Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

PUNTOS FIJOS Y HOMOTOPÍAS: ESTUDIO TEÓRICO Y APLICACIONES

Mariajosé Chinchilla Morán
Asesorada por Lic. José Carlos Bonilla Aldana

Guatemala, abril 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

PUNTOS FIJOS Y HOMOTOPÍAS: ESTUDIO TEÓRICO Y APLICACIONES

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

MARIAJOSÉ CHINCHILLA MORÁN
ASESORADA POR LIC. JOSÉ CARLOS BONILLA ALDANA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, abril 2024

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
REPRESENTANTE DOCENTE	Arqta. Ana Verónica Carrera Vela
REPRESENTANTE DOCENTE	M.A. Pedro Peláez Reyes
REPRESENTANTE DE EGRESADOS	Lic. Urías Amitaí Guzmán Mérida
REPRESENTANTE DE ESTUDIANTES	Elvis Erique Ramírez Mérida
REPRESENTANTE DE ESTUDIANTES	Oscar Eduardo García Orantes
SECRETARIO ACADÉMICO	M.Sc. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DIRECTOR	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
EXAMINADOR	Lic. Luis Eduardo Mack Alvizures
EXAMINADOR	Lic. Rubén Darío Narciso Cruz
EXAMINADOR	Lic. José Carlos Bonilla Aldana
SECRETARIO ACADÉMICO	M.Sc. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada

Ref. D.DTG. 004-2024
Guatemala 03 de abril de 2024

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del jefe de la Licenciatura en Matemática Aplicada, al trabajo de graduación titulado: "PUNTOS FIJOS Y HOMOTOPÍAS: ESTUDIO TEÓRICO Y APLICACIONES", presentado por la estudiante universitaria Mariajosé Chinchilla Morán, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
USAC-ECFM

M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

49-2024
JMIC/Paola

AGRADECIMIENTOS

A Eugenia Morán:	Por enseñarme a ser una mujer fuerte, por llenarme de valor y alentarme a perseguir mis sueños.
A Eugenia Chinchilla:	Por confiar en mí y enseñarme nuevos y bonitos retos siempre.
A Reina del Carmen	Por escucharme todas las noches y dejarme abrazarla mucho.
A Luis Alvarado:	Por sus consejos, compañía y su conocimiento siempre compartido con amor.
A Obsdy Chet:	Por ser un soporte y un buen amigo en el tiempo que compartimos juntos.
A José Carlos Bonilla:	Por ayudarme a creer en mí y alentarme en momentos difíciles.
A Damián Ochoa:	Por abrirme las puertas para aprender cosas nuevas, por su apoyo y paciencia.
A mis profesores:	Por compartir su conocimiento sin egoísmo.

DEDICATORIA

A mi niña interior de once años, que soñaba con ser matemática.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\varnothing$	conjunto vacío
E^c	complemento de E
$E \setminus F$	diferencia entre E y F
$E\Delta F$	diferencia simétrica entre E y F
$\mathcal{P}(X)$	conjunto potencia de X
ínf	ínfimo
sup	supremo
$B_r(x)$	bola abierta centrada en x de radio r
$\oplus$	suma directa
$\overline{B_r(x)}$	bola cerrada centrada en x de radio r
$S_r(x)$	esfera de radio r centrada en x
∂A	frontera del conjunto A
A°	interior del conjunto A
$\overline{A}$	clausura del conjunto A
$\langle f, g\rangle$	producto interno entre f y g
$\|f\|_X$	norma de la función f en el espacio X
$\|x\|_p$	normas p en $\mathbb{R}^n$
$\|x\|_\infty$	norma infinito en $\mathbb{R}^n$
$\nabla f(x)$	gradiente de la función f en el punto x
$\nabla^2 f(x)$	hessiano de la función f en el punto x
$\nabla_2 f(x, y)$	gradiente de f respecto de y
E^*	espacio dual de E

OBJETIVOS

Objetivo general

Explorar los fundamentos de la topología y el análisis funcional, y su intersección con la teoría de elección social, con un enfoque en técnicas modernas de agrupamiento suave basadas en modelos electorales convexos.

Objetivos específicos

1. Desarrollar los conceptos fundamentales de topología y análisis funcional, dando especial énfasis a puntos fijos y homotopías.
2. Aplicar la teoría de puntos fijos en el análisis de contracciones y mapas no expansivos.
3. Evidenciar la conexión entre reglas de votación y la teoría de puntos fijos.
4. Resolver ejercicios prácticos relacionados con puntos fijos y homotopías para solidificar la comprensión de estos conceptos.

INTRODUCCIÓN

La topología y el análisis funcional son dos pilares fundamentales de las matemáticas que han influido en numerosas áreas del conocimiento. A lo largo del tiempo, conceptos como puntos fijos y homotopías han sido explorados y aplicados en diversas disciplinas, desde sus raíces con Henri Poincaré hasta las revolucionarias contribuciones en teoría de juegos de figuras como John Nash.
Este trabajo de graduación no solo profundiza en la topología y el análisis funcional, sino que también aborda teorías como la de puntos fijos y homotopías, explorando sus propiedades, aplicaciones y algunos teoremas relacionados.
Así mismo, se presentan una serie de ejercicios de aplicación a los teoremas estudiados a lo largo del trabajo y, finalmente, se estudia la optimización de modelos electorales que se basan en la convergencia y divergencia de preferencias individuales, introduciendo una novedosa técnica para el agrupamiento suave de datos multidimensionales basada en un modelo electoral convexo.

1. FUNDAMENTOS DE TOPOLOGÍA

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1. Métrica.
Una *métrica sobre un conjunto* X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in X$:

- $d(x, y) \geq 0$ (No negatividad)
- $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$. (No degeneración)
- $d(x, y) = d(y, x)$. (Simetría)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (Desigualdad triangular)

Ejemplo 1.1. Métrica euclidiana.
La métrica euclidiana es la que comúnmente se asocia con la distancia geométrica en los espacios euclidianos. Dados dos puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, la distancia euclidiana d entre ellos está dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Ejemplo 1.2. Métrica de Manhattan. Dados dos puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, la distancia de Manhattan d_1 entre ellos es:

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Ejemplo 1.3. Métrica discreta.
La métrica discreta es una métrica simple que distingue solamente entre puntos coincidentes y no coincidentes. Dados dos puntos cualesquiera x y y, la distancia d

entre ellos está definida por:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Definición 1.2. Espacio métrico.
Un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una métrica sobre X, se denomina *espacio métrico.*

1.1.1. Conjuntos abiertos, cerrados y vecindades

En esta sección, se introducirán conceptos fundamentales relacionados con espacios métricos, que serán de utilidad en el desarrollo del presente documento. Para simplificar la notación, denotaremos un espacio métrico (X, d) simplemente como X.

Definición 1.3. Bola abierta. Consideremos un punto $x_0 \in X$ y un número real positivo r. Se define la *bola abierta* centrada en x_0 de radio r, denotada por $B_r(x_0)$, como el conjunto de puntos x en X que satisfacen la siguiente condición:

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

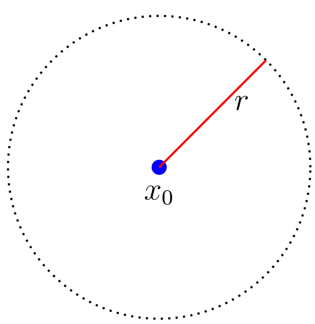

Figura 1.1. Bola abierta con la métrica euclidiana

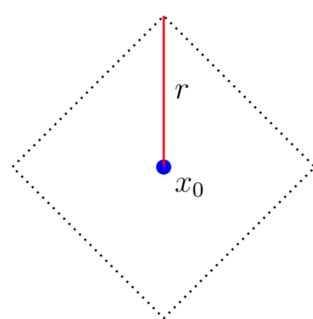

Figura 1.2. Bola abierta con la métrica de Manhattan

De manera similar, podemos definir una *bola cerrada*.

Definición 1.4. Bola cerrada. Una bola cerrada centrada en x_0 de radio r, denotada por $\overline{B_r(x_0)}$, se define como:

$$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}.$$

Definición 1.5. Esfera. El conjunto de puntos en X que están exactamente a una distancia r de x_0 se conoce como *esfera* de radio r centrada en x_0, y se denota por $S_r(x_0)$:

$$S_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}.$$

Utilizaremos los conceptos de *bola* y *vecindad* como sinónimos, manteniendo en mente que, al decir solamente *vecindad de un punto*, nos referimos a la bola abierta del punto. Ahora que ya hemos desarrollado estos conceptos, podemos clasificar un conjunto de acuerdo a si sus puntos cumple ciertas condiciones.

Definición 1.6. Conjunto abierto. Dado un espacio métrico X y un subconjunto Y de X, decimos que Y es *abierto* si para cada uno de sus puntos, Y contiene una bola abierta centrada en dicho punto.

Definición 1.7. Conjunto cerrado. Un subconjunto del espacio métrico se dice cerrado si su complemento es abierto.

Definición 1.8. Punto interior y conjuntos abiertos. Consideremos un conjunto $A \subseteq X$. Decimos que un punto $x_0 \in A$ es un *punto interior* de A si existe una bola abierta $B_r(x_0)$ tal que $B_r(x_0) \subseteq A$. Formalmente,

$$x_0 \text{ es un punto interior de A} \iff \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(x_0) \subseteq A.$$

Un conjunto A se dice que es *abierto* si y solo si todos sus puntos son puntos interiores.
De forma complementaria, se define un *punto de acumulación* de un conjunto A como un punto x_0 en X tal que, para todo $r > 0$, la bola $B_r(x_0)$ contiene al menos un punto $y \neq x_0$ que pertenezca a A. Es decir,

$$x_0 \text{ es un punto de acumulación de } A \iff \forall r > 0,\ B_r(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Se puede mostrar que un conjunto es *cerrado* si y solo si contiene todos sus puntos de acumulación.

Definición 1.9. Punto límite o punto de frontera.
Un punto x es *punto límite o punto de frontera* del conjunto X si toda vecindad de x se intersecta con X y con X^C.

Definición 1.10. Clausura de un conjunto. Dado un conjunto E, definimos la *clausura de* E, y la denotamos por $\overline{E}$, como

$$\overline{E} = E \cup E^{'},$$

donde $E^{'}$ denota el conjunto de puntos de acumulación de E.

Lema 1.1. *Conjuntos cerrados y sucesiones.*
Un conjunto X es cerrado si y solo si el que una sucesión (x_n) en X converja a x implica que $x \in X$.

Demostración. En primera instancia, si suponemos que X es cerrado, entonces X contiene todos sus puntos de acumulación. Sea (x_n) una sucesión en X que converge a x. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe N $\in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$, lo que significa que $B_\varepsilon(x)$ se intersecta con la sucesión, que está en X, por lo que x es punto de acumulación de X, y como X es cerrado, $x \in X$.
Para el converso, tomemos un punto de acumulación x de X. Mostraremos que $x \in X$ demostrando que existe una sucesión (x_n) en X que converge a x. Para cada entero positivo n, tomemos $B_{1/n}(x)$, y elijamos x_n como un punto de intersección entre $B_{1/n}(x)$ y X. Luego, para $\varepsilon > 0$ dado, si tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \varepsilon$, entonces $B_{1/N}(x)$ contiene a x_i para $i \geq N$.

Lema 1.2. *Unicidad del límite.*
El límite de una sucesión en un espacio métrico, si existe, es único.

Demostración. Supongamos que (x_n) es una sucesión convergente en un espacio métrico X. SEan x, y dos límites distintos de (x_n). Entonces, $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$, y podemos tomar enteros positivos N_1 y N_2 tales que

$$d(x_n, x) < \varepsilon, n \geq N_1$$
$$d(x_n, y) z\varepsilon, n \geq N_2.$$

Tomando $N = \max N_1, N_2$ tenemos que

$$2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < 2\varepsilon,$$

una contradicción. Entonces, $x = y$.

1.1.2. Convexidad, conexidad y compacidad

A continuación establecemos la definición de un *conjunto convexo*. Esta conceptualización no sólo resulta fundamental para entender las definiciones y teoremas que abordaremos a continuación, sino que también desempeña un rol clave en una aplicación significativa relacionada con el tema central de nuestro estudio, la cual exploraremos en detalle más adelante. Así mismo, definiremos otro tipo de conjuntos más adelante.

Definición 1.11. Conjunto convexo.
Sea A un conjunto no vacío. Decimos que A es *convexo* si para todo par de puntos $x, y \in A$ y para todo escalar α en el intervalo $[0, 1]$, la recta que une a x con y está completamente contenida en A. Matemáticamente, esto se expresa como

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in A, \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]; x, y \in A.$$

Definición 1.12. Conexidad.
Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U y V de subconjuntos no vacíos disjuntos abiertos de X cuya unión es X. Un espacio X se dice conexo si no tiene separación.

Lema 1.3. *Un espacio X es conexo si y solo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados simultáneamente son el vacío y X.*

Demostración. En primera instancia, supongamos que X es un espacio topológico conexo. Tomemos $A \subseteq X$ un subconjunto abierto y cerrado en X. Luego, $X \setminus A \subseteq X$ es abierto y claramente $A \cup (X \setminus A) = X$, pero X no tiene separación, por lo que $A = \emptyset$ o $X \setminus A = \emptyset$. Según el caso, concluimos que $A = \emptyset$ o $A = X$.
Ahora, supongamos que los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados son el vacío y X. Tomemos U y V una separación de X. Entonces, $U \cup V = X$, por lo que V es el complemento de U en X, de donde V es cerrado, pero esto implica que $V = \emptyset$ o $V = X$. En cualquier caso, no existe separación para X.

La compacidad representa un concepto fundamental en la topología, esencial para el análisis de espacios topológicos. La definición formal de compacidad, que se expone a continuación, es clave para su comprensión y aplicación en este campo.

Definición 1.13. Compacidad.
La noción de compacidad es uno de los conceptos más importantes en topología y análisis matemático. Es una generalización del concepto intuitivo de cerrado y acotado en espacios euclidianos.

Definición 1.14. Compacidad por sucesiones.
Un conjunto A en un espacio métrico (X, d) es *secuencialmente compacto o compacto por sucesiones* si toda sucesión $\{x_n\}$ de elementos en A tiene una subsucesión convergente que converge a un punto en A.

Definición 1.15. Cubierta.
Dado un conjunto A, una *cubierta abierta de* A es una colección de conjuntos abiertos tales que su unión es A. Decimos que la colección de conjuntos abiertos *cubren* a A.

Definición 1.16. Compacidad por cubiertas.
Un conjunto A en un espacio topológico X es compacto por cubiertas si para cada colección $\{U_i\}_{i\in I}$ de conjuntos abiertos en X que cubren a A, existe una subcolección finita $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}\}$ que también cubre a A.
Por simplicidad, de ahora en adelante nos referiremos a compacidad por sucesiones solamente con la palabra compacidad.
Finalmente, mostramos el teorema de intersección de Cantor, que aborda la naturaleza de las intersecciones anidadas en conjuntos cerrados.

Teorema 1.1.1. *Teorema de intersección de Cantor.*
Sea E un espacio métrico. Entonces, toda sucesión decreciente de subconjuntos anidados no vacíos, cerrados y compactos de E tiene una intersección no vacía.

Demostración. Sea (C_k) una sucesión decreciente de conjuntos anidados no vacíos, cerrados y compactos de E. Supongamos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset.$$

Sea

$$U_k = C_1 \setminus C_k.$$

Entonces,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = C_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C_1.$$

Dado que C_k es cerrado en S, entonces es cerrado en C_1, por lo que U_k es abierto. Por otro lado, dado que C_1 es compacto y $\{U_k\}$ es una cubierta abierta para C_1, podemos tomar una subcubierta finita $\left\{U_{n_1}, U_{n_2}, \cdots, U_{n_p}\right\}$ de C_1, para subíndices ordenados, es decir, $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$. Luego, notemos que

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \cdots U_n \subset \cdots$$

Entonces,

$$\bigcup_{p=1}^{k} U_{n_p} = U_{n_k} = C_1,$$

por lo que

$$U_{n_k} = C_1 \setminus C_{n_k} = C_1,$$

de donde $C_{n_k} \cap C_1 = \emptyset$, lo que contradice el hecho que $C_{n_k} \subset C_1$. Luego,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \neq \emptyset.$$

El teorema de intersección de Cantor, que destaca por su papel en la comprensión de la estructura y las propiedades de conjuntos en espacios topológicos, nos prepara para abordar un concepto relacionado: los conjuntos totalmente acotados. Este concepto es esencial para profundizar en las características de la acotación en dichos espacios.

Definición 1.17. Conjuntos acotados y totalmente acotados.
Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) se dice acotado si existe un número real $r > 0$ tal que para todo $a, b \in A$, se cumple que $d(a, b) < r$. Por otro lado, decimos que un conjunto E es totalmente acotado si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe una cubierta finita de bolas abiertas de radio ε cuyo centro es un punto en E.

Lema 1.4. *Totalmente acotado implica acotado.*

Demostración. Se omite.

Teorema 1.1.2. *Todo subconjunto completo y totalmente acotado de un espacio métrico es compacto.*

Demostración. Sea M un conjunto completo y totalmente acotado en el espacio métrico (X, d). Dado $\varepsilon = 1$, sabemos que hay una cubierta finita de M compuesta por bolas de radio 1 centradas en puntos de M. Consideremos una sucesión (x_n) en M. Por el principio de las casillas, al menos una de estas bolas, digamos B_1, contiene infinitos términos de (x_n). Llamemos S_1 al conjunto de índices de (x_n) cuyos términos están en B_1.
Inductivamente, definimos B_k como una bola de radio $\frac{1}{k}$ que contiene infinitos términos de (x_n), y S_k como el conjunto de índices de (x_n) que están en B_k. Dado que

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq \cdots$$

y cada S_k es infinito, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j \geq N$, los términos x_{n_i} y x_{n_j} están ambos en B_N, es decir, $|x_{n_i} - x_{n_j}| \leq 1/N < \varepsilon$, por lo que (x_{n_k}) es una sucesión de Cauchy en M y, dado que M es completo, (x_{n_k}) converge en M. Luego, (x_n) tiene una subsucesión convergente, demostrando que M es compacto.

1.2. Sucesiones y continuidad de funciones

Definición 1.18. Mapa continuo.
Sean $X = (X, d)$ y $Y = (Y, d')$ espacios métricos. Una mapa $T : X \to Y$ es llamado *mapa continuo* en el punto $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$d(x, x_0) < \delta,$$

entonces

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Decimos que T es continuo en X si es continuo en todos los puntos de X.

Lema 1.5. *Test de continuidad para funciones*
Una función $f : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n \to x$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ en Y converge a $f(x)$.

Demostración. Supongamos que f es continua y que $x_n \to x$. Entonces, f es de Cauchy, por lo que para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para $n, m \geq N$, se cumple que

Teorema 1.2.1. *Teorema de Bolzano-Weierstrass*
Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.

Demostración. Se omite.

Teorema 1.2.2. *Teorema de Weierstrass.*
Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado de los reales alcanza su máximo y mínimo en el intervalo.

Demostración. . Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, entonces $[a, b]$ es compacto y, dado que f es continua en $[a, b]$, el conjunto $f([a, b])$ es compacto, y por tanto, acotado. Por el axioma del supremo, $f([a, b])$ tiene un supremo M y un ínfimo m. Considerando que para cada $n \in \mathbb{N}$, el número $M - \frac{1}{n}$ no es un supremo de $f([a, b])$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Como la secuencia (x_n) está acotada, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (1.2.1), podemos concluir que (x_n) tiene una subsucesión convergente (x_{n_k}) que converge a x_0 en $[a, b]$. Como f es continua, por el teorema 1.5, la secuencia $\{f(x_{n_k})\}$ converge a $f(x_0)$, y dado que cada $f(x_{n_k})$ está arbitrariamente cerca de M, deducimos que $f(x_0) = M$. De manera similar, se puede demostrar que f alcanza su valor mínimo m en $[a, b]$. Por lo tanto, f alcanza sus valores máximo y mínimo en $[a, b]$.

1.2.1. Sucesiones de funciones

En matemáticas, las sucesiones de funciones desempeñan un papel crucial en varios campos, como el análisis real, el análisis funcional y la teoría de la aproximación. Estas sucesiones permiten estudiar el comportamiento de funciones en un contexto más general y ofrecen un puente para entender conceptos como la convergencia puntual y la convergencia uniforme. En esta sección, introduciremos el concepto básico de una sucesión de funciones y discutiremos las diferentes formas en que estas sucesiones pueden converger. Este conocimiento será fundamental para los temas que se abordarán posteriormente en este trabajo.

Definición 1.19. Sucesión de funciones
Análogo a las sucesiones de números reales, una sucesión de funciones es una colección numerable y ordenada de funciones. Generalmente, utilizaremos a $\mathbb{N}$ como el conjunto de índices. A continuación algunos ejemplos de sucesiones de funciones.

Ejemplo 1.4. Las funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n$.

Ejemplo 1.5. La sucesión de funciones sobre los reales, tales que

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Definición 1.20. Convergencia puntual
Sea (f_n) una sucesión de funciones, cada una definida en un conjunto E. Si para todo $x \in E$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge, entonces podemos definir una función $f : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

para cada $x \in E$. En este caso, decimos que la sucesión (f_n) converge puntualmente a f en E.

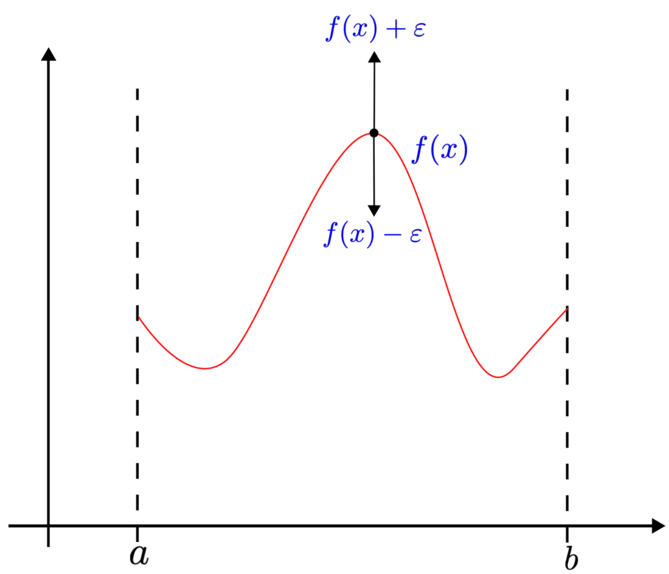

Figura 1.3. Límite puntual de una sucesión de funciones. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Una pregunta natural a plantearse ahora sería si las propiedades de las funciones en la sucesión se conservan bajo el límite puntual. Por ejemplo, ¿es correcto afirmar que si se tiene una sucesión de funciones diferenciables, entonces el límite será una función diferenciable? ¿y si la sucesión es de funciones continuas, el límite será continuo?

Recordemos que una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 si

$$\lim_{t \to x_0} f(t) = f(x_0),$$

por lo que preguntarse si, dada una sucesión de funciones continuas, el límite será continuo, es equivalente a preguntarse cuándo ocurre que

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x_0} f_n(t) = \lim_{t \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(t).$$

A fin de ejemplificar que el orden en el que se toman los límites sí es importante, consideremos, para $m = 1, 2, 3, ..$ y $n = 1, 2, 3, ...$, lo siguiente:

$$s_{m,n} = \frac{3m}{2m + n}.$$

Entonces, para n fija tenemos que

$$\lim_{m \to \infty} s_{m,n} = \frac{3}{2},$$

por lo que

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} s_{m,n} = \frac{3}{2}.$$

Sin embargo, si tomamos el límite en el otro sentido, para m fija tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} s_{m,n} = 0,$$

por lo que

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} s_{m,n} = 0.$$

Definición 1.21. Convergencia uniforme.
Decimos que una sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente en E a una función f si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que para $n \geq N$, se cumple

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ para todo } x \in E.$$

Teorema 1.2.3. *Criterio de Cauchy para convergencia uniforme.*
La sucesión de funciones (f_n) *definidas en* E *converge uniformemente en* E *si y solo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* N *tal que para* $n, m \geq N$ *y* $x \in E$*, se cumple*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

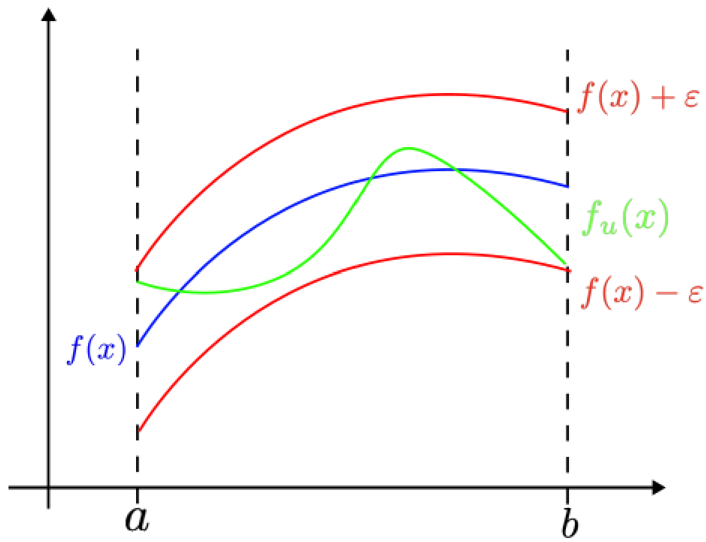

Figura 1.4. Fuente: elaboración propia en Inkscape.

Demostración. En primera instancia, supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones definidas en E que convergen uniformemente a una función f en E. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se cumple

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } x \in E.$$

De esto que para $m \geq n \geq N$ y cada $x \in E$,

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que se cumple el criterio de Cauchy. Entonces, la sucesión $(f_n(x))$ converge para cada x. Sea $f(x)$ el límite. Luego, $f_n \to f$ y solamente hace falta probar que la convergencia es uniforme. Sea $\varepsilon > 0$ dado, entonces existe N tal que para $n, m \geq N$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Dejando n fijo y haciendo $m \to \infty$, tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para cada $n \geq N$ y cada $x \in E$, lo que concluye la prueba. A continuación exploraremos la relación entre la convergencia uniforme de una sucesión de funciones y la continuidad de sus límites. En particular, estudiaremos condiciones bajo las cuales la convergencia uniforme preserva la propiedad de continuidad, así como teoremas que establecen estas condiciones de manera precisa.

Teorema 1.2.4. *Convergencia uniforme de sucesiones de funciones.*
Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en E, un espacio métrico. Sea x un punto límite de E y supongamos que

$$\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n, \; \textit{para } n \geq 1.$$

Entonces, (A_n) converge y

$$\lim_{t \to x} f(t) = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

En otras palabras,

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que (f_n) converge uniformemente a f, entonces existe N tal que para $n, m \geq N$ y cada $t \in E$, se cumple

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon.$$

Tomando el límite cuando $t \to x$ tenemos

$$|A_n - A_m| < \varepsilon,$$

de donde (A_n) es una sucesión de Cauchy y por tanto, converge, digamos a A. Luego,

$$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|.$$

Tomemos n de manera que

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \text{ y}$$
$$|A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, podemos tomar una vecindad de x de manera que para todo $t \neq x$ en la vecindad,

$$|f_n(t) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces,

$$|f(t) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Corolario 1.1. *Convergencia uniforme de una sucesión de funciones continuas. Si (f_n) es una sucesión de funciones continuas definidas en un conjunto E tales que $f_n \to f$ en E uniformemente, entonces f es continua en E.*

2. FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

2.1. Espacios normados y espacios de Banach

Definición 2.1. Norma.
Una norma en un espacio vectorial X es una función $||\cdot|| : X \to [0,\infty)$ que satisface las siguientes propiedades para todo $x \in X$ y para todo escalar α:

- $||x|| \geq 0$.
- $||x|| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$.
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definición 2.2. Espacio normado.
Un espacio vectorial X con una norma es llamado espacio normado.

Definición 2.3. Espacio de Banach.
Un espacio normado que es completo se denomina espacio de Banach.
Una norma en un espacio vectorial X induce la métrica d en X dada por

$$d(x,y) = \|x - y\|, \ \text{para} \ \ x, y \in X.$$

A esta métrica se le llama métrica inducida por la norma.
A continuación se muestran unos ejemplos que ilustran la variedad de espacios normados, incluyendo tanto espacios completos como no completos.

Ejemplo 2.1. $\mathbb{R}^n$
El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado completo con la norma definida por

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2},$$

donde $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$.

Para demostrar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado completo, haremos uso del lema de la rama de análisis real que dice que el espacio métrico $\mathbb{R}$ es completo.
Con lo anterior en mente, podemos demostrar que $\mathbb{R}^n$ es completo. Para ello, tomemos una sucesión de Cauchy $(x_n) \in \mathbb{R}^n$. Por facilidad de notación, digamos que $x_m = (\xi_1^m, \xi_2^m, ..., \xi_n^m)$. Entonces, se cumple que

$$\|x_k - x_m\| = \sqrt{\left(\xi_1^{(k)} - \xi_1^m\right)^2 + \cdots + \left(\xi_n^{(k)} - \xi_n^m\right)^2} < \varepsilon, \text{ para } k, m \geq N.$$

Notemos que esto implica que

$$\left|\xi_j^{(k)} - \xi_j^m\right| < \varepsilon^2.$$

Luego,

$$\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ..., \xi_j^m, ...$$

es una sucesión de Cauchy para cada $j \geq 1$. Por el lema anterior, sabemos que existe δ_j tal que $\xi_j^{(n)} \to \delta_j$ cuando $n \to \infty$. De esto que

$$x_n \to (\delta_1, ..., \delta_n) \text{ cuando } n \to \infty.$$

Concluimos que $\mathbb{R}^n$ es completo.

Ejemplo 2.2. Funciones continuas en un intervalo cerrado.
El espacio de funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$, al cual se le asigna la notación $C[a, b]$, es un espacio normado completo bajo la norma

$$\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Por el teorema 1.2.3, y la definición de norma del máximo, tenemos que si (f_n) es una sucesión de Cauchy en $C[a, b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varepsilon > \max_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| \geq |f_n(x) - f_m(x)|, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

De esto que (f_n) converge uniformemente a una función f definida en $[a, b]$ y, como f_n es continua para cada n, entonces f es continua en $[a, b]$. De esto que $f \in C[a, b]$ y $C[a, b]$ es completo.

Ejemplo 2.3. Subespacio de polinomios definidos en el intervalo $[0, 1]$

El subespacio de polinomios definidos en el intervalo $[0, 1]$ es un subespacio vectorial de $C[0, 1]$. Sin embargo, este espacio no es completo. Para mostrar que no lo es, podemos tomar la sucesión de polinomios $\{p_n\}$ dada por

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k.$$

Esta es una sucesión de Cauchy pues para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m > n \geq N$,

$$\|p_n - p_m\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i!} \right\| < \varepsilon.$$

Sin embargo, notemos que si la sucesión convergiera a un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^R$, entonces con N lo suficientemente grande y R fijo,

$$\|p_N - p\| = |a_0 - 1| + |a_1 - 1/2| + \cdots + |a_n - 1/n!| + \sum_{i=n+1}^{N} \frac{1}{i!} \geq \sum_{i=n+1}^{N} \frac{1}{i!}.$$

De esto que

$$\lim_{n \to \infty} \|p_n - p\| \geq e - \sum_{i=0}^{R} \frac{1}{i!}.$$

Para cualquier n finito, esta última expresión será positiva, por lo que p_N no puede converger a ningún polinomio.

Lema 2.1. *La norma es continua.*

Demostración. Por desigualdad triangular sabemos que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

De esto que $\delta = \varepsilon$ es suficiente.

Lema 2.2. *Invarianza de traslación por métrica inducida.*
Una métrica d inducida por una norma en un espacio normado X satisface

$$d(x + a, y + a) = d(x, y), \text{ para } a \in X.$$
$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y), \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Figura 2.1. Invarianza de la métrica inducida bajo traslaciones

Demostración.

$$d(x+a, y+a) = \|x+a-y-a\| = \|x-y\| = d(x,y)$$
$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\,\|x-y\|$$

2.1.1. Propiedades de los espacios de Banach

La completitud confiere a los espacios de Banach propiedades matemáticas profundas y útiles, lo que los convierte en el escenario ideal para el estudio de una amplia variedad de problemas. En esta sección, exploraremos algunas de las propiedades esenciales de los espacios de Banach, tales como su estructura, unicidad, y las condiciones bajo las cuales ciertos subconjuntos pueden ser considerados también como espacios de Banach.

Teorema 2.1.1. *Subespacio de un espacio de Banach.*
Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y solo si Y es cerrado en X.

Demostración. Sea X un espacio de Banach e Y un subespacio de X. En primera instancia, supongamos que Y es completo. Tomemos una sucesión (y_n) en Y tal que $y_n \to x \in X$. Dado que (y_n) converge en X, es una sucesión de Cauchy y como Y es completo, entonces (y_n) converge a un punto $y \in Y$. La unicidad del límite en espacios métricos (lema 1.2), nos permite concluir que $x = y$.
Por otro lado, supongamos que Y es cerrado y tomemos (y_n) una sucesión de Cauchy en Y. Dado que X es completo, (y_n) converge en X, pero como Y es cerrado, (y_n) converge en Y.
Las bases de Schauder son un concepto esencial en el análisis funcional y específicamente en el estudio de espacios de Banach. Estas bases ofrecen una manera de representar de forma única a cada elemento del espacio en términos de una sucesión convergente. Esto es especialmente útil para entender la estructura interna del espacio y para trabajar con operadores lineales en estos contextos.

Definición 2.4. Base de Schauder.
Si un espacio normado X tiene una sucesión $\{e_n\}$ que satisface que para todo $x \in X$ existen escalares únicos (α_n) tales que

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

entonces decimos que X tiene una base de Shauder y a la sucesión $\{e_n\}$ le llamamos base de Schauder del espacio X.

Lema 2.3. *Desigualdad útil.*
Sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio normado X (de cualquier dimensión), entonces existe un número $c > 0$ tal que para cualquier elección de escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ se cumple

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

Demostración. Definamos la suma de los valores absolutos de los escalares α_i como

$$S = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| .$$

Si $S = 0$, entonces no hay nada que demostrar. Supongamos que $S > 0$ y dividamos la desigualdad entre S para obtener

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \right\| \geq c,$$

donde cada $\beta_i = \frac{\alpha_i}{S}$. Así, cumplimos que

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1.$$

Supongamos, por contradicción, que la desigualdad es falsa. Consideremos una sucesión de vectores (y_m) donde

$$y_m = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^m x_i,$$

sujeta a la condición de que

$$\sum_{i=1}^{n} |\beta_i^m| = 1,$$

de manera que $\|y_m\| \to 0$ cuando $m \to \infty$. De esto que

$$\left|\beta_j^m\right| \leq 1, \text{ para cada } j,$$

y la sucesión

$$(\beta_j) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, ...)$$

es acotada. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, (β_j) tiene una subsucesión convergente. Sea β_j^* el límite de la subsucesión convergente. Consideremos la sucesión de vectores $y_m^{(j)}$ definida como

$$y_m^{(j)} = \sum_{i \neq j} \beta_i^m x_i + \beta_j^* x_j.$$

Conforme $m \to \infty$, tenemos que $y_m^{(j)} \to y$. Esto implica que no todos los β_i^* son nulos y, por lo tanto, $y \neq 0$. Sin embargo, dado que $\left\|y_m^{(j)}\right\|$ es una subsucesión de $\|y_m\|$, y que $\|y_m\| \to 0$, tenemos que $\left\|y_m^{(j)}\right\| \to 0$. Esto contradice la independencia lineal del conjunto de vectores x_i.

Teorema 2.1.2. *Teorema de completitud.*
Todo subespacio finito dimensional Y de un espacio normado X es completo, siempre que el campo subyacente del espacio sea completo.

Demostración. Sea $n < \infty$ la dimensión de Y. Tomemos una base $\{e_1, ..., e_n\}$ de Y, donde $\|e_i\| = 1$ para $1 \leq i \leq n$. Sea (y_m) una sucesión de Cauchy en Y. Entonces, para cada n, existen escalares únicos $\beta_1^m, \beta_2^m, ..., \beta_n^m$ tales que

$$y_m = \beta_1^m e_1 + \beta_2^m e_2 + \cdots + \beta_n^m e_n.$$

Dado que (y_m) es de Cauchy, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $k, m \geq N$ se cumple

$$\begin{aligned}\varepsilon > \|y_k - y_m\| &= \left\|\left(\beta_1^{(k)} - \beta_1^m\right) e_1 + \cdots + \left(\beta_n^{(k)} - \beta_n^m\right) e_n\right\| \\ &\geq c\left(\left|\beta_1^{(k)} - \beta_1^m\right| + \cdots + \left|\beta_n^{(k)} - \beta_n^m\right|\right),\end{aligned}$$

para alguna constante c (aplicando el lema 2.3). De esto que, para j fija,

$$\left|\beta_j^{(k)} - \beta_j^m\right| < \frac{\varepsilon}{c},$$

Luego, $(\beta_j) = \left(\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, ...\right)$ es una sucesión de Cauchy sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces converge en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, digamos a β_j^*. Definamos y de la siguiente manera

$$y = \beta_1^* e_1 + \cdots + \beta_n^* e_n.$$

Es claro que $y \in Y$. Más aún,

$$\|y_m - y\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} (\beta_i^m - \beta_i^*)\, e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\beta_i^m - \beta_i^*| \, \|e_i\| \,,$$

pero como $\beta_j^m \to \beta_j^*$, entonces $y_m \to y$, de donde concluimos que (y_m) converge en Y, lo que concluye la prueba.

Corolario 2.1. *Teorema de cerradura.*
Todo subespacio Y finito dimensional de un espacio normado X es cerrado en X.

Demostración. Se sigue de los teoremas 2.1.1 y 2.1.2.
El lema de equivalencia de normas establece que en espacios normados de dimensión finita, todas las normas son equivalentes entre sí. Esta propiedad es fundamental para asegurar que los resultados obtenidos son independientes de la norma escogida.

Lema 2.4. *Equivalencia de normas.*
En un espacio finito dimensional, todas las normas son equivalentes entre sí.

Demostración. Sea X es espacio normado de dimensión $n < \infty$ y $\{e_1, ..., , e_n\}$ una base de X. Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_0$ dos normas sobre X. Entonces, para todo $x \in X$ existen escalares únicos $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Por el lema 2.3, existe una constante c positiva tal que

$$\|x\| \geq c\,(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)\,.$$

Por otro lado,

$$\|x\|_0 \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, \|e_k\|_0 \leq M \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|, \text{ para } M = \max \|e_j\|_0.$$

Luego,

$$\frac{c \, \|x\|_0}{M} \leq \|x\| \, .$$

La otra desigualdad se obtiene al intercambiar $\|\cdot\|$ por $\|\cdot\|_0$ en la demostración previa.

Definición 2.5. Espacio de Banach uniformemente convexo.
Sea X un espacio de Banach. Decimos que X es uniformemente convexo si para cada $0 < \varepsilon \leq 2$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si se cumple

$$\|x\| = \|y\| = 1, \qquad \|x - y\| \geq \varepsilon,$$

entonces

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Es fácil probar que todo espacio que satisfaga la identidad del paralelogramo es uniformemente convexo.

2.1.2. Espacio dual

En el análisis funcional, es común encontrarse con aplicaciones que asignan a cada vector en un espacio determinado un único escalar. Estas aplicaciones son conocidas como funcionales. En particular, es esencial entender la naturaleza de los funcionales que son lineales y, entre ellos, aquellos que además presentan la propiedad de ser acotados. En esta sección, definiremos y exploraremos estas clases de funcionales, estableciendo una base para discusiones más profundas sobre su estructura y propiedades.

Definición 2.6. Funcional lineal.
Un funcional lineal es un operador lineal con dominio un espacio vectorial X y con rango el campo $\mathbb{K}$ de X.

Definición 2.7. Funcional lineal acotado.

Un funcional lineal se dice acotado si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq c \|x\|.$$

Más aún, la norma de f la definimos como

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

o de forma equivalente,

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Esto implica que un funcional lineal acotado es aquel que satisface

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|.$$

A continuación estudiaremos un resultado que permite establecer una relación entre los funcionales lineales acotados y la continuidad.

Teorema 2.1.3. *Continuidad y acotamiento.*
Un funcional lineal en un espacio normado es continuo si y solo si es acotado.

Demostración. Supongamos que f es un funcional lineal acotado. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$,

$$|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leq \|f\| \|x-y\| < \varepsilon$$

siempre que

$$\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{\|f\|} = \delta.$$

Por otro lado, ahora supongamos que f es un funcional lineal continuo definido sobre un espacio normado X. Tomemos una vecindad U de 0 tal que $f(U) \subset (-1,1)$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \subset U$. De esto que para $x \in B_\delta$, $|f(x)| \leq 1$. Luego, para todo $x \in X$, dado que $\left\| \frac{\delta x}{\|x\|} \right\| = \delta$, entonces

$$1 \geq \left| f\left(\frac{x\delta}{\|x\|}\right) \right| = \frac{\delta}{\|x\|} |f(x)|,$$

de donde se sigue que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|.$$

Ejemplo 2.4. Integral definida.
Definamos

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt, \text{ para } x(t) \in C[a,b].$$

Entonces, f es un funcional lineal acotado pues

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_a^b x(t)dt \right| \\ &\leq (b-a) \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \\ &= (b-a) \|x\|. \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todos los x con norma 1, tenemos $\|f\| \leq b-a$. Por otro lado, si tomamos $x(t) = 1$ llegamos a

$$\|f\| \geq f(1) = b-a.$$

Luego, la única forma en que ambas desigualdades se cumplan es que $\|f\| = b-a$. El conjunto de todos los funcionales lineales definidos sobre un espacio vectorial X recibe el nombre de espacio dual de X, y lo denotamos por X^* y es en sí mismo un espacio vectorial con las operaciones definidas como usualmente lo hacemos con funciones. Es decir, dados dos funcionales lineales f_1 y f_2 de X^*, definimos su suma $f_1 + f_2$ como

$$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

El producto por escalar está dado por

$$p(x) = (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x).$$

Podemos profundizar más y considerar el espacio dual del espacio dual de X, al que llamamos segundo espacio dual de X y denotamos por X^{**}. El espacio X^{**} tiene por dominio los funcionales lineales definidos en X. Podemos obtener elementos $g \in X^{**}$

fijando $x \in X$ de manera que

$$g(f) = g_x(f) = f(x).$$

Es importante notar que en este caso, la variable es el funcional lineal f de X^*. Para cada $x \in X$ corresponde un único $g_x \in X^{**}$, por lo que podemos decir que esto define un mapa

$$\begin{aligned} C : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto g_x. \end{aligned}$$

Llamamos a este mapa C, el mapa canónico de X en X^{**} o mapa de incrustamiento de X en X^{**}. Es fácil verificar que C es un mapa lineal. En el caso en el que C sea sobreyectivo, decimos que X es un espacio algebraicamente reflexivo.

2.2. Espacios de Hilbert

Definición 2.8. Producto Interno.
Dado un espacio vectorial X sobre el campo $\mathbb{K}$, un **producto interno** en X es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K},$$

que asigna a cada par (x, y) de elementos de X un elemento $\langle x, y \rangle$ de $\mathbb{K}$, de manera que para todo x, y, z en X y todo escalar α en $\mathbb{K}$, se cumple:

1. Linealidad en la primera entrada:

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

2. Homogeneidad en la primera entrada

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$$

3. Hermiticidad

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

4. Definición positiva

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \text{ y } \langle x, x\rangle = 0 \text{ si y solo si } x = 0.$$

Un producto interno en X define una norma en X dada por

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

y una métrica en X dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Un espacio X con producto interno es un espacio vectorial con un producto interno $\langle x, y\rangle$ definido en él. Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno completo (completo con la métrica inducida por el producto interno). De esta manera, todo espacio con producto interno, es un espacio normado y todo espacio de Hilbert, es un espacio de Banach. Además, para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tenemos

1. Linealidad en la primera entrada.

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle.$$

2. Linealidad conjugada en la segunda entrada

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$$

Normalmente, se suele referirse a estas dos propiedades en conjunto diciendo que el producto interno es sesquilineal.

Teorema 2.2.1. *Norma inducida por producto interno.*
Toda norma inducida por un producto interno satisface la identidad del paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida por un producto interno en un espacio

E. Entonces para $x, y \in E$ se cumple

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= 2\left(\|x\| + \|y\|\right).
\end{aligned}$$

Definición 2.9. Ortogonalidad.
Un elemento x de un espacio con producto interno X se dice ortogonal a un elemento $y \in X$ si $\langle x, y\rangle = 0$. Si esto se cumple, decimos que x e y son ortogonales y escribimos $x \perp y$. Similarmente, dados dos subconjuntos $A, B \subset X$ decimos que $x \perp A$ si $x \perp a$ para todo $a \in A$ y $A \perp B$ si $a \perp b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.

Ejemplo 2.5. Espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.
El espacio $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \xi_1\nu_1 + \cdots + \xi_n\nu_n,$$

donde $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ e $y = (\nu_1, ..., \nu_n)$. En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} \\
&= \sqrt{(\xi_1 - \nu_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \nu_n)^2}.
\end{aligned}$$

Sabemos por resultados anteriores que bajo esta métrica, $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo.

Ejemplo 2.6. Espacio $L^2[a, b]$.
El espacio de todas las funciones continuas reales en $[a, b]$ con la norma dada por

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right)^{1/2}.$$

es un espacio de Hilbert. En este caso, la norma puede obtenerse del producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

A continuación mostramos un ejemplo para evidenciar que no todos los espacios son espacios con producto interno y por tanto, no todos los espacios son espacios de Hilbert.

Ejemplo 2.7. Espacio $C[a, b]$
La norma en $C[a, b]$ está dada por

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \, .$$

Tomemos $x(t) = 1$, $y(t) = (t - a)/(b - a)$. Entonces, $\|x\| = \|y\| = 1$. Luego,

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t - a}{b - a}$$
$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t - a}{b - a}.$$

De esto que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 5,$$

pero

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4,$$

entonces no se cumple la identidad del paralelogramo y por tanto, la norma no puede ser inducida por un producto interno.
Después de examinar ejemplos concretos de espacios de Hilbert, es pertinente adentrarse en sus propiedades fundamentales. Estas propiedades son esenciales para comprender la naturaleza y comportamiento de estos espacios. A continuación, discutiremos aspectos clave como la desigualdad de Schwarz, la desigualdad triangular y la continuidad del producto interno, así como teoremas relevantes sobre subespacios en el contexto de espacios de Hilbert.

Teorema 2.2.2. *Desigualdad de Schwarz y desigualdad triangular.*
El producto interno y su norma asociada satisfacen

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \textit{Desigualdad de Schwarz.}$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \textit{Desigualdad triangular.}$$

Además, la igualdad se da si y solo si x e y son linealmente dependientes.

Demostración. Primero demostraremos la desigualdad de Schwarz. Notemos que si

$y = 0$ es clara. Supongamos que $y \neq 0$ y tomemos $\alpha \in \mathbb{K}$, el campo. Entonces,

$$\begin{aligned}
0 \leq \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\left(\langle y, x\rangle - \overline{\alpha}\langle y, y\rangle\right).
\end{aligned}$$

Notemos que si tomamos

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle},$$

entonces la desigualdad se transforma en

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle \\
&= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2},
\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 .$$

Sacando raíz cuadrada de ambos lados llegamos al resultado deseado.
Para probar la desigualdad triangular tenemos que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 .$$

Aplicando la desigualdad triangular para números reales y la desigualdad de Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + |\langle x, y\rangle| + |\langle y, x\rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| .
\end{aligned}$$

De esto que sigue que

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Sacando raíz cuadrada de ambos lados llegamos al resultado deseado.

Habiendo demostrado las desigualdades de Schwarz y triangular, es directo considerar la continuidad del producto interno. A continuación, estableceremos este resultado clave en el contexto de espacios de Hilbert.

Teorema 2.2.3. *Continuidad del producto interno.*
Si en un espacio con producto interno, $x_n \to x$ y $y_n \to y$ entonces $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

Demostración. .

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Con la demostración de que el producto interno es continuo, hemos consolidado una de las propiedades fundamentales en el estudio de espacios de Hilbert. Esta continuidad garantiza que las operaciones en estos espacios sean coherentes y bien comportadas, sentando las bases para explorar propiedades más avanzadas y aplicaciones en análisis funcional y áreas relacionadas. Por otro lado, tras haber abordado teoremas análogos en el contexto de espacios de Banach, es relevante extender nuestro análisis a los espacios de Hilbert. Aunque ciertos resultados presentan similitudes entre ambos contextos, los espacios de Hilbert, dotados de un producto interno, poseen características adicionales que merecen un tratamiento particular. El siguiente teorema, referente a subespacios en espacios de Hilbert, se refuerza algunas de las propiedades ya discutidas en el ámbito de espacios de Banach.

Teorema 2.2.4. *Subespacios.*
Sea $Y \subset H$ un subespacio de un espacio de Hilbert H. Entonces,

- *Y es completo si y solo si es cerrado en H.*
- *Si Y es finito dimensional, entonces es completo.*

Demostración. Para la demostración del primer inciso, supondremos en primera instancia, que Y es completo y tomaremos (y_n) una sucesión convergente de puntos en Y. Dado que $Y \subset H$ y H es de Hilbert, $y_n \to y$ para $y \in H$. Hay que probar que $y \in Y$. Notemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se cumple

$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esto que para $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &= \|y_n - y + y - y_m\| \\ &\leq \|y_n - y\| + \|y_m - y\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde (y_n) es de Cauchy y como Y es completo, podemos aprovechar la unicidad del límite para concluir que $y \in Y$.
Por otro lado, si Y es cerrado, podemos tomar una sucesión de Cauchy (y_n) en Y. Dado que H es de Hilbert, (y_n) converge en H, pero como Y es cerrado, (y_n) converge en Y. Luego, Y es completo.
Para mostrar que si Y es finito dimensional, entonces es completo, podemos apelar a la demostración del teorema 2.1.2.

2.2.1. Complemento ortogonal y suma directa

En un espacio métrico X, la distancia δ desde un elemento $x \in X$ a un subconjunto $M \subset X$ no vacío se define como

$$\delta = \inf_{y \in M} d(x, y).$$

En espacios normados, utilizamos la métrica inducida por la norma.

Teorema 2.2.5. *Vector minimizador.*

Demostración. Sea X un espacio con producto interno y $M \subset X$, un subconjunto no vacío convexo y completo. Entonces, para todo $x \in X$ existe un único $y \in M$ tal que

$$\delta = \inf_{\overline{y} \in M} \|x - \overline{y}\| = \|x - y\|.$$

Primero probaremos la existencia. Por definición de ínfimo, existe una sucesión (y_n) en M tal que

$$\delta_n \to \delta, \text{ donde } \delta_n = \|y_n - x\|.$$

Probaremos que esta sucesión es de Cauchy. Sea $\mu_n = y_n - x$, entonces $\|\mu_n\| = \delta_n$.

Además,

$$\|\mu_n + \mu_m\| = 2\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\| \geq 2\delta,$$

esto pues M es convexo, de donde $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in M$. Aplicando la identidad del paralelogramo, tenemos

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 = \|\mu_n - \mu_n\|^2 &= -\|\mu_n + \mu_m\|^2 + 2\left(\|\mu_n\|^2 + \|\mu_m\|^2\right)\\ &\leq 2\delta + 2\left(\delta_n + \delta_m\right) \to 2\delta,\end{aligned}$$

de donde (y_n) es de Cauchy y como M es completo, $y_n \to y$ para $y \in M$. Dado que $y \in M$, entonces $\|x - y\| \geq \delta$, pero también tenemos que

$$\begin{aligned}\|x - y\| &\leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\|\\ &= \delta_n + \|y_n - y\| \to \delta.\end{aligned}$$

Luego, la única manera en que ambas desigualdades se den es si $\|x - y\| = \delta$.
Para probar unicidad, supongamos que existe $z \in M$ tal que

$$\|x - y\| = \|x - z\| = \delta.$$

Aplicando la identidad del paralelogramos tenemos

$$\begin{aligned}\|y - z\|^2 &= \|(y - x) - (z - x)\|^2\\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 - \|(y - x) + (z - x)\|^2\\ &= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y + z) - x\right\|^2,\end{aligned}$$

pero $\frac{1}{2}(y + z) \in M$, entonces

$$\left\|\frac{1}{2}(y + z) - x\right\| \geq \delta,$$

de donde se sigue que

$$\|y - z\|^2 = 4\delta^2 - 4\delta^2,$$

de donde necesariamente $y = z$.

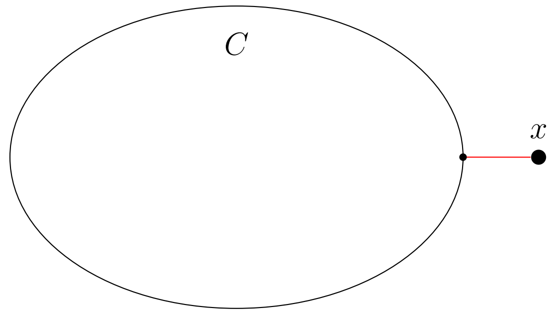

Figura 2.2. Distancia de punto a conjunto

Una pregunta natural que podría surgir a partir del teorema es el cómo encontrar el punto en el subconjunto para el cual se alcanza la distancia desde el elemento del espacio con producto interno. El siguiente lema nos da una caracterización de esto.

Lema 2.5. *En el teorema 2.2.5, tomemos $x \in X$ fijo. Entonces, $z = x - y$ es ortogonal a M.*

Demostración. Supongamos que $z \perp M$ es falso. Entonces, existe $m \in M$ tal que

$$\langle z, m \rangle = \beta \neq 0.$$

Es claro que $m \neq 0$, entonces para todo escalar α,

$$\begin{aligned} \|z - \alpha m\|^2 &= \langle z - \alpha m, z - \alpha m \rangle \\ &= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \langle z, m \rangle - \alpha \left(\langle m, z \rangle - \overline{\alpha} \langle m, m \rangle \right) \\ &= \langle z, z \rangle - \overline{\alpha} \beta - \alpha \left(\overline{\beta} - \overline{\alpha} \langle m, m \rangle \right). \end{aligned}$$

Tomando

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{\beta}}{\langle m, m \rangle}$$

llegamos a

$$\|z - \alpha m\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle m, m \rangle} < \delta,$$

donde δ está definido como en 2.2.5. Esto es imposible pues $z - \alpha m = x - (y - \alpha m) \in M$, por lo que

$$\|z - \alpha m\| \geq \delta.$$

Entonces, no puede ocurrir que $\beta \neq 0$, por lo que $z = x - y \perp M$.
Nuestro objetivo es representar un espacio de Hilbert como una suma directa que sea especialmente sencilla y adecuada, aprovechando la ortogonalidad.

Definición 2.10. Suma directa.
Un espacio vectorial X se dice estar en suma directa con dos subespacios Y y Z de X, y escribimos

$$X = Y \oplus Z$$

si para cada $x \in X$ existen únicos $y \in Y$ y $z \in Z$ tales que

$$x = y + z.$$

Definición 2.11. Complemento ortogonal.
Dado un espacio X y un subespacio Y de X, definimos el complemento ortogonal de Y, y lo denotamos por $Y^\perp$ al conjunto

$$\begin{aligned} Y^\perp &= \{x \in X \mid \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in Y\} \\ &= \{x \in X \mid x \perp Y\}. \end{aligned}$$

Como veremos, los espacios de Hilbert están en suma directa con sus subespacios cerrados y sus complementos ortogonales.

Teorema 2.2.6. *Suma directa en espacios de Hilbert.*
Sea Y cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces,

$$H = Y \oplus Y^\perp.$$

Demostración. Dado que H es completo y Y es cerrado, entonces Y es completo. Además, como Y es un subespacio vectorial, es convexo. Aplicando 2.2.5 tenemos que para cada $h \in H$, existe un único $y \in Y$ tal que

$$h = y + z, \text{ para } z \in Y^\perp. \tag{2.1}$$

Supongamos que esta combinación no es única, entonces existen $y_1 \in Y$ y $z_1 \in Y^\perp$ tales que

$$h = y + z = y_1 + z_1,$$

pero esto implica que

$$y - y_1 = z_1 - z,$$

pero $y - y_1 \in Y$ y $z_1 - z \in Y^{\perp}$, por lo que la única posibilidad para que se dé la igualdad, dado que $y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$, es que $y - y - 1 = z_1 - z = 0$, lo que concluye la prueba.
La ecuación 2.1 se relaciona con un concepto muy importante. El elemento y en 2.1 recibe el nombre de proyección ortogonal de h en Y. De esta manera, podemos definir el mapa

$$\begin{aligned} P &: H \to Y \\ x &\mapsto y = Px. \end{aligned}$$

El mapa P recibe el nombre de proyección de H en Y y satisface $P^2 = P$, es decir, es idempotente.

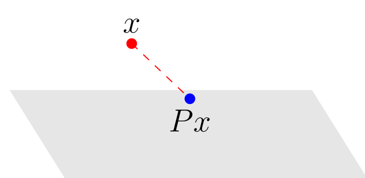

Figura 2.3. Proyección

El complemento ortogonal $Y^{\perp}$ de un subespacio cerrado Y de un espacio de Hilbert H es el espacio nulo $\mathbb{N}(P)$ de la proyección ortogonal de H en Y.

Lema 2.6. *Proyección en subespacios cerrados.*
Si Y es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces

$$Y = Y^{\perp\perp}.$$

Demostración. Sea $y \in Y$, entonces $y \perp Y^{\perp}$, de donde $y \in Y^{\perp\perp}$. Ahora tomemos $x \in Y^{\perp\perp}$. Entonces, $x = y + z$ para $y \in Y$ y $z \in Y^{\perp\perp}$. De esto que $x - y = z \in Y^{\perp\perp}$, por lo que $z \perp Y^{\perp}$. Dado que $z \in Y^{\perp}$, tenemos que $z \perp z$, por lo que $z = 0$, y concluimos que $x = y$, por lo que $\subset Y^{\perp\perp} \subset Y$. Por doble contención, concluimos que $Y = Y^{\perp\perp}$.

3. PUNTOS FIJOS

Definición 3.1. Punto fijo
Un punto $x_0 \in X$ se dice que es punto fijo de un mapa $T : X \to X$ si $Tx_0 = x_0$.

Definición 3.2. Función Lipschitz continua
Una función $F : X \to X$ se dice Lipschitz continua si existe una constante $\alpha \geq 0$ tal que para todo $x, y \in X$,

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

A la menor constante para la cual se cumple la desigualdad se le llama constante de Lipschitz y decimos que la función es $\alpha-$ Lipschitz. Además, si dicha constante es menor a uno, decimos que el mapa es una contracción; si es igual a uno, decimos que es no expansivo.

Lema 3.1. *Todo mapa Lipschitz continuo es continuo.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y f una función α-Lipschitz. Entonces, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, tenemos que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) < \varepsilon.$$

3.1. Puntos fijos en contracciones

A continuación, se abordará uno de los pilares de este trabajo: el Teorema del Punto Fijo de Banach. Este teorema fue publicado por el matemático polaco Stefan Banach en 1922, y se ha utilizado desde ecuaciones diferenciales hasta ciencias de la computación. El teorema establece condiciones bajo las cuales un operador definido en un espacio métrico completo tiene un punto fijo. Lo notable de este teorema es que no solo garantiza la existencia de tal punto, sino que también proporciona un método constructivo para encontrarlo, conocido como el método de iteración de punto fijo.

Teorema 3.1.1. *Teorema de punto fijo de Banach*
Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción con constante de Lipschitz $\alpha < 1$. Entonces, existe un único punto fijo $u \in X$ tal que, para cualquier $x \in X$,

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = u,$$

y la convergencia satisface la desigualdad

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x, f(x)).$$

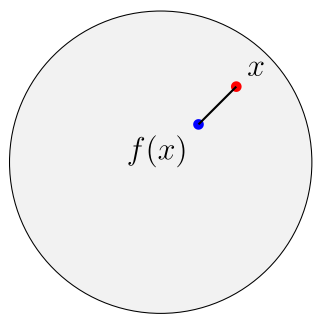

Figura 3.1. Contracción en conjunto cerrado

Demostración. .
Tomemos un punto $x \in X$ y denotemos por $x_n = f^n(x)$, con $x_0 = f^0(x) = x$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

De eso que, si suponemos $n < m$,

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k d(x_0, x_1) = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), \tag{3.1}$$

Tomando el límite cuando n y m tienden a infinito, tenemos

$$d(x_n, x_m) \to 0,$$

por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy y, como X es un espacio métrico completo, entonces existe un punto $z \in X$ tal que $x_n \to z$. Entonces,

$$z = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = f(z),$$

de donde concluimos que z es punto fijo. Para mostrar unicidad, supongamos que existe otro punto $w \in X$ tal que $f(w) = w$, entonces

$$d(z, w) = d(f(z), f(w) \leq \alpha d(z, w),$$

de donde necesariamente $d(z, w) = 0$ y $z = w$. Finalmente, retomando 3.1, y haciendo que m tienda a infinito, llegamos a

$$d(f^n(x), z) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(f(x), z).$$

El teorema de punto fijo de Edelstein es un resultado notable que aborda la existencia y unicidad de puntos fijos en espacios métricos compactos bajo condiciones de no expansividad.

Teorema 3.1.2. *Teorema de punto fijo de Edelstein*
Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función tal que para todo $x, y \in X$, se satisface

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Entonces, f tiene un único punto fijo en X.

Demostración. . Para probar la existencia del punto fijo, consideremos la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = d(x, f(x))$. La función g es continua porque d y f son continuas. Dado que X es compacto, g alcanza su valor mínimo en algún punto $x_0 \in X$.

Supongamos para llegar a una contradicción que $d(x_0, f(x_0)) > 0$. Consideremos entonces el punto $f(x_0)$ y evaluemos g en $f(x_0)$:

$$\begin{aligned}
g(f(x_0)) &= d(f(x_0), f(f(x_0))) \\
&< d(x_0, f(x_0)) \\
&= g(x_0),
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción porque $g(x_0)$ es el valor mínimo de g en X.
Por lo tanto, $d(x_0, f(x_0)) = 0$, lo que significa que x_0 es un punto fijo de f.
Para probar la unicidad, supongamos que x_1 es otro punto fijo de f, es decir, $f(x_1) = x_1$. Entonces

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_0) &= d(f(x_1), f(x_0)) \\
&< d(x_1, x_0),
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción a menos que $d(x_1, x_0) = 0$, es decir, $x_1 = x_0$.
Consideramos ahora una variante del Teorema del Punto Fijo de Banach, en el que la función f es una α-contracción definida en una bola cerrada $\overline{B_r(x_0)}$ de un espacio métrico completo (X, d).

Teorema 3.1.3. *Contracción en bola abierta.*
Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : B_r(x_0) \to X$ una α-contracción para algún $x_0 \in X$ fijo. Supongamos que

$$d(f(x_0), x_0) < (1 - \alpha)r.$$

Entonces, f tiene un único punto fijo en $B_r(x_0)$.

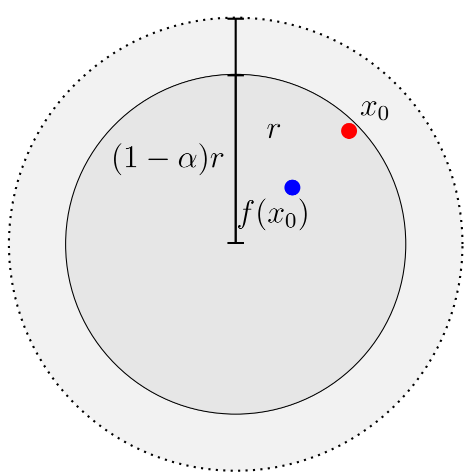

Figura 3.2. Contracción en bola abierta

Demostración. . Sea $r_0 \leq r$ tal que

$$d(x_0, f(x_0)) \leq (1-\alpha)r_0.$$

Para $x \in \overline{B_r(x_0)}$, tenemos

$$\begin{aligned} d(x_0, f(x)) &\leq d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f(x)) \\ &\leq (1-\alpha)r_0 + \alpha d(x_0, x) \\ &\leq (1-\alpha)r_0 + \alpha r_0 = r_0, \end{aligned}$$

lo cual implica que $f : \overline{B_r(x_0)} \to \overline{B_r(x_0)}$. Dado que (X, d) es completo y f es una α-contracción, podemos aplicar el Teorema de Punto Fijo de Banach para concluir que f tiene un único punto fijo en $\overline{B_r(x_0)}$, y por lo tanto en $B_r(x_0)$.

3.2. Puntos fijos en mapas no expansivos

Los mapas contractivos y sus correspondientes teoremas de puntos fijos, como el Teorema del Punto Fijo de Banach, son bien conocidos y estudiados, menos atención se ha prestado a los mapas no expansivos, que presentan sus propios desafíos.
En este capítulo, exploraremos el concepto de puntos fijos específicamente en el contexto de mapas no expansivos. Aunque los mapas no expansivos no garantizan la existencia de un punto fijo único, como es el caso en las contracciones, hay situaciones y condiciones bajo las cuales sí pueden existir puntos fijos.
El objetivo es ofrecer una introducción accesible pero completa a la teoría de puntos fijos en mapas no expansivos, presentando los principales conceptos, propiedades y ejemplos.

Definición 3.3. Mapa no expansivo.
Dado un espacio métrico (X, d) con $C \subseteq X$. Un mapa $F : C \to X$ es no expansivo si

$$d(F(x), F(y)) \leq d(x, y), \text{ para todo } x, y \in C.$$

Es decir, un mapa no expansivo es una función Lipschitz continua con constante de Lipschitz igual a 1.

Teorema 3.2.1. *Teorema de Schauder.*

Sea C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de un espacio normado E y $F : C \to C$ un mapa no expansivo. Supongamos que $F(C)$ es subconjunto de un conjunto compacto de C. Entonces, F tiene punto fijo.

Demostración. Tomemos $x_0 \in C$ y formemos la sucesión

$$F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F + \frac{1}{n} x_0.$$

Dado que C es convexo, entonces $F_n : C \to C$. Además,

$$\begin{aligned} ||F_n(x) - F_n(y)|| &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(y) \right\| \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|F(x) - F(y)\| \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\| \end{aligned}$$

de donde concluimos que F_n es contracción para todo $n \in \mathbb{N}$.
Luego, podemos aplicar el Teorema de Punto fijo de Banach para F_n y concluir que tiene un único punto fijo, digamos x_n en C. De eso que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x_n) + \frac{1}{n} x_0 = x_n.$$

Dado que $F(C)$ está sobre un conjunto compacto de C, entonces existe $u \in C$ y una sucesión de enteros $\{n_k\}$ tales que

$$F(x_{n_k}) \to u \text{ cuando } n_k \to \infty.$$

Finalmente,

$$x_{n_k} = \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) F(x_{n_k}) + \frac{1}{n_k} x_0 \to u \text{ cuando } n_k \to \infty.$$

Por continuidad de F, podemos afirmar que

$$F(x_{n_k}) \to F(u) \text{ cuando } n_k \to \infty.$$

Luego, $F(u) = u$
Los siguientes teoremas serán útiles para demostrar un teorema principal posterior de esta sección.

Teorema 3.2.2. *Sea H un espacio de Hilbert con $u, v \in H$, y r, R constantes tales que $0 \leq r \leq R$. Si existe $x \in H$ tal que*

$$\|u - x\| \leq R, \|v - x\| \leq R, \left\| \frac{u+v}{2} - x \right\| \geq r,$$

entonces

$$\|u - v\| \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

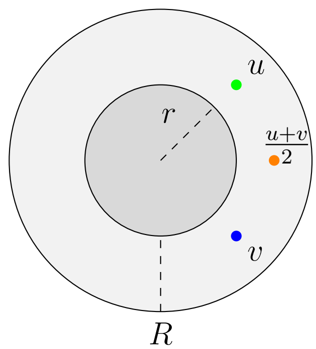

Figura 3.3. Puntos especiales en bola cerrada

Demostración. Aplicando la identidad del paralelogramo,

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - \|(u - x) + (v - x)\|^2 \\ &\leq 2R^2 + 2R^2 - 4r^2 \\ &= 4(R^2 - r^2). \end{aligned}$$

Teorema 3.2.3. *Sean H un espacio de Hilbert, $C \subseteq H$ un conjunto acotado y $F : C \to C$ un mapa no expansivo. Suponga que $x \in C$, $y \in C$ y $a = \frac{x+y}{2} \in C$. Sea $\delta(C)$ el diámetro de C y $\varepsilon \leq \delta(C)$ con $\|x - F(x)\| \leq \varepsilon$ y $\|y - F(y))\| \leq \varepsilon$. Entonces,*

$$\|a - F(a)\| \leq 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\delta(C)}.$$

Demostración. Dado que

$$\|x - y\| \leq \left\| x - \frac{a + F(a)}{2} \right\| + \left\| y - \frac{a + F(a)}{2} \right\|,$$

podemos asumir sin pérdida de la generalidad que

$$\left\| x - \frac{a + F(a)}{2} \right\| \geq \frac{1}{2} \|x - y\| .$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|F(a) - x\| &\leq \|F(a) - F(x)\| + \|F(x) - x\| \\
&\leq \|a - x\| + \varepsilon \\
&= \frac{1}{2} \|x - y\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando $R = \frac{1}{2} \|x - y\| + \varepsilon$ y $r = \frac{1}{2} \|x - y\|$, $u = a$ y $v = F(a)$ en el teorema 3.2.2, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|a - F(a)\| &\leq 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} \|x - y\| + \varepsilon\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \|x - y\|\right)^2} \\
&= 2\sqrt{\|x - y\| \varepsilon + \varepsilon^2} \\
&= 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\|x - y\| + \varepsilon} \\
&\leq 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\delta(C)}.
\end{aligned}$$

Con estos últimos dos teoremas, estamos listos para enunciar uno de los resultados más importantes que se estudiarán en esta sección. El próximo teorema garantiza la existencia de un punto fijo en conjuntos no vacíos, cerrados y acotados de espacios de Hilbert bajo mapas no expansivos.

Teorema 3.2.4. *Sea C un conjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo en un espacio de Hilbert H. Entonces, todo mapa no expansivo $F : C \to C$ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Sin pérdida de la generalidad, vamos a asumir que $0 \in C$ y para $n \geq 2$, definimos

$$F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F : C \to C.$$

Entonces, tenemos que F_n es una contracción y por el teorema de punto fijo de

Banach (teorema 3.1.1), tenemos que existe un único $x_n \in C$ tal que

$$x_n = F_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x).$$

De esto obtenemos que

$$\begin{aligned} \|x_n - F(x_n)\| &= \frac{1}{2} \|F(x_n)\| \\ &\leq \frac{1}{n}\delta(C), \end{aligned}$$

donde $\delta(C)$ es el diámetro de C. Por otro lado, definimos, para $n \geq 2$,

$$Q_n = \left\{ x \in C : \|x - F(x)\| \leq \frac{1}{n}\delta(C) \right\}.$$

Notemos que

$$Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \cdots \supseteq Q_n \supseteq \cdots$$

por lo que tenemos una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos y cerrados. Definimos d_n como

$$d_n = \text{ínf} \left\{ \|x\| \;\; x \in Q_n \right\}.$$

Luego,

$$d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n \leq \cdots, \text{ con } d_i \leq \delta(C).$$

De esta podemos concluir que $d_n \to d$ con $d \leq \delta(C)$. Finalmente, definimos

$$A_n = Q_{8n^2} \cap \overline{B_{d+\frac{1}{n}}(0)}.$$

Estos conjuntos son tales que

$$A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots.$$

Tomemos $u, v \in A_n$, luego

$$\|u - 0\| \leq d + \frac{1}{n} \text{ y } \|v - 0\| \leq d + \frac{1}{n}.$$

Además, como $u, v \in Q_{8n^2}$, entonces

$$\|u - F(u)\| \leq \frac{1}{8n^2}\delta(C) \text{ y } \|v - F(v)\| \leq \frac{1}{8n^2}\delta(C).$$

De esto que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u+v}{2} - F\left(\frac{u+v}{2}\right)\right\| &\leq 2\sqrt{2\delta(C)}\sqrt{\frac{1}{8n^2}\delta(C)} \\ &= \frac{1}{n}\delta(C).\end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$\begin{aligned}\|u - v\| &\leq 2\sqrt{\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - d_n^2} \\ &\Rightarrow \delta(A_n) \\ &\leq 2\sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2} + (d^2 - d_n^2)}.\end{aligned}$$

Con esto concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0.$$

Por el teorema 1.1.1, existe x_0 tal que

$$x_0 \in \bigcap_{n=2}^{\infty} A_n \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{n=2}^{\infty} Q_{8n^2},$$

pero como

$$\|x_0 - F(x_0)\| \leq \frac{\delta(C)}{8n^2},$$

entonces $\|x_0 - F(x_0)\| = 0$.

4. HOMOTOPÍAS

Las homotopías ofrecen una forma de analizar las transformaciones entre funciones. Este capítulo se dedica a presentar los conceptos fundamentales relacionados con homotopías, comenzando con la definición de un camino y evolucionando hacia la noción de homotopías, homotopías de caminos y su relación con puntos fijos.

Definición 4.1. Camino.
Decimos que una función $f : [0, 1] \to X$ es un camino en X de x_0 a x_1 si $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$. Al punto x_0 lo llamamos punto inicial y al punto x_1, punto final.

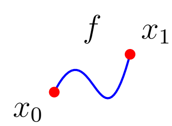

Figura 4.1. Camino

Definición 4.2. Homotopía.
Si f y g son mapas continuos del espacio X al espacio Y, decimos que f y g son homotópicos si existe un mapa continuo $F : X \times [0, 1] \to Y$ tal que

$$F(x, 0) = f(x) \qquad F(x, 1) = g(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Definición 4.3. Homotopía de caminos.
En un espacio métrico X, consideramos dos caminos f y g. Decimos que f y g son homotópicos de camino si comparten tanto un punto inicial x_0 como un punto final x_1, y existe una función continua $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ que satisface:

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s), \\ F(s, 1) &= g(s), \\ F(0, t) &= x_0, \\ F(1, t) &= x_1. \end{aligned}$$

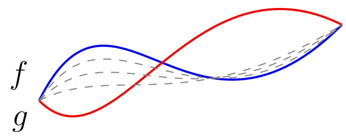

Figura 4.2. Dos caminos homotópicos

4.1. Homotopías y puntos fijos

Una interrogante relevante en el estudio de las homotopías se relaciona con la existencia de puntos fijos en mapas contractivos. ¿Qué sucede si dos contracciones son homotópicas y una de ellas posee un punto fijo? En esta subsección, exploraremos esta relación y estableceremos propiedades invariantes bajo homotopías en el contexto de contracciones en espacios métricos completos.

Definición 4.4. Homotopía entre contracciones.
Sean $F : \overline{U} \to X$ y $G : \overline{U} \to X$ dos contracciones, donde U es un subconjunto abierto del espacio métrico completo (X, d). Decimos que F y G son homotópicos si existe $H : \overline{U} \times [0,1] \to X$ tal que

- $H(\cdot, 0) = G$ y $H(\cdot, 1) = F$
- $x \neq H(x,t)$ para todo $x \in \partial U$
- Existe α con $0 \leq \alpha < 1$ tal que

$$d(H(x,t), H(y,t)) \leq \alpha d(x,y)$$

- Existe $M \geq 0$ tal que

$$d(H(x,t), H(x,s)) \leq M|t-s|, \text{ para todo } x \in \overline{U}.$$

Teorema 4.1.1. *Existencia de punto fijo es invariante bajo homotopías.*

Demostración. Sea (X, d) un spacio métrico completo y $U \subseteq X$ un subconjunto abierto de X. Suponga que $F : \overline{U} \to X$ y $G : \overline{U} \to X$ son dos contracciones homotópicas y G tiene punto fijo en U. Entonces F tiene punto fijo en U.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{\lambda \in [0, 1] : x = H(x, \lambda) \text{ para algún } x \in U\}.$$

Buscaremos probar que A es simultáneamente abierto y cerrado, e invocaremos el lema 1.3 para concluir que $A = [0, 1]$.
En primera instancia, notemos que A no es vacío pues

$$H(x, 0) = G(x)$$

y sabemos que G tiene punto fijo, por lo que $0 \in A$.
Para probar que A es cerrado, tomemos una sucesión (λ_n) en A tal que $\lambda_n \to \lambda$. Dado que $\lambda_n \in A$, para cada n existe x_n tal que

$$x_n = H(x_n, \lambda_n).$$

Luego,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(H(x_n, \lambda_n), H(x_m, \lambda_m)) \\ &\leq d(H(x_n, \lambda_n), H(x_n, \lambda_m)) + d(H(x_n, \lambda_m), H(x_m, \lambda_m)) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m), \end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{M|\lambda_n - \lambda_m|}{1 - \alpha},$$

lo que implica que (x_n) es una sucesión de Cauchy. Digamos $x_n \to x$, para $x \in \overline{U}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} d(x_n, H(x, \lambda)) &= d(H(x_n, \lambda_n), H(x, \lambda)) \\ &\leq d(H(x_n, \lambda_n), H(x_n, \lambda)) + d(H(x_n, \lambda), H(x, \lambda)) \\ &\leq |\lambda_n - \lambda| + \alpha d(x_n, x), \end{aligned}$$

de donde $x = H(x, \lambda)$ y $\lambda \in A$, por lo que A es cerrado en $[0, 1]$.
Para probar que A es abierto, tomemos $\lambda_0 \in A$, por lo que existe $x_0 \in \overline{U}$ tal que

$$x_0 = H(x_0, \lambda_0).$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ de manera que

$$\varepsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M}, \text{ donde } r \leq d(x_0, \partial U).$$

Luego, para $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(H(x, \lambda), x_0) &= d(H(x, \lambda), H(x_0, \lambda_0)) \\ &\leq d(H(x, \lambda), H(x_0, \lambda)) + d(H(x_0, \lambda), H(x_0, \lambda_0)) \\ &\leq \alpha d(x, x_0) + M|\lambda - \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + M\varepsilon = \alpha r + (1-\alpha)r \\ &= r. \end{aligned}$$

De esto que $H(x, \lambda) \in \overline{B_r(x_0)}$, por lo que $H(\cdot, \lambda) : \overline{B_r(x_0)} \to \overline{B_r(x_0)}$ y por el teorema 3.1.1 concluimos que $H(\cdot, \lambda)$ tiene punto fijo. Luego, $\lambda \in A$ para todo $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ y A es un conjunto abierto. Luego, por el lema 1.3, $A = [0, 1]$ y F tiene punto fijo.
El teorema presentado destaca la invarianza de la existencia de puntos fijos bajo homotopías en espacios métricos completos. Esta propiedad señala que las relaciones entre mapas contractivos se mantienen a pesar de las deformaciones continuas.

Teorema 4.1.2. *Teorema.*

Demostración. Suponga que U es un subconjunto abierto de un espacio de Banach X, $0 \in U$ y $F : \overline{U} \to X$ es una contracción con $F(\overline{U})$ acotada. Entonces se cumple ya sea una o la otra de las siguientes:

- F tiene punto fijo en $\overline{U}$
- Existe $\lambda \in (0, 1)$ y $u \in \partial U$ con $u = \lambda F(u)$.

Demostración. Supongamos que no se cumple el segundo inciso y F no tiene puntos fijos en ∂U (si los tuviera, hemos concluido). Entonces,

$$u \neq \lambda F(u) \text{ para todo } u \in \partial U \text{ y } \lambda \in [0, 1].$$

Tomemos $H : \overline{U} \times [0,1] \to X$ definida por

$$H(x,t) = tF(x)$$

y G el mapa nulo. Es claro que G tiene punto fijo en U pues $G(0) = 0$. Por otro lado, notemos que

- $H(\cdot, 0) = 0 = G$ y $H(\cdot, 1) = F$
- $x \neq H(x,t)$ para todo $x \in \partial U$ por hipótesis
- Para $0 \leq t \leq 1$ fijo,

$$\begin{aligned} d(H(x,t), H(y,t) &= d(tF(x), tF(y)) \\ &= td(F(x), F(y)), \text{ por ser } d \text{ una métrica inducida.} \\ &\leq t\alpha d(x,y), \text{ por ser } F \text{ una contracción.} \\ &\leq \alpha d(x,y), \text{ por ser } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

- Para $x \in \overline{U}$ fijo,

$$\begin{aligned} d(H(x,t), H(x,s)) &= d(tF(x), sF(x)) \\ &= \|F(x)\| \, d(s,t) \\ &= M|t-s|, \text{ para } M = \|F(x)\|. \end{aligned}$$

De esto que F y G son contracciones homotópicas, luego por 4.1.1 tenemos que F tiene punto fijo y se cumple el primer inciso.

5. APLICACIONES

Este capítulo se divide en dos secciones principales. La primera sección contiene una serie de ejercicios diseñados para aplicar los teoremas y conceptos discutidos en los capítulos anteriores. Estos ejercicios tienen como finalidad proporcionar una comprensión práctica de cómo los teoremas de puntos fijos y homotopías se pueden aplicar en distintas áreas de la matemática. Los ejercicios fueron tomados del libro *Fixed Point Theory and Applications*, de Donal O'Regan, Ravi Agarwal y Maria Meehan, publicado en 2001. La segunda sección se centra en la aplicación de la teoría de puntos fijos y homotopías en la teoría de elección social. Se explorará cómo estos conceptos matemáticos se utilizan en el estudio de modelos de votación y en problemas relacionados con la agregación de preferencias y la toma de decisiones colectivas.

5.1. Ejercicios

Ejercicio 1: Sea $\overline{B_r(0)}$ la bola cerrada de radio $r > 0$, centrada en cero, en un espacio de Banach E con $F : \overline{B_r(0)} \to E$ una contracción tal que $F(-x) = -F(x)$ para todo x en $\partial\overline{B_r(0)}$. Mostrar que F tiene un punto fijo en $\overline{B_r(0)}$.

Solución.

Sea $\alpha < 1$ la constante de Lipschitz de la contracción. Primero, probaremos que $F(\partial\overline{B_r(0)} \subseteq \overline{B_r(0)}$. Para ello, tomemos $x \in \partial\overline{B_r(0)}$. Entonces,

$$||F(x) - F(-x)|| = 2||F(x)|| \leq \alpha||x - (-x)|| = 2\alpha||x|| < 2r$$

de donde concluimos que

$$||F(x)|| < r.$$

Luego, $F(x) \in B_r(0) \subseteq \overline{B_r(0)}$ y, como x es arbitrario, $F(\partial\overline{B_r(0)} \subseteq \overline{B_r(0)}$.

Consideremos la función $G : \overline{B_r(0)} \to E$ dada por

$$G(x) = \frac{F(x) + x}{2}.$$

Tomemos $x \in \overline{B_r(0)}$ distinto de cero y definamos

$$y = r\frac{x}{||x||}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}||F(x) - F(y)|| &\leq \alpha||x - y|| \\ &= \alpha||x|| \left(\frac{r}{||x||} - 1\right) \\ &= \alpha\left(r - ||x||\right)\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}||F(x)|| &\leq ||F(x) - F(y)|| + ||F(y)|| \\ &\leq \alpha(r - ||x||) + r \\ &\leq 2r - ||x||.\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}||G(x)|| &\leq \frac{1}{2}||F(x)|| + \frac{1}{2}||x|| \\ &\leq \frac{1}{2}(2r - ||x||) + \frac{1}{2}||x|| = r.\end{aligned}$$

Más aún, por continuidad de G podemos afirmar que $G(0) \leq r$. Concluimos que $G(x) : \overline{B_r(0)} \to \overline{B_r(0)}$ y G es contracción pues

$$\begin{aligned}||G(x) - G(y)|| &\leq \frac{1}{2}||F(x) - F(y)|| + \frac{1}{2}||x - y|| \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha + 1)||x - y|| \\ &< ||x - y||.\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Punto fijo de Banach, concluimos que G tiene un único punto fijo en $\overline{B_r(0)}$, digamos w. De esto que

$$G(w) = \frac{F(w) + w}{2} = w,$$

lo que implica que $F(w) = w$.

Ejercicio 2: Sea (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \to X$ una función tal que $F^N : X \to X$ es una contracción para algún N. Mostrar que F tiene un único punto fijo $u \in X$ y que para cada $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = u.$$

Solución.
Sea $\alpha < 1$ la constante de Lipschitz de F^N. Por el teorema de Punto fijo de Banach, aplicado a F^N, concluimos que F^N tiene un único punto fijo $w \in X$. Consideremos la sucesión $\{w_n\}$ dada por

$$w_n = F^n(w).$$

Dicha sucesión es cíclica, pues

$$w_{N+k} = F^{N+k}(w) = F^k(w) = w_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que

$$d(F^m(w), F^r(w)) = d(F^{N+m}(w), F^{N+r}(w)) \leq \alpha d(F^m(w), F^r(w)). \tag{5.1}$$

Supongamos que $d(F^m(w), F^r(w)) \neq 0$, entonces de 5.1 tenemos que

$$1 \leq \alpha,$$

lo que es una contradicción pues $\alpha < 1$. Entonces,

$$w_m = F^m(w) = F^r(w) = w_r, \text{ para todo } m, r \in \mathbb{N}.$$

En particular, para $m = N$ y $r = 1$ tenemos

$$F^N(w) = F(w) = w,$$

de donde F tiene punto fijo. Para probar que es único, supongamos que $z \in X$ es punto fijo de F, entonces

$$F(z) = z,$$

lo que implica que

$$F^N(z) = z,$$

y como el punto fijo de F^N es único, concluimos que $w = z$ y F tiene un único punto fijo. Finalmente, por el teorema de Punto Fijo de Banach, para todo $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = w.$$

Ejercicio 3: Sea U un subconjunto abierto de un espacio de Banach E y $F : U \to E$ una contracción. Demostrar que $(I - F)(U)$ es un conjunto abierto.

Solución.

Para demostrar que $(I - F)(U)$ es un conjunto abierto, vamos a probar que $I - F$ es un homeomorfismo entre U y $\mathrm{Im}(I - F)(U)$. Esto requerirá que verifiquemos tres propiedades:

1. **Continuidad de $I-F$.** La continuidad de $I-F$ es evidente porque tanto la función identidad I como la función F son continuas. Por lo tanto, la combinación de estas dos también será continua.

2. **Biyectividad de $I - F$.** Sea $x, y \in U$. Entonces,

$$(I - F)x = (I - F)y$$

si y solo si $x - y = F(x) - F(y)$. Dado que F es una contracción, la única posibilidad es que $x = y$. Por lo tanto, $I-F$ es inyectiva. Si restringimos el codominio de $I - F$ a su imagen, entonces $I - F$ es también sobreyectiva. Esto implica que $I - F$ es biyectiva y su inversa $(I - F)^{-1}$ existe.

3. **Continuidad de la inversa $(I-F)^{-1}$.** Consideremos una sucesión (x_n) en U que converge a x y otra sucesión (y_n) en E que converge a y, tal que

$$(I - F)x_n = y_n.$$

Entonces, para un $\varepsilon > 0$ dado, tenemos

$$\left\|(I-F)^{-1}y_n - (I-F)^{-1}y\right\| = \|x_n - x\| < \varepsilon$$

cuando n es suficientemente grande. Esto demuestra la continuidad de $(I-F)^{-1}$.

Luego, $I - F$ es un homeomorfismo entre U y $\mathrm{Im}(I-F)(U)$. Por lo tanto, $(I-F)(U)$ es un conjunto abierto.

Ejercicio 4: Sea C un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach E y $F : C \to C$ un mapa no expansivo. Muestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x(\varepsilon) \in C$ tal que $\|F(x(\varepsilon)) - x(\varepsilon)\| < \varepsilon$.

Solución.

Dado que C es un subconjunto cerrado de un espacio de Banach, entonces C es completo. Además, por hipótesis tenemos que C es acotado, por lo que estas dos propiedades nos llevan a concluir que C es totalmente acotado (teorema 1.1.2). Por tanto, dado que C es totalmente acotado y completo, podemos decir que C es compacto. Por tanto, $F(C)$ yace sobre un conjunto compacto y, aplicando el teorema 3.2.1 concluimos que F tiene punto fijo, digamos x^*. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en C tal que $x_n \to x^*$. Luego, por continuidad de la norma,

$$\|F(x_n) - x_n\| \to \|F(x^*) - x^*\| = 0.$$

Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ podemos tomar un N lo suficientemente grande, de manera que $x(\varepsilon) = x_N \in (x_n)$ satisfaga

$$\|F(x(\varepsilon)) - x(\varepsilon)\| < \varepsilon.$$

Ejercicio 5: Sea H un espacio de Hilbert y $C \subseteq H$ un conjunto cerrado y convexo. Defina $P_C : H \to C$ el mapa que envía a cada $x \in H$ al punto más cercano en C. Mostrar que P_c es no expansivo.

Solución.

Por el teorema 2.2.5 y el lema 2.5, sabemos que P_c es la proyección ortogonal de H en C. Por tanto, debemos probar que la proyección ortogonal es un mapa no expansivo. Para ello, probaremos que el mapa de proyección es lineal y luego, probaremos una desigualdad importante.

Por el teorema 2.2.6, sabemos que H puede escribirse como

$$H = C \oplus C^{\perp}.$$

Luego, para $x, y \in H$ existen $c_1, c_2 \in C$ y $z_1, z_2 \in C^{\perp}$ únicos tales que

$$\begin{aligned} x &= c_1 + z_1 \\ y &= c_2 + z_2. \end{aligned}$$

Notemos que para α y β escalares, tenemos

$$\begin{aligned} P_c(\alpha x + \beta y) &= P_c(\alpha c_1 + \alpha z_1 + \beta c_1 + \beta z_2) \\ &= P_c\left((\alpha c_1 + \beta c_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2)\right) \\ &= \alpha c_1 + \beta c_2 \\ &= \alpha P_c(x) + \beta P_c(y), \end{aligned}$$

donde las igualdades se han seguido por cerradura de H bajo combinaciones lineales y la unicidad en la representación de cada elemento por la suma directa. Concluimos que P_c es un operador lineal.
Por otro lado, sean $h = c + z \in H$, donde $c \in C$ y $z \in C^{\perp}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|P_c(h)\|^2 &= \|c\|^2 \\ &\leq \|c\|^2 + \|z\|^2 \\ &= \|c + z\|^2 \\ &= \|h\|^2, \end{aligned}$$

donde nos hemos aprovechado del hecho que $c \perp z$ para concluir. De esto que

$$\|P_c(h)\| \leq \|h\|^2.$$

Finalmente, tomando $h = x - y$, para $x, y \in H$ tenemos

$$\|P_c(x - y)\| = \|P_c(x) - P_c(y)\| \leq \|x - y\|,$$

lo que significa que P_c es no expansivo.

5.2. Modelo electoral convexo

En esta sección, nos inspiraremos en el trabajo de Yurii Nesterov titulado "Soft clustering by convex electoral model", publicado en la revista Soft Computing en el año 2020 [Nesterov, 2020]..El artículo de "Soft clustering by convex electoral model", al cual de ahora en adelante llamaremos *el artículo*, propone una nueva técnica para el agrupamiento suave (soft clustering) de datos multidimensionales, basada en un nuevo modelo de votación convexa. En este modelo, las partes (o grupos) pueden adaptar sus posiciones según los resultados de las encuestas, y se demuestra que, bajo ciertas suposiciones, este sistema tiene un punto fijo único que da una solución única para el agrupamiento suave. Se presentan métodos para encontrar esta solución, que convergen linealmente, y se proporcionan límites de complejidad en el peor de los casos, siendo estos los primeros resultados de complejidad polinómica en este campo.

Notación y preliminares para el modelo electoral convexo

Denotaremos con $\mathbf{E}$ a un espacio normado finito dimensional y con $\mathbf{E}^*$ a su espacio dual. Dado $s \in \mathbf{E}^*$, denotamos el valor de s en $x \in E$ por

$$\langle s, x \rangle_E.$$

En caso que no tengamos ambigüedad sobre a qué espacio pertenece x, omitiremos el subíndice. Definiremos la norma dual por

$$\|s\|_E^* = \max \left\{ \langle s, x \rangle \,:\, \|x\|_E \leq 1 \right\rangle .$$

Esta manera de definir la norma dual nos garantiza que se cumpla la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\langle s, x \rangle_E \leq \|s\|_E^* \cdot \|x\|_E \,, \; s \in E^*, \; x \in E.$$

Lema 5.1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es bilineal.*
Sean $s, q \in E^*$*,* $x, y \in E$ *y* λ, μ, a, b *escalares. Entonces,*

$$\begin{aligned} \langle \lambda s + \mu q, ax + by \rangle &= (\lambda s + \mu q)(ax + by) \\ &= \lambda s(ax + by) + \mu q(ax + by) \\ &= a\lambda s(x) + b\lambda s(y) + a\mu q(x) + b\mu q(y) \\ &= a\lambda \langle s, x \rangle + b\lambda \langle s, y \rangle + a\mu \langle q, x \rangle + b\mu \langle q, y \rangle. \end{aligned}$$

Definición 5.1. Función fuertemente convexa.
Una función continua $f(x)$ se dice fuertemente convexa en $Q \subseteq E$ si existe una constante $\sigma > 0$ tal que para todo $x, y \in Q$ y $\alpha \in [0,1]$, se cumple que

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x-y\right\|_E^2. \tag{5.2}$$

Teorema 5.2.1. *Sobre un conjunto convexo y cerrado, toda función fuertemente convexa alcanza su mínimo. Más aún, el minimizador es único.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in Q : f(x) \leq M\},$$

para algún M. Por la continuidad de f, podemos concluir que A es cerrado. Entonces, dado que f satisface 5.2, $A \neq \emptyset$. Supongamos que A no es acotado, entonces existe una sucesión $(x_n) \subset A$ no acotada y, sin pérdida de la generalidad, podemos asumir que

$$\|x_k - x_{k-1}\| \geq 1,\ \text{k} \geq 1.$$

Consideremos

$$\alpha_k = \frac{1}{\|x_k - x_0\|} \in [0,1].$$

Entonces $\alpha_k \to 0$. Definamos y_k como

$$y_k = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)x_0.$$

Se cumple que $\|y_k - x_0\| = 1$ y

$$\begin{aligned}
f(y_k) &\leq \alpha_k f(x_k) + (1-\alpha_k)f(x_0) - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x_k - x_0\right\|_E^2 \\
&\leq \alpha_k M + (1-\alpha_k)M - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x_k - x_0\right\|_E^2 \\
&= M - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x_k - x_0\right\|_E^2 \to -\infty,
\end{aligned}$$

pero esto contradice la continuidad de f. Luego, A es acotado y cerrado, por lo que es compacto y, aplicando 1.2.2, podemos concluir que existe $x^* \in A$ tal que x^* es minimizador en A, pero por la definición de A, esto implica a su vez, que x^* es minimizar en Q. Luego,

$$f(x^*) \leq f(z), \text{ para todo } z \in Q.$$

Para probar unicidad, supongamos que $x^*, y^* \in Q$ son minimizadores de f en Q. Entonces,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}y^*\right) &\leq \frac{1}{2}f(x^*) + \frac{1}{2}f(y^*) - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x^* - y^*\right\|_E^2 \\ &= f(x^*) - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x^* - y^*\right\|_E^2 \end{aligned}$$

,

entonces necesariamente

$$\frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x^* - y^*\right\|_E^2 = 0$$

para todo α. De esto y el hecho que $\sigma \neq 0$, concluimos que $\|x^* - y^*\|_E^2 = 0$, lo que concluye la prueba.

Notemos que esto implica que para todo $x \in Q$,

$$f(x^*) \leq f(\alpha x^* + (1-\alpha)x) \leq \alpha f(x^*) + (1-\alpha)f(x) - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x^* - x\right\|_E^2.$$

Dividiendo entre $(1-\alpha)$ y haciendo que $\alpha \to 1$ concluimos

$$f(x) \geq f(x^*) + \frac{\sigma}{2}\left\|x - x^*\right\|_E^2, \ x \in Q. \tag{5.3}$$

Costo de interacción multiplicativo

Denotaremos por E, E_1 y E_2 a tres espacios vectoriales finito dimensionales sobre el campo de los reales.

Definición 5.2. Función cerrada.

Una función $f : \mathbf{R}^n \to R$ es llamada *cerrada* si para cada $\alpha \in \mathbf{R}$, el conjunto de nivel $\{x \in \mathbf{R}^n \,| f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado. Consideremos la función en dos variables $\phi(x,p)$ dada por

$$\phi(x,p) = f(x) + g(x,p) + h(p), \ x \in E_1, p \in E_2, \tag{5.4}$$

donde f, h son funciones cerradas y convexas en sus dominios. Se asumirá que la función de interacción g tiene una forma multiplicativa. Es decir,

$$g(x,p) = \langle G_1(x), G_2(p)\rangle_E,$$
$$G_1 : E_1 \to E^*,\ G_2 : E_2 \to E_1.$$

La sección se dedica a explorar condiciones bajo las cuales la función ϕ es convexa. También se analizará un método de minimización alternativa para resolver problemas de optimización relacionados con esta función. Denotaremos por Q_1 y Q_2 a los conjuntos cerrados y convexos de las soluciones alcanzables al problema de optimización en los espacios E_1 y E_2 respectivamente. Definimos Q como el producto cartesiano de Q_1 con Q_2.

De ahora en adelante, asumiremos que para cada $x \in Q_1$, $g(x,\cdot) = \langle G_1(x), G_2(\cdot)\rangle$ se cerrada y convexa en Q_2, y para cada $p \in Q_2$, la función $g(\cdot,p) = \langle G_1(\cdot), G_2(p)\rangle$ es cerrada y convexa en Q_1. Un ejemplo de funciones que satisfacen esta suposición son los operadores lineales. Esta suposición tiene una consecuencia importante que se evidencia en el siguiente lema.

Lema 5.2. *Para cualesquiera dos puntos $z_0 = (x_0, p_0)$ y $z_1 = (x_1, p_1)$ de Q y para todo $\alpha \in [0,1]$, tenemos que*

$$\begin{aligned}&\langle G_1((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1), G_2((1-\alpha)p_0 + \alpha p_1)\rangle\\ &\leq \langle (1-\alpha)G_1(x_0), \alpha G_1(x_1), (1-\alpha)G_2(p_0) + \alpha G_2(p_1)\rangle.\end{aligned}$$

Demostración. Sea $z_\alpha = (x_\alpha, p_\alpha) = (1-\alpha)z_0 + \alpha z_1$. Dada la suposición anterior de convexidad para $g(x,\cdot)$ y $g(\cdot,p)$, tenemos que

$$\langle G_1(x_\alpha), G_2(p_\alpha)\rangle \leq \langle G_1(x_\alpha), (1-\alpha)G_2(p_0) + \alpha G_2(p_1)\rangle.$$

Así mismo,

$$\langle G_1(x_\alpha), G_2(p_\alpha)\rangle \leq \langle \alpha G_1(x_1) + (1-\alpha)G_1(x_0), G_2(p_i)\rangle,\ i = 0, 1.$$

Uniendo estas dos desigualdades obtenemos

$$\langle G_1(x_\alpha), G_2(p_\alpha\rangle \leq \langle \alpha G_1(x_1) + (1-\alpha)G_1(x_0), \alpha G_2(p_1) + (1-\alpha)G_2(p_0)\rangle.$$

Tal y como se había mencionado antes, uno de los propósitos de esta sección es explorar condiciones bajo las cuales ϕ es convexa. El teorema que veremos a continuación nos da una condición necesaria para que $\phi(\cdot,\cdot)$ sea convexa.

Teorema 5.2.2. *Condición para convexidad.*
Considere la función ϕ dada en la definición 5.4. Suponga que f es fuertemente convexa en Q_1 con parámetro σ_1 y g es fuertemente convexa en Q_2 con parámetro σ_2. Si las funciones $G_1(\cdot)$ y $G_2(\cdot)$ son Lipschitz continuas con constantes L_1 y L_2 que satisfacen $L_1^2L_2^2 \leq \sigma_1\sigma_2$, entonces ϕ es convexa en $Q = Q_1 \times Q_2$. Además, si la desigualdad se cumple de forma estricta, ϕ es fuertemente convexa.

Demostración. Sean $z_0 = (x_0, p_0)$ y $z_1 = (x_1, p_1)$ en Q. Consideremos $z_\alpha = \alpha z_1 + (1-\alpha)z_0$, para $\alpha \in [0,1]$. Luego,

$$\begin{aligned}
\phi(z_\alpha) &= f(x_\alpha) + \langle G_1(x_\alpha), G_2(p_\alpha)\rangle + h(p_\alpha)\\
&\leq f(x_\alpha) + \langle \alpha G_1(x_1) + (1-\alpha)G_1(x_0), \alpha G_2(p_1) + (1-\alpha)G_2(p_1)\rangle + h(p_\alpha)\\
&\leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_0) - \frac{\sigma_1}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|x_0 - x_1\right\|^2\\
&+ \langle \alpha G_1(x_1) + (1-\alpha)G_1(x_0), \alpha G_2(p_1) + (1-\alpha)G_2(p_1)\rangle\\
&+ \alpha h(p_1) + (1-\alpha)h(p_0) - \frac{\sigma_2}{2}\alpha(1-\alpha)\left\|p_0 - p_1\right\|^2\\
&= (1-\alpha)\left(\phi(z_0) - \langle G_1(x_0), G_2(p_0)\rangle\right) + \alpha\left(\phi(z_1) - \langle G_1(x_1), G_2(p_1)\rangle\right)\\
&+ \langle (1-\alpha)G_1(x_0) + \alpha G_1(x_1), (1-\alpha)G_2(p_0 + \alpha G_2(p_1)\rangle\\
&- \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(\sigma_1\left\|x_1 - x_0\right\|^2 + \sigma_2\left\|p_1 - p_0\right\|^2\right)\\
&= (1-\alpha)\phi(z_0) + \alpha\phi(z_1) - \alpha(1-\alpha)\delta(z_0, z_1),
\end{aligned}$$

donde $\delta(z_0, z_1) = \frac{\sigma_1}{2}\left\|x_1 - x_0\right\|^2 + \frac{\sigma_2}{2}\left\|p_1 - p_0\right\|^2 + \langle G_1(x_1) - G_1(x_0), G_2(p_1) - G_2(p_0)\rangle$. Si ahora suponemos que

$$L_1^2L_2^2 \leq (\sigma_1 - \varepsilon)(\sigma_2 - \varepsilon), \text{ para algún } \varepsilon \geq 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta(z_0, z_1) &\geq \frac{\sigma_1}{2}\left\|x_1 - x_0\right\|^2 + \frac{\sigma_2}{2}\left\|p_1 - p_0\right\|^2 - (\sigma_1 - \varepsilon)^{1/2}(\sigma_2 - \varepsilon)^{1/2}\left\|x_0 - x_1\right\| \cdot \left\|p_0 - p_1\right\|\\
&\geq \frac{\sigma_1}{2}\left\|x_1 - x_0\right\|^2 + \frac{\sigma_2}{2}\left\|p_1 - p_0\right\|^2 - \frac{(\sigma_1 - \varepsilon)\left\|x_0 - x_1\right\|^2 + (\sigma_2 - \varepsilon)\left\|p_0 - p_1\right\|^2}{2}\\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}\left(\left\|x_0 - x_1\right\|^2 + \left\|p_0 - p_1\right\|^2\right).
\end{aligned}$$

De esto que si $\varepsilon > 0$, entonces ϕ es fuertemente convexa. Si $\varepsilon = 0$, entonces ϕ es convexa solamente.

Si ahora consideramos el problema de minimizar $\phi(z)$ en Q, y si suponemos que 5.2.2 se cumple, entonces ϕ es fuertemente convexa y por tanto, existe un único minimizador $z^* = (x^*, p^*) \in Q$. A continuación mostraremos una forma en la que dicho minimizador puede ser encontrado.

Inicialización:	Escoger $x_0 \in Q_1$
Iteración $t \geq 0$**:**	a) Determinar $p_{t+1} = \arg\min_{p \in Q_2} \phi(x_t, p)$
	b) Determinar $x_{t+1} = \arg\min_{x \in Q_1} \phi(x, p_{t+1})$.

Con el fin de analizar la convergencia de este método, definiremos los siguientes operadores

$$u(x) = \arg\min_{p \in Q_2} \phi(x, p) \in Q_2$$

$$v(p) = \arg\min_{x \in Q_1} \phi(x, p) \in Q_1.$$

Dado que estamos asumiendo que $\phi(z)$ es fuertemente convexa, $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ están bien definidos.

Lema 5.3. *Supongamos que 5.2.2 se cumple. Entonces, para todo $x_1, x_2 \in Q_1$ tenemos que*

$$\|u(x_1) - u(x_2)\| \leq \frac{L_1 L_2}{\sigma_2} \|x_1 - x_2\|.$$

Análogamente, para todo $p_1, p_2 \in Q_2$,

$$\|v(p_1) - v(p_2)\| \leq \frac{L_1 L_2}{\sigma_1} \|p_1 - p_2\|.$$

Demostración. Notemos que, por la forma en la que está definido ϕ y el hecho que x es fijo en $\langle G_1(x), G_2(p)\rangle + h(p)$, entonces $u(x)$ es la solución al problema

$$\min_{p \in Q_2} \langle G_1(x), G_2(p)\rangle + h(p),$$

con función objetivo fuertemente convexa. Luego, por 5.3, se cumple que

$$\begin{aligned} &\langle G_1(x_1), G_2(u(x_2))\rangle + h(u(x_2)) \\ \geq\ &\langle G_1(x_1), G_2(u(x_1)) + h(u(x_1)) + \frac{\sigma_2}{2} \|u(x_2) - u(x_1)\|^2. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}&\langle G_1(x_2), G_2(u(x_1))\rangle + h(u(x_1))\\ \geq \langle G_1(x_2), G_2(u(x_2)) &+ h(u(x_2)) + \frac{\sigma_2}{2}\left\|u(x_2) - u(x_1)\right\|^2.\end{aligned}$$

Sumando las desigualdades, aplicando la propiedad de bilinealidad y la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_2\left\|u(x_1) - u(x_2)\right\|^2 &\leq \langle G_1(x_2), G_2(u(x_1))\rangle\\ +\langle G_1(x_1), G_2(u(x_2))\rangle - \langle G_1(x_2), G_2(u(x_2))\rangle &- \langle G_1(x_1), G_2(u(x_1))\rangle\\ = -\langle G_1(x_2), G_2(u(x_2)) - G_2(x_1))\rangle &+ \langle G_1(x_1), G_2(u(x_2)) - G_2(u(x_1))\rangle\\ &= \langle G_1(x_1) - G_1(x_2), G_2(u(x_2)) - G_2(u(x_1))\rangle\\ &\leq \left\|G_1(x_1) - G_1(x_2)\right\|_E^* \cdot \left\|G_1(u(x_2)) - G_2(u(x_1))\right\|_E.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\sigma_2\left\|u(x_1) - u(x_2)\right\|^2 \leq \left\|G_1(x_1) - G_1(x_2)\right\|_E^* \cdot \left\|G_1(u(x_2)) - G_2(u(x_1))\right\|_E.$$

Aplicando el hecho que G_1, G_2 son Lipschitz con constantes L_1 y L_2 respectivamente, concluimos que

$$\left\|u(x_1) - u(x_2)\right\| \leq \frac{L_1 L_2}{\sigma_2}\left\|x_1 - x_2\right\|.$$

Con un argumento análogo concluimos que

$$\left\|v(p_1) - v(p_2)\right\| \leq \frac{L_1 L_2}{\sigma_1}\left\|p_1 - p_2\right\|.$$

Teorema 5.2.3. *Sean $T(x) = v(u(x))$, $S(p) = u(v(p))$ y $\lambda = \frac{L_1^2 L_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} < 1$. Entonces, $T(\cdot)$ y $S(\cdot)$ son mapas contractivos con constante λ.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|T(x_1) - T(x_2)\| &= \|v(u(x_1)) - v(u(x_2))\| \\
&\leq \frac{L_1 L_2}{\sigma_2} \|u(x_1) - u(x_2)\| \\
&\leq \frac{L_1^2 L_2^2}{\sigma_1 \sigma_2} \|x_1 - x_2\| \\
&= \lambda \|x_1 - x_2\| .
\end{aligned}$$

De forma análoga concluimos que $S(\cdot)$ es contracción con constante λ.
Retomando el procedimiento iterativo para encontrar el minimizador de ϕ, notamos que este puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= T(x_t) \\
p_{t+1} &= S(p_t).
\end{aligned}$$

De esto que para todo $t \geq 0$ se cumple

$$\begin{aligned}
\|x_{t+1} - x^*\| &= \|T(x_t) - T(x^*)\| \\
&\leq \lambda \|x_t - x^*\| \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^{t+1} \|x_0 - x^*\| .
\end{aligned}$$

Análogamente podemos concluir que

$$\|p_{t+1} - p^*\| \leq \lambda^{t+1} \|p_0 - p^*\| .$$

De esto que el proceso iterativo para encontrar el minimizador converge.

Modelo electoral

Utilizando la teoría que se ha desarrollado previamente, justificaremos un modelo de agrupamiento suave basado en un procedimiento electoral. Los elementos básicos para el modelo electoral serán los *votantes* que poseen ciertas *opiniones* y serán asociados a diferentes *grupos* (partidos) que representen sus opiniones de mejor manera. En el modelo, tendremos N votantes y K partidos. Asumiremos que los resultados de la votación son aleatorios. Además, denotaremos con $p_i^{(k)}$ la probabilidad de que el i-ésimo votante elija al k-ésimo partido. Colocaremos las probabilidades del i-ésimo votante en un vector

$$p_i = \left(p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, \cdots, p_i^{(K)}\right)^T.$$

Todos estos vectores los colocaremos en una matriz, llamada *matriz de votación*

$$P = (p_1, \cdots, p_N) \in \mathbf{R}^{K\times N}.$$

Al inicio del procedimiento, nuestra matriz de votación es desconocida, pero al final de una secuencia de votación, será encontrada. Adicionalmente, supondremos que la opinión del i-ésimo votante puede ser representada con m valores reales distintos, los cuales colocaremos en un vector $v_i \in \mathbf{V} \subset \mathbf{R}^m$, $i = 1, \cdots, N$, donde $\mathbf{V}$ es un conjunto cerrado y convexo. Estos vectores son fijos y conocidos. Así mismo, las posiciones de los partidos $x_k \in \mathbf{V}$ son flexibles, puesto que luego de cada ronda de elecciones, estos valores serán ajustados para representar de mejor manera las posiciones de los votantes asociadas al partido. Estos vectores serán colocados en una matriz

$$X = (x_1, \cdots, x_K) \in \mathbf{R}^{m\times K}.$$

Para medir la distancia entre la opinión $v \in \mathbf{V}$ de un votante y una posición de un partido $x \in \mathbf{V}$, usaremos la métrica $\rho(v, x)$. Asumiremos que para cualquier v fija, la función $\phi(v, \cdot)$ es convexa.
Es claro que mientras mayor sea la distancia entre v y x, menor es la probabilidad de que el votante elija a ese partido. Para el modelo que estaremos trabajando, tomaremos el modelo de regresión logística para las probabilidades $p_i^{(k)}$. Es decir, asumiremos que

$$p_i^{(k)}(X) = \frac{e^{-\rho(v_i,x_k)/\mu}}{\sum_{j=1}^{k} e^{-\rho(v_i,x_j)/\mu}}, k = 1, \cdots, K.,$$

donde $\mu \geq 0$ es un parámetro flexible que representa la volatilidad de las opiniones de los votantes. Por otro lado, los *valores fundamentales* de un partido, los denotaremos por c_k, $k = 1, \cdots, K$. Es claro que un partido tiene la posibilidad de modificarse para atraer votantes, pero no deberá alejarse de sus valores fundamentales. Para medir la distancia entre la posición de un partido y sus valores fundamentales, utilizaremos la función $d(x, y)$, a la que llamaremos *función de proximidad* que, además de ser no negativa, deberá cumplir que para cada $x \in \mathbf{V}$, la función $d(x, \cdot)$ es fuertemente convexa en el segundo argumento:

$$d(x,v) \geq d(x,y) + \langle \nabla_2 d(x,y), v-y \rangle + \frac{1}{2}\|v-y\|^2, \; \forall v,y \in \mathbf{V}.$$

Un ejemplo de función de proximidad que satisface estas condiciones es la distancia euclidiana

$$d_2(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2.$$

Asumiremos que para una matriz de votación dada $P = (p_1, \cdots, p_N)$, cada partido elige su posición actual óptima minimizando la función

$$\psi_k(P, x_k) = \sum_{i=1}^{N} p_i^{(k)} \rho(v_i, x_k) + \frac{1}{\tau} d(c_k, x_k), \; k = 1, \cdots, K,$$

donde $\tau > 0$ es el parámetro de *tolerancia grupal.* Finalmente, también asumiremos que dada una matriz $P = (p_1, \cdots, p_N)$ de votación , cada partido elige su posición óptima actual minimizando la función

$$\phi_k(P, x_k) = \sum_{i=1}^{N} p_i^{(k)} \rho(v_i, x_k) + \frac{1}{\tau} d(c_k, x_k), \; k = 1, ..., K. \tag{5.5}$$

En este caso, $\tau > 0$ es un parámetro de *tolerancia grupal.* Podemos interpretar 5.5 como la distancia esperada entre las opiniones de todos los votantes y la posición actual del k-ésimo partido. Además, dado que $\phi_k(P, \dot{})$ es fuertemente convexa, existe un mínimo único $x_k^*(P)$ sobre $\mathbf{V}$. Sea $X_k^*(P) = (x_1^*(P), \cdots, x_N^*(P))$.
Consideremos el proceso dado por

$$\begin{aligned}
&\textbf{Fijar } X_0 = (c_1, \ldots, c_k). \\
&\textbf{Repetir } P_{t+1} = P_*(X_t), \quad X_{t+1} = X_*(P_{t+1}), \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Podemos interpretar este proceso como que, dadas las posiciones de los partidos X_t, los votantes dicen sus preferencias P_{t+1} durante las votaciones. Después de observar los resultados, los partidos actualizan sus posiciones X_{t+1} para las próximas elecciones.

Definición 5.3. Un sistema electoral se denomina *estable* si el proceso tiene un punto límite único, que es independiente de la posición inicial $X_0 \in V^K$.
El enfoque basado en un modelo de votación convexa para el agrupamiento suave

de datos multidimensionales presentado en esta sección representa un avance significativo en el estudio de sistemas electorales. La capacidad de adaptarse según los resultados de las encuestas y la garantía de una solución única para el agrupamiento suave son aspectos que destacan la relevancia y potencial de este modelo en aplicaciones prácticas. La profundidad técnica y matemática con la que se aborda el tema demuestra un compromiso con la rigurosidad científica y brinda una herramienta valiosa para investigadores y profesionales en el campo.

CONCLUSIONES

1. Se investigaron conceptos fundamentales de topología y análisis funcional. Estas bases teóricas establecieron el marco para exploraciones más profundas en homotopías y puntos fijos.

2. Se estableció una relación significativa entre la teoría de elección social y los conceptos de puntos fijos y homotopías. Esta conexión proporcionó conocimiento valioso sobre problemas inherentes en sistemas de votación democrática y la búsqueda de reglas de votación óptimas.

3. A través de ejercicios prácticos y resolución de problemas, se logró una comprensión sólida y aplicable de los tópicos discutidos.

RECOMENDACIONES

1. Profundizar en los conceptos de homotopías y su relación con sistemas democráticos de votación, para obtener una comprensión más robusta del campo y mejorar la capacidad de interpretación en contextos aplicados.

2. Considerar la revisión y análisis de otros modelos matemáticos relacionados con sistemas de votación, con el fin de expandir el alcance y aplicabilidad del presente trabajo.

3. Promover la utilización del presente trabajo como material de referencia y apoyo en cursos avanzados de matemáticas, en particular aquellos relacionados con topología, análisis funcional y teoría de elección.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Clarkson, J. A. (1936). Uniformly Convex Spaces. Transactions of the American Mathematical Society, 40(3), 396–414. https://doi.org/10.2307/1989630

[2] Goebel, K., & Kirk, W. A. (2011). Cambridge studies in advanced mathematics: Topics in metric fixed point theory series number 28. Cambridge University Press.

[3] Kreyszig, E. (1989). Introductory functional analysis with applications (1a ed.). John Wiley & Sons.

[4] Munkres, J. R. (2000). Topology (2a ed.). Pearson.

[5] Rudin, W. (2022). Analysis (5a ed.). Walter de Gruyter.

[6] Garcia-Cuerva, J., Garc A-Cuerva, J., & Rubio De Francia, J. L. (2014). Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland.

[7] Massó, J. (1996). La Teoría de la Elección Social: Métodos de Votación no Manipulables. Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, (8), 35-41.

[8] Nesterov, Y. Soft clustering by convex electoral model. Soft Comput 24, 17609–17620 (2020).https://doi.org/10.1007/s00500-020-05148-4

[9] fixed point theory Agarwal, R. P., Meehan, M., & O'Regan, D. (2001). Fixed point theory and applications. Cambridge tracts in mathematics. Cambridge University Press.

[10] Soton, A. (2018). Proj is non expansive.

[11] Axler, S. (2023). Linear algebra done right (4a ed.). Springer International Publishing.

[12] Yuan, G. X. (2023). Fixed point theorems and applications in p-vector spaces. Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering, 2023(1). https://doi.org/10.1186/s13663-023-00747w

[13] R. F. Dickman, J. R. A. J. R. P. (1975). Wikipedia. θ-closed subsets of Hausdorff spaces.

[14] Reflexive space. (2023). Reflexive Space. https://en.wikipedia.org/wiki/Reflexive_space

[15] Riesz representation theorem. (2023). Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Riesz_representation_theorem