{i}^{4} | q_{i} \rangle \langle q_{i} | \right) | b_{k} \rangle = \sum_{i} \lambda_{i}^{4} \langle q_{i} | \underbrace{\left(\sum_{k} | b_{k} \rangle \langle b_{k} | \right)}_{\mathbb{1}_{B}} | q_{i} \rangle \tag{1.45}$$

$$=\sum_{i}\lambda_{i}^{4}\underbrace{\langle q_{i}|q_{i}\rangle}_{1}=\sum_{i}\lambda_{i}^{4}.$$
(1.46)

De las igualdades colocadas en (1.43) y (1.46), se observa que la pureza para los estados descritos por ρ^A y ρ^B es la misma; esto confirma lo mencionado anteriormente, ya que es una cantidad que depende de λ_i^2 . Debe señalarse también que, uno de los motivos por los que se ha resaltado este resultado, es porque tomará un papel importante en los cálculos que se harán más adelante.

En este trabajo se estudiará el entrelazamiento y separabilidad de estados puros en sistemas bipartitos, y para empezar, se definirán a los estados separables. Para este tipo de estados, se tomará la descripción hecha por Braunstein y Pati en [7]. En esta descripción se establece que, si el estado completo $|\psi_{AB}\rangle$ puede escribirse como

$$|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle, \qquad (1.47)$$

donde $|\phi_A\rangle$ y $|\phi_B\rangle$ son estados de los subsistemas A y B, entonces se trata de un estado no entrelazado o *estado separable*. Un ejemplo de un estado puro separable

es el siguiente

$$|\beta_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} |a_1b_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} |a_1b_2\rangle = \frac{|a_1\rangle}{\sqrt{5}} \otimes \left(\sqrt{3} |b_1\rangle + \sqrt{2} |b_2\rangle\right),$$

que puede escribirse como el producto tensorial de dos estados, mientras que un ejemplo de un estado entrelazado es

$$\left|\beta_{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|a_{1}b_{1}\right\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|a_{2}b_{2}\right\rangle,$$

el cual no puede ser factorizado como se indica en (1.47).

Una forma de clasificar estados separables y entrelazados, es por medio de la pureza. Para ello, es necesario notar que para un solo coeficiente de Schmidth, la expresión en (1.30) se reduce a lo siguiente

$$|\psi\rangle = \sum_{i} \lambda_{i} |p_{i}q_{i}\rangle = \lambda |pq\rangle,$$

pero si se toma en cuenta que los coeficientes λ_i son reales no negativos, entonces el estado $|\psi\rangle$ puede escribirse como

$$\ket{\psi} = \sqrt{\lambda} \ket{p} \otimes \sqrt{\lambda} \ket{q} = \ket{a} \otimes \ket{b},$$

donde se ha tomado $|a\rangle = \sqrt{\lambda} |p\rangle$ y $|b\rangle = \sqrt{\lambda} |q\rangle$; esto quiere decir que cuando se tiene solo un coeficiente de Schmidth, el estado es separable. Entonces si ahora se analiza la pureza de ρ^A en (1.36) para un solo λ , se tiene

$$\gamma_A = \lambda^4 = (\lambda^2)^2 = 1,$$

en donde la última igualdad se debe a que $\sum_i \lambda_i^2 = 1$. Además, ya que se encontró anteriormente que para un estado puro bipartito, la pureza de ρ^A y ρ^B es la misma, se concluye entonces que un estado puro ρ^{AB} es separable, si y solo si sus estados reducidos ρ^A y ρ^B son puros.

Seguidamente, para realizar el análisis de entrelazamiento de estados puros, es necesario definir a la concurrencia y entropía de entrelazamiento. El criterio planteado para la identificación de estados separables también permite conocer si un estado es entrelazado, ya que en este caso, el valor de pureza de los estados ρ^A y ρ^B será distinto de 1. Sin embargo, existen otras formas de calcular el entrelazamiento de un estado cuántico y una de ellas es la *concurrencia*, que fue introducida por primera vez al trabajar con estados puros de sistemas bipartitos de dos qubits^{**} [8]. Se tiene entonces que para un estado puro correspondiente a un sistema bipartito, la concurrencia C está definida como [21, 23]

$$C \equiv \sqrt{2\left(1 - \operatorname{Tr}\left[\left(\rho^{A}\right)^{2}\right]\right)} = \sqrt{2(1 - \gamma_{A})} = \sqrt{2(1 - \gamma_{B})}, \qquad (1.48)$$

donde un valor C = 0, corresponde a un estado separable. Otra manera de medir el grado de entrelazamiento de un estado puro de dos qubits^{***}, es por medio de la *entropía de entrelazamiento*; esta se define como la entropía de von Neumann (E)del estado ρ^A , que es igual a su entropía de Shannon (S) [5, 8]

$$E \equiv S = -\operatorname{Tr}\left[\rho^{A}\ln\rho^{A}\right] = -\operatorname{Tr}\left[\rho^{B}\ln\rho^{B}\right] = -\sum_{i}\beta_{i}\ln\beta_{i} \qquad (1.49)$$

$$0 \le E \le \ln\left(2\right),\tag{1.50}$$

donde β_i , son los autovalores de ρ^A y ρ^B . Además, al igual que con la concurrencia, un valor E = 0 corresponde a un estado separable.

Ahora, se presentarán un par de ejemplos para encontrar la concurrencia y entropía de entrelazamiento que se acaban de definir. A continuación, se tomarán a un par de estados, en donde se asumirá que el espacio de estado de cada uno de los subsistemas tiene dimensión 2,

$$\rho^{AB} = \frac{1}{3} |a_1 b_1 \rangle \langle a_1 b_1 | + \frac{2}{3} |a_2 b_2 \rangle \langle a_2 b_2 |, \qquad \rho^{CD} = \frac{1}{5} |c_1 d_1 \rangle \langle c_1 d_1 | + \frac{4}{5} |c_2 d_2 \rangle \langle c_2 d_2 |,$$

para los cuales, las matrices de densidad reducidas de los subsistemas $A \ge C$ son

$$\rho^{A} = \frac{1}{3} |a_{1} \rangle \langle a_{1}| + \frac{2}{3} |a_{2} \rangle \langle a_{2}|, \qquad \rho^{C} = \frac{1}{5} |c_{1} \rangle \langle c_{1}| + \frac{4}{5} |c_{2} \rangle \langle c_{2}|;$$

lo que corresponde a las purezas $\gamma_A = \frac{5}{9}$, $\gamma_C = \frac{17}{25}$. Con esta información, puede utilizarse la ecuación (1.48) para obtener las concurrencias de cada uno de los estados

$$C_{AB} = \sqrt{2(1-\gamma_A)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
 $C_{CD} = \sqrt{2(1-\gamma_C)} = \frac{4}{5},$

mientras que para la entropía de entrelazamiento, se utilizan a los autovalores de ρ^A

^{**}El qubit es definido como un sistema cuántico de dos niveles. Su definición se profundizará en el capítulo 2

^{***}También se utiliza para calcular la entropía de estados puros de sistemas bipartitos, que no están necesariamente compuestos por dos qubits. La diferencia será el valor máximo de E.

y ρ^C en (1.49)

$$E_{AB} = -\left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right] \approx 0.6365,$$
$$E_{CD} = -\left[\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{4}{5}\right)\right] \approx 0.5004.$$

Si se comparan los resultados anteriores de la pureza, concurrencia y entropía, se observa que el estado ρ^{AB} posee un mayor entrelazamiento que ρ^{CD} . Al tener presente las definiciones anteriores para el estudio de entrelazamiento y separabilidad de estados puros en sistemas bipartitos, se cuenta ya con las herramientas necesarias para los capítulos siguientes.

2. ESTADOS PUROS SEPARABLES EN SUBESPACIOS BIDIMENSIONALES

2.1. Introducción

Como tema de partida en este capítulo, se abordará la teoría necesaria para trabajar con sistemas de un qubit en la sección 2.2. En ella se hablará principalmente sobre estados puros y su representación en la esfera de Bloch. Seguidamente, en la sección 2.3, se planteará la pregunta que motiva la búsqueda de estados separables de dos qubits. Esta idea se irá desarrollando a lo largo de la sección, la que finalizará con la presentación del algoritmo a seguir, para la búsqueda de estados separables en subespacios bidimensionales. Luego la sección 2.4, contiene los resultados obtenidos de forma numérica y analítica tras haber explorado diferentes subespacios. En ella se describen las rutinas utilizadas para la parte numérica, además de mostrar una forma analítica de resolver el problema. Por último, en la sección 2.5, se propone un método que permita encontrar a los estados de un qubit, que a su vez componen a los estados separables.

2.2. El qubit y la esfera de Bloch

Se comenzará por explicar el concepto de *qubit*, que será fundamental entender para el desarrollo del problema más adelante. En el estudio de la información y computación clásica, la unidad mínima de información es conocida como *bit*, el cual puede tomar uno de los dos estados posibles 0 o 1. De manera análoga, existe el caso del bit cuántico o *qubit*, que es definido como un sistema de dos niveles cuyos estados base son $|0\rangle \ge |1\rangle^*$; pero a diferencia del bit, el qubit puede estar en una combinación de ambos estados base, es decir que se encuentra en superposición.

^{*}Se utiliza la notación de Dirac para representar a los estados 0 y 1, donde al símbolo $|\rangle$, se le llama "ket" y a $\langle |$, se le conoce como "bra".

Matemáticamente puede ser representado por el siguiente vector [16, p. 13]

$$\left|\psi\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle,\tag{2.1}$$

siendo α y β coeficientes complejos, conocidos como las *amplitudes de probabilidad* correspondientes a $|0\rangle$ y $|1\rangle$, respectivamente. Es decir que al realizar una medición sobre el qubit, puede obtenerse al estado $|0\rangle$, con probabilidad $|\alpha|^2$, o al estado $|1\rangle$, con probabilidad $|\beta|^2$. Luego, al sumar las probabilidades, debe cumplirse con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, que también es la condición de normalización para el estado $|\psi\rangle$, como se muestra a continuación

$$\langle \psi | \psi \rangle = |\alpha|^2 \underbrace{\langle 0|0 \rangle}_{1} + |\beta|^2 \underbrace{\langle 1|1 \rangle}_{1} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \qquad (2.2)$$

mientras que los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, son representados por los vectores

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1\\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0\\ 1 \end{pmatrix}.$$
 (2.3)

El estado $|\psi\rangle$ puede pasar a depender de parámetros reales al expresar a sus dos coeficientes de manera conveniente. Como se ha indicado anteriormente, los coeficientes α y β pertenecen a los complejos, por lo que es útil mencionar que un número z, con parte real e imaginaria, puede ser escrito de la siguiente manera [2, p. 8]

$$z = re^{i\theta},$$

con r = |z| y $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. Entonces, al reescribir de esta forma a los coeficientes en (2.1), se obtiene [22, p. 12]

$$|\psi\rangle = r_{\alpha}e^{i\theta_{\alpha}}|0\rangle + r_{\beta}e^{i\theta_{\beta}}|1\rangle; \qquad (2.4)$$

pero un detalle importante a tomar en cuenta, es que un factor de la forma $e^{i\theta}$, no tiene consecuencias observables. Para notarlo, basta con calcular el valor esperado de un observable M, para un sistema que se encuentra en un estado $e^{i\theta} |\psi\rangle$,

$$\langle M \rangle = \langle \psi | e^{-i\theta} M e^{i\theta} | \psi \rangle = \underbrace{e^{-i\theta} e^{i\theta}}_{1} \langle \psi | M | \psi \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle;$$

es decir que al multiplicar por $e^{i\theta}$, se obtiene un estado equivalente a $|\psi\rangle$. Lo anterior permite multiplicar a (2.4) por $e^{-i\theta_{\alpha}}$ y expresarlo como

$$|\psi\rangle = r_{\alpha} |0\rangle + r_{\beta} e^{i\left(\theta_{\beta} - \theta_{\alpha}\right)} |1\rangle = r_{\alpha} |0\rangle + r_{\beta} e^{i\phi} |1\rangle, \qquad (2.5)$$

eligiendo a $\phi = \theta_{\beta} - \theta_{\alpha}$ para tener tres parámetros reales r_{α} , r_{β} y ϕ .

Con ayuda de la condición de normalización, es posible encontrar otra forma de expresar a los tres parámetros para el estado $|\psi\rangle$. Al expandir el término $e^{i\phi}$ en la última igualdad colocada en (2.5), el estado $|\psi\rangle$ puede ser escrito como sigue

$$|\psi\rangle = r_{\alpha} |0\rangle + r_{\beta} \left(\cos\left(\theta\right) + i\sin\left(\theta\right)\right) |1\rangle = r_{\alpha} |0\rangle + (x + iy) |1\rangle, \qquad (2.6)$$

donde se ha tomado a $x = r_{\beta} \cos(\theta), y = r_{\beta} \sin(\theta)$. Por otro lado, de la condición de normalización (2.2), se tiene

$$|r_{\alpha}|^{2} + |x + iy|^{2} = 1;$$

pero ya que $r_{\alpha}, x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$|r_{\alpha}|^{2} + |x + iy|^{2} = r_{\alpha}^{2} + x^{2} + y^{2} = 1,$$

que es la ecuación de una esfera con radio 1. Lo anterior puede apreciarse de mejor forma al renombrar a $r_{\alpha} = z$, teniendo entonces a las coordenadas cartesianas x, y, z, cuya transformación a coordenadas esféricas es la siguiente [22, p. 13]

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi),$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi),$$

$$z = r \cos(\theta),$$

siendo θ el ángulo polar, ϕ el ángulo azimutal y r el radio de la esfera, que en este caso es r = 1.

Una herramienta importante y de utilidad para visualizar estados de un qubit, es la *esfera de Bloch*. Continuando con el análisis del estado $|\psi\rangle$, al sustituir las expresiones para x, y y z en (2.6), resulta

$$|\psi\rangle = \cos\left(\theta\right)|0\rangle + \sin\left(\theta\right)\left(\cos\left(\phi\right) + i\sin\left(\phi\right)\right)|1\rangle = \cos\left(\theta\right)|0\rangle + \sin\left(\theta\right)e^{i\phi}|1\rangle, \quad (2.7)$$

del cual es importante resaltar que el estado $|0\rangle$ se obtiene cuando $\theta = 0$, mientras



Figura 2.1. Visualización de estados puros de un qubit en la esfera de Bloch. Fuente: elaboración propia.

que en $\theta = \pi/2$, el estado será $|1\rangle$. Esto sugiere que si se desea recorrer a todos los estados $|\psi\rangle$ de un qubit, solamente es necesario tomar a θ en el rango $[0, \pi/2]$ o bien, puede realizarse el siguiente ajuste

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle,$$
 (2.8)

donde θ y ϕ son los ángulos que recorren la esfera como se observa en la figura 2.1, los cuales toman los siguientes valores

$$0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \phi \le 2\pi. \tag{2.9}$$

Esta esfera es conocida como *esfera de Bloch* y permite representar geométricamente al espacio de estado del qubit así como visualizar a las transformaciones que se realicen sobre él; en su superficie se ubican todos los estados puros de la forma (2.8), como se muestra en la figura 2.2 para $|0\rangle$ y $|1\rangle$, mientras que en su interior se encuentran los estados mixtos. El estudio del qubit y la esfera de Bloch serán de utilidad para abordar el tema central de la siguiente sección.

2.3. Sistemas de dos qubits

Luego de haber estudiado las definiciones del capítulo anterior, lo siguiente será presentar el problema a resolver. Como se ha visto, existen cantidades que



Figura 2.2. Estados |0> y |1> en la esfera de Bloch.Fuente: elaboración propia.

permiten conocer el entrelazamiento de un estado, cuyos valores son definidos dentro de rangos específicos, como sucede con la concurrencia y entropía. Partiendo de este hecho, podría considerarse un conjunto de estados y preguntarse si alguno de ellos es separable, es decir que se buscaría a los que posean cero entrelazamiento. Esta idea motiva a formular la siguiente pregunta: ¿existirán estados separables en un subespacio determinado?, la cual da lugar a comenzar con una búsqueda de estados separables de sistemas bipartitos. Para ello, se delimitará el problema al considerar estados puros de sistemas bipartitos en subespacios complejos bidimensionales. Es decir, que los estados tendrán la forma

$$|\Psi\rangle = A |v_1\rangle + B |v_2\rangle, \qquad (2.10)$$

con A, B como coeficientes complejos, mientras que $\{|v_i\rangle\}$ será la base del subespacio considerado. Además, debe agregarse que en el caso general, el entrelazamiento de cada estado $|v_i\rangle$, será distinto de cero; esto es relevante en el problema propuesto ya que, a primera vista, podría pensarse que todos los estados la forma (2.10) son entrelazados, pero antes de dar una respuesta debe continuarse con el análisis.

Al considerar una base ortonormal para los estados en (2.10), se encuentra una restricción para los coeficientes A y B. Una de las propiedades de la matriz densidad, es contar con traza unitaria como establece el teorema 1.2.1; es por ello que el estado $|\Psi\rangle$ en (2.10) cumple con

$$\operatorname{Tr}(\rho) = \operatorname{Tr}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = 1,$$

que a su vez, puede expresarse como

$$\operatorname{Tr}(|\Psi\rangle\!\langle\Psi|) = \langle\Psi|\Psi\rangle = ||\Psi\rangle||^2 = 1.$$

Esta última igualdad es la condición de normalización para el estado $|\Psi\rangle$, y al sustituir la expresión (2.10), resulta

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = |A|^2 \langle v_1 | v_1 \rangle + A\overline{B} \langle v_2 | v_1 \rangle + \overline{A}B \langle v_1 | v_2 \rangle + |B|^2 \langle v_2 | v_2 \rangle = 1.$$

Para simplificar cálculos, conviene resaltar que a partir de un conjunto de vectores base, puede construirse otro conjunto ortonormal que genere al mismo espacio; es por ello que se va elegir una base $\{|v_i\rangle\}$ ortonormal, es decir que cumple con $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$, de modo que la expresión para $\langle \Psi|\Psi\rangle$ se reduce a

$$|A|^2 + |B|^2 = 1; (2.11)$$

encontrando así, una restricción para los coeficientes $A ext{ y } B$.

Los estados puros que se utilizarán en el análisis del problema, son para sistemas de dos qubits. Así como suele trabajarse con más de un bit en el caso clásico, también pueden tomarse sistemas compuestos de varios qubits para realizar distintos estudios. Entonces un estado puro de dos qubits, tiene la siguiente representación

$$|v\rangle = \alpha_1 |00\rangle + \alpha_2 |01\rangle + \alpha_3 |10\rangle + \alpha_4 |11\rangle, \qquad (2.12)$$

con α_i como coeficientes complejos y los estados base que ahora son

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \qquad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \qquad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \qquad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}.$$

Hay que notar que la dimensión del espacio de estado asociado a sistemas de dos qubits es 4, ya que está compuesto por dos subsistemas de un qubit y en general, para sistemas de n qubits, la dimensión de sus espacios de estado es 2^n . Estos sistemas serán los considerados en el problema a resolver, de modo que al regresar a la expresión en (2.10), los elemento de la base $\{|v_i\rangle\}$ serán estados de dos qubits como los colocados en (2.12).

La descripción de estados puros en la esfera de Bloch, será una guía en la

representación de estados puros en subespacios bidimensionales. En la sección 2.2, se ha encontrado que a partir de la condición de normalización, los estados puros de un qubit pueden ser visualizados en una esfera con ayuda de los parámetros θ y ϕ , como se observa en (2.8). Teniendo esto mente, si ahora se observa la restricción para A y B en 2.11, entonces es posible aplicar el mismo razonamiento utilizado para los coeficientes en (2.1) y obtener

$$A = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad B = e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$
 (2.13)

siendo θ y ϕ los ángulos definidos en (2.9), que recorren una esfera de radio 1 similar a la esfera de Bloch. Las expresiones en (2.13) permiten que el estado $|\Psi\rangle$ en (2.10), pueda ser expresado de la siguiente forma

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|v_1\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|v_2\rangle; \qquad (2.14)$$

entonces, al ir variando los parámetros θ y ϕ , se estarán obteniendo a los estados puros que se encuentren en el subespacio generado por $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$, así como sucede con el caso de un qubit.

A continuación se enumeran los pasos a seguir para llevar a cabo la búsqueda de estados separables en los subespacios de interés. El criterio de separabilidad mencionado en la sección 1.4, puede aplicarse a todos los estados puros en los subespacios bidimensionales, para determinar así la existencia de estados separables. El procedimiento para cumplir con este objetivo, se detalla en la siguiente lista.

- 1. Construir dos estados ortonormales $|v_1\rangle \neq |v_2\rangle$ de dos qubits, para que sean la base del subespacio.
- 2. Construir la matriz densidad para los estados en (2.14), y calcular la matriz densidad reducida para uno de los quits; ρ_A para el primer qubit, o ρ_B para el segundo.
- 3. Calcular la pureza γ_A del estado ρ_A , la cual dependerá de los parámetros θ y ϕ .
- 4. Variar los valores de θ y ϕ , tomando en cuenta los rangos en (2.9). De esta manera se evaluará la pureza γ_A de los estados puros en el subespacio completo.
- 5. Determinar si para algún estado, existe el valor de $\gamma_A = 1$, que corresponde a estados separables.

6. En caso de encontrar $\gamma_A = 1$ en el paso anterior, buscar para qué valores de θ , ϕ existen estados separables y sustituir en (2.12).

Teniendo listo lo que se debe hacer, se realizará una exploración de forma numérica en distintos subespacios. Debido a que se deben recorrer todos los valores de θ y ϕ colocados en (2.9), además de buscar en qué punto existe $\gamma_A = 1$, se ha decidido aplicar el algoritmo anterior de forma numérica. Para ello se necesitará crear funciones que se encarguen de tareas específicas, como se explicará en la siguiente sección.

2.4. Resultados

Se han programado las funciones necesarias para el cálculo de la pureza de uno de los subsistemas y así explorar distintos subespacios. Para cumplir con cada paso del algoritmo que se presentó en la sección anterior, se ha hecho uso del software *Wolfram Mathematica*, con el que se crearon las funciones que se enumeran a continuación.

- 1. OrthonormalBasis [n]: construye dos vectores ortonormales de dimensión 2^n , para un sistema de n qubits, cuyas componentes son números complejos pseudo aleatorios con parte real e imaginaria dentro del rango de -1 a 1.
- 2. ReducedDensityMatrix[ρ , Qubits]: retorna la matriz densidad reducida al tomar en consideración a ρ y calcular la traza parcial sobre los qubits (o subsistemas), indicados en la lista Qubits.
- 3. PurityOfSubsystemA[v1, v2, θ , ϕ]: calcula la pureza γ_A de los estados en (2.14), que corresponden a los valores θ , ϕ y vectores base v1, v2.
- 4. MaximumPurity [v1, v2]: calcula los pares de valores $\{\theta, \phi\}$ donde γ_A es máxima, así como el valor de esta, luego de recorrer todo el subespacio generado por v1 y v2.

Se utiliza a OrthonormalBasis[n] para generar a los vectores base $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ del subespacio, y en el caso de dos qubits, se ingresa un valor n = 2; ambos vectores se sustituyen en la ecuación (2.14) para poder construir a la matriz densidad ρ , del estado $|\psi\rangle$. Por otro lado, la función ReducedDensityMatrix[ρ , Qubits] es usada en la estructura de PurityOfSubsystemA[v1, v2, θ , ϕ] para calcular la matriz densidad reducida del primer qubit, con el fin de obtener a la pureza como una función de dos variables $\gamma_A = \gamma_A(\theta, \phi)$. Finalmente, la rutina principal MaximumPurity[v1, v2], reúne a las dos funciones anteriores y recorre todos los valores de θ, ϕ en busca de la pureza máxima, así como los pares $\{\theta, \phi\}$ correspondientes a este máximo; con ello es posible determinar la existencia de estados separables dependiendo del valor máximo de γ_A , como se mencionó en la sección anterior.

Luego de ejecutar las funciones para cada parte del algoritmo, se logra ubicar estados separables en diferentes subespacios. Se han considerado distintos pares de vectores base^{**}, con el fin de evaluar la pureza máxima mediante la función MaximumPurity[v1, v2]. Para visualizar los resultados, se ha generado un mapa de contorno que muestra a γ_A junto con los pares { θ, ϕ } que corresponden al máximo de pureza encontrado. Algunos de los resultados se muestran en las figuras 2.3 y 2.4, donde cada color representa un valor distinto de γ_A , de modo que el máximo se asocia al color rojo y el mínimo al color violeta; la figura 2.3 corresponde a la base^{***}

$$\begin{aligned} & \left| v_1^1 \right\rangle = \{ 0.1651 + 0.0891 \text{ i}, 0.5203 + 0.1725 \text{ i}, 0.4474 + 0.3925 \text{ i}, 0.4233 + 0.3619 \text{ i} \}, \\ & \left| v_2^1 \right\rangle = \{ 0.7377 - 0.1324 \text{ i}, -0.3009 + 0.4791 \text{ i}, 0.0170 - 0.0427 \text{ i}, 0.1825 - 0.2878 \text{ i} \}, \end{aligned}$$

mientras que en la figura 2.4 se tienen los resultados para dos estados de Bell,

$$|v_1^2\rangle = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \\ |v_2^2\rangle = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}.$$

En cada uno de los subespacios explorados, la pureza máxima encontrada fue de $\gamma_{A\max} = 1$ para dos pares de valores de θ y ϕ , es decir que se cuenta con dos estados separables; entonces todo lo anterior indica que existen dos estados separables en subespacios complejos bidimensionales para sistemas de dos qubits.

Una forma teórica de encontrar estados separables de dos qubits, es estudiando sus componentes. Teniendo en cuenta que en los resultados numéricos se han encontrado dos estados separables, es apropiado realizar un análisis teórico con el que se pueda comparar lo obtenido numéricamente. Se comenzará por recordar la expresión para estados puros separables mostrada en (1.47), que en el caso de sistemas de dos

^{**}En el repositorio https://github.com/Subadra-E/Tesis se encuentran otros resultados, junto con un cuaderno interactivo para generar más de ellos.

^{***}Se han colocado los primeros 4 decimales para cada componente.





Figura 2.3. Valores θ , ϕ (puntos blancos) en donde γ_A es 1 para la base $|v_1^1\rangle$ y $|v_2^1\rangle$. Fuente: elaboración propia.

Figura 2.4. Valores θ , ϕ (puntos blancos) en donde γ_A es 1 para la base $|v_1^2\rangle$ y $|v_2^2\rangle$. **Fuente:** elaboración propia.

qubits, $\left|\phi_{A}\right>$ y $\left|\phi_{B}\right>$ serán estados de un qubit de la forma

$$|\phi_A\rangle = \gamma_0 |0\rangle + \gamma_1 |1\rangle, \qquad |\phi_B\rangle = \delta_0 |0\rangle + \delta_1 |1\rangle. \tag{2.15}$$

Si se sustituye lo anterior en (1.47), los estados puros separables de dos qubits serán

$$|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\phi_B\rangle = (\gamma_0 |0\rangle + \gamma_1 |1\rangle) \otimes (\delta_0 |0\rangle + \delta_1 |1\rangle)$$
(2.16)

$$= \gamma_0 \delta_0 |00\rangle + \gamma_0 \delta_1 |01\rangle + \gamma_1 \delta_0 |10\rangle + \gamma_1 \delta_1 |11\rangle.$$
(2.17)

Pero al mismo tiempo, si los estados base en (2.10), son

$$|v_1\rangle = \alpha_0 |00\rangle + \alpha_1 |01\rangle + \alpha_2 |10\rangle + \alpha_3 |11\rangle, \qquad (2.18)$$

$$|v_2\rangle = \beta_0 |00\rangle + \beta_1 |01\rangle + \beta_2 |10\rangle + \beta_3 |11\rangle, \qquad (2.19)$$

entonces al igualar las componentes de los estados en (2.10) y (2.17) resulta

$$\gamma_0 \delta_0 = A \alpha_0 + B \beta_0, \tag{2.20}$$

$$\gamma_0 \delta_1 = A \alpha_1 + B \beta_1, \tag{2.21}$$

$$\gamma_1 \delta_0 = A \alpha_2 + B \beta_2, \tag{2.22}$$

$$\gamma_1 \delta_1 = A \alpha_3 + B \beta_3. \tag{2.23}$$

De estas ecuaciones puede tomarse la división de (2.20) y (2.21), lo que resulta en

$$\frac{\gamma_0\delta_0}{\gamma_0\delta_1} = \frac{A\alpha_0 + B\beta_0}{A\alpha_1 + B\beta_1} = \frac{\delta_0}{\delta_1},$$

pero a partir de (2.22) y (2.23), se encuentra otra expresión para δ_0/δ_1

$$\frac{\gamma_1 \delta_0}{\gamma_1 \delta_1} = \frac{A\alpha_2 + B\beta_2}{A\alpha_3 + B\beta_3} = \frac{\delta_0}{\delta_1};$$

si ambas expresiones para δ_0/δ_1 se igualan, se obtiene

$$\frac{A\alpha_0 + B\beta_0}{A\alpha_1 + B\beta_1} = \frac{A\alpha_2 + B\beta_2}{A\alpha_3 + B\beta_3}$$

que al reescribir toma la forma

$$(A\alpha_0 + B\beta_0) (A\alpha_3 + B\beta_3) = (A\alpha_1 + B\beta_1) (A\alpha_2 + B\beta_2).$$
(2.24)

Esta es la ecuación principal^{****} que será tratada de acá en adelante, pero antes es necesario señalar que el estado $|\Psi\rangle$ en (2.10) puede ser escrito como

$$|\Psi\rangle = A |v_1\rangle + B |v_2\rangle = \frac{A |v_1\rangle + B |v_2\rangle}{\sqrt{|A|^2 + |B|^2}},$$
(2.25)

que es posible debido a la condición de normalización en 2.11; además, recordando a las expresiones para los coeficientes $A \ge B$ en (2.13), se tiene que $A \in \mathbb{R} \ge a$ sí $|A|^2 = A^2$, de modo que (2.25) pasa a ser

$$|\Psi\rangle = \frac{A|v_1\rangle + B|v_2\rangle}{\sqrt{A^2 + |B|^2}}.$$
(2.26)

Antes de continuar, se debe tomar en cuenta que si los estados base $|v_1\rangle \ge |v_2\rangle$ no son separables, entonces tanto A como B serán distintos de cero para los estados separables $|\Psi\rangle$ buscados. Esto permite que pueda expresarse a (2.26) de la siguiente forma

$$|\Psi\rangle = \frac{|v_1\rangle + \frac{B}{A}|v_2\rangle}{\sqrt{1 + \frac{|B|^2}{A^2}}} = \frac{|v_1\rangle + B'|v_2\rangle}{\sqrt{1 + |B'|^2}},$$

^{****} En el apéndice A, se muestra otra forma de llegar a la expresión (2.24), la cual consiste en realizar un análisis de pureza.

con $B' = \frac{B}{A}$, válido para los valores $A \neq 0$. Al comparar esta expresión con la original para $|\Psi\rangle$, los nuevos coeficientes $A \neq B$, serían

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + |B'|^2}}, \qquad B = \frac{B'}{\sqrt{1 + |B'|^2}}.$$
(2.27)

Retomando a (2.24) y dividiendo entre A^2 ,

$$\left(\alpha_0 + \frac{B}{A}\beta_0\right)\left(\alpha_3 + \frac{B}{A}\beta_3\right) = \left(\alpha_1 + \frac{B}{A}\beta_1\right)\left(\alpha_2 + \frac{B}{A}\beta_2\right),\qquad(2.28)$$

da lugar a colocar todo en términos del parámetro B'

$$(\alpha_0 + B'\beta_0)(\alpha_3 + B'\beta_3) = (\alpha_1 + B'\beta_1)(\alpha_2 + B'\beta_2),$$

que al expandir y agrupar toma la forma de una ecuación cuadrática

$$B^{\prime 2}(\beta_0 \beta_3 - \beta_1 \beta_2) + B^{\prime}(\alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) + \alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 = 0 \quad (2.29)$$

cuyas soluciones son

$$B' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
 (2.30)

con $a = \beta_0 \beta_3 - \beta_1 \beta_2$, $b = \alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$ y $c = \alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2$. La ecuación (2.30) es válida para el caso de coeficientes complejos como se puede consultar en [2, p. 4]; estas dos soluciones para B' pueden sustituirse en (2.27) y así obtener a los estados $|\Psi\rangle$ separables. Sin embargo, existe la posibilidad de que $b^2 - 4ac = 0$, lo cual implica una solución B' = -b/2a, y sugiere inicialmente la existencia de un solo estado separable. Un ejemplo en el que $b^2 = 4ac$, se da al considerar a la base

$$|v_1^3\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle), \qquad |v_2^3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \qquad (2.31)$$

para la que se tiene a = 1/2, b = 0 y c = 0. De lo anterior resulta

$$A = 1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad B = 0 = e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

que corresponde a $\theta = 0$, para cualquier valor de ϕ . Esto quiere decir que existen múltiples estados separables, como se puede observar en la figura 2.5, lo que demuestra que no siempre habrá únicamente un estado separable cuando $b^2 = 4ac$.



Figura 2.5. Pureza en el subespacio correspondiente a la base $\{|v_1^3\rangle, |v_2^3\rangle\}$. En este caso, existen varios estados separables en $\theta = 0$ (área roja). **Fuente:** elaboración propia.

Es importante destacar que en los resultados numéricos se han encontrado un total de dos estados separables, lo cual coincide con el número de soluciones que proporciona la ecuación (2.30). El siguiente paso consistirá en corroborar que los estados encontrados por ambos métodos sean los mismos.

También se ha implementado una función que calcula los estados separables utilizando el método analítico. Al tener a los vectores base $|v_1\rangle \neq |v_2\rangle$, puede hacerse uso de las ecuaciones (2.30) y (2.27), para encontrar a los estados separables en los subespacios correspondientes; es por ello que se ha creado una función que ayude a realizar este cálculo, cuya descripción se presenta a continuación.

• AnalyticalSeparableStates[v1, v2]: retorna los coeficientes A, B que se indican en (2.27) y los estados de la forma (2.10), que dependen de las componentes de v1 y v2.

Contando con los pares $\{\theta, \phi\}$ obtenidos de manera numérica, se hace uso de la ecuación (2.13), para luego realizar la comparación con los coeficientes hallados por **AnalyticalSeparableStates** [v1, v2]. En las tablas 2.1 y 2.2, se muestran los resultados que corresponden a las bases $\{|v_i^1\rangle\}$ y $\{|v_i^2\rangle\}$, donde se han tomado los primeros 8 decimales; en ellas se observa que los valores de los coeficientes, calculados por ambos métodos, coinciden para ambos estados separables. Esto sucedió también con los demás subespacios explorados, por lo que puede entenderse como una prueba de la existencia de estados separables en subespacios complejos bidimensionales para sistemas de dos qubits, respondiendo así la pregunta planteada al inicio.

No.	Base	$A_{ m num{\acute e}rico}$	$A_{ m analítico}$
1	$\left\{ \left v_{1}^{1} \right\rangle, \left v_{2}^{1} \right\rangle \right\}$	0.96267329	0.96267329
2	$\left \left\{\left v_{1}^{1}\right\rangle,\left v_{2}^{1}\right\rangle\right\}\right.$	0.32118751	0.32118751
3	$\{\left v_{1}^{2}\right\rangle,\left v_{2}^{2}\right\rangle\}$	0.70710678	0.70710678
4	$\left\{\left v_{1}^{2}\right\rangle,\left v_{2}^{2}\right\rangle\right\}$	0.70710678	0.70710678

Tabla 2.1. Coeficiente A de los estados separables encontrados por ambos métodos para algunos de los subespacios explorados. Fuente: elaboración propia.

No.	Base	$B_{ m num{\acute e}rico}$	$B_{ m analítico}$
1	$\left\{\left v_{1}^{1}\right\rangle,\left v_{2}^{1}\right\rangle\right\}$	0.17405615 + 0.20727902i	0.17405615 + 0.20727902i
2	$\{\left v_{1}^{1}\right\rangle,\left v_{2}^{1}\right\rangle\}$	-0.19996173 - 0.92566403i	-0.19996173 - 0.92566403 i
3	$\{\left v_{1}^{2}\right\rangle,\left v_{2}^{2}\right\rangle\}$	0.70710678 i	0.70710678 i
4	$\{\left v_{1}^{2}\right\rangle,\left v_{2}^{2}\right\rangle\}$	-0.70710678 i	-0.70710678 i

Tabla 2.2. Coeficiente B de los estados separables encontrados por ambos métodos para algunos de los subespacios explorados. Fuente: elaboración propia.

2.5. Estados puros de un qubit

Teniendo ubicados a los estados separables, se continuará por determinar a los estados de un qubit que los componen. Después de haber encontrado estados separables de dos qubits en los subespacios explorados, surge la tarea de ubicar a los estados de un qubit, $|\phi_A\rangle$ y $|\phi_B\rangle$ en (2.15). Con este propósito en mente, se comenzará por recordar la expresión (2.8), en la cual el coeficiente que acompaña a $|0\rangle$ pertenece a los reales y al aplicarlo en (2.15), se establece que $\gamma_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$. Tomando en cuenta lo anterior y si se satisface que $\gamma_0, \delta_0 \neq 0$, entonces junto con la condición de normalización (2.2), los estados $|\phi_A\rangle$ y $|\phi_B\rangle$ pueden reescribirse como

$$|\phi_A\rangle = \frac{\gamma_0 |0\rangle + \gamma_1 |1\rangle}{\sqrt{\gamma_0^2 + |\gamma_1|^2}} = \frac{|0\rangle + \gamma' |1\rangle}{\sqrt{1 + |\gamma'|^2}},$$
(2.32)

$$|\phi_B\rangle = \frac{\delta_0 |0\rangle + \delta_1 |1\rangle}{\sqrt{\delta_0^2 + |\delta_1|^2}} = \frac{|0\rangle + \delta' |1\rangle}{\sqrt{1 + |\delta'|^2}},\tag{2.33}$$

con $\gamma' = \gamma_1/\gamma_0$ y $\delta' = \delta_1/\delta_0$. Por otro lado, con ayuda de las ecuaciones (2.20) y (2.22), se encuentra

$$\frac{\gamma_1\delta_0}{\gamma_0\delta_0} = \frac{A\alpha_2 + B\beta_2}{A\alpha_0 + B\beta_0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0},$$

mientras que, de (2.21) y (2.23), se obtiene

$$\frac{\gamma_1 \delta_1}{\gamma_0 \delta_1} = \frac{A\alpha_3 + B\beta_3}{A\alpha_1 + B\beta_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}.$$

Al sumar ambas igualdades y despejar para $\gamma_1/\gamma_0,$ resulta

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{A\alpha_2 + B\beta_2}{A\alpha_0 + B\beta_0} + \frac{A\alpha_3 + B\beta_3}{A\alpha_1 + B\beta_1} \right];$$
(2.34)

de forma similar, al tomar (2.20) con (2.21) y luego (2.22) junto a (2.23), se llega a

$$\frac{\delta_1}{\delta_0} = \frac{1}{2} \left[\frac{A\alpha_1 + B\beta_1}{A\alpha_0 + B\beta_0} + \frac{A\alpha_3 + B\beta_3}{A\alpha_2 + B\beta_2} \right].$$
(2.35)

Las últimas dos ecuaciones, corresponden a las expresiones para γ'_1 y δ'_1 , que son necesarias en el cálculo de los estados (2.32) y (2.33).

Para la deducción de los estados de un qubit, existe una corrección que debe realizarse al comparar con los resultados numéricos. Otro detalle a tomar en cuenta, se encuentra al analizar las componentes del estado $|\phi_A\phi_B\rangle$ y compararlas con $|\Psi\rangle$; con ayuda de (2.10), (2.32) y (2.33), se igualan los términos que acompañan a $|00\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+|\gamma_{1}^{'}|^{2}\right)\left(1+|\delta_{1}^{'}|^{2}\right)}} = A\alpha_{0} + B\beta_{0},$$

con $A\alpha_0 + B\beta_0$ como la primer componente de $|\Psi\rangle$. Del lado izquierdo de la igualdad va a resultar un número que pertenece a los reales; pero por el contrario, del lado derecho podría tenerse un número complejo ya que en general, $\alpha_0, \beta_0, B \in \mathbb{C}$. Esta aparente contradicción, se explica de manera similar a la deducción realizada para la expresión (2.8), es decir que se obtienen estados equivalentes al multiplicar por un factor $e^{-i\phi}$. Lo anterior ha sido considerado en (2.32) y (2.33) al relacionar ambos estados con (2.8); el paso que falta, es tomar en cuenta lo anterior para $|\Psi\rangle$, como se explica en el apéndice B, en el que también se muestran que los resultados coinciden luego de este arreglo.

Antes de aplicar las ecuaciones encontradas, se debe examinar bajo qué condiciones son aceptables. Al observar los denominadores en los sumandos de (2.34) y (2.35), se determina que las igualdades son válidas cuando

$$A\alpha_0 + B\beta_0 \neq 0, \qquad A\alpha_1 + B\beta_1 \neq 0, \tag{2.36}$$

para (2.34) y

$$A\alpha_0 + B\beta_0 \neq 0, \qquad A\alpha_2 + B\beta_2 \neq 0, \tag{2.37}$$

en el caso de (2.35); si lo anterior no se cumple, se deben retomar las ecuaciones (2.20) a (2.23) y realizar un análisis similar para encontrar las componentes de los estados de un qubit buscados. Por ejemplo, los dos estados separables en el subespacio correspondientes a la base $\{|v_1^1\rangle, |v_2^1\rangle\}$, son

$$|\Psi_1\rangle = \frac{|00\rangle + \mathrm{i} |01\rangle + \mathrm{i} |10\rangle - |11\rangle}{2}, \qquad |\Psi_2\rangle = \frac{|00\rangle - \mathrm{i} |01\rangle - \mathrm{i} |10\rangle - |11\rangle}{2},$$

cuyas componentes son distintas de cero y da lugar a utilizar las expresiones anteriores, obteniendo

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle\right) \\ |\Psi_2\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle\right). \end{aligned}$$

En cambio, para la base siguiente (que es otro par de estados de Bell)

$$\begin{vmatrix} v_1^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ket{00} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ket{11}, \\ \begin{vmatrix} v_2^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ket{00} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ket{11},$$

los estados separables son

$$|\Psi_1\rangle = |00\rangle, \qquad |\Psi_2\rangle = |11\rangle, \qquad (2.38)$$

los cuales no satisfacen las restricciones (2.36) y (2.37); sin embargo es simple identificar a los estados de un qubit que los componen, aunque el grado de dificultad variará dependiendo del caso.

Para finalizar el capítulo, se hará un resumen de lo encontrado hasta ahora. En la exploración de subespacios complejos bidimensionales de dos qubits, se ha comprobado la existencia de estados separables. Hay dos maneras de identificarlos, por medio del método numérico descrito en la sección 2.4, o utilizando las ecuaciones colocadas en (2.27). Si se desea conocer a los estados $|\phi_A\rangle \ge |\phi_B\rangle$, que componen a los estados separables encontrados, se puede hacer uso de las ecuaciones (2.32) y (2.33). Con esta última tarea se da por terminada la búsqueda de estados separables para sistemas de dos qubits y se inicia con el estudio de estados entrelazados en el capítulo siguiente.

3. ESTADOS PUROS ENTRELAZADOS EN SUBESPACIOS BIDIMENSIONALES

3.1. Introducción

El capítulo inicia con el estudio de estados entrelazados en la sección 3.2. Para completar el análisis de estados puros, se realizará el cálculo de concurrencia y entropía de entrelazamiento, en los subespacios tratados anteriormente. Se hará una comparación de ambas cantidades con la pureza γ_A , con el fin de determinar la forma en que se relacionan. Lo anterior será utilizado en la sección 3.3, la cual comienza con la búsqueda de los estados con mayor entrelazamiento en distintos subespacios. Junto a esta tarea, se plantea un nuevo objetivo: construir estados que posean un entrelazamiento específico. En lo que resta del capítulo, se trabajará en un método que permita obtener estados puros de dos qubits, con el grado de entrelazamiento que sea de interés.

3.2. Concurrencia y entropía de entrelazamiento

Luego de trabajar con estados separables, es momento de continuar con el estudio de estados entrelazados. Por ahora, se ha estudiado la separabilidad para estados puros y se observó que, la mayoría de estados en los subespacios considerados, son entrelazados. Es por ello, que también se realizará el cálculo de concurrencia y entropía para estados de dos qubits, cuyas definiciones fueron presentadas en la sección 1.4. Las ecuaciones (1.48) y (1.49), pueden ser utilizadas en los estados (2.14), con el propósito de conocer el entrelazamiento entre los dos subsistemas de 1 qubit. Entonces, similar a lo realizado con la pureza, se debe tomar cada valor de θ y ϕ para examinar todo el subespacio.

Se hace uso de Wolfram Mathematica para facilitar el cálculo de la concurrencia y entropía de los estados en (2.14). Con el objetivo de conocer el entrelazamiento de los estados mencionados, se han creado funciones en las que se ha implementado





Figura 3.1. Concurrencia en el subespacio correspondiente a la base $\{ |v_1^1\rangle, |v_2^1\rangle \}$ Fuente: elaboración propia.

Figura 3.2. Concurrencia en el subespacio correspondiente a la base $\{ |v_1^2\rangle, |v_2^2\rangle \}$. Fuente: elaboración propia.

a las ecuaciones (1.48) y (1.49), como se describe a continuación.

- Concurrence [v1, v2, θ, φ]: retorna la concurrencia de un estado puro de dos qubits de la forma (2.14), asociado a los valores θ y φ, cuya base es v1 y v2.
- EntanglementEntropy [v1, v2, θ, φ]: retorna el valor de la entropía de entrelazamiento correspondiente a un estado de la forma (2.14), para los valores θ y φ, con estados base v1 y v2.

Se ha reutilizado a PurityOfSubsystemaA[v1,v2, θ , ϕ] (descrita en la sección 2.4), en la estructura de Concurrence[v1,v2, θ , ϕ], ya que en la ecuación (1.48) se necesita conocer a la pureza γ_A . Mientras que en el caso de la entropía, el paso principal que realiza EntanglementEntropy[v1,v2, θ , ϕ], es el cálculo de los autovalores de la matriz densidad ρ^A como se indica en (1.49).

Al aplicar las funciones anteriores, se logra visualizar el entrelazamiento en distintos subespacios. Si se conoce la base $\{|v_i\rangle\}$ del subespacio a explorar, se tendrán dos variables θ y ϕ , que permiten realizar mapas de contorno para las cantidades buscadas. Es decir que, se utiliza Concurrence [v1,v2, θ , ϕ] para recorrer los valores colocados en (2.9); dos de los resultados obtenidos, se muestran en las figuras 3.1 y 3.2. Similarmente, las figuras 3.3 y 3.4, presentan la entropía de entrelazamiento, tras haber utilizado EntanglementEntropy [v1,v2, θ , ϕ]. En las gráficas anteriores, el color morado corresponde a los estados con menor entrelazamiento, ya que es el valor mínimo de concurrencia y entropía; además, si se comparan con las figuras 2.3



Figura 3.3. Entropía de entrelazamiento en el subespacio correspondiente a la base $\{|v_1^1\rangle, |v_2^1\rangle\}$. Fuente: elaboración propia.



Figura 3.4. Entropía de entrelazamiento en el subespacio correspondiente a la base $\{|v_1^2\rangle, |v_2^2\rangle\}$. Fuente: elaboración propia.

y 2.4, se observa que los estados separables (que se señalan con puntos blancos) coinciden con estos mínimos como se esperaba.

Luego de visualizar a la pureza, concurrencia y entropía en los subespacios, es apropiado analizar teóricamente la relación entre estas cantidades. Al observar la ecuación (1.48), se entiende el por qué los máximos de γ_A coinciden con los mínimos de concurrencia. Sin embargo, aún falta encontrar una expresión que describa a la entropía en función de la pureza. Al expandir la sumatoria de la ecuación (1.49), se tiene que la entropía es^{*}

$$E = -\sum_{i}^{2} \beta_{i} \ln \beta_{i} = -(\beta_{1} \ln \beta_{1} + \beta_{2} \ln \beta_{2}); \qquad (3.1)$$

pero por otro lado, hay que recordar que en la sección 1.4, se encontró a la pureza de los estados ρ^A y ρ^B , en términos de los autovalores β_i ,

$$\gamma_A = \gamma_B = \sum_i \beta_i^2.$$

Además, de la propiedad de traza unitaria que se analizó en el teorema 1.2.1, se tiene que $\sum_i \beta_i = 1$. Por lo tanto, $\beta_2 = 1 - \beta_1$, de modo que la pureza γ_A puede escribirse como

$$\gamma_A = \beta_1^2 + (1 - \beta_1)^2 = 2\beta_1^2 - 2\beta_1 + 1.$$

^{*}Se consideran dos autovalores debido a que la dimensión de ρ^A y ρ^B es 2 × 2, para estados de un qubit.



Figura 3.5. Concurrencia $C(\gamma_A)$ y entropía de entrelazamiento $E(\gamma_A)$, para estados de dos qubits. En este caso se tiene que $\frac{1}{2} \leq \gamma_A \leq 1$. **Fuente:** elaboración propia.

De esta ecuación, se encuentran los dos valores para β_1 y β_2

$$\beta_1 = \frac{1 \pm \sqrt{2\gamma_A - 1}}{2}, \qquad \beta_2 = \frac{1 \mp \sqrt{2\gamma_A - 1}}{2};$$

entonces, si se sustituye a alguno de los pares β_1 y β_2 en (3.1), resulta que la entropía es

$$E = -\frac{1 + \sqrt{2\gamma_A - 1}}{2} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{2\gamma_A - 1}}{2}\right) - \frac{1 - \sqrt{2\gamma_A - 1}}{2} \ln\left(\frac{1 - \sqrt{2\gamma_A - 1}}{2}\right)$$

la cual muestra estar en términos de γ_A . A partir de este resultado, es más sencillo verificar que en el máximo $\gamma_A = 1$, se tiene al mínimo E = 0, lo que concuerda con lo observado en las gráficas de pureza y entropía.

Para concluir esta sección, se realizará una discusión sobre las medidas utilizadas en el cálculo del entrelazamiento. Se ha encontrado que tanto la concurrencia como la entropía pueden ser expresadas en función de la pureza, lo que permite compararlas por medio de una gráfica, como se muestra en la figura 3.5. Un detalle a tomar en cuenta, es que se ha utilizado "log₂" en lugar de "ln" en la expresión para E, ya que hace posible que ambas cantidades, concurrencia y entropía, tengan los mismos límites; además se usa "log₂" con mayor frecuencia al trabajar con sistemas de un qubit [8]. La gráfica anterior ayuda a comprender que basta con estudiar a la pureza γ_A , para determinar el entrelazamiento, debido a que equivale a algún valor de C y E. Por lo tanto, dependiendo del objetivo que se tenga en mente, el análisis de γ_A podría simplificar el problema relacionado al entrelazamiento, como se podrá apreciar en la siguiente sección.

No.	Base	γ_A mínima
1	B_1	0.5560310517196909
2	B_2	0.5000904680155789
3	B_3	0.5291356249581232
4	B_4	0.5995180235292503
5	B_5	0.7095650472176688

Tabla 3.1. Valores de pureza mínima, encontrados en los subespacios correspondientes a las bases B_i , presentadas en la tabla B.1 (ver apéndice B). Fuente: elaboración propia.

3.3. Construcción de estados entrelazados

De acuerdo con los resultados obtenidos, se observa que en estos subespacios existe un valor máximo de entrelazamiento, el cual también puede ser identificado. En el capítulo anterior, se identificaron estados con cero entrelazamiento en los subespacios considerados. Pero, aún queda pendiente abordar la contraparte que consiste en determinar a los estados que correspondan al mayor grado de entrelazamiento en los subespacios. Para realizar lo requerido, podría pensarse en calcular el valor máximo de concurrencia o entropía en los subespacios; pero antes de decidir qué cantidad elegir, debe recordarse que ambas dependen de la pureza γ_A , como se mostró en la sección 3.2. De ello resulta que, un valor mínimo de pureza es asociado a estados con mayor entrelazamiento, como se ha observado en la figura 3.5. Entonces, la siguiente tarea consistirá en obtener el mínimo de pureza en cada subespacio.

Se programa la función MinimumPurity [v1,v2], que determina numéricamente el valor mínimo de pureza. En la búsqueda de estados separables, se diseñó un algoritmo para ubicar a los estados con el máximo valor de pureza; este último detalle es el que debe modificarse antes de aplicarlo en la situación actual. Se crea entonces una función análoga a MaximumPurity [v1, v2]^{**}, que cumple con lo solicitado, como se describe a continuación.

 MinimumPurity[v1, v2]: retorna el valor mínimo de γ_A, junto con los pares {θ, φ} asociados a este, que se encuentra en el subespacio generado por v1 y v2.

En la rutina anterior, se utiliza a PurityOfSubsystemA[v1, v2, θ , ϕ] para el cálculo de la pureza γ_A , y luego se ubican a los pares { θ , ϕ } que identifican a los estados en (2.14), con mayor entrelazamiento.

^{**}La descripción de MaximumPurity [v1, v2] y PurityOfSubsystemA[v1, v2, θ , ϕ], se encuentran en la sección 2.4.



Figura 3.6. Pureza en el subespacio correspondiente a la base $\{|v_1^5\rangle, |v_2^5\rangle\}$. En este caso, existen varios estados con pureza $\gamma_{A\min} = 0.75$ en $\theta = \pi/2$ (área violeta). **Fuente:** elaboración propia.

Los resultados muestran que, en general, el mayor grado de entrelazamiento no será el mismo en todos los subespacios bidimensionales. En la tabla 3.1, se presentan los valores mínimos de γ_A , para algunos de los subespacios considerados. En cada caso, se observa que la pureza $\gamma_{Amínima}$ es mayor a 1/2, que es el límite inferior de γ_A según (1.16). Sin embargo, en subespacios donde la base es cualquier par de estados de Bell, sucede que la pureza mínima sí coincide este valor. Esto significa que el entrelazamiento máximo alcanzado irá variando, por lo que se tendrán límites distintos de concurrencia y entropía en cada subespacio.

Para verificar analíticamente que la pureza $\gamma_{Amínima}$ en los subespacios, puede ser mayor a 1/2, se presenta el siguiente ejemplo. Considerar a la base

$$\left|v_{1}^{5}\right\rangle = \frac{\left|00\right\rangle + \left|01\right\rangle + \left|10\right\rangle + \left|11\right\rangle}{2}, \qquad \left|v_{2}^{5}\right\rangle = \frac{\left|00\right\rangle - \left|10\right\rangle}{\sqrt{2}},$$

cuya pureza resulta ser

$$\gamma_A = \frac{1}{8} \left(7 + \cos\left(2\theta\right)\right). \tag{3.2}$$

Para obtener a $\gamma_{A\min}$, el término $\cos(2\theta)$ debe alcanzar su valor mínimo, el cual sucede en $\theta = \pi/2$. En consecuencia, $\gamma_{A\min} = 3/4$, lo cual coincide con el resultado presentado en la figura 3.6. De esta manera, se confirma que no existen estados con pureza $\gamma_A = 1/2$ en el subespacio generado por $|v_1^5\rangle \ge |v_2^5\rangle$.

Al igual que se hizo con el máximo de pureza, también se han identificado a los estados que poseen mayor entrelazamiento. En las figuras 3.7 y 3.8, se aprecia





Figura 3.7. Valores θ , ϕ (punto negro) en donde γ_A es mínima para la base B_1 . **Fuente:** elaboración propia.

Figura 3.8. Valores θ , ϕ (punto negro) en donde γ_A es mínima para la base B_3 . **Fuente:** elaboración propia.

un solo estado correspondiente al mínimo de pureza encontrado, pero existen subespacios que cuentan con varios estados asociados a este valor, como se muestra en la figura 2.4. La base de este subespacio es un par de estados de Bell, y cada uno cuenta con un entrelazamiento asociado a $\gamma_A = 1/2$, que es el valor mínimo que alcanza γ_A . Por tal razón, existen distintos estados correspondientes a esta pureza, la cual coincide con el valor de $\gamma_{A\min}$ encontrado en el subespacio.

Al conocer los límites de γ_A en un subespacio determinado, se puede realizar una búsqueda de estados que cuenten con un grado específico de entrelazamiento. Hasta ahora, se han encontrado los valores máximo y mínimo de γ_A en los subespacios explorados; pero, existen ocasiones en las que se requiere trabajar con un grado de entrelazamiento particular. Entonces, la pregunta que surge es: ¿cómo localizar estados con dicho entrelazamiento en subespacios bidimensionales? Para ello, hay que recordar que γ_A es útil en el cálculo de la concurrencia y entropía de entrelazamiento. Sin embargo, no es común trabajar directamente con γ_A , y por esta razón se ha decidido utilizar a la concurrencia para continuar con el análisis. La expresión (1.48) será usada en la construcción de estados puros asociados a una pureza γ_A , la cual deberá encontrarse dentro de los límites correspondientes, en el subespacio seleccionado. Entonces, para los estados (2.14), $\gamma_A = \gamma_A(\theta, \phi)$, lo cual implica que también la concurrencia estará siendo expresada como una función de θ y ϕ .

Es momento de presentar la estrategia que se empleará en la construcción de estados entrelazados. Hay que tener presente que el objetivo es encontrar estados con cierto valor de concurrencia, en un subespacio conocido. A continuación se enumeran los pasos a seguir para cumplir con esta tarea.

- 1. Calcular la pureza γ_A de los estados (2.14) y utilizar a (1.48), para tener a la concurrencia C, en función de θ y ϕ .
- Ubicar a los máximos y mínimos de concurrencia, con ayuda de las funciones MinimumPurity[v1,v2] y MaximumPurity[v1,v2].
- 3. Utilizar el método de interpolación lineal con los puntos máximos y mínimos, para buscar pares de $\{\theta, \phi\}$, asociados a la concurrencia de interés.
- 4. Sustituir devuelta en (2.14) para obtener a los estados $|\Psi\rangle$ de dos qubits.

El algoritmo que se acaba de exponer, se estará aplicando de manera numérica en los subespacios que se han estado explorando hasta ahora. Es por ello que, será necesario desarrollar una rutina que realice la tarea descrita en el paso 3.

Con ayuda de Wolfram Mathematica, se crea a la función encargada de encontrar valores de θ y ϕ , que correspondan a una concurrencia específica. Antes de ejemplificar la manera en que trabaja el método anterior, resulta útil implementar una función que complete el proceso en la construcción de los estados requeridos.

 StatesWithConcurrenceC[C,v1,v2,máximos,mínimos]: retorna pares de {θ, φ} asociados a un valor específico de C, que se encuentran en los segmentos de rectas que unen a los máximos y mínimos de concurrencia, en el subespacio generado por {v1, v2}.

En los cálculos que realiza StatesWithConcurrenceC[C,v1,v2,máximos,mínimos], primero se hace uso de Concurrence[v1,v2, θ , ϕ] con el propósito de obtener a la concurrencia $C = C(\theta, \phi)$, como se indica en el paso 1 del algoritmo. Luego, se toman los pares { θ_{max}, ϕ_{max} } y { θ_{min}, ϕ_{min} } de las listas máximos y mínimos, con el objetivo de utilizar el método de interpolación lineal y ubicar un par { θ, ϕ } asociado a C. Para ello se utiliza la expresión [14, p. 152]

$$P = (1 - l)P_0 + lP_1, (3.3)$$

que permite localizar un punto P sobre la recta que va desde P_0 hacia P_1 , dependiendo del valor de l (el cual varía desde l = 0 hasta l = 1). De esa manera, al aplicarlo con $P_0 = \{\theta_{\min}, \phi_{\min}\}$ y $P_1 = \{\theta_{\max}, \phi_{\max}\}$, se obtiene a la recta que contiene a los puntos $P = \{\theta, \phi\}$, asociados a los valores de concurrencia $C_{\min} \leq C \leq C_{\max}$. En la figura 3.9, se muestra un ejemplo del paso que se acaba de describir, para una de las bases de la tabla B.1 (consultar apéndice B). Al utilizar a (3.3), tanto



Figura 3.9. Concurrencia y rectas que unen a los máximos con los mínimos, en el subespacio asociado a la base B_4 . Cada valor de C en el rango $[C_{\min}, C_{\max}]$, corresponde a algún punto sobre ambas rectas. **Fuente:** elaboración propia.

No.	$oldsymbol{C}_{ ext{max}}$	$\{ heta_{ ext{max}}, \phi_{ ext{max}}\}$	$C_{ m min}$	$\{ heta_{\min}, \phi_{\min}\}$
1	0.894966	$\{2.0167, 2.4991\}$	0	$\{ \begin{array}{c} 0.9614, 0.7674 \} \\ \{ 1.8309, 4.6479 \} \end{array}$

Tabla 3.2. Concurrencia máxima y mínima, en el subespacio generado por la base B_4 . Fuente: elaboración propia.

 θ como ϕ dependerán del parámetro l, y la concurrencia podrá ser expresada como C = C(l). El propósito de hacer lo anterior, es que ahora es posible buscar el valor de l correspondiente a C. Una vez que se conozca a l, debe de sustituirse de vuelta en (3.3), para finalmente determinar al par $\{\theta, \phi\}$ asociado a esta concurrencia. El procedimiento se repite para todos los puntos de las listas maximos y minimos. Con esta descripción más detallada, se tiene todo lo necesario para poner en marcha la construcción de estados entrelazados.

A continuación se expone un ejemplo que ayuda a entender de mejor manera el funcionamiento del algoritmo. Para iniciar, considerar a la base B_4 que se muestra en la tabla B.1 del apéndice B; con ella se procede a calcular el máximo de concurrencia, el cual se muestra en la tabla 3.2. Resulta entonces que el rango de concurrencia válido en el subespacio es $0 \le C \le C_{\text{max}}$, lo que permite trabajar con C = 0.42. Al realizar estos cálculos, se han encontrado también los valores de $\{\theta_{\text{max}}, \phi_{\text{min}}\}$ y $\{\theta_{\text{min}}, \phi_{\text{min}}\}$ (colocados en la tabla 3.2), por lo que ahora es posible usar la función StatesWithConcurrenceC[C,v1,v2,máximos,mínimos]. En este caso, el resultado fue de 2 estados con concurrencia de 0.42, que son los mostrados en la figura 3.10. Por último, se utiliza la ecuación (2.14) para obtener de manera explícita a los estados



Figura 3.10. Concurrencia en el subespacio asociado a la base B_4 . Algunos de los pares $\{\theta, \phi\}$, que corresponden a estados con una concurrencia de 0.42, se señalan con puntos rojos. **Fuente:** elaboración propia.

de dos qubits

$$\begin{split} |\Psi_1\rangle &= \{0.1998 + 0.1624 \text{ i}, 0.4846 + 0.5505 \text{ i}, -0.1785 + 0.0226 \text{ i}, 0.0137 + 0.6026 \text{ i}\}, \\ |\Psi_2\rangle &= \{0.3601 + 0.2959 \text{ i}, -0.1270 + 0.1955 \text{ i}, 0.8319 - 0.0968 \text{ i}, -0.1605 + 0.0366 \text{ i}\}; \end{split}$$

de esta forma, se puede realizar distintas pruebas en los subespacios que se elijan. Es importante enfatizar que solo se han ubicado algunos de los estados con concurrencia de 0.42; en la figura 3.10, se aprecia que existen más valores de θ y ϕ que corresponden a esta concurrencia. Por último, vale la pena mencionar que este método es válido para cualquier número de qubits que hayan en los sistemas A y B, debido a que la ecuación (1.48), es aplicable a cualquier estado puro bipartito (como se menciona en [21, p. 169]). Dependiendo del caso, deben de realizarse las modificaciones en la función **Concurrence**[v1,v2, θ , ϕ] al calcular a γ_A . Con la anterior demostración en el subespacio generado por B_4 , se completa el contenido de la presente sección; pero, si se desea probar con otros ejemplos, consultar el repositorio de GitHub^{***}.

Para concluir el capítulo, se hará una breve recapitulación de los resultados encontrados. En el estudio del entrelazamiento cuántico, se ha mostrado que solamente es necesario analizar la pureza γ_A , debido a que la concurrencia y entropía dependen de ella. Además, al calcular los mínimos de γ_A , se encontró que el entrelazamiento máximo no es el mismo en todos los subespacios bidimensionales. En base a ello, se planteó la pregunta de cómo encontrar estados con un entrelazamiento específico.

^{***}Para producir nuevos resultados, ingresar a https://github.com/Subadra-E/Tesis, abrir el archivo nombrado "CuadernoInteractivo.nb" y ubicarse en la subsección "Construcción de estados entrelazados", dentro de la sección "Estados puros de 2 qubits".

Esto llevó al desarrollo de un método que permite ubicar estados puros de dos qubits, a partir de un valor de concurrencia específico. Es así como se da cierre a la exploración de subespacios para sistemas de dos qubits, y se continuará con el caso de sistemas compuestos por tres y más qubits.
4. SISTEMAS BIPARTITOS DE TRES Y MÁS QUBITS

4.1. Introducción

La sección 4.2, que se presenta a continuación, está dedicada a la búsqueda de estados separables para sistemas bipartitos compuestos por más de dos qubits. Lo primero será recorrer subespacios bidimensionales de tres qubits, con ayuda del método numérico. Seguidamente, se realizará un análisis de pureza para lograr una mejor comprensión de los resultados. Por último en la sección 4.3, se trabajará con sistemas de cuatro, cinco y seis qubits. En cada caso, se llevará a cabo una búsqueda numérica de los estados separables que son de interés.

4.2. Estados de tres qubits

El análisis de separabilidad se aplicará a sistemas de más qubits, lo que da lugar a explorar nuevos subespacios. En la sección 1.4, se encontró que un estado puro asociado a un sistema bipartito, es separable si $\gamma_A = 1$. Este criterio volverá a utilizarse, aunque ahora uno o ambos de los subsistemas estarán conformados por más de un qubit. Aunque la forma de los estados que se van a considerar continuará siendo la mostrada en (2.10), habrá un cambio en la dimensión de los elementos de la base^{*}. Tomando en cuenta lo anterior, ya es posible iniciar con la búsqueda de estados separables en subespacios bidimensionales de varios qubits.

^{*}Es decir que al trabajar con *n* qubits, entonces $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{C}^{2^n}$.

No.	Base	γ_A máxima
1	B_6	0.8164588268275463
2	B_7	0.9694063810500124
3	B_8	0.9414918212691143
4	B_9	0.9234560914468197
5	B_{10}	0.925150617814293

Tabla 4.1. Valores de pureza máxima, encontrados en los subespacios correspondientes a las bases B_i , presentadas en la tabla C.1 (ver apéndice C). Fuente: elaboración propia.

Se comenzará a trabajar con estados de tres qubits, para los cuales se debe calcular el valor de γ_A . En el primer caso a tratar, se va a considerar un qubit en el subsistema A y dos qubits en el subsistema B. Se utilizará nuevamente el algoritmo presentado en la sección 2.3, pero se realizarán las modificaciones correspondientes. La más importante es que en el cálculo de ρ^A , se debe de trazar parcialmente sobre el segundo y tercer qubit. Además, hay que tener presente que la tarea principal es la misma: determinar los valores de θ y ϕ , asociados al valor máximo de γ_A .

Para llevar a cabo la búsqueda de estados separables, se hará uso de las funciones que se emplearon en el caso de dos qubits. La exploración en los distintos subespacios, se realizará con ayuda de las rutinas OrthonormalBasis[n] y MaximumPurity[v1,v2], que se presentaron en la sección 2.4. Con la primera, se construyen a los vectores base al ingresar $\mathbf{n} = 3$, mientras que la segunda devuelve a γ_{Amax} y los pares { θ_{max}, ϕ_{max} }. Se debe mencionar también que, en la estructura de MaximumPurity[v1,v2], se aplica ReducedDensityMatrix[ρ ,Qubits], para realizar la traza parcial sobre los qubits 2 y 3. Luego de explicar cómo funcionan estas dos herramientas, se procede a la presentación de resultados.

La primer idea que se obtiene de los resultados, es que no existen estados separables en ninguno de los subespacios. Algunos de los vectores base que se utilizaron en la exploración, se encuentran en la tabla C.1 (ver apéndice C). De nuevo, la pureza γ_A puede visualizarse por medio de gráficas, como se logra apreciar en las figuras 4.1 y 4.2. En esos y otros subespacios, se encontró que el valor máximo de γ_A es menor a 1, lo cual se confirma también en los ejemplos de la tabla 4.1. Lo anterior quiere decir que no se logró localizar estados separables de la forma requerida.

Como complemento, se calcula de manera analítica el máximo de pureza en un subespacio específico. Para corroborar lo encontrado hasta ahora, se tomará una base específica con el fin de demostrar que el valor máximo de γ_A no llega a ser 1.





Figura 4.1. Valores θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx 0.97$, para la base B_7 de la tabla C.1. **Fuente:** elaboración propia.

Figura 4.2. Valores θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx 0.93$, para la base B_{10} de la tabla C.1. Fuente: elaboración propia.

Si se trabaja con los estados

$$|v_1^4\rangle = \frac{|010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle}{2}, \qquad |v_2^4\rangle = \frac{|010\rangle - |100\rangle}{\sqrt{2}},$$

y se sustituye en la expresión (2.14), resulta que γ_A es

$$\gamma_A = \frac{1}{4} \left(2 + \sin^2\left(\theta\right) \cos^2\left(\phi\right) \right). \tag{4.1}$$

En la ecuación (4.1), el término $\sin^2(\theta)\cos^2(\phi)$, es el que permite encontrar al máximo de pureza. Al tener en cuenta los valores de θ y ϕ colocados en (2.9), se concluye que γ_A es máxima cuando $\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) = 1$. Por lo tanto, $\gamma_{A\max} = 3/4$, que a su vez coincide con lo obtenido numéricamente, como se observa en la descripción de la figura 4.3. El resultado anterior indica que en este subespacio, no es posible ubicar estados separables bipartitos de tres qubits.

Sin embargo, se encontró que en determinados subespacios existen estados separables. Al tomar otro ejemplo, en el que la base es

$$|v_1^5\rangle = \frac{|000\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |v_2^5\rangle = \frac{|001\rangle - |100\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad (4.2)$$





Figura 4.3. Valores de $\{\theta, \phi\}$ (puntos blancos), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} = 0.75$, para la base $\{|v_1^4\rangle, |v_2^4\rangle\}$. **Fuente:** elaboración propia.

Figura 4.4. Valores de $\{\theta, \phi\}$ (puntos blancos), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} = 1$, para la base $\{|v_1^5\rangle, |v_2^5\rangle\}$. **Fuente:** elaboración propia.

se encuentra que la pureza máxima es 1 y corresponde a los estados separables

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{|000\rangle + i\,|001\rangle - i\,|100\rangle + |101\rangle}{2} = \left(\frac{|0\rangle - i\,|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|00\rangle + i\,|01\rangle}{\sqrt{2}}\right), \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{|000\rangle - i\,|001\rangle + i\,|100\rangle + |101\rangle}{2} = \left(\frac{|0\rangle + i\,|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|00\rangle - i\,|01\rangle}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$
(4.3)

que también se muestran en la figura 4.4. Esto prueba que es posible ubicar a los estados separables de tres qubits descritos al inicio, pero no en todos los subespacios, a diferencia de lo que sucede con los sistemas de dos qubits. Por otro lado, algo interesante a notar es el número de estados separables que se han localizado en el ejemplo de la base (4.2), ya que da lugar a preguntarse: ¿por qué dos estados separables?. La incógnita anterior se intentará responder de acá en adelante, lo cual será de utilidad para comprender los resultados de la exploración.

Con ayuda del análisis de pureza, se encuentra una forma teórica para obtener a los estados separables. Al calcular primero a γ_A , en términos de los elementos ρ_{ij} de la matriz densidad del sistema completo, se obtiene

$$\gamma_A = \left(\sum_{i=0}^3 \rho_{ii}\right)^2 + 2(\rho_{04} + \rho_{15} + \rho_{26} + \rho_{37})(\rho_{40} + \rho_{51} + \rho_{62} + \rho_{73}) + \left(\sum_{i=4}^7 \rho_{ii}\right)^2.$$

Si se reescribe a la pureza γ_A , de forma similar a como se hizo para llegar a la

ecuación (A.4) (consultar apéndice A), resulta

$$\gamma_{A} = 1 - 2 \left(|\alpha_{0}\alpha_{5} - \alpha_{1}\alpha_{4}|^{2} + |\alpha_{0}\alpha_{6} - \alpha_{2}\alpha_{4}|^{2} + |\alpha_{0}\alpha_{7} - \alpha_{3}\alpha_{4}|^{2} + |\alpha_{1}\alpha_{6} - \alpha_{2}\alpha_{5}|^{2} + |\alpha_{1}\alpha_{7} - \alpha_{3}\alpha_{5}|^{2} + |\alpha_{2}\alpha_{7} - \alpha_{3}\alpha_{6}|^{2} \right);$$

$$(4.4)$$

entonces, para un valor $\gamma_A = 1$ se debe cumplir que

$$\begin{aligned} |\alpha_0\alpha_5 - \alpha_1\alpha_4|^2 + |\alpha_0\alpha_6 - \alpha_2\alpha_4|^2 + |\alpha_0\alpha_7 - \alpha_3\alpha_4|^2 + |\alpha_1\alpha_6 - \alpha_2\alpha_5|^2 + \\ |\alpha_1\alpha_7 - \alpha_3\alpha_5|^2 + |\alpha_2\alpha_7 - \alpha_3\alpha_6|^2 = 0. \end{aligned}$$
(4.5)

Al sustituir las componentes del estado (2.10) en la igualdad anterior, se tiene lo siguiente

$$|(A\alpha_{0} + B\beta_{0})(A\alpha_{5} + B\beta_{5}) - (A\alpha_{1} + B\beta_{1})(A\alpha_{4} + B\beta_{4})|^{2} + \dots + |(A\alpha_{2} + B\beta_{2})(A\alpha_{7} + B\beta_{7}) - (A\alpha_{3} + B\beta_{3})(A\alpha_{6} + B\beta_{6})|^{2} = 0;$$
(4.6)

esta ecuación puede depender de una sola variable al dividirla por $|A^2|^2$, de manera similar a como se trató con (2.28),

$$| (\alpha_0 + \mathbf{B'}\beta_0) (\alpha_5 + \mathbf{B'}\beta_5) - (\alpha_1 + \mathbf{B'}\beta_1) (\alpha_4 + \mathbf{B'}\beta_4) |^2 + ... + | (\alpha_2 + \mathbf{B'}\beta_2) (\alpha_7 + \mathbf{B'}\beta_7) - (\alpha_3 + \mathbf{B'}\beta_3) (\alpha_6 + \mathbf{B'}\beta_6) |^2 = 0,$$
(4.7)

con $\mathbf{B'} = B/A$. Conviene notar que cada término en (4.7), necesita ser 0 para que la igualdad sea válida, lo cual implica resolver cada una de las seis ecuaciones cuadráticas,

$$B^{\prime 2}(\beta_{0}\beta_{5} - \beta_{1}\beta_{4}) + B^{\prime}(\alpha_{0}\beta_{5} + \alpha_{5}\beta_{0} - \alpha_{1}\beta_{4} - \alpha_{4}\beta_{1}) + \alpha_{0}\alpha_{5} - \alpha_{1}\alpha_{4} = 0,$$

$$B^{\prime 2}(\beta_{0}\beta_{6} - \beta_{2}\beta_{4}) + B^{\prime}(\alpha_{0}\beta_{6} + \alpha_{6}\beta_{0} - \alpha_{2}\beta_{4} - \alpha_{4}\beta_{2}) + \alpha_{0}\alpha_{6} - \alpha_{2}\alpha_{4} = 0,$$

$$B^{\prime 2}(\beta_{0}\beta_{7} - \beta_{3}\beta_{4}) + B^{\prime}(\alpha_{0}\beta_{7} + \alpha_{7}\beta_{0} - \alpha_{3}\beta_{4} - \alpha_{4}\beta_{3}) + \alpha_{0}\alpha_{7} - \alpha_{3}\alpha_{4} = 0,$$

$$B^{\prime 2}(\beta_{1}\beta_{6} - \beta_{2}\beta_{5}) + B^{\prime}(\alpha_{1}\beta_{6} + \alpha_{6}\beta_{1} - \alpha_{2}\beta_{5} - \alpha_{5}\beta_{2}) + \alpha_{1}\alpha_{6} - \alpha_{2}\alpha_{5} = 0,$$

$$B^{\prime 2}(\beta_{1}\beta_{7} - \beta_{3}\beta_{5}) + B^{\prime}(\alpha_{1}\beta_{7} + \alpha_{7}\beta_{1} - \alpha_{3}\beta_{5} - \alpha_{5}\beta_{3}) + \alpha_{1}\alpha_{7} - \alpha_{3}\alpha_{5} = 0,$$

$$B^{\prime 2}(\beta_{2}\beta_{7} - \beta_{3}\beta_{6}) + B^{\prime}(\alpha_{2}\beta_{7} + \alpha_{7}\beta_{2} - \alpha_{3}\beta_{6} - \alpha_{6}\beta_{3}) + \alpha_{2}\alpha_{7} - \alpha_{3}\alpha_{6} = 0.$$

(4.8)

Las soluciones se obtienen por medio de (2.30), luego de identificar correctamente a los coeficientes a, b y c. Sin embargo, para que (4.7) se cumpla, es necesario que ambas raíces ($B'_1 y B'_2$) sean compartidas por las seis ecuaciones. Si es posible encontrarlas, deben sustituirse en (2.27), y se tendrán entonces dos estados separables en el subespacio generado por $|v_1\rangle \neq |v_2\rangle$.

Es momento de comparar el método recién estudiado con el numérico, y completar la discusión para el caso de sistemas bipartitos de tres qubits. De acuerdo con el análisis realizado, no siempre existirá solución para (4.7), debido a que B' debe satisfacer más de una ecuación. Es por ello que no se encontraron estados separables en varios de los subespacios, que se exploraron numéricamente. Para determinar la existencia de estados separables con el método anterior, se ha creado una función que realice los cálculos descritos anteriormente.

AnalyticalSeparableStates3Qubits [v1, v2]: retorna los coeficientes A y B (si existen), indicados en (2.27), para la base v1 y v2, así como a los estados separables (2.10).

Luego de emplear esta función en los subespacios asociados a las bases B_i , de la tabla C.1, no se obtuvo ningún estado separable. El resultado coincide con lo encontrado por medio del método numérico; además, al ingresar la base (4.2) en AnalyticalSeparableStates3Qubits[v1, v2], se obtiene

$$\begin{split} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| v_1^5 \right\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \left| v_2^5 \right\rangle = \frac{|000\rangle + i \left| 001 \right\rangle - i \left| 100 \right\rangle + |101\rangle}{2}, \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| v_1^5 \right\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} \left| v_2^5 \right\rangle = \frac{|000\rangle - i \left| 001 \right\rangle + i \left| 100 \right\rangle + |101\rangle}{2}, \end{split}$$

que también coincide con los estados en (4.3). Para concluir, debe mencionarse que existe la opción de contar con un solo valor de B' cuando los discriminantes en (4.8) son igual a 0. Dependiendo de la situación, podría existir solo un estado separable o varios, como se mostró en el ejemplo asociado a la base (2.31). Con este último comentario, se da paso a la búsqueda de los estados separables que falta considerar.

4.3. Casos de cuatro y más qubits

Finalmente, se presentan los resultados numéricos luego de trabajar con sistemas de más qubits. En los casos restantes de la tabla 4.2, se vuelve a utilizar la función OrthonormalBasis [n], para obtener distintos estados base compuestos por n = 4,5 y 6 qubits. Luego de modificar la función MaximumPurity[v1,v2] y aplicarla en cada caso, se obtuvo que el máximo de pureza en los distintos subespacios no llega a ser 1. Así como sucedió con el caso de tres qubits, no se localizaron estados separables para ninguna de las bases que se generaron de manera aleatoria. Las

No. de Caso	Qubits en sistema A	Qubits en sistema B	Qubits en sistema completo
1	1	3	4
2	2	2	4
3	1	4	5
4	2	3	5
5	1	5	6
6	2	4	6
7	3	3	6

Tabla 4.2. Casos que serán considerados en la búsqueda de estados separables, para sistemas bipartitos. Fuente: elaboración propia.



Figura 4.5. Valores de θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx 0.89$, para el caso 2 de la tabla 4.2. **Fuente:** elaboración propia.



Figura 4.6. Valores de θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx 0.39$, para el caso 4 de la tabla 4.2. **Fuente:** elaboración propia.

figuras 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8, muestran algunos resultados de la exploración; pero, si se desea continuar con la búsqueda de estados separables en más subespacios, puede hacerse uso del cuaderno interactivo^{**} que se ha mencionado en capítulos anteriores. Cabe señalar que no se descarta la existencia de estados separables en todos los subespacios, ya que podrían encontrarse ejemplos como el presentado en (4.2).

A continuación se van a presentar dos ejemplos en los cuales, sí existen estados

^{**}Ingresar a https://github.com/Subadra-E/Tesis para encontrarlo.





Figura 4.7. Valores de θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx 0.59$, para el caso 5 de la tabla 4.2. **Fuente:** elaboración propia.

Figura 4.8. Valores de θ y ϕ (punto blanco), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} \approx 0.27$, para el caso 7 de la tabla 4.2. **Fuente:** elaboración propia.

separables. Considerar la siguiente base compuesta por cuatro qubits,

$$\begin{aligned} \left| v_1^6 \right\rangle &= \frac{\left| 0000 \right\rangle + \left| 0111 \right\rangle + \left| 1000 \right\rangle + \left| 1111 \right\rangle}{2}, \\ \left| v_2^6 \right\rangle &= \frac{\left| 0011 \right\rangle + \left| 0100 \right\rangle + \left| 1011 \right\rangle + \left| 1100 \right\rangle}{2}, \end{aligned}$$

con la que se trabajará el caso 2 de la tabla 4.2. Al calcular γ_A , resulta

$$\gamma_A = \frac{1}{2} \left(1 + \sin^2\left(\theta\right) \cos^2\left(\phi\right) \right),\,$$

que es máxima cuando $\sin^2(\theta) \cos^2(\phi) = 1$. Con lo mencionado, se obtiene un valor $\gamma_{A\max} = 1$, lo que a su vez implica la existencia de estados separables. El resultado anterior coincide con lo obtenido numéricamente, como se muestra en la figura 4.9. Ahora se tratará un ejemplo para el caso 4, con la siguiente base

$$|v_1^7\rangle = \frac{|00000\rangle + |11111\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |v_2^7\rangle = \frac{|00001\rangle + |00100\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Nuevamente, se calcula la pureza

$$\gamma_A = \frac{1}{2} \left(1 + \sin^4(\theta/2) \right),\,$$

cuya expresión indica que el valor máximo se alcanza cuando $\sin^4(\theta/2) = 1$. De esa manera, $\gamma_{A\max} = 1$, al igual que en los resultados numéricos mostrados en la figura 4.10.



Figura 4.9. Caso 2 de la tabla 4.2. Se muestran los valores θ y ϕ (puntos blancos), correspondientes a la pureza $\gamma_{A\max} = 1$, para la base $\{|v_1^6\rangle, |v_2^6\rangle\}$. **Fuente:** elaboración propia.



Figura 4.10. Caso 4 de la tabla 4.2. Pureza en el subespacio correspondiente a la base $\{|v_1^7\rangle, |v_2^7\rangle\}$. En este caso existen varios estados asociados a $\gamma_{A\max} = 1$, en $\theta = \pi$ (área roja). Fuente: elaboración propia.

Si se desea profundizar en el estudio de γ_A , debe tomarse en cuenta que la dificultad de cada caso será diferente. Para completar la discusión de resultados, sería apropiado realizar un análisis de pureza, como se hizo en el caso de tres qubits de la sección anterior. Sin embargo, es importante destacar que la cantidad de términos en γ_A aumentará a medida que se trabaje con más qubits, como se observa en (A.2) (consultar apéndice A) y (4.4). Esto implica que cada vez será más complicado reescribir a γ_A y obtener expresiones similares a (A.4) y (4.4), que faciliten el estudio de las distintas situaciones que se han abordado de manera numérica. Es por ello que, en este trabajo, no se tratará analíticamente a los estados de cuatro y más qubits. Aunque, si se toma como referencia el caso de tres qubits, podría suponerse que la razón por la cual no se encontraron estados separables, sigue siendo el número de ecuaciones que surgen de γ_A , como las colocadas en (4.8).

CONCLUSIONES

En este trabajo se abordó el tema de separabilidad [7] y entrelazamiento cuántico, aplicado a estados puros bipartitos en subespacios complejos bidimensionales. Una de las tareas propuestas fue la búsqueda de estados separables, los cuales cumplen con lo siguiente: si un estado puro bipartito es separable, la pureza de uno de sus operadores de densidad reducidos es igual a 1. En base a ello, se desarrolló un método numérico que permite determinar la existencia de estos estados, en los subespacios mencionados. Los resultados indicaron que, en todos los subespacios correspondientes a sistemas de dos qubits, es posible encontrar estados separables. Lo anterior se verificó de manera analítica, lo que a su vez permitió determinar a los estados de un qubit que conforman a los estados separables encontrados. Por otro lado, para sistemas bipartitos de tres qubits, no existen estados separables en todos los subespacios. En esta ocasión, el análisis de pureza realizado mostró que los estados separables se hallarán solo en ciertos subespacios y, al mismo tiempo, proporciona un método que ayuda a identificarlos. Para los casos de cuatro, cinco y seis qubits, los resultados fueron similares al anterior; es decir que existen estados bipartitos separables, aunque no en todos los subespacios. Sin embargo, aún es necesario realizar un análisis de pureza, que avude a comprender mejor lo que se ha encontrado. Finalmente, la segunda tarea que se planteó fue el estudio del entrelazamiento por medio de la concurrencia [21] y entropía [5, 8]. Luego de haber profundizado en estas definiciones, se realizó el cálculo de ambas cantidades para estados puros de dos qubits, y se encontró que los límites del entrelazamiento varían en cada subespacio. A partir de ello, se diseñó un método encargado de construir estados con el grado de entrelazamiento que se requiera y que pertenezcan al subespacio en el que se esté trabajando. Aunque solo se haya probado con dos qubits, el método puede ser aplicado en diversos casos de sistemas bipartitos conformados por varios qubits, luego de tomar en cuenta las consideraciones mencionadas.

TRABAJO FUTURO

A partir de la exploración que acaba de realizarse, surgen nuevas propuestas para continuar con el estudio de entrelazamiento y separabilidad en más subespacios. Cada una de ellas se describe en la siguiente lista:

- Profundizar en el análisis de estados puros bipartitos de cuatro y más qubits. En la sección 4.3, se mostraron los resultados numéricos luego de buscar distintos estados separables de varios qubits, en subespacios complejos bidimensionales. Sin embargo, aún queda pendiente abordar el problema de manera analítica, para entender y completar los diferentes casos que fueron tratados en la sección.
- Ubicar a los estados con el mayor y menor grado de entrelazamiento, en subespacios bidimensionales, para sistemas de dos qutrits. Debe recordarse que la teoría estudiada en el primer capítulo, puede ser aplicada a distintos tipos de sistemas cuánticos. En este trabajo se utilizaron qubits, pero lo siguiente es considerar *qutrits*, que son sistemas cuánticos de tres niveles. Con ello, se propone una nueva exploración en subespacios complejos bidimensionales, al considerar inicialmente dos qutrits. La tarea principal en la exploración sería localizar a los estados puros, que posean el mayor y menor grado de entrelazamiento. De lo anterior, también sería posible determinar la existencia de estados separables en estos subespacios.
- Trabajar con estados puros de dos y más qubits, en subespacios tridimensionales. El objetivo es realizar una búsqueda similar a la descrita en el punto anterior, pero tomando en cuenta a un tercer estado base en la expresión (2.10). Con el caso inicial de dos qubits, se pretende extender la exploración a sistemas bipartitos de varios qubits y comparar con los resultados presentados en los capítulos 2, 3 y 4.

Existen otros temas que podrían incluirse en la exploración de subespacios, como el estudio de separabilidad para estados de sistemas multipartitos. Sin embargo, se han colocado las tres tareas centrales con las que se planea trabajar en un futuro próximo.

BIBLIOGRAFÍA

- A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger. Experimental realization of einsteinpodolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91–94, Jul 1982.
- [2] J. Bak and D. Newman. *Complex Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2010.
- [3] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1:195–200, Nov 1964.
- [4] G. Benenti, G. Casati, and G. Strini. Principles of Quantum Computation and Information: Basic tools and special topics. Principles of Quantum Computation and Information. World Scientific, 2004.
- [5] I. Bengtsson and K. Zyczkowski. Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement. Cambridge University Press, 2nd edition, 2017.
- [6] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einsteinpodolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895–1899, Mar 1993.
- [7] S. Braunstein and A. Pati. Quantum Information with Continuous Variables. Springer Netherlands, 2012.
- [8] N. Chandra and R. Ghosh. Quantum Entanglement in Electron Optics: Generation, Characterization, and Applications. Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications. Wiley, 2019.
- [10] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.

- [11] S. J. Freedman and J. F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938–941, Apr 1972.
- [12] S. Gharibian. Strong np-hardness of the quantum separability problem. Quantum Inf. Comput., 10:343–360, 2010.
- [13] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, 74:145–195, Mar 2002.
- [14] R. Goldman. An Integrated Introduction to Computer Graphics and Geometric Modeling. Chapman & Hall/CRC Computer Graphics, Geometric Modeling, and Animation Series. CRC Press, 2009.
- [15] M. Kuczma and A. Gilányi. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. Birkhäuser Basel, 2009.
- [16] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press, USA, 10th edition, 2011.
- [17] J. J. Sakurai and J. Napolitano. Modern Quantum Mechanics. Cambridge University Press, 2nd. edition, 2017.
- [18] S. Salimi, A. Mohammadzade, and K. Berrada. Concurrence for a two-qubits mixed state consisting of three pure states in the framework of su(2) coherent states, 2012.
- [19] M. Schlosshauer. Decoherence: And the Quantum-To-Classical Transition. The Frontiers Collection. Springer, 2007.
- [20] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 31(4):555-563, 1935.
- [21] W. van Dam, V. Kendon, and S. Severini. Theory of Quantum Computation, Communication and Cryptography: 5th Conference, TQC 2010, Leeds, UK, April 13-15, 2010, Revised Selected Papers. LNCS sublibrary: Theoretical computer science and general issues. Springer, 2011.
- [22] C. Williams. Explorations in Quantum Computing. Texts in Computer Science. Springer London, 2010.

[23] W. K. Wootters. Entanglement of formation and concurrence. Quant. Inf. Comput., 1(1):27–44, 2001.

A. Pureza γ_A para estados puros de dos qubits

Por medio del análisis de pureza, también es posible encontrar a los estados separables de dos qubits que existen en subespacios complejos bidimensionales. Para realizar lo anterior, se comenzará por considerar al estado de un sistema de dos qubits

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \rho_{ij} \left| a_i \right\rangle \! \left\langle a_j \right|,$$

 $\operatorname{con} \{|a_i\rangle\}$ como

 $|a_0\rangle = |00\rangle, \quad |a_1\rangle = |01\rangle, \quad |a_2\rangle = |10\rangle, \quad |a_3\rangle = |11\rangle.$

Del cual se obtiene a la pureza de ρ^A

$$\gamma_A = (\rho_{00} + \rho_{11})^2 + 2(\rho_{02} + \rho_{13})(\rho_{20} + \rho_{31}) + (\rho_{22} + \rho_{33})^2, \qquad (A.1)$$

que puede ser reescrita tras aplicar las condiciones de traza unitaria, $\sum_i \rho_{ii} = 1$ y de hermiticidad, $\rho_{ij} = \overline{\rho_{ji}}$

$$\gamma_{A} = \underbrace{\left(\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33}\right)^{2}}_{1} - 2\left(\rho_{00} + \rho_{11}\right)\left(\rho_{22} + \rho_{33}\right) + 2\left(\rho_{02} + \rho_{13}\right)\left(\rho_{20} + \rho_{31}\right)$$
$$= 1 - 2\left(\rho_{00} + \rho_{11}\right)\left(\rho_{22} + \rho_{33}\right) + 2\left(\rho_{02} + \rho_{13}\right)\left(\overline{\rho_{02}} + \overline{\rho_{13}}\right). \tag{A.2}$$

Por otro lado, para un estado puro de la forma (2.12), los elementos ρ_{ij} en (A.2), son

$$\rho_{00} = \alpha_0 \overline{\alpha_0}, \quad \rho_{02} = \alpha_0 \overline{\alpha_2}, \quad \rho_{11} = \alpha_1 \overline{\alpha_1}, \quad \rho_{13} = \alpha_1 \overline{\alpha_3}, \quad \rho_{22} = \alpha_2 \overline{\alpha_2}, \quad \rho_{33} = \alpha_3 \overline{\alpha_3};$$

entonces al sustituir en (A.2) se llega a^{*}

$$\gamma_A = 1 - 2 \left(\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 \right) \left(\overline{\alpha_0} \overline{\alpha_3} - \overline{\alpha_1} \overline{\alpha_2} \right) \tag{A.3}$$

$$= 1 - 2|\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2|^2.$$
 (A.4)

Después de colocar a las componentes del estado (2.14) en (A.4), resulta

$$\gamma_A = 1 - 2 \left| (A\alpha_0 + B\beta_0) \left(A\alpha_3 + B\beta_3 \right) - (A\alpha_1 + B\beta_1) \left(A\alpha_2 + B\beta_2 \right) \right|^2, \quad (A.5)$$

que utiliza a los coeficientes $A \ge B$ presentados en (2.13), junto a las componentes $\alpha_i \ge \beta_i$ de los estados base $|v_1\rangle \ge |v_2\rangle$, respectivamente. Para un estado separable, la pureza γ_A es 1, lo cual implica que el término dentro del valor absoluto en (A.5) debe ser cero

$$(A\alpha_0 + B\beta_0)(A\alpha_3 + B\beta_3) - (A\alpha_1 + B\beta_1)(A\alpha_2 + B\beta_2) = 0,$$

que es la misma expresión en (2.24). Por lo tanto, a partir de acá se puede aplicar el mismo procedimiento para llegar a (2.30) y obtener los estados separables; la diferencia consiste en que el análisis expuesto en la sección 2.4, es más directo y sencillo en comparación con el realizado previamente.

^{*}Se utilizó como guía la expresión para la concurrencia en [18, p. 3] y la ecuación (1.48).

B. Estados $|\phi_A\rangle$ y $|\phi_B\rangle$ de un qubit

A continuación se presenta el análisis para la comparación de resultados entre $|\Psi\rangle$ y $|\phi_A\phi_B\rangle$. Como se mencionó en la sección 2.2, uno de los pasos para llegar a (2.1), ha sido multiplicar el estado original por un factor de la forma $e^{-i\theta}$. Al haber considerado esta representación para los estados en (2.32) y (2.33), debe de tomarse en cuenta un factor similar en los estados separables $|\Psi\rangle$, antes de comparar con $|\phi_A\phi_B\rangle$. Es decir que en los estados separables encontrados, falta multiplicar por un término "K" para que se cumpla lo siguiente

$$K |\Psi\rangle = |\phi_A \phi_B\rangle$$
.

De la igualdad anterior, basta con observar la primer componente

$$K(A\alpha_0 + B\beta_0) = \frac{1}{\sqrt{(1 + |\gamma'|^2)(1 + |\delta'|^2)}},$$

de la cual puede encontrarse a K

$$K = \frac{1}{(A\alpha_0 + B\beta_0)\sqrt{(1 + |\gamma'|^2)(1 + |\delta'|^2)}}$$

En la tabla B.2 se muestran los resultados, luego de considerar a K, para los estados separables obtenidos en distintos subespacios; además se han colocado a los estados $|\phi_A\rangle \neq |\phi_B\rangle$ que los componen. Si se realiza el cálculo de $|\phi_A\phi_B\rangle$ para cada par de estados, se comprueba que coincide con el estado $K |\Psi\rangle$, lo cual ayuda a confirmar la validez de lo encontrado en la sección (2.5).

	Nombre	
No.	de la	$\{ v_1\rangle, v_2\rangle\}$
	Base	
1	B_1	$\{\{0.4699697+0.2756063\ i, 0.2428346+0.3048765\ i, 0.0033050+0.6039944\ i, 0.4063543+0.1459701\ i\},$
	-	$\{-0.1802715 + 0.1366480 \text{ i}, 0.1967334 + 0.0573147 \text{ i}, 0.4010443 - 0.4640140 \text{ i}, 0.4306037 + 0.5876014 \text{ i}\}\}$
2	Bo	$\{\{0.1650553 + 0.0890521 \ i, 0.5202650 + 0.1725126 \ i, 0.4474433 + 0.3924488 \ i, 0.4233202 + 0.3618961 \ i\},$
	-	$\{0.7376704 - 0.1323703 \text{ i}, -0.3008786 + 0.4791159 \text{ i}, 0.0169760 - 0.0426911 \text{ i}, 0.1824498 - 0.2878227 \text{ i}\}\}$
3	B_3	$\{\{0.5071222+0.4780076 \ i, 0.1225223+0.0000561 \ i, 0.4438237+0.3440990 \ i, 0.1817615+0.3884627 \ i\},$
	0	$\{0.3229780-0.2669934\ i, 0.5331478+0.1074318\ i, -0.5300564-0.0858927\ i, -0.1181942+0.4757145\ i\}\}$
4	B_{4}	$\{\{0.3418340 + 0.3579435 \text{ i}, 0.3704688 + 0.4632135 \text{ i}, 0.3766409 + 0.1735873 \text{ i}, 0.0060128 + 0.4808170 \text{ i}\},$
	-	$\{-0.2124403 + 0.0714651 \ i, 0.3579747 - 0.2462359 \ i, -0.3358414 + 0.7182625 \ i, 0.3589849 + 0.0585087 \ i\}\}$
5	Bs	$\{\{0.3413848+0.3928049 \text{ i}, 0.3645341+0.3607251 \text{ i}, 0.2566342+0.3526795 \text{ i}, 0.3850499+0.3572753 \text{ i}\},$
-	5	$\{-0.0960352-0.1355080\ i, -0.3596233-0.5908397\ i, 0.0421117+0.5529809\ i, 0.3557361+0.2447141\ i\}\}$

Tabla B.1. Cinco de los estados base (de dos qubits) utilizados en la exploración de subespacios bidimensionales. **Fuente:** elaboración propia.

No.	Base	$K_{1}\ket{\psi_{1}},K_{2}\ket{\psi_{2}}$	$\{\ket{\phi_1},\ket{\phi_2}\}$	$\{\ket{\phi_3},\ket{\phi_4}\}$
1	B_1	$ \{ 0.3331764, -0.0765609 + 0.1584892 \text{ i}, \\ -0.2563503 + 0.7778727 \text{ i}, -0.3111206 - \\ 0.3006918 \text{ i} \}, \\ \{ 0.3464850, 0.4326268 + 0.0565935 \text{ i}, \\ 0.5140584 + 0.0493094 \text{ i}, 0.6338076 + \\ 0.1455328 \text{ i} \} $	$ \{ \{ 0.3768115, -0.2899237 + \\ 0.8797484 i \}, \\ \{ 0.8841991, -0.2031809 + \\ 0.4206061 i \} \} $	$\{\{0.5571541, 0.8266150+\\0.0792905 \ i\},\\\{0.6218837, 0.7764940+\\0.1015760 \ i\}\}$
2	B2	$ \{ 0.3814885, 0.3937975 - 0.0429667 i, \\ 0.5763964 + 0.0583605 i, 0.6015673 - \\ 0.0046754 i\}, \\ \{ 0.6642182, -0.4442101 + 0.5561523 i, \\ -0.1452831 + 0.0564292 i, 0.0499128 - \\ 0.1593843 i\} $	$ \{ \{ 0.5499601, 0.8309425 + \\ 0.0841334 i \}, \\ \{ 0.6936658, 0.7160474 - \\ 0.0781269 i \} \} $	$\{0.9735573, -0.2129443+ 0.0827093 i\}, \\ \{0.6822590, -0.4562753+ 0.5712579 i\}\}$
3	B_3	$ \begin{array}{l} \{0.3507294, 0.4013459 - 0.2505314 \ i, \\ -0.0053044 + 0.4812558 \ i, 0.3376986 + \\ 0.5544987 \ i\}, \\ \{0.7602277, 0.0720683 + 0.1736875 \ i, \\ 0.4513719 - 0.4008251 \ i, 0.1343649 + \\ 0.0651264 \ i\} \end{array} $	$ \{ \{ 0.5889445, -0.0089071 + \\ 0.8081244 \ i \}, \\ \{ 0.5955219, 0.6814664 - \\ 0.4253906 \ i \} \} $	$\{\{0.7831394, 0.4649753 - 0.4129051 i\}, \\ \{0.9707438, 0.0920248 + 0.2217836 i\}\}$
4	B_4	$ \{ \begin{array}{l} 0.3440599, 0.6726159 - 0.1477362 \ i, \\ 0.2211072 + 0.1802451 \ i, 0.5096466 + \\ 0.2574266 \ i\}, \\ \{ 0.4715807, 0.0168694 - 0.0034475 \ i, \\ 0.7481103 - 0.4654152 \ i, 0.0233590 - \\ 0.0221180 \ i\} \end{array} $	$ \{ \{ 0.7698151, 0.4947152 + \\ 0.4032885 i \}, \\ \{ 0.4469383, 0.8737369 - \\ 0.1919113 i \} \} $	$ \{ \{ 0.4718949, 0.7486088 - \\ 0.4657254 i \}, \\ \{ 0.9993341, 0.0357482 - \\ 0.0073058 i \} \} $
5	B_5	$ \{ 0.5410788, 0.6316327 + 0.0155021 i, \\ 0.3539955 - 0.0708097 i, 0.4152683 - \\ 0.0725181 i \}, \\ \{ 0.4067908, 0.4451311 - 0.3453794 i, \\ 0.1505239 + 0.3931102 i, 0.4984749 + \\ 0.3023611 i \} $	$\{\{0.8318453, 0.5442266 - 0.1088616 i\}, \\\{0.6504561, 0.7593152 + 0.0186358 i\}\}$	$\{\{0.6949154, 0.2571380+\\0.6715449 \ i\},\\\{0.5853818, 0.6405544-\\0.4970093 \ i\}\}$

Tabla B.2. Estados separables de dos qubits, $K_1 |\Psi_1\rangle \ge K_2 |\Psi_2\rangle$, encontrados en los subespacios correspondientes a las bases B_i de la tabla B.1. Se muestran los estados de un qubit $|\phi_i\rangle$ calculados para cada estado separable, $K_1 |\Psi_1\rangle = |\phi_1\phi_2\rangle \ge K_2 |\Psi_2\rangle = |\phi_3\phi_4\rangle$. Consultar el repositorio https://github.com/Subadra-E/Tesis para obtener más resultados y continuar con la exploración de subespacios bidimensionales. **Fuente:** elaboración propia.

C. Estados base de tres qubits

	Nombre	
No.	de la	$\{\ket{v_1},\ket{v_2}\}$
	Base	
		$\{\{0.2199862+0.0467456~{\rm i}, 0.3130049+0.1905444~{\rm i}, 0.4430467+0.2029295~{\rm i}, 0.0554928+0.0432195~{\rm i}, 0.0554928+0.05666-{\rm i}, 0.05666-{\rm i}, 0.056666-{\rm i}, 0.05666-{\rm i}, 0.056666-{\rm i}, 0.05666-{\rm i}, 0.05666-{\rm i}, 0.056666-{\rm i}, 0.05666-{\rm i}, 0.056666-{\rm i}, 0.056666-{\rm i}, 0.056666-{\rm i}, 0.0566666-{\rm i}, 0.056666-{\rm i}, 0.05666-{\rm i}, 0.056666-{\rm i}, 0.0$
1	B_6	$0.2864621 + 0.0931087 \text{ i}, 0.4313524 + 0.3522241 \text{ i}, 0.0378183 + 0.1605296 \text{ i}, 0.3045529 + 0.2278478 \text{ i} \},$
		$\{0.0309249-0.0485635 \text{ i}, 0.2642739-0.1782316 \text{ i}, 0.2654397+0.2397479 \text{ i}, -0.0340339+0.3625942 \text{ i}, 0.26423932, 0.26423932, 0.26423932, 0.26423932, 0.26423332, 0.26423332, 0.26423332, 0.26423332, 0.26423332, 0.26543332, 0.2655332, 0.2655332, 0.2655332, 0.2655332, 0.2655332, 0.2655332, 0.2655332, 0.2655332, 0.2655332, 0.2655332, 0.265532, 0.26523, 0.265532, 0.26552, 0.$
		$-0.3717866 + 0.1045999 \ i, -0.4309146 - 0.0428341 \ i, 0.3657264 + 0.2938929 \ i, 0.1740226 - 0.2177304 \ i\}\}$
		$\{\{0.0054976+0.3996485 \text{ i}, 0.0231557+0.1736303 \text{ i}, 0.1085761+0.2661369 \text{ i}, 0.0528467+0.3721803 \text{ i}, 0.0528467+0.37218030 \text{ i}, 0.0528467+0.372180300 \text{ i}, 0.0528467+0.372180300000000000000000000000000000000000$
2	B_7	$0.4005266 + 0.0372615 \text{ i}, 0.3809823 + 0.1693144 \text{ i}, 0.0520311 + 0.2925743 \text{ i}, 0.3102387 + 0.2558492 \text{ i} \},$
		$\{0.3829890 + 0.1692272 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3050425 \text{ i}, 0.2694068 + 0.1427232 \text{ i}, 0.3075748 - 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.1022603 + 0.3075748 - 0.0011934 \text{ i}, -0.0011934 $
		$0.1179697 + 0.3868298 \text{ i}, -0.3860976 - 0.1476291 \text{ i}, 0.0105662 - 0.3693502 \text{ i}, -0.1517655 + 0.1990878 \text{ i}\}\}$
		$\{\{0.2876631+0.4399469 \ i, 0.1594595+0.2436310 \ i, 0.1002957+0.2325960 \ i, 0.2378991+0.1173518 \ i, 0.1002957+0.2325960 \ i, 0.2378991+0.1173518$ \ i, 0.1002957+0.2325960 \ i, 0.2378991+0.1173518 \ i, 0.1002957+0.2325960 \ i, 0.2378991+0.1173518 \ i, 0.1002957+0.2325960 \ i, 0.2378991+0.117560 \ i, 0.2378991+0.117560 \ i, 0.237891+0.117560 \ i, 0.23789
3	B_8	$0.2105925 + 0.0978453 \ i, \\ 0.0735178 + 0.0361565 \ i, \\ 0.4103327 + 0.3986263 \ i, \\ 0.0154100 + 0.3409361 \ i\},$
		$\{-0.1043526-0.3605516 \text{ i}, 0.0469031+0.2290278 \text{ i}, 0.2194014-0.0926472 \text{ i}, 0.1059156+0.4646980 \text{ i}, 0.04646980 \text{ i}, 0.04646880 \text{ i}, 0.046468800 \text{ i}, 0.04648800000000000000000000000000000000$
		$-0.1174632 + 0.4623611 \text{ i}, -0.0593698 + 0.3935138 \text{ i}, 0.0019401 - 0.1717105 \text{ i}, 0.2269077 + 0.2316204 \text{ i}\}\}$
		$\{\{0.1824092+0.0333435 \text{ i}, 0.0990345+0.3022945 \text{ i}, 0.0839918+0.1701136 \text{ i}, 0.2317438+0.3254967 \text{ i}, 0.0839918+0.089918+0.08$
4	B_9	$0.3356296 + 0.3796149 \text{ i}, 0.2457266 + 0.0917668 \text{ i}, 0.1490847 + 0.3657340 \text{ i}, 0.3068304 + 0.3051046 \text{ i}\},$
		$\{0.2390384 + 0.5926376 \text{ i}, 0.1688511 - 0.0885881 \text{ i}, 0.1895446 - 0.1752067 \text{ i}, 0.2271463 - 0.2007493 \text{ i}, 0.2007493 \text{ i}, 0.100000000000000000000000000000000000$
		$0.0464195 - 0.2448676 \text{ i}, 0.3065785 + 0.3856531 \text{ i}, -0.2524531 + 0.0278930 \text{ i}, -0.1574184 + 0.0513586 \text{ i}\}\}$
		$\{\{0.0204730+0.1609774 \text{ i}, 0.3808351+0.0993664 \text{ i}, 0.0844949+0.1731081 \text{ i}, 0.0459840+0.2339049 \text{ i}, 0.0849494, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.0849444, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.084944, 0.08444, 0.08444, 0.084$
5	B_{10}	$0.0706812 + 0.1420923 \ i, 0.2723243 + 0.1613153 \ i, 0.4906075 + 0.3181822 \ i, 0.4132247 + 0.2945621 \ i\} ,$
		$\{0.4875829 + 0.0053643 \text{ i}, 0.0915525 + 0.2914376 \text{ i}, 0.3272383 + 0.2944089 \text{ i}, 0.4418391 - 0.0051443 \text{ i}, 0.0051$
		$0.0994364 + 0.1525748 \text{ i}, -0.1619722 + 0.2763959 \text{ i}, -0.1948474 - 0.2749938 \text{ i}, -0.1288561 + 0.1179795 \text{ i} \}$

Tabla C.1. Cinco de los estados base de tres qubits, que fueron utilizados en la exploración de subespacios bidimensionales. **Fuente:** elaboración propia.