



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Física

**SOLUCIONES SOLITÓNICAS DE LA ECUACIÓN  
KADOMTSEV PETVIASHVILI Y CUERPOS DE  
NEWTON OKOUNKOV**

**Javier Alfonso de León Gómez**

Asesorado por Edgar Damián Ochoa Hernández

Guatemala, Octubre de 2023



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**SOLUCIONES SOLITÓNICAS DE LA ECUACIÓN  
KADOMTSEV PETVIASHVILI Y CUERPOS DE  
NEWTON OKOUNKOV**

TRABAJO DE GRADUACIÓN  
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
POR

**JAVIER ALFONSO DE LEÓN GÓMEZ**  
ASESORADO POR EDGAR DAMIÁN OCHOA HERNÁNDEZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
**LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

GUATEMALA, OCTUBRE DE 2023



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



**CONSEJO DIRECTIVO**

DIRECTOR	M.Sc. Marcelo Ixquiac Cabrera
REP. DOCENTE	Arqta. Ana Verónica Carrera Vela
REP. DOCENTE	M.A Pedro Peláez Reyes
REP. DE EGRESADOS	Lic. Urías Amitaí Guzmán García
REP. DE ESTUDIANTES	Elvis Enrique Ramírez Mérida
REP. DE ESTUDIANTES	Oscar Eduardo GraciaÁvalos
SECRETARIO	Ing. Edgar Damián Ochoa Hernández

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

EXAMINADOR	Lic. Héctor Eduardo Pérez Figueroa
EXAMINADOR	Dra. María Eugenia Cabrera Catalán
EXAMINADOR	Dra. Ana Beatriz Cosenza Muralles



## AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a cualquier persona que de alguna u otra manera haya contribuido para que me hubiese sido posible desarrollarme personal y profesionalmente hasta este punto. Y le agradezco además a cualquiera que haya contribuido a la creación de este proyecto.

Entre estas personas le agradezco personalmente a; María Mercedes Xocop, Adela Estrada, Ana Lucía Interiano, José de León, Elser López, Marco Pérez, Abel Hernández, Damían Ochoa. Y profesionalmente a; Giovanni Ramirez, Juan Diego Chang, Rodolfo Samayoa, Jose Bonilla, William Gutiérrez, Zura Gachechiladze, Ana Nikoleishvili.



# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	IV
LISTA DE SÍMBOLOS	V
OBJETIVOS	VII
INTRODUCCIÓN	IX
<b>1. Conceptos Preliminares de los Sistemas Integrables</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas Integrables . . . . .	1
1.1.1. Integrabilidad Clásica . . . . .	1
1.1.2. Extensión Infinita de los sistemas Integrables . . . . .	3
1.1.2.1. Nociones Preliminares: . . . . .	3
1.1.2.2. Solución del Autosistema de L con potencial KdV . . . . .	8
1.2. El método de Dispersión Inversa . . . . .	14
1.2.1. La Transformada de Dispersión Inversa . . . . .	14
1.2.1.1. La Transformada de Dispersión Inversa KdV . . . . .	16
1.3. Funciones $\tau$ . . . . .	20
<b>2. Ecuaciones Korteweg–De Vries KdV y Kadomtsev Petviashvili KP</b>	<b>25</b>
2.1. Ecuación KdV . . . . .	25
2.1.1. Derivación . . . . .	26
2.1.1.1. Derivación Histórica . . . . .	26
2.1.1.2. KdV Forma Adimensional . . . . .	27
2.1.2. Solución de KdV . . . . .	28
2.1.2.1. Soluciones Solitónicas . . . . .	28
2.2. Ecuación Kadomtsev–Petviashvili KP . . . . .	29
2.2.1. Derivación . . . . .	30
2.2.2. Soluciones de KP . . . . .	32
2.2.2.1. Método Bilinear de Hirota . . . . .	32

2.2.2.2.	Solución de KP por medio de Burgers-Calor . . . . .	33
2.2.3.	Método de Dispersión Inversa . . . . .	35
2.2.3.1.	Operadores de Lax KP . . . . .	35
2.2.3.2.	Construcción de Soluciones Por Dispersión Inversa . . . . .	36
2.2.4.	Soluciones Solitónicas de KP . . . . .	38
2.2.4.1.	Solitón(2,1) caso $k = 3, n = 1$ . . . . .	39
2.2.4.2.	Gráficas Solitón(2,1) . . . . .	41
2.2.4.3.	Solitones con $n = 2$ . . . . .	44
2.3.	Soluciones Solitónicas Generales . . . . .	47
2.3.0.1.	Grassmanianos y Encajes de Plücker . . . . .	47
2.3.0.2.	Funciones $\tau$ y Relaciones de Plücker . . . . .	49
<b>3.</b>	<b>Gráficas de Solitones y Cuerpos de Newton Okounkov</b>	<b>53</b>
3.1.	Geometría Tropical . . . . .	53
3.2.	Gráficas de Solitón . . . . .	57
3.2.1.	Delimitaciones Generales . . . . .	57
3.2.2.	Construcciones Explícitas . . . . .	58
3.2.2.1.	Construcción de Gráficas por medio de Permutaciones . . . . .	59
3.2.2.2.	Categorización de Vértices Internos . . . . .	60
3.2.3.	Evolución Temporal de las Gráficas . . . . .	63
3.3.	Gráficas Plábicas . . . . .	64
3.3.1.	Sistema de Construcciones Plábicas-Solitón . . . . .	65
3.3.2.	Ejemplos Generales Gráficas Plábicas . . . . .	67
3.4.	Cuerpos de Newton Okounkov . . . . .	72
3.4.1.	Politopos de Newton . . . . .	72
3.4.2.	Nociones Generales Cuerpos de Newton Okounkov . . . . .	74
3.4.3.	Motivación de su Construcción . . . . .	74
3.4.4.	Construcción Para Datos Regulares de Solitón . . . . .	75
3.4.5.	Ejemplos de Cuerpos de Newton Okounkov . . . . .	77
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>81</b>
	<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>83</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>85</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Curvas de nivel de la función $u(x, y, 0)$ evaluada cerca de las fronteras; (a) $[1, 2]$ , (b) $[1, 3]$ , y (c) $[2, 3]$ . Cada una de las curvas se encuentra mapeada dentro de los intervalos apropiados respecto de sus ejes horizontales y verticales. . . . .	42
2.2. Sistema de fronteras para el solitón $(2,1)$ $t = 0$ , del ejemplo 2.1. . . .	43
2.3. Sistema de fronteras para el solitón $(2,1)$ $t = 16$ , del ejemplo 2.1. . .	43
2.4. Sistema de fronteras para el solitón $(2,1)$ $t = 0$ , del ejemplo 2.2. . . .	44
2.5. Gráfica del sistema de fronteras para el solitón $(1,2)$ $t = 0$ del ejemplo 2.4. . . . .	47
3.1. Gráfica de Solitón $\pi = (2, 3, 5, 1, 4)$ para (a) $t = 0$ , (b) $t = 16$ , ejemplo 3.4. . . . .	61
3.2. Proceso de indexación de la Gráfica de Solitón ejemplo 3.4. . . . .	62
3.3. Gráfica del Solitón $(3,2)$ , obtenida tras terminar el algoritmo de indexación de la sección 3.2.2. . . . .	62
3.4. Gráfica de las regiones del Solitón $(3,2)$ , obtenida del ejemplo 3.4. . .	63
3.5. Gráficas plábicas (a) solitón $(1,2)$ , (b) solitón $(2,1)$ . . . . .	64
3.6. Gráficas plábica de trayectorias $T_1, T_2$ del solitón $(1,2)$ . Se ejemplifica la Indexación de Regiones dominantes. . . . .	66
3.7. Gráficas plábica de trayectorias $T_2, T_3$ del solitón $(2,1)$ . Se ejemplifica el proceso de Indexación de Vértices exteriores. . . . .	67
3.8. Gráficas plábica del solitón $(3,2)$ del ejemplo 3.4. . . . .	68
3.9. Sistema de trayectorias de un solitón $(3,2)$ , (a) muestra $T_4, T_5$ , (b) muestra $T_1, T_2, T_3$ e identifica los vértices externos como los destinos de las trayectorias. . . . .	68
3.10. Gráficas plábica $(3,2)$ con todos los vértices externos identificados. . .	69
3.11. Gráfica plábica asociada a un solitón $(3,3)$ . . . . .	69
3.12. Sistema de trayectorias $(3,3)$ , (a) muestra $T_1, T_2, T_3$ , (b) muestra $T_3, T_4, T_5$ .	70
3.13. Gráfica plábica con vértices identificados respecto de un Solitón $(3,3)$ . .	70

3.14. Sistema de fronteras compatible asociado a un soiltón(3,3). . . . .	71
3.15. Envolvertes Convexas de los sistemas de puntos, (a) $N(p_1)$ , (b) $N(p_2)$ .	73

## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$:=$	es definido por
$\cong$	es isomorfo a
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\Rightarrow \nRightarrow$	contradicción
$\mathcal{F}$	transformada de Fourier
$ \psi\rangle$	vector <i>ket</i>
$\langle\psi $	funcional <i>bra</i>
$\langle\varphi \psi\rangle$	<i>braket</i>
$\nabla^2$	laplaciano
$\{, \}$	corchete de poisson
$[, ]$	conmutador
$D$	operador diferencial
$\wedge$	producto exterior
$\Delta(A)$	menor de matriz
$\pi$	función de permutación
$\Lambda$	álgebra exterior
$U^*$	complejo conjugado de un operador



# OBJETIVOS

## General

Estudiar las propiedades de los cuerpos de Newton Okounkov producidos por las funciones solución solitónicas de interés para la física de la ecuación Kadomtsev Petviashvili.

## Específicos

1. Desarrollar los conceptos matemáticos necesarios para encontrar las soluciones solitónicas de la ecuación Kadomtsev Petviashvili y su conexión con los cuerpos de Newton Okounkov producidos.
2. Explicar la noción física de las gráficas de solitón.
3. Explicar la noción física de los cuerpos de Newton Okounkov asociados a una solución solitónica de la ecuación Kadomtsev Petviashvili.



# INTRODUCCIÓN

La ecuación de Kadomtsev–Petviashvili puede interpretarse como la generalización en una coordenada espacial extra de la famosa ecuación de Korteweg–De Vries. Estas ecuaciones aparecen originalmente como un modelo para estudiar los comportamientos de las interacciones no lineales del medio, para ondas de agua en superficies poco profundas. Pero han sido de interés para la física y la matemática ya que son un caso de una ecuación diferencial parcial exacta y no lineal, lo que de la mano de las aplicaciones ha llevado a la invención de métodos para la resolución de las mismas como el proceso de dispersión inversa y a la jerarquía KP [20]. Así como aplicaciones para la física teoría y de plasmas en la cual aparece el primer modelo de un fluido por medio de Kadomtsev Petviashvili.

Ya que las soluciones de interés físico de estas ecuaciones presentan un comportamiento característico, se les ha llamado ondas solitarias o solitones. Esto debido a que estas se propagan sin deformarse, no suelen interactuar con su entorno y al interactuar entre ellas solamente presentan un cambio de fase respecto de su estado de equilibrio. Este tipo peculiar de ondas, han sido utilizadas para modelar sistemas en distintas áreas de la física como lo es la mecánica de fluidos, física de plasmas, óptica física, líneas de transmisión y en varios modelos de física teórica como en [13, 2].

Nuestro enfoque se sitúa en estudiar las propiedades de las gráficas de las soluciones de una versión de la ecuación KP para la mecánica clásica de fluidos. En este modelo la fuerza de la gravedad domina las contribuciones realizadas por la tensión superficial del fluido y la ecuación es denominada como KP II. Estas gráficas de solitones pueden ser representadas como un sistema similar a las transiciones de fase de la tropicalización de un tipo de funciones especiales conocidas como funciones  $\tau$ . Estas funciones cumplen un rol fundamental en el estudio de sistemas integrables, y en este trabajo serán representadas como los encajes de Plücker en una Grassmanniana completamente positiva. Estos detalles pueden ser consultados en [9, 11].

Además debido a las propiedades matemáticas de estos objetos y a su conexión con la geometría algebraica y tropical. Es posible producir un sistema de gráficas equivalentes asociadas a una solución física de solitones. Las cuales son denominadas como gráficas plábicas generalizadas, una de las ventajas de este procedimiento es que en ellas puede definirse una dinámica que reproduce fácilmente las propiedades de las gráficas de solitón y del sistema físico sin necesidad de computar los cálculos explícitos de las soluciones de la ecuación KP, utilizando la convención propuesta por [12].

Y como fin de este estudio, estas gráficas plábicas y la dinámica interna definida en las mismas. Pueden utilizarse para construir un tipo de cuerpo convexo en un espacio real, que aparece como una generalización de los mapas de momentos de variedades tóricas y politopos de Newton. Estos objetos son denominados como Cuerpos de Newton Okounkov y han sido de bastante interés en las líneas de investigación contemporánea de las matemáticas. Una ventaja de estas construcciones es que permiten unir conceptos de los sistemas integrables clásicos con las líneas de investigación de las geometrías algebraicas, tropicales y combinatoriales. Lo que produce una nueva serie de enfoques y herramientas que capturan toda la información de un sistema físico desde una perspectiva matemática novedosa [8, 21].

Se realizarán algunos ejemplos de construcciones de sistemas físicos y se encontrarán las soluciones solitónicas explícitas de estos. Además se construirán sus gráficas de solitón, el sistema plábico dinámico asociado. Y los cuerpos de Newton Okounkov asociados a la construcción y dinámica plábica explícita basada en la convección de Kodama y las construcciones originales de Postnikov [12], [17].

# 1. Conceptos Preliminares de los Sistemas Integrables

Para desarrollar el tema de estudio primero necesitamos desarrollar las herramientas básicas para poder analizar las propiedades matemáticas del sistema físico que permiten la realización de los cuerpos de Newton Okounkov. Primero estudiaremos una rama de la física y la matemática llamada sistemas integrables los cuales nos permitirán encontrar las soluciones de las ecuaciones deseadas y nos permitirán encontrar la riqueza y estructura matemática escondida detrás de las mismas. Con ello justificaremos y derivaremos los modelos que producen las ecuaciones de estudio y encontraremos las formas explícitas de las soluciones deseadas. Utilizando estas soluciones se realizarán ciertas adecuaciones por medio de las herramientas del análisis de sistemas integrables y la geometría algebraica, para llegar a una forma en la cual es posible asociarlas a los cuerpos de Newton Okounkov.

## 1.1. Sistemas Integrables

### 1.1.1. Integrabilidad Clásica

Comenzaremos realizando definiciones generales de la mecánica clásica bastante importantes para nuestro interés de estudio de las que se espera que la persona que esta leyendo esto tenga un conocimiento general de las mismas y solamente se incluirán las definiciones con mayor relevancia.

El corchete de Poisson de 2 funciones  $f, g$  se expresa como.

$$\{f, g\} = \sum_i^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (1.1)$$

A un par de funciones  $f, g$  se dice que estas se encuentran en involución, si su corchete de Poisson es nulo en todo el espacio.

Ya que trabajaremos con un enfoque físico, nos interesará explorar propiedades de las coordenadas de los espacios de manera explícita. A un sistema de coordenadas  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  se le llama canónicas si estas respetan las siguientes relaciones,

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad (1.2)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (1.3)$$

Un sistema de ecuaciones diferenciales Hamiltonianas se refiere a las siguientes relaciones de las coordenadas canónicas  $q_i, p_i$  y la función Hamiltoniana  $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ .

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.4)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.5)$$

**Proposición 1.1.** *Si 2 funciones  $f, g$  están en involución con  $H$ , entonces su corchete de Poisson También se encuentra en involución con  $H$ .*

$$\{H, \{f, g\}\} = \{H, 0\} = 0. \quad (1.6)$$

*Demostración.* Esta propiedad se obtiene directamente de la definición, pero puede ser consultada en [26].

□

Dadas estas definiciones preliminares exponemos la noción e importancia física detrás de los sistemas integrables. Esos son de interés debido a que existen sistemas de ecuaciones Hamiltonianas autónomas, en las cuales existen suficientes cantidades conservadas, primeras integrales, o coordenadas canónicas que estén en involución con  $H$  para reescribir el Hamiltoniano localmente en términos de las mismas. Este proceso no es posible realizarlo en general, un ejemplo de esto es el problema de los 3 cuerpos el cual famosamente es sabido que posee suficientes cantidades conservadas para realizar este cambio de coordenadas.

**Definición 1.1.** Si  $H$  es invariante ante traslaciones de alguna coordenada  $q_i$ , esta coordenada es llamada cíclica.

**Proposición 1.2.** *Si todas las coordenadas  $q_i$  son cíclicas entonces en un sistema de ecuaciones Hamiltonianas las coordenadas  $p_i$  son constantes.*

*Demostración.* Esto es una consecuencia directa de la definición de las coordenadas canónicas cíclicas,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \quad (1.7)$$

□

**Ejemplo 1.1.** Realizaremos un cambio de variables en el oscilador armónico simple para encontrar una constante del movimiento y una variable cíclica.

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}w^2q^2, \quad (1.8)$$

$$p = \sqrt{2mIw} \sin(\theta), \quad (1.9)$$

$$q = \sqrt{\frac{2I}{mw}} \cos(\theta), \quad (1.10)$$

$$H = wI, \quad (1.11)$$

$$\dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0. \quad (1.12)$$

Estas coordenadas son llamadas ángulo acción y de manera clásica reducen los sistemas  $2n$ -dimensionales en toros  $n$ -dimensionales, debido a ello es que han sido nombradas de esta manera. En el sentido clásico o de Liouville, un sistema integrable es un espacio de dimensión  $2n$  en el cual existen  $n$  funciones las cuales están en involución con el Hamiltoniano. Esto permite restringir el sistema del espacio total a un toro con  $n$  grados de libertad descrito por medio de las variables de ángulo acción del sistema. Un desarrollo detallado el cual no será realizado en este trabajo puede ser consultado en [7]

Debido al enfoque de este trabajo nuestro interés en este tipo de sistemas se encuentra en el caso infinito dimensional, debido al comportamiento de la ecuación KP. Estudiaremos inicialmente la ecuación KdV, y mencionaremos como es posible extender este concepto en los casos de dimensiones infinitas.

## 1.1.2. Extensión Infinita de los sistemas Integrables

### 1.1.2.1. Nociones Preliminares:

Para poder extender el concepto de sistemas integrables en el sentido clásico o de Liouville a dimensiones infinitas necesitamos una mayor cantidad de herramientas para poder apreciar el fenómeno. Para ello asumiremos que existe cierta

familiarización de las personas que están leyendo este trabajo con el marco teórico de la mecánica cuántica o herramientas básicas del análisis funcional. De esta manera trabajaremos ahora en espacios de Hilbert, específicamente asumiremos que estamos sobre el espacio  $L^2$  y más adelante utilizaremos distintos conceptos de la mecánica cuántica, aunque el enfoque de este trabajo es puramente clásico.

Recordemos que conmutador de 2 funciones  $L, P$  se define como:

$$[L, P] = LP - PL. \quad (1.13)$$

Y que operador unitario es un operador que cumple la siguiente ecuación,

$$UU^* = \mathbb{1}. \quad (1.14)$$

**Definición 1.2.** Un operador de Schrödinger 1 está definido como la resta de un potencial arbitrario  $u(\vec{r}, t)$  y la segunda derivada especial de un sistema de coordenadas. Además este es un operador de Sturm Liouville.

$$L = -\nabla^2 + u. \quad (1.15)$$

Debido a que no se definirá que es un operador de Sturm Liouville y el formalismo de la mecánica cuántica pero se enunciarán varias de sus propiedades, es posible consultarlas en [3, 25] Ahora utilizando de base la visión de Heisenberg vamos a estudiar como cambia el operador  $L$  con respecto del tiempo.

Además asumiremos las propiedad de evolución temporal del operador  $L$ , dadas por la mecánica cuántica. Las cual está dada por la siguiente relación:

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^*. \quad (1.16)$$

Las condiciones específicas para esta construcción pueden ser consultadas en [6] Utilizando el hecho que los operadores  $U$  son unitarios, podemos estudiar ahora el cambio de tiempo de la ecuación anterior con respecto de  $L(0)$ .

$$D_t(L(0)) = U_t^*LU + U^*LU_t, \quad (1.17)$$

$$0 = U^*L_tU - U_t^*LU + U^*LU_t. \quad (1.18)$$

Además, nos será de utilidad definir a un operador  $P$  de la siguiente manera,

$$P(t) = U_t U^*.$$

**Proposición 1.3.** *El operador  $P$  es auto adjunto.*

*Demostración.*

$$D_t(UU^*) = D_t(\mathbb{1}), \quad (1.19)$$

$$U_t U^* + U U_t^* = 0, \quad (1.20)$$

$$P(t)U U^* + U U^* P(t)^* = 0, \quad (1.21)$$

$$P = -P^*. \quad (1.22)$$

□

Utilizando este resultado es posible reescribir la ecuación 1.17 en términos del operador  $P$ . Esto nos llevará al primer resultado importante que más adelante nos permitirá resolver las ecuaciones de estudio.

**Definición 1.3.** La ecuación de Lax es una ecuación diferencial descrita de la siguiente manera,

$$N_t = [N, M]. \quad (1.23)$$

A los operadores  $N, M$  se les denomina pares de Lax o Laxos.

**Proposición 1.4.** *Los operadores  $L, P$  forman un par laxo.*

*Demostración.*

$$0 = L_t - U_t^* L U + U^* L U_t, \quad (1.24)$$

$$= U^*(P L - L P)U^* + U^* L_t U^*, \quad (1.25)$$

$$= U^*[P, L]U^* + U^* L_t U^*, \quad (1.26)$$

$$= U^*([P, L]U^* + U^* L_t U)U^*, \quad (1.27)$$

$$L_t = [L, P]. \quad (1.28)$$

□

Los elementos del espacio de Hilbert estarán denotados por  $\psi$  y se les llamarán funciones de onda, estas serán descritas con la siguiente notación.

$$\psi(t) = U(t)\psi(0), \quad (1.29)$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x), \quad (1.30)$$

$$\psi(x, t) = \Psi(x)U(t). \quad (1.31)$$

Nuestro interés se enfoca ahora en estudiar el comportamiento de las ecuaciones diferenciales que acaban de ser definidas, en términos de las auto funciones de onda que cumplan estas características.

**Proposición 1.5.** *Si una función de onda  $\psi(x, 0)$  es autovector del operador  $L(0)$  y cumple con la condición de evolución temporal descrita a continuación, entonces la función de onda asociada  $\psi(x, t)$  es autovector del operador  $L(t)$  con el mismo autovalor  $\lambda_0$ .*

*Demostración.*

$$D(\psi(t)) = P\psi(t), \quad (1.32)$$

$$L_t\psi = PL\psi - LP\psi, \quad (1.33)$$

$$L_t\psi + L\psi_t = PUL(0)U^*\psi, \quad (1.34)$$

$$D(L\psi) = PUL(0)\psi(0), \quad (1.35)$$

$$= P\lambda_0\psi(0), \quad (1.36)$$

$$= \lambda_0P\psi, \quad (1.37)$$

$$= \lambda_0\psi_t. \quad (1.38)$$

□

Notemos además que la evolución temporal del operador  $L$  es equivalente a la del potencial  $u(\vec{r}, t)$ ,

$$L_t = D_t\left(-\frac{d^2}{dx^2} + u\right), \quad (1.39)$$

$$L_t = u_t. \quad (1.40)$$

Utilizaremos estos resultados aplicados hacia nuestras ecuaciones de interés para poder apreciar el comportamiento de integrabilidad que deseamos extender en dimensión infinita.

**Ejemplo 1.2.** Sea la función potencial  $u$ , de la cual no se conoce su forma explícita pero se sabe que respeta la siguiente ecuación diferencial parcial,

$$u_t = 6uu_{xx} - u_{xxx}. \quad (1.41)$$

Ahora debemos buscar la forma explícita del operador  $P$  tal que este forme un par laxo y cumplan la siguiente ecuación:

$$[P, L] = 6uu_{xx} - u_{xxx} \quad (1.42)$$

Para encontrar esta relación describiremos a  $P$  por medio de un polinomio diferencial no lineal, utilizando la forma explícita de  $L$  encontramos ciertas restricciones de los grados del polinomio.

$$[\sum \sum u^k \partial^n, \partial^2 + u] = 6uu_{xx} - u_{xxx}, \quad (1.43)$$

$$k \in [0, 1], \quad n \in [0, 3]. \quad (1.44)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, el operador  $P$  puede escribirse como,

$$P = 3u\partial + 3\partial u - 4\partial^3. \quad (1.45)$$

Utilizando estos resultados es posible enunciar el siguiente teorema que será fundamental para encontrar las soluciones de la ecuación KdV.

**Teorema 1.1.1.** *Isoespectralidad de la ecuación Korteweg–De Vries.*

*Sea un potencial  $u(\vec{r}, t)$  del cuál no se conoce de manera explícita pero es solución de la ecuación KdV y este además posee un valor inicial conocido  $u(x, 0)$ .*

$$u_t = 6uu_{xx} - u_{xxx}. \quad (1.46)$$

*Para toda función de onda  $\psi(x)$  que sea autovector del operador  $L(0)$ , la cual respeta la siguiente ecuación,*

$$L\psi(x) = \lambda\psi, \quad (1.47)$$

$$(-\partial_x^2 + u(x, 0))\psi(x) = \lambda\psi(x). \quad (1.48)$$

Entonces la función de onda asociada  $\psi(x, t)$  que cumple el siguiente tipo de evolución temporal y condición inicial.

$$L_t = [P, L], \quad (1.49)$$

$$\psi_t(x, t) = P\psi(x, t), \quad (1.50)$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x). \quad (1.51)$$

Es también auto función del operador  $L(t)$  y el autovalor  $\lambda$  es el mismo autovalor asociado. Además la función de onda cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$\psi_t(x, t) = 4\lambda\psi_x(x, t) + 2u(x, t)\psi_x(x, t) - u_x(x, t)\psi(x, t). \quad (1.52)$$

*Demostración.* Utilizando la proposición 1.5 la isoenergicidad de KdV es una consecuencia directa al imponer la condición de evolución 1.45. Ahora derivaremos la ecuación 1.52.

$$\partial_x((-\partial_x^2 + u(x, t))\psi(x, t)) = \lambda\partial_x\psi(x, t), \quad (1.53)$$

$$\psi_{xxx} = -\lambda\psi_x + \partial_x(u\psi), \quad (1.54)$$

$$\psi_t = 3u\psi_x + 3\partial_x(u\psi) - 4\psi_{xxx}, \quad (1.55)$$

$$\psi_t = 3u\psi_x + 3\partial_x(u\psi) + 4(\lambda\psi_x - \partial_x(u\psi)), \quad (1.56)$$

$$= 4\lambda\psi_x(x, t) + 2u(x, t)\psi_x(x, t) - u_x(x, t)\psi(x, t). \quad (1.57)$$

□

Cabe mencionar que no se ha demostrado la existencia y las propiedades de estas funciones de onda. Debido a nuestro enfoque de interés nos centraremos en las funciones de onda apropiadas que resuelven estos sistemas de EDOs.

### 1.1.2.2. Solución del Autosistema de L con potencial KdV

Ahora encontraremos una expresión explícita de las funciones de onda que son autovectores de la ecuación diferencial del operador L con un potencial inicial  $u(x, 0)$  que cumple la ecuación KdV. Para ello realizaremos el mismo procedimiento que se realiza para estudiar las barreras y pozos de potencial independientes del tiempo en la mecánica cuántica. Nuestro interés se centra en resolver la esta diferencial.

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + u(x, 0)\psi(x) = 0. \quad (1.58)$$

Análogamente al proceso de descomposición en autovalores cuantizados en la mecánica cuántica, que aparecen en el espectro del Hamiltoniano o en este caso del operador  $L$ . Se resuelve el sistema para encontrar de forma explícita las funciones de onda. Además restringimos las funciones de onda a las soluciones de interés físico, en las cuales se exigen valores finitos en los intervalos de solución y comportamiento asintótico al 0 en los extremos del espacio.

$$\partial_x^2 + u(x, 0) = 0, \quad (1.59)$$

$$\lambda = |k|^2. \quad (1.60)$$

Debido a nuestro tema de interés nos centraremos en el caso en donde  $\lambda = -k^2$ , esto se debe a que en el caso positivo el sistema produce soluciones físicas con propiedades que no cumplen las características de nuestras soluciones deseadas.

El proceso usual de resolución de este sistema físico es por medio de una expansión en series de las auto funciones por medio de un sistema ortonormal completo. Los detalles de la existencia y condiciones de estas representaciones serán obviados y pueden ser consultados en un texto introductorio a la mecánica cuántica como [25]. Por tanto nuestras funciones de onda de manera explícita son:

$$\psi(x) = A_k e^{-ikx} + B_k e^{ikx}, \quad (1.61)$$

$$\psi(x) = \sum c_k \psi_k(x). \quad (1.62)$$

Donde abusando ligeramente de la notación los términos  $A_k, B_k, c_k$  dependen del autovalor en cuestión y no son las derivadas del mismo. A continuación se estudiará su interpretación física y se esclarecerá las diferencias entre la notación física y matemática de los mismos.

**Definición 1.4.** A los coeficientes  $A_k, B_k$  y  $c_n$  se les llama coeficientes de transmisión, coeficientes de reflexión y constantes de normalización respectivamente.

Es importante mencionar que en estas definiciones existen diferencias entre los nombres y las expresiones específicas de la notación física y matemática.

Con respecto de los coeficientes de transmisión y reflexión, en la notación física estos coeficientes tienen una interpretación específica que permite poder realizar proporciones entre la cantidad de partículas que que son reflejadas o producen un efecto de túnel en un potencial. Debido a esto deben estar normalizadas ya que la cantidad de partículas reflejadas sumadas con las partículas transmitidas deben ser igual a las partículas totales. Y la definición de estos difiere ligeramente a la utilizada ya que estos están definidos de la siguiente manera.

Los coeficientes de  $T, R$  transmisión y reflexión físicos de este sistema cumplen las siguientes relaciones.

$$R = \frac{B_k^2}{A^2}, \quad (1.63)$$

$$T = 1 - R. \quad (1.64)$$

Otro detalle a considerar es que la definición coeficientes utilizada difiere ligeramente respecto de la notación matemática, debido a que fue escogida una dirección de propagación de manera implícita. En la notación matemática usual es necesario separar los casos de transmisión y reflexión derecha e izquierda. Pero debido a que en este sistema físico sin pérdida de la generalidad, podemos asumir una dirección única de propagación, entonces no se tomarán en cuenta los coeficientes inversos. Estas construcciones pueden apreciarse con detalle en [6].

Los coeficientes  $T_r, R_l$  de traslación derecha y reflexión izquierda son equivalentes a  $A_k, B_k$ . Por último asumiremos más adelante que es posible dividir la ecuación 1.61 por el coeficiente de transmisión, ya que en este sistema físico será siempre distinto de 0. Esto alterará únicamente nuestros valores de  $B_k, c_k$ , pero nos permitirá eliminar la dependencia de  $\lambda$  de forma explícita en el primer término de esta ecuación.

Ahora es de nuestro interés estudiar como la solución de este problema evoluciona en el tiempo, para ello deseamos encontrar la evolución temporal de los coeficientes y constantes que acaban de ser definidas. Algo importante de mencionar es que realizaremos un cambio de variable estándar el cual nos permite centrar nuestro análisis en una región específica del espacio para obtener estas expresiones deseadas.

Tomando esto en cuenta obtenemos las siguientes relaciones,

$$\Psi = e^{kx}\psi, \quad (1.65)$$

$$L\psi = -k^2\psi, \quad (1.66)$$

$$(\partial_x^2 - u)(e^{-kx}\Psi) = \lambda e^{-kx}\Psi, \quad (1.67)$$

$$\Psi_{xx} - 2k\Psi_x = u\Psi, \quad (1.68)$$

$$\partial(\partial - 2k)\Psi = u\Psi. \quad (1.69)$$

Empleando el método de variación de parámetros para resolver esta EDO de segundo orden podemos encontrar una representación en términos de 2 funciones linealmente independientes de la auto función  $\Psi$ . De esta manera obtenemos lo siguiente,

$$\Psi = f_1 + e^{2kx} f_2, \quad (1.70)$$

$$f_1 = \frac{-1}{2k} \int_0^x u(x', t)\Psi(x', t)dx', \quad (1.71)$$

$$f_2 = \frac{e^{2kx}}{2k} \int_0^x u(x', t)\Psi(x', t)e^{-kx'} dx'. \quad (1.72)$$

Ahora utilizamos la desigualdad de Cauchy Schwarz para estudiar las propiedades de las funciones  $f$  tomando como consideración que  $u, \Psi$  son de cuadrado integrable.

$$|f_1|^2 \leq \frac{1}{2k} \int u^2 \int \Psi^2 < \infty. \quad (1.73)$$

$$|f_2|^2 \leq \frac{e^{4kx}}{4k^2} \int (u\Psi)^2 \int e^{-2kx}, \quad (1.74)$$

$$\leq \frac{e^{2kx}}{8k^2} \int u^2 \int \Psi^2, \quad (1.75)$$

$$= \frac{e^{2kx}}{8k^2} \int (u\Psi)^2, \quad (1.76)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2 = 0, \quad (1.77)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1. \quad (1.78)$$

Utilizando estas relaciones estudiaremos la estructura de la función de onda original.

Para ello vamos a sustituir las relaciones encontradas en la ecuación 1.52.

$$\psi_t = e^{kx} f_1'(t), \quad (1.79)$$

$$\Psi_x = k e^{kx} \psi - e^{kx} \psi_x, \quad (1.80)$$

$$e^{kx} f_1'(t) = (4\lambda(e^{-kx} \Psi_x - k e^{kx} \psi), \quad (1.81)$$

$$+2u(x, t)\psi_x(x, t) - u_x(x, t)\psi(x, t)). \quad (1.82)$$

Ahora vamos a aplicar el límite en el extremo izquierdo de la ecuación anterior, teniendo en cuenta que nuestras funciones  $u, \Psi_x$  se desvanecen por consideraciones físicas, por lo tanto obtenemos lo siguiente,

$$e^{kx} f_1'(t) = -4k^2(-k e^{kx})\Psi, \quad (1.83)$$

$$f_1'(t) = 4k^3 f_1(t), \quad (1.84)$$

$$f_1(t) = f(0)e^{-4k^3 t}. \quad (1.85)$$

**Proposición 1.6.** *La función  $f_1(t)$  es la constante de normalización de la función de onda solución de la ecuación de autovalores de  $L$ .*

*Demostración.* Sea  $\psi(x)$  la función de onda que resuelve la ecuación diferencial de  $L$  independiente del tiempo. Ahora sea  $\psi(x, t)$  una función de onda que cumple la ecuación 1.52, tal que  $\psi(0, t) = \psi(x)$ . Entonces esta función es también auto función del operador  $L(t)$ , de esta manera dada una solución del sistema de  $L$  obtenida con la ecuación 1.65. Entonces la solución del sistema original está dada por:

$$\psi(x, t) = e^{-kx}(f_1(t) + e^{2kx} f_2(t)). \quad (1.86)$$

Ahora asumiendo que las funciones de onda son integrables en todo el espacio, utilizamos el segundo teorema fundamental del cálculo en conjunto de las desigualdades 1.78 y 1.77, para encontrar de manera explícita  $\psi_t$  y con ello  $\psi$ .

$$\psi_t(x, t) = e^{kx} \lim_{x \rightarrow \infty} f_1'(t), \quad (1.87)$$

$$\psi(x, t) = e^{kx} \lim_{x \rightarrow \infty} f_1, \quad (1.88)$$

$$c_k(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_1(t, k). \quad (1.89)$$

□

**Proposición 1.7.** *Los coeficientes de transición de este sistema son constantes en el tiempo y los coeficientes de reflexión tienen la forma  $B(t) = B(0)e^{-8k^3 t}$ .*

*Demostración.* Utilizando los resultados obtenidos por la proposición 1.6 y la ecuación 1.61 igualamos las expresiones y derivamos para encontrar una forma explícita de  $A'_k(t), B'_k(t)$ .

$$A' = 0, \tag{1.90}$$

$$B' = 2ic', \tag{1.91}$$

$$B_k(t) = B(0)e^{-8ik^3t}. \tag{1.92}$$

□

Notemos que los coeficientes de traslación y reelección  $A_k, B_k$  pueden interpretarse como las variables de ángulo acción del sistema. Esto puede consultarse con mayor detalle en [20].

Este proceso utiliza herramientas de la mecánica clásica que no han sido desarrolladas en este trabajo y se encuentran fuera de nuestro estudio de interés, pero son de alta importancia para nuestro trabajo. La demostración de esta proposición, así como la definición de un corchete de Poisson apropiado puede ser consultada en [27]. La intuición detrás de estas es que al linearizar la expresión del coeficiente de traslación con respecto de  $x$  y tomar el argumento del coeficiente de reflexión tenemos coordenadas que únicamente dependen del autovalor que evolucionan de manera lineal o constante en el tiempo.

**Definición 1.5.** Un sistema integrable infinito dimensional es aquel en el cual pueden definirse un sistema de coordenadas de ángulo acción apropiadas al sistema.

Como ha sido mencionado anteriormente, el concepto de integrabilidad en dimensiones infinitas no tiene extensión directa del caso finito, esto se debe a que existen varios tipos de a lo que le llamamos integrabilidad y estos son de interés en distintas áreas de investigación. En este caso definimos un sistema integrable como un sistema exactamente resoluble o integrable respecto de Liouville.

Una vez entendida la naturaleza del problema nos enfocamos en encontrar la solución del potencial  $u(\vec{r}, t)$  que es la solución de la ecuación de interés.

## 1.2. El método de Dispersión Inversa

Para nuestros fines este es un método de solución de ecuaciones diferenciales parciales EDPs no lineales bajo condiciones de Cauchy. La idea general es encontrar el potencial  $u(\vec{r}, t)$  del cual se desconoce su forma pero se supone que es la solución de la EDP en particular con  $u(\vec{r}, 0)$  conocido. El procedimiento para encontrarlo se basa en encontrar un par laxo apropiado para poder plantear la ecuación diferencial de Lax. Una vez Encontrado el par se resuelve la ecuación 1.65 y se busca que la condición inicial  $\psi(0)$  funja a su vez como un autovector del operador  $L(r)$ . De esta manera utilizando la ecuación 1.52 se encuentra que esta función de onda, es también un autovector de la ecuación de Schrödinger asociada con el potencial deseado.

Una vez encontrada esta relación utilizamos las justificaciones semi formales de la física y el espectro de los operadores de Sturm Liouville para encontrar de manera explícita las funciones de onda en términos de series de potencias.

Cabe mencionar que el éxito de este método se debe a que durante todo este proceso no es necesario conocer de manera explícita la forma de  $u(\vec{r}, t)$ .

Una vez realizado este proceso el cual ya ha sido desarrollado con anterioridad, se realiza el paso final para encontrar el potencial deseado.

### 1.2.1. La Transformada de Dispersión Inversa

Ahora encontraremos una relación que permite encontrar  $u(\vec{r}, t)$  en términos de las expresiones encontradas.

**Proposición 1.8.** *Dado un operador de Schrödinger  $L(0)$  con condiciones de Cauchy, es posible utilizar la transformada de Fourier para resolver la ecuación diferencial ordinaria con condición inicial  $u(x, 0)$ . Y la función de onda resultante cumple la siguiente ecuación,*

$$\psi = e^{-ikx} + B_k e^{ikx} + \int_{\mathbb{R}} K(x, t) e^{-ikt'} dt' + B_k \int_R K(x, t') e^{ikt'} dt'. \quad (1.93)$$

*Demostración.* Este resultado es equivalente a dividir por  $A_k$  la función de onda de la ecuación 1.86, normalizar las constantes y aplicar la transformada.  $\square$

**Proposición 1.9.** *La función  $K(x, t)$  cumple la siguiente ecuación integral llamada Gelfand-Levitan-Marchenko:*

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_{\mathbb{R}} K(x, t')F(t' + t)dt' = 0. \quad (1.94)$$

*Demostración.*

$$-K = \mathcal{F}^{-1}[e^{-ikx} + B_k e^{ikx} - \psi + \int_{\mathbb{R}} B_k K(x, t')e^{ikt'} dt'], \quad (1.95)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (e^{-ikx} - \psi)e^{ikw} dw + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} B_k e^{ikx} e^{-ikw} dw, \quad (1.96)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} B_k \int_{\mathbb{R}} K(x, t')e^{ikt'} dt' dw. \quad (1.97)$$

Utilizamos el teorema del residuo para calcular la primera integral y definiremos una función como el resultado de este cálculo para simplificar la expresión final.

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} (e^{-ikx} - \psi)e^{ikw} dw = 2\pi i \sum R_n, \quad (1.98)$$

$$= \sum_1^{\infty} c_k^2 e^{-k(x+t)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} B_k e^{ik(x+t)} dk + 0, \quad (1.99)$$

$$F(x) = \sum_k c_k^2 e^{-kx} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} B_k e^{ikx} dk, \quad (1.100)$$

Sustituimos este resultado en la ecuación original notando que es posible reescribir el resto de términos en términos de la función  $F$  teniendo cuidado con la definición de las variables mudas y cambiando el orden de integración de la última expresión,

$$K(x, t) + F(x, t) + \int_{\mathbb{R}} K(x, t')F(t' + t)dt' = 0. \quad (1.101)$$

□

**Proposición 1.10.** *El potencial inicial  $u(x, 0)$  puede ser determinado por medio de la función  $K(x, t)$  mediante la siguiente ecuación:*

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (1.102)$$

*Demostración.* Realizando un procedimiento análogo al de la obtención del comportamiento de los coeficientes de reflexión y las constantes de normalización nos

enfocamos en el límite izquierdo que es donde físicamente suponemos están partiendo nuestras funciones de onda. De esta manera nuestra función de onda se expresa como,

$$\psi = B_k e^{ikx} + B_k \int_R K(x, t') e^{ikt'} dt'. \quad (1.103)$$

Ahora derivamos esta expresión 2 veces y la sustituimos en la ecuación del auto sistema del operador  $L$ , de esta manera obtenemos la expresión.

$$u\psi - \psi_{xx} = -k^2\psi, \quad (1.104)$$

$$(u + 2D_x(K)) = e^{-ikx} \int (K_{xx} - K_{tt} - uK) e^{ikt} dt. \quad (1.105)$$

Donde de manera explícita  $D_x(K)$  se refiere a la derivada total respecto de  $x$ . Para que se cumpla esta expresión estudiamos el comportamiento asintótico nuevamente y por las condiciones obtenidas en el análisis previo de estas funciones de onda, finalmente obtenemos la relación.

$$u + 2D_x(K) = 0, \quad (1.106)$$

$$u = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (1.107)$$

□

Una derivación más exhaustiva de este proceso puede ser consultada en [1].

### 1.2.1.1. La Transformada de Dispersión Inversa KdV

Ahora centramos nuestro interés a un tipo específico de solución de estos potenciales.

**Definición 1.6.** Un potencial se llama no reflectante si todos los coeficientes de reflexión  $B_k$  del auto sistema del operador  $L$  son nulos.

De esta manera para encontrar las propiedades de la solución de la ecuación KdV debemos resolver la ecuación 1.94. Esto se expresa como,

$$K(x, t) + \sum c_k^2 e^{-k(x+t)} + \int_{\mathbb{R}} K(x, t) \sum c_k^2 e^{-k(t+t')} dt' = 0. \quad (1.108)$$

Notemos que en este caso es posible realizar una separación de nuestra función  $F(x+t)$  de forma en que este expresada como la multiplicación 2 funciones distintas.

Al reescribir la expresión anterior de esa manera realizamos la suposición que nuestra función  $K$  puede expresarse igualmente como una multiplicación de funciones de variables independientes. Comenzamos analizando la función  $F$ .

$$F(x+t) = F(x)F(t), \quad (1.109)$$

$$= \sum c_k^2 e^{-kx} e^{-kt}. \quad (1.110)$$

Ahora vemos la forma explícita de  $K$ ,

$$K(x, t) = I(x)F(t), \quad (1.111)$$

$$= \sum c_k^2 I_k(x) e^{-kt}. \quad (1.112)$$

Con lo que la ecuación Gelfand-Levitan-Marchenko puede reescribirse como:

$$\sum_k (I_k(x) + e^{-kx}) c_k^2 e^{-kt} + \sum_k e^{-kt} \int_{\mathbb{R}} \sum_n c_n^2 I_n(x) e^{-nt'} e^{-kt'} dt'. \quad (1.113)$$

Una justificación física puede darse como que  $K$  presenta la forma estándar de la evolución temporal. Para terminar sustituimos esta forma explícita en la ecuación 1.94 y evaluamos para un autovalor específico para obtener la siguiente expresión.

$$\sum_k (I_k(x) + e^{-kx}) c_k^2 e^{-kt} + \sum_k c_k^2 e^{-kt} \int_{\mathbb{R}} \sum_n c_n^2 I_n(x) e^{-nt'} e^{-kt'} dt', \quad (1.114)$$

$$F_k(x) + I_k(x) + \int_{\mathbb{R}} \sum_n c_n^2 I_n(x) e^{-nt'} e^{-kt'} dt' = 0. \quad (1.115)$$

Es posible simplificar la ecuación anterior de la siguiente manera,

$$M_{kn} = (\delta_{kn} + \int_{\mathbb{R}} \sum_n c_n^2 I_n(x) e^{-nt'} e^{-kt'} dt), \quad (1.116)$$

$$I_k(x) = \sum_n M_{kn}^{-1} F_n(x). \quad (1.117)$$

Más adelante encontraremos la forma explícita de  $M$  para justificar que sea posible invertirla. Con este resultado nuestra función  $K$  está dada por la expresión.

$$K(x, t) = \sum_k F_k(t) \sum_n M_{kn}^{-1} F_n(x). \quad (1.118)$$

Notemos que esta expresión asumiendo la separación de variables en las funciones es general. Realizamos ahora el cálculo para el caso no reflectivo en el cual la integral se

puede realizar directamente recordando que en la función  $K(x, t)$  por restricciones impuestas por la transformada de Fourier es nula para cualquier tiempo menor a  $x$ .

$$M_{kn} = \delta_{kn} + \frac{c_n^2 e^{-x(k_k+k_n)}}{k_k + k_n}, \quad (1.119)$$

$$\frac{dM}{dx} = -c_n^2 e^{-x(k_k+k_n)} = -F_{k+n}(x). \quad (1.120)$$

De esta manera encontramos la forma explícita de la función  $K$  y por ende del potencial,

$$K(x, x) = - \sum \sum M_{kn} \frac{dM_{nk}}{dx}, \quad (1.121)$$

$$= \frac{d}{dx} \ln(\det(M)), \quad (1.122)$$

$$u(x, 0) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\det(M)), \quad (1.123)$$

$$u(x, t) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\det(M(t))). \quad (1.124)$$

Donde hacemos explícita la dependencia temporal en  $M$  reemplazando la expresión arbitraria de las constantes de normalización por las encontradas anteriormente de las cuales se conoce su evolución temporal.

**Ejemplo 1.3.** Consideremos el caso  $n = 1$ , de esta manera obtenemos el potencial.

$$u(x, t) = -2 \frac{dx^2}{dx^2} \ln\left(1 + \frac{e^{-8k^3t} e^{-2kx}}{2k}\right), \quad (1.125)$$

$$u(x, t) = - \frac{8k^2 e^{8k^3t+2ktx}}{(e^{8k^3t+2kx} + 1)^2}, \quad (1.126)$$

$$= -2k^2 \operatorname{sech}^2(kx - 3k^3t). \quad (1.127)$$

**Ejemplo 1.4.** Consideremos el caso  $n=2$ , ahora  $M$  tiene la siguiente construcción explícita en forma de matriz.

$$M = \begin{vmatrix} 1 + \frac{c_1^2 e^{2k_1x}}{2k_1} & c_1^2 c_2^2 e^{-x(k_1+k_2)} \\ c_1^2 c_2^2 e^{-x(k_1+k_2)} & 1 + \frac{c_2^2 e^{2k_2x}}{2k_2} \end{vmatrix}. \quad (1.128)$$

Obteniendo el determinante podemos resolver la ecuación diferencial y encontrar el potencial solución. Este procedimiento se reduce a un cálculo algebraico que puede obtenerse por medio de un par de sustituciones y este puede ser consultado con detalle en [18].

Debido a la escala de complejidad de las soluciones con respecto de  $n$ , se realiza un análisis asintótico de las soluciones para estudiar la estructura de las mismas. Para ello vamos a estudiar el estado de equilibrio para un tiempo considerablemente grande, sustituyendo estas condiciones en la ecuación se obtiene una solución de tipo:

$$u \sim -2 \sum_{k=1}^N n^2 \operatorname{sech}^2((nx - n^3t) + \phi_n), \quad (1.129)$$

$$e^{2\phi_n} = \prod_{k \neq n}^N \frac{n-k}{n+k} (-1)^{n-k}. \quad (1.130)$$

**Proposición 1.11.** *El estado de equilibrio de las soluciones solitónicas se presenta solamente como un cambio de fase dentro de cada una de las ondas.*

*Demostración.* Estudiemos la forma general de superposición de la solución de equilibrio del caso  $n = 2$  para encontrar su forma.

$$u(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2\left(x - 4t \pm \frac{\ln 3}{2}\right) - 8 \operatorname{sech}^2\left(2x - 32t \pm \frac{\ln 3}{2}\right). \quad (1.131)$$

□

Este resultado nos muestra el comportamiento de interacción entre las soluciones solitónicas y fomenta a la intuición a realizar la analogía que termina dando el nombre a este tipo de fenómenos físicos, conocidas como soluciones de tipo ondas solitarias o solitones.

**Definición 1.7.** Una solución  $n$ -solitónica de la ecuación KdV se le dice a una solución del sistema de autovalores de  $L$  con un potencial no reflectante que resuelve la ecuación diferencial KdV en el rango de autovalores negativos. El valor de  $n$  está dado físicamente por la cantidad de crestas de ondas presentes y matemáticamente por el índice máximo de la matriz  $M_{nk}$  que resuelve la ecuación 1.94. Y el estado inicial de esta ecuación centrado en el origen es dado por el potencial  $u_n(x, 0)$  que cumple la siguiente ecuación:

$$u_n(x, t) = -n(n+1) \operatorname{sech}^2(x). \quad (1.132)$$

Físicamente esto significa que estamos asumiendo que la interacción de los solitones ocurre en  $t = 0$ .

### 1.3. Funciones $\tau$

Realizaremos un breve estudio de estas funciones que aparecen como las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y tienen un rol fundamental en el estudio de los sistemas integrales. Además estudiaremos algunas propiedades que nos serán de utilidad más adelante para encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales de interés.

**Definición 1.8.** Una función  $\tau$ , es cualquier función que puede ser expresada como el wronskiano de  $n$  funciones linealmente independientes.

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \dots & f_1^n \\ f_2 & f_2' & \dots & f_2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_n & f_n' & \dots & f_n^n \end{vmatrix}. \quad (1.133)$$

La los grados de libertad de la función  $\tau$  corresponden a los de las funciones dentro del determinante.

**Ejemplo 1.5.** Supongamos que existen 2 funciones de este tipo.

$$f_i = \sum_{j=1}^2 a_j e^{n_j x + m_j t}. \quad (1.134)$$

Entonces la función  $\tau$  de este conjunto está dada por,

$$\tau = \begin{vmatrix} f_1 & n f_1 \\ f_2 & m f_2 \end{vmatrix}, \quad (1.135)$$

$$= f_1 f_2 (m - n). \quad (1.136)$$

Ahora exploraremos como una función  $\tau$  puede representarse como la solución de ecuaciones diferenciales las cuales se discutirá su importancia más adelante. Para esto utilizaremos varios resultados conocidos del álgebra lineal y la combinatoria, para estudiar el comportamiento de los determinantes y las menores de una matriz. Entonces tomaremos el siguiente caso particular donde las funciones  $f$  cumplen ciertas restricciones y con ellas produciremos una función  $\tau$  que resuelve una ecuación diferencial asociada al sistema.

**Proposición 1.12.** *Dada una lista de  $n$  funciones  $f(x, y, t)$ , tales que estas cumplen las siguientes relaciones.*

$$\partial_x f = f_x, \quad (1.137)$$

$$\partial_y f = f_{xx}, \quad (1.138)$$

$$\partial_t f = f_{xxx}. \quad (1.139)$$

*Y dada una función  $\tau$  asociada al sistema, esta cumple la siguiente ecuación diferencial:*

$$4(\tau\tau_{xt} - \tau_x\tau_t) - 3\tau_{xx}^2 - \tau\tau_{xxxx} + 4\tau_x\tau_{xxx} + 3\tau_y^2 - 3\tau\tau_{yy}. \quad (1.140)$$

*Demostración.* Para encontrar esta expresión de manera explícita utilizamos las relaciones de Laplace de las menores de la matriz asociada a la función  $\tau$ . Aquí se utiliza el hecho que el determinante es multilineal y alternante y solamente se enunciará el resultado, los detalles de este procedimiento pueden consultarse en [22].

Construimos una matriz tomando como elementos las funciones de la lista, y con ello la notación estandarizada del proceso produce las siguientes relaciones.

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r (f_1, \dots, f_n)_{i_1 \dots i_{n-1}, j_r} (f_1, \dots, f_n)_{j_0 \dots \hat{j}_r, \dots, j_n} = 0. \quad (1.141)$$

Estas relaciones son de suma importancia y serán discutidas así como sus implicaciones en los capítulos siguientes.

Anteriormente expresamos de manera explícita la forma de la ecuación 1.140 en términos de las funciones  $f$ , pero debido que nos interesa estudiar las propiedades intrínsecas de la combinatoria de este sistema. Es conveniente expresar estas relaciones meramente en los índices y signos de las permutaciones correspondientes. De esta manera tenemos el sistema simplificado para 1.141.

$$(1, 2)(3, 4) - (1, 3)(2, 4) + (1, 4)(2, 3) = 0. \quad (1.142)$$

Donde los paréntesis corresponden a los índices de las menores de las respectivas con respecto de las columnas de la matriz original. Para terminar computamos directamente las menores obteniendo el resultado deseado.

Sea entonces la forma expandida de las menores de la matriz asociada,

$$\frac{\tau}{12}(\tau_{xxxx} + 3\tau_{yy} - 4\tau_{xt}) - \frac{\tau_x}{3}(\tau_{xxx} - \tau_t) + \frac{1}{4}(\tau_{xx}^2 - \tau_y^2) = 0. \quad (1.143)$$

Esta expresión es una versión escala equivalente a la relación deseada dada por 1.140.  $\square$

**Ejemplo 1.6.** Sea la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0. \quad (1.144)$$

De la cual solamente estamos interesados en los términos y no en algún escalar que pueda acompañarlos. Ahora realizando el siguiente cambio de variable obtenemos,

$$u = \partial_x^2 \ln \tau. \quad (1.145)$$

Ahora sea la función  $\tau$  asociada el Wronskiano de  $n$  funciones linealmente independientes  $f$  que cumplen las relaciones de la proposición 1.12. Entonces, la función  $\tau$  cumple la siguiente ecuación diferencial parcial.

$$\frac{\tau}{12}(\tau_{xxxx} + 3\tau_{yy} - 4\tau_{xt}) - \frac{\tau_x}{3}(\tau_{xxx} - \tau_t) + \frac{1}{4}(\tau_{xx}^2 - \tau_y^2) = 0. \quad (1.146)$$

Ya que esta relación es equivalente a 1.140. Entonces es posible plantear la solución  $u$  del sistema original, en términos de la función  $\tau$ . Que a su vez puede plantearse en términos de las soluciones del sistema de las  $n$  funciones dadas por 1.12.

Por tanto la solución de la ecuación diferencial original, para el caso  $n = 1$  por ejemplo. Está dada por la siguiente expresión:

$$f = \int g(\lambda) e^{\lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 t} d\lambda. \quad (1.147)$$

Ahora realizaremos el cálculo explícito de una función  $\tau$  que es solución del sistema expuesto por el ejemplo anterior, el cual nos servirá a futuro para poder expresar las soluciones de las ecuaciones de interés de este estudio.

**Ejemplo 1.7.** Sea una función  $\tau$  construida por medio de  $n$  funciones linealmente independientes  $f$ , las cuales cumplen las restricciones dadas por el ejemplo 1.6. Supongamos que es posible seleccionar un contorno de integración apropiado, y obtener un espectro discreto de  $k$  autovalores, ascendentes y no degenerados. Para que las funciones puedan expresarse como combinaciones lineales de términos exponenciales.

Esto produce entonces el siguiente sistema de ecuaciones asociadas.

$$f = \sum A_i E_i, \quad (1.148)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nk} \end{bmatrix} E_i = e^{\lambda_i x + \lambda_i^2 y + \lambda_i^3 t}. \quad (1.149)$$

Entonces por medio de la expansión en menores del método de Cauchy-Binet, la función  $\tau$  puede expresarse de la siguiente manera,

$$\tau = \sum_{I \in \binom{[k]}{n}} \Delta(A)_I W r(E_{j_1}, \dots, E_{j_k}). \quad (1.150)$$

Esta expresión puede colocarse en términos del producto exterior, el cual no será desarrollado en este estudio, pero facilitará la interpretación más adelante, de la siguiente manera.

$$E_I = E_{j_1} \wedge \dots \wedge E_{j_k}, \quad (1.151)$$

$$\tau = \sum \Delta(\tilde{A})_I E_{j_1} \wedge \dots \wedge E_{j_k}, \quad (1.152)$$

$$\tau = \sum \Delta(\tilde{A})_I E_I. \quad (1.153)$$

Donde la matriz  $\tilde{A}$  se muestra de forma explícita que podría cambiar respecto de la original debido a la convención. Pero se abusará ligeramente de la notación, describiendo ambas de la misma manera.

Estos ejemplos nos proporcionan un método en la cual una ecuación de la cual se desconoce su solución, puede ser reescrita en términos de una combinación lineal de  $n$  funciones de un sistema conocido. En las siguientes secciones se estudiará el comportamiento del caso general para las ecuaciones de interés.

Es importante mencionar que este caso particular y proceso de solución, aunque pareciesen elegidos al azar, nos proporcionan un panorama general sobre esta herramienta para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Además vale la pena resaltar que el cambio de variable realizado es un procedimiento estándar, en el cual

para encontrar la solución de estas ecuaciones se realiza un cambio de variable de la siguiente manera.

$$u = \partial^n \ln \tau. \tag{1.154}$$

Esto desde el punto de vista de la física tiene implicaciones bastante relevantes ya que presentan una estructura análoga a las funciones de partición, las cuales sus logaritmos fungen como funciones generadoras de momentos en la mecánica estadística. Esta relación la cual debe ser afinada ligeramente para cubrir todas las características necesarias desde el punto de vista físico se profundizará más adelante al estudiar la forma explícita de las soluciones de las ecuaciones de estudio.

En las siguientes se dará una noción de intuición sobre la selección para el proceso de cambio de variable, ya que de momento no existe algún criterio y se realiza de manera arbitraria. Además se mencionará brevemente su relación con los métodos anteriormente desarrollados de los sistemas integrables.

## 2. Ecuaciones Korteweg–De Vries KdV y Kadomtsev Petviashvili KP

### 2.1. Ecuación KdV

La ecuación KdV es una ecuación diferencial parcial no lineal que busca generalizar las interacciones de una onda con un medio dispersivo. La forma contemporánea para describirla está dada por esta ecuación:

$$u_t(x, t) - 6u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0. \quad (2.1)$$

Esta es una versión simplificada de las expresiones originales obtenidas por el trabajo de Johannes Korteweg y De Vries. La derivación de estas ecuaciones parte de la solución de Rayleigh para un fluido incompresible, en un canal rectangular de área superficial constante. La motivación física para el estudio de estos sistemas parte de la búsqueda de un modelo para encontrar la velocidad de onda y la cresta de los experimentos de Scott Russel. Estos tienen bastante importancia histórica ya que en estos experimentos es donde son observadas las ondas solitarias o solitones por primera vez y este tipo de soluciones son el enfoque de interés para este estudio.

### 2.1.1. Derivación

Realizamos brevemente una descripción de los pasos tomados durante la derivación original de la ecuación y del punto de partida de la misma. Para luego por medio de un cambio de variable obtener la ecuación utilizada de manera estandarizada en la actualidad

#### 2.1.1.1. Derivación Histórica

Partiendo de la solución de Rayleigh [19], la cual busca resolver la ecuación clásica de onda para un fluido sin flujo de rotación e incompresible en su estado de equilibrio, se obtienen las siguientes relaciones para la velocidad de onda  $v$ ,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = g\kappa \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \quad (2.2)$$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.3)$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Donde  $\phi, \psi$  son el potencial de velocidad y la función de corriente. El trabajo de KdV consistió en realizar una expansión en series de Taylor suponiendo que las soluciones físicas son asintóticamente estables y expresando de manera explícita la dependencia temporal de estas expansiones. Por lo tanto las velocidades se pueden representar como.

$$v_x = f(x, t) - \frac{y^2}{2} f''(x, t) + O(n). \quad (2.5)$$

$$v_y = -y f'(x, t) + \frac{y^3}{6} f'''(x, t) + O(n). \quad (2.6)$$

Estas relaciones se sustituyen en la condición de superficie libre para fluidos y as-  
tutamente se deriva con respecto de  $x$  para eliminar grados de libertad del sistema.  
De esta manera obtenemos la expresión,

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0. \quad (2.7)$$

Donde  $g, h, T, \rho$  son la constante de la gravedad, la altura relativa al nivel del agua, la tensión y la densidad del fluido respectivamente.

Luego KdV realizaron una serie de simplificaciones típicas de la mecánica de fluidos para anular la dependencia explícita de la ecuación eliminando los grados de libertad de la velocidad y posición verticales. Además tomaron en cuenta las restricciones del fenómeno físico que está presente en un canal poco profundo para poder simplificar la expresión de la altura relativa de la cresta de agua.

Esto sumado con un cambio de variable apropiado al sistema para las curvas características de una ecuación de onda que es de tipo  $\xi = x \pm ct$ , produce esta ecuación:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} h^2 + \frac{2}{3} \alpha h + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Esta es la expresión original de la ecuación de KdV.

Para los fines de este estudio las constantes físicas definidas para llegar a este punto no son de importancia pero esta derivación puede ser consultada en [13].

### 2.1.1.2. KdV Forma Adimensional

Para obtener la ecuación KdV en la forma estandarizada en la actualidad se debe realizar una escala para transformarla a su forma adimensional. El proceso se obtiene realizando cambios directos de variables y empleando regla de la cadena. Los pasos de mayor importancia para mantener la intuición e interpretación física del sistema están dados por las siguientes relaciones,

$$u(x, t) = \frac{h(x, t)}{C_h}, \quad (2.9)$$

$$x = \frac{\xi}{C_\xi}. \quad (2.10)$$

Donde realizamos un abuso ligero de la notación para obtener la ecuación final en términos de la derivada de la variable  $x$ , la cual tiene una interpretación física distinta a la utilizada con anterioridad durante la derivación histórica de KdV. Recordemos que esta variable es el movimiento en la curva característica de una onda y únicamente ha sido reescalada de manera dimensional.

Además ahora damos una interpretación física al potencial  $u$  utilizado durante el proceso de Dispersión Inversa en la sección anterior. Este al ser un análogo a la posición respecto del marco de referencia nos da una idea de la energía potencial gravitatoria del sistema, de esta manera obtenemos una justificación física al proceso matemático realizado con anterioridad.

Realizando el cambio de variables la ecuación tiene la forma,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.11)$$

Es importante mencionar que el escalar que acompaña al término no lineal es una consecuencia física del proceso de cambio de variable adimensional ya que matemáticamente este podría ser algún otro valor arbitrario.

### 2.1.2. Solución de KdV

Como ha sido demostrado en 1.102 la solución de esta ecuación diferencial en su forma adimensional puede ser encontrada utilizando el proceso de Dispersión inversa, en el cual se resuelve originalmente el auto sistema del operador de Schrödinger para un potencial que resuelve la ecuación KdV. Luego se encuentra su evolución temporal y la forma explícita de las funciones de onda y esa información se utiliza para resolver la ecuación GLM en donde el potencial puede ser encontrado finalmente por la siguiente relación,

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x^2} K(x : x, t). \quad (2.12)$$

Donde hacemos explícita la forma de dependencia temporal de la función  $K$  recordando que tiene 2 componentes espaciales evaluadas en el mismo valor. Y de la misma manera esta función cumple la ecuación 1.94 lo cual asumiendo la separabilidad de  $K$  hace que pueda ser descrita en términos del determinante de una matriz  $M$ .

Como ha sido desarrollado en la sección de Sistemas Integrables la ecuación KdV admite soluciones para cualquier valor entero de sus autovalores y coeficiente de reflexión arbitrario. Debido al enfoque de interés de este estudio las soluciones de autovalores positivos y coeficientes de reflexión no nulos serán tomados en cuenta.

#### 2.1.2.1. Soluciones Solitónicas

Dado un valor o una serie de autovalores del auto sistema de  $L$ , si estos son negativos y además los coeficientes de reflexión de las auto funciones son nulos, entonces las soluciones de la ecuación KdV son de tipo solitónicas.

La solución de estas ecuaciones se obtiene de forma explícita por medio del determinante de la matriz  $M$  que cumple la relación 1.119.

**Definición 2.1.** A una matriz  $M_{kn}$  la cual su determinante está relacionado con la función de potencial que resuelve la ecuación KdV se le llama Dato del Solitón.

Las soluciones  $n$ -solitónicas de esta ecuación se centran en el origen de manera en que si existe alguna interacción o choque de las mismas estas ocurren en el tiempo en que comienza el modelo  $t = 0$ . Tomando esta consideración las soluciones pueden obtenerse por medio del principio de superposición en el instante en que ocurre la interacción de las mismas, que es el tiempo en que comienza el modelo. O en su estado de equilibrio para tiempos lo suficientemente grandes.

La intuición física detrás de la creación del término onda solitaria o solitón tiene su origen en las interpretaciones de las interacciones de estas ondas respecto de su estado de equilibrio. En otras palabras, se sabe que las soluciones mantienen su forma durante la evolución temporal del fenómeno, y luego durante la interacción de 2 solitones fue demostrado en el capítulo anterior que al llegar a su estado de equilibrio estas únicamente presentan un cambio de fase por el valor 1.130. Estas características que cuestionan la definición de una onda clásica y tienen un comportamiento que asemeja al de una partícula, fueron la justificación para la creación del término onda solitaria o solitón.

## 2.2. Ecuación Kadomtsev–Petviashvili KP

Tomando como principio de partida la ecuación KdV en la década de los 70s, Vladimir Petviashvili y Boris Kadomtsev consideraron los efectos de perturbaciones transversales en la física de plasmas con los cuales obtuvieron una extensión dimensional de la ecuación KdV. Por lo tanto esta es una generalización natural respecto de la física de la ecuación base ya que en mayor medida las ondas se propagan en medios 2-dimensionales a diferencia del modelo proporcionado por la ecuación KdV. La ecuación KP en su forma estandarizada está dada por:

$$\partial_x(4u_t(x, y, t) - 6u(x, y, t)u_x(x, y, t) - u_{xxx}(x, y, t)) = -3\sigma u_{yy}(x, y, t). \quad (2.13)$$

Donde  $\sigma = \pm 1$  lo que produce 2 ecuaciones asociadas distintas las cuales son llamadas KPI, KPII. Se mencionarán las diferencias físicas y matemáticas de las mismas más adelante y se mencionará de forma explícita cual es la ecuación con la que realizaremos algún tipo de análisis.

### 2.2.1. Derivación

Tomando esta idea de generalización de la propagación de ondas bajo efectos transversales y asumiendo todos los supuestos requeridos para la derivación de la ecuación KdV. Realizaremos brevemente una derivación de la ecuación KP basada en el trabajo de Mark J. A y Harvey Segur el cual puede ser consultado en [2]. En el cual por primera vez se pudo reproducir la ecuación de Kadomtsev Petviashvili en el contexto de la mecánica de fluidos clásica.

Vamos a reescribir algunas variables definidas por la derivación de 2.7 en la notación empleada por Mark J y Harvey Segur,

$$H = h, \quad (2.14)$$

$$\xi = x, \quad (2.15)$$

$$\tau = t, \quad (2.16)$$

$$h = \xi(x, y, t). \quad (2.17)$$

Reescribiendo estas relaciones para un potencial  $\phi$ , que cumple la ecuación de Laplace bajo las mismas condiciones iniciales, es posible encontrar la ecuación de evolución temporal para el potencial  $\xi$  en la superficie del fluido, además de una relación entre la evolución temporal y el gradiente del potencial.

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi_t + \phi_x \xi_x + \phi_y \xi_y = \phi_z, \quad (2.18)$$

$$g\xi + \phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = \frac{(\xi_y D_x - \xi_x D_y)^2 + (D_x - iD_y)(D_x + iD_y)}{(1 + (D_x - iD_y)(D_x + iD_y))^{\frac{3}{2}}} \xi. \quad (2.19)$$

Ahora para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales se utiliza una sustitución para convertir las ecuaciones a su forma adimensional mediante el método de escalas múltiples bajo  $\epsilon$ , para poder modelar la evolución temporal del sistema físico. Para poder emplear un sistema adecuado de variables adimensionales deben tomarse en cuenta 3 de las consideraciones más importantes que son heredadas del modelo KdV y estas son. La poca profundidad de agua respecto a la longitud de las ondas, las crestas de las ondas son bastante más pequeñas que la profundidad de agua y las ondas se propagan principalmente en una dirección. Debido a estas consideraciones la ecuación KP se considera la extensión 2-dimensional de la ecuación KdV, en la que se toma una dirección de propagación principal y solamente se estudian perturbaciones transversales en la otra coordenada espacial.

Realizando el cambio de variables a primer orden obtenemos una solución típica de una ecuación de onda, en la cual las características de la dirección de propagación dependen de la diferencia entre la posición y el tiempo. La diferencia de la ecuación KdV es que ahora estas curvas dependen de una variable espacial extra la cual no presenta alguna dependencia espacial de manera explícita. Por tanto la solución puede verse como,

$$\xi(x, t, y) = \epsilon h(f_1(x - ct, y) + f_2(x + ct, y)), \quad (2.20)$$

$$= \epsilon h(f^{x-} + f^{x+}) \quad (2.21)$$

Este solución por cuenta propia no es capaz de reproducir la solución deseada pero nos permite profundizar la noción física del sistema el cual se desea modelar y nos da una pauta para realizar algún tipo de anizat si llegase a ser requerido.

Ahora bien tomando en cuenta los términos al siguiente orden de  $\epsilon$  obtenemos un sistema de ecuaciones de la siguiente manera.

$$(2f_t^{x-} + 3f^{x-}f_{x-} + \frac{1}{3}(1 - \hat{K})f_{ttt}^{x-})_{x-} + f_{yy}^{x-} = 0, \quad (2.22)$$

$$(2f_t^{x+} - 3f^{x+}f_{x+} - \frac{1}{3}(1 - \hat{K})f_{ttt}^{x-})_{x+} - f_{yy}^{x+} = 0. \quad (2.23)$$

Es importante notar que cada una de estas ecuaciones nos da la evolución de una onda moviéndose hacia la izquierda o hacia la derecha, por lo tanto físicamente podemos tomar cualquiera de estas soluciones a conveniencia. Otro resultado importante es que para obtener las variaciones de la ecuación KP mencionadas anteriormente se realiza un análisis del término en el cual aparece la constante  $\hat{K}$ , este término depende de la razón entre la gravedad con respecto de la densidad y la tensión superficial del objeto. Debido a herencia histórica cuando esta resta es negativa se le conoce como la ecuación KPI y cuando esta es positiva como KPII. Para los intereses de este estudio debido a condiciones dentro de la mecánica de fluidos vamos a suponer que esta resta es definida positiva, por lo tanto se trabajará con la ecuación KPII.

Para terminar es posible realizar un cambio de signo y un cambio escalar en las transformaciones para obtener la versión estandarizada adimensional de la ecuación

KP con  $2u = f$ . Realizando estas sustituciones la ecuación tiene de forma,

$$(u_t + 6u_x u + u_{xxx})_x \pm 3u_{yy} = 0. \quad (2.24)$$

Debido a consideraciones físicas dependiendo del contexto del sistema a modelar los escalares que acompañan a los términos pueden modificarse, esto no afecta explícitamente a las soluciones de la ecuación diferencial pero produce una forma más conveniente para resolver los casos específicos, como lo es en nuestro estudio la propagación de fluidos clásicos. Tomando estas consideraciones en cuenta la forma de la ecuación KP a utilizar está dada de la siguiente manera:

$$(4u_t - 6uu_x - u_{xxx})_x \pm 3u_{yy} = 0. \quad (2.25)$$

Ya que en nuestro enfoque de interés se centra en la mecánica de fluidos utilizaremos la ecuación KP II y esta será llamada ecuación KP de ahora en adelante.

## 2.2.2. Soluciones de KP

Existen distintos métodos para encontrar soluciones y específicamente soluciones solitónicas de la ecuación KP. Utilizaremos una combinación de distintos métodos para expresar las soluciones en términos de las funciones  $\tau$ , las cuales trabajarán para expresar en términos de las herramientas necesarias para poder producir los cuerpos de Newton Okounkov más adelante.

### 2.2.2.1. Método Bilinear de Hirota

Para emplear este método realizaremos un cambio astuto de variable el cual nos permitirá encontrar un nuevo conjunto de relaciones que deben cumplir las soluciones de la ecuación KP. Este fue utilizado por primera vez por Hirota para encontrar soluciones de la ecuación KdV en [23], y se le dio el nombre de Método Bilinear de Hirota. Entonces, tomando como intuición las soluciones encontradas por la transformada de dispersión inversa vamos a realizar el siguiente cambio de variable:

$$u(x, y, t) = \frac{G(x, y, t)}{F(x, y, t)}. \quad (2.26)$$

$$G = 2F_x, \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow u = 2\partial_x^2 \ln F. \quad (2.28)$$

Históricamente este procedimiento se realizó por primera vez en paralelo con el método de la transformada inversa, pero ahora entendido el comportamiento de las soluciones aparece de forma natural el cambio de variable.

Dada estas relaciones se introducen los operadores diferenciales bilineares de Hirota.

$$D_t^n D_x^m D_y^k F \cdot G = P(F, G), \quad (2.29)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^k F(x, y, t) G(x', y', t'). \quad (2.30)$$

Utilizando el cambio de variable definido anteriormente la ecuación KP después de un poco de álgebra, puede escribirse como un polinomio diferencial de este operador de la siguiente manera,

$$(D_x^4 - 4D_x D_t - 3D_y^2) F \cdot F. \quad (2.31)$$

Expandiendo esta condición de las soluciones de la ecuación de KP II obtenemos una relación equivalente a la ecuación 1.140. Lo cual significa que estas funciones  $F$  pueden escribirse en términos de las funciones  $\tau$ , y el procedimiento realizado de cambio de variable que parecía de manera arbitraria con anterioridad. Es una condición realizada para poder reescribir las ecuaciones originales en su forma bilinear.

### 2.2.2.2. Solución de KP por medio de Burgers-Calor

Similarmente a los métodos anteriores, realizaremos un cambio de variable para reescribir nuestra ecuación de manera que sea posible poder producir soluciones en términos de estructuras ya conocidas. Como ha sido mencionado en el título de la sección, es posible relacionar la ecuación KP con otras ecuaciones de difusión como lo son Burgers y la ecuación de calor. En el contexto de este trabajo de la mecánica de fluidos, esta es una extensión bastante natural debido a la similitud de los modelos físicos de estas ecuaciones. Ahora teniendo una noción física básica del proceso a realizar procedemos a realizar el siguiente cambio de variable,

$$u(x, y, t) = 2w(x, y, t), \quad (2.32)$$

$$(-4w_t + 6w_x^2 + w_{xxx})_x + 2w_{yy} = 0. \quad (2.33)$$

Esta ecuación por lo anteriormente mencionado será llamada BKP.

Ahora relacionaremos las jerarquías de las ecuaciones de calor y Burgers por las siguientes relaciones conocidas.

**Proposición 2.1.** *Sean  $f_i$  soluciones de la jerarquía de ecuaciones de calor lineal. Entonces la función  $w = D_x \ln f$  cumple la siguiente relación.*

$$\partial f_{x_i} w = (D_x + w)_x^{i-1} w. \quad (2.34)$$

*Demostración.* Esto se obtiene por medio de cálculo directo utilizando las condiciones de la jerarquía de calor las cuales fueron escritas en 1.137  $\square$

Esta proposición nos permite encontrar cierta cantidad de soluciones de la ecuación KP, pero realizaremos el caso general teniendo ahora del procedimiento.

**Teorema 2.2.1.** *Soluciones  $\tau$  de la ecuación KP.*

*Sea la siguiente relación que generaliza las sustituciones logarítmicas realizadas anteriormente,*

$$D_x^n f_i = w_1 f_i^{n-1} + \dots + w_{n-1} f_i. \quad (2.35)$$

*Entonces si existe una lista de  $n$  funciones  $f_i$  junto a sus derivadas, y estas producen un sistema linealmente independiente, el cual puede construirse en el caso de la ecuación KP por medio de las relaciones 1.137. Entonces la función  $u = 2\partial_x^2 \ln \tau$ , es una solución de la ecuación KP.*

*Demostración.* Utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias podemos despejar el término  $w_1$  utilizando el Wronskiano, lo cual en términos en la función  $\tau$  puede escribirse como:

$$w_1 = \partial_x \ln \tau. \quad (2.36)$$

De esta manera realizamos la sustitución de la función  $w_1$  y reescribimos en términos de ella la ecuación BKP 2.33. Para obtener la siguiente relación,

$$\tau \tau_{xt} - \tau_x \tau_t - \tau_{xx}^2 - \tau \tau_{xxxx} + \tau_x \tau_{xxx} + \tau_y^2 - 3\tau \tau_{yy}. \quad (2.37)$$

Ahora por los resultados obtenidos en la proposición 1.12, notamos que la ecuación en términos de  $\tau$  1.140, es equivalente a la relación anterior. Por tanto si existen una serie de  $n$  funciones que cumplan las condiciones anteriores, su función  $\tau$  asociada es una solución de la ecuación KP.  $\square$

Notemos que la relación encontrada en la proposición 1.12, es la relación bilinear de Hirota. Esto más adelante se estudiará en detalle ya que será de utilidad estudiar la composición de las funciones  $\tau$  en términos de las menores de una matriz específica.

### 2.2.3. Método de Dispersión Inversa

Ahora que hemos encontrado una fórmula para las soluciones de estas ecuaciones, vamos a asegurarnos que estas tengan los comportamientos deseados para la física. Para ello utilizaremos la teoría anteriormente desarrollada para plantear una ecuación diferencial de Lax y con ello armar soluciones en series formadas por un sistema ortonormal completo y autovalores con las propiedades de un sistema de Sturm Liouville.

**Definición 2.2.** Un operador de Lax u operador de Schrödinger generalizado tiene la siguiente forma,

$$L = \partial + \sum u_i \partial^{1-n}. \quad (2.38)$$

Donde las derivaciones respetan la regla de Leibniz y los exponentes negativos corresponden a una integración.

Las propiedades de estos operadores no serán exploradas con detalle pero cumplen las condiciones necesarias para realizar el método de dispersión inversa.

**Definición 2.3.** La ecuación diferencial de Lax generalizada cumple la siguiente relación:

$$\partial_{x_n} L = [B_n, L]. \quad (2.39)$$

Encontraremos ahora los operadores necesarios para expresar la ecuación KP en términos de la ecuación diferencial de Lax asociada.

#### 2.2.3.1. Operadores de Lax KP

Sean los operadores de la jerarquía de KP dados por,

$$B_n = L_{\geq 0}^n. \quad (2.40)$$

Donde esto se refiere a las potencias no negativas de los exponentes. Naturalmente la relación de conmutación de ellos con el operador de Lax está dada por,

$$[B_n, L] = [L, L_{<0}^n]. \quad (2.41)$$

Donde se altera el orden para cancelar el cambio de signo y el operador del término derecho es el complemento del operador no negativo.

**Proposición 2.2.** *Los operadores  $B_n$  cumplen la condición llamada de cero curvatura que tiene la siguiente forma:*

$$\partial_m B_n - \partial_n B_m = [B_m, B_n]. \quad (2.42)$$

*Demostración.* Realizamos la expansión de las sumas utilizando la propiedad que relaciona los operadores  $B_n, L$ . De ello obtenemos,

$$\partial_m B_n - \partial_n B_m - [B_m, B_n], \quad (2.43)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} L^j [B_m, L] L^{n-j-1} - \sum_{k=0}^{m-1} L^k [B_n, L] L^{m-k-1} - [B_m, B_n] \Big|_+, \quad (2.44)$$

$$= [L_-^m, L_-^n]_+ = 0. \quad (2.45)$$

□

Esta condición es equivalente a la ecuación diferencial de Lax y a su generalización, los detalles de la construcción explícita y la equivalencia de estas definiciones no se realizarán ya que es un proceso bastante similar al realizado en la sección de sistemas integrables. Los detalles que serán omitidos pueden ser consultados en [16].

### 2.2.3.2. Construcción de Soluciones Por Dispersión Inversa

Ahora encontraremos la forma explícita de la ecuación generalizada de Lax que reproduce la ecuación KP. Para ello utilizando la condición de cero curvatura tenemos esta expresión que se vuelve nula.

$$\partial_{x_3} B_2 - \partial_{x_2} B_3 - [B_2, B_3] = 0. \quad (2.46)$$

$$(2.47)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones dado por la relación 2.40.

$$\partial_y B_2 = [L, L_{<0}^2], \quad (2.48)$$

$$\partial_t B_3 = [L, L_{<0}^3]. \quad (2.49)$$

Lo que produce el siguiente sistema sobre determinado asociado,

$$\partial_y u_2 = u_{2_{xx}} + 4u_{3_x}, \quad (2.50)$$

$$\partial_t u_2 = 3(u_{2_{xy}} + u_{3_y}) - (u_{2_{xx}} - 3u_{2_x} + 6u_2 u_{2_x}). \quad (2.51)$$

Despejando y sustituyendo la función  $u_3$ , se obtiene la forma original deseada de la ecuación KP por medio de la sustitución  $u = 2u_2$ .

Por lo tanto es posible realizar el proceso de Dispersión Inversa que cumple las condiciones de evolución temporal definidas en la sección de sistemas integrables. Y las soluciones pueden representarse como combinaciones de auto funciones separables que forman un sistema ortonormal completo. Debido a que ya ha sido encontrada una fórmula explícita de las soluciones de la ecuación KP, no se realizará el cálculo de las expresiones explícitas de los coeficientes de transmisión, reflexión y constantes de normalización. Ya que estos pueden ser inferidos por la estructura de las soluciones que han sido desarrolladas por los métodos anteriores. Pero ahora que conocemos que existen soluciones bajo las restricciones del método de dispersión inversa, podemos realizar análisis asintóticos para describir soluciones físicas con una justificación matemática detrás, para ello vamos a tomar las soluciones encontradas en la sección de funciones  $\tau$  dadas por la ecuación 1.147. Por lo cual podemos describir las funciones solución de la siguiente manera,

$$f = \int_{\mathbb{R}} g e^{\lambda x + \lambda^2 y + \lambda^3 t} d\lambda, \quad (2.52)$$

$$= \sum^n A_i e^{\lambda_i x + \lambda_i^2 y + \lambda_i^3 t}, \quad (2.53)$$

$$= \sum A_i E_i. \quad (2.54)$$

$$E_i = \text{Exp}(\theta_i), \quad \theta_i = k_i x + k_i^2 y + k_i^3 t. \quad (2.55)$$

Donde estas funciones han sido reescritas en la notación que suele aparecer en los textos de estas líneas de investigación y las funciones  $\theta_i$  se ordenan en orden ascendente respecto del autovalor asociado.

**Definición 2.4.** Una solución solitónica de la ecuación KP es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales de Lax con un potencial no reflectante.

### 2.2.4. Soluciones Solitónicas de KP

Ahora que ya conocemos de forma explícita distintas maneras de construir soluciones de la ecuación KP, específicamente por medio de las funciones  $\tau$ . Y encontramos que es posible realizar el proceso de Dispersión Inversa para poder expresar las funciones  $f$  en términos de la ecuación 2.53. Estudiaremos algunos casos particulares y realizaremos análisis asintóticos para estudiar el comportamiento de las soluciones como fue realizado en el análisis anterior de la ecuación KdV.

Para ello categorizaremos las soluciones en términos de cuántos  $k$  valores propios distintos y  $n$  funciones  $f$  no triviales, forman el potencial  $u$  en términos de funciones  $\tau$ . Esto tendrá implicaciones similares respecto a las matrices  $M$  denominadas como datos de solitón en la ecuación KdV.

Además se extraerá información bastante importante del sistema físico realizando análisis asintóticos, ya que solamente escribiendo las expresiones explícitas no se aprecia a primera vista la riqueza y el comportamiento de las mismas. El proceso de este análisis se reduce a encontrar el exponente principal de los términos  $E_i$ , en cada región del espacio. Una aclaración importante es que este proceso suele realizarse para un tiempo fijo, debido a que la interpretación física a la hora de graficar las soluciones se presta naturalmente para ello. Para encontrar estas regiones se definen ciertas variables de alto interés para la física de las cuales no se discutirán a detalle sus implicaciones, y estas tienen la siguiente forma,

$$A[i, j] = \frac{1}{2}(K_i - k_j)^2, \quad (2.56)$$

$$K^n[i, j] = \frac{1}{2}(k_j^2 - k_i^2). \quad (2.57)$$

Donde  $A$  es la amplitud de onda,  $K$  el vector de onda y en algunos textos en el caso 2D,  $K^3$  se escribe como  $\Omega$  debido a la interpretación física de la frecuencia angular.

**Definición 2.5.** Un solitón es del tipo  $(i, j)$  si localmente puede describirse como una onda plana en términos de  $A, K, \Omega$ .

Ahora estudiaremos algunos ejemplos de soluciones solitónicas de KP.

### 2.2.4.1. Solitón(2,1) caso $k = 3, n = 1$

Este es el primer caso no trivial del análisis asintótico con una única función  $f$ , la solución por medio de los métodos anteriores está dada por:

$$f = A_1 E_1 + A_2 E_2 + A_3 E_3, \quad (2.58)$$

$$\tau = f, \quad (2.59)$$

$$u = 2\partial_x^2 \ln \tau. \quad (2.60)$$

Ya que esto no nos produce una gran cantidad de información del sistema procedemos a realizar los análisis asintóticos correspondientes. Para ello tomamos un tiempo fijo y analizamos la curva de transición de un término principal en el cual una función  $\theta_i$  es dominada por otra. Además hacemos mención de un ligero cambio estandarizado de notación, en el cual se divide la expresión de  $f$  por  $A_1$  para que el primer término de la combinación no este acompañado de algún escalar.

Para realizar estos análisis es conveniente introducir 2 variables que simplifican las expresiones de esta manera.

$$\eta_i(\alpha) = k_i(k_i - \alpha_{ij}), \quad (2.61)$$

$$\alpha_{ij} = (k_i + k_j). \quad (2.62)$$

Ahora por simplicidad y debido a que queremos encontrar el comportamiento de  $u$ . Procedemos a linealizar la expresión de  $f$  por medio de la derivada logarítmica y calculamos su primera derivada, de modo que en el numerador nos quedan únicamente combinaciones lineales de los términos  $x, \eta y$ , junto con constantes que dependen del tiempo en el cual ha sido fijado el suceso. El siguiente paso es fijar el sistema en las curvas de transición de un término principal a otro, esto quiere decir que elegimos las trayectorias en las curvas  $x = \alpha_{ij} y$ . De forma que nuestras funciones  $\theta_i$  ahora solamente tienen un grado de libertad, lo cual facilita enormemente realizar el estudio para los casos  $y \ll 0$  y  $y \gg 0$ . Ahora estudiamos el caso  $y \gg 0$ .

En esta rama notamos que el cambio se encuentra en la frontera donde  $\eta_1 = \eta_3$ . Debido a esto la región superior izquierda que corresponde a valores negativos de  $x$ , que es donde gobiernan los valores más pequeños atribuidos a  $E_1$  será etiquetada de esa manera. Y correspondientemente la región del lado derecho será etiquetada como  $E_3$ .

La solución de está curva para encontrar las fronteras se obtiene fácilmente igualando las expresiones. Y está dada por la relación,

$$y = \frac{(k_i^2 + k_i k_j + k_j^2)t - x + la_{ij}}{k_i + k_j}. \quad (2.63)$$

Donde  $la_{ij}$  es una constante que depende de los coeficientes escalares que acompañan a las funciones  $E_i$ , la cual solamente produce una traslación vertical u horizontal de las fronteras. Debido a que estas no son de importancia en este análisis, asumiremos sin pérdida de la generalidad que pueden despreciarse.

Recordemos que estas características son posibles de obtener debido a que podemos ordenar de forma ascendente los autovalores de esta ecuación debido a que es compatible con el método de dispersión inversa.

Similarmente obtenemos 2 transiciones para el caso  $y \ll 0$  que se encuentran al igualar las expresiones dadas por la ecuación 2.63. Por tanto hemos encontrado que existen regiones en las cuales domina cada uno de los elementos  $E_i$  los cuales corresponden a un autovalor específico asociado en orden ascendente.

Ahora debido a las relaciones encontradas podemos realizar una aproximación de la solución  $u$  en cada región como la contribución principal o una combinación lineal de los elementos de sus fronteras de la siguiente forma. Las soluciones individuales no serán desarrolladas de manera explícita ya que el procedimiento es equivalente al realizado en la ecuación KdV.

$$u \approx \partial_x^2(\ln(A_i f_i + A_j f_j)), \quad (2.64)$$

$$= \frac{1}{2}(k_i - k_j)^2 \operatorname{sech}^2(\theta_i - \theta_j - \ln \frac{A_i}{A_j}), \quad (2.65)$$

$$= A[1, 2] \operatorname{sech}^2(K[1, 2] \cdot x + \Omega[1, 2]t + \Phi[1, 2]). \quad (2.66)$$

Donde  $\phi$  es una fase arbitraria. Esta soluciones además, es posible generalizarla para los casos con mayor cantidad de contribuciones en las cuales debemos considerar todas las fronteras aledañas, esto nos da una superposición de ondas que se expresa de la siguiente manera:

$$u = A[i, j] \operatorname{sech}^2\left(\sum^n K^n[i, j] \cdot \vec{r} + \Phi\right). \quad (2.67)$$

Notemos que estas expresiones producen el mismo comportamiento de las soluciones solitónicas obtenidas por la ecuación KdV.

Ahora vamos a explicar la convención en la que son nombrados este tipo de solitones y a estudiar los distintos tipos de retratos que estos producen, respecto de sus líneas de nivel y las fronteras de las funciones  $E_i$ .

**Definición 2.6.** La gráfica de un solitón  $(i, j)$  contiene  $i$  fronteras en la región  $y > 0$  y  $j$  en la región  $y < 0$ .

Esto quiere decir que un solitón y su gráfica están caracterizados por sus fronteras, en las cuales para (2,1) en  $y \gg 0$  existe una transición  $E_1 \rightarrow E_3$ . Y en la región  $y \ll 0$  tenemos el sistema de transiciones  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$ . Estas transiciones es posible de expresarlas por medio de distintas herramientas y de ahora en adelante nos referiremos a ellas por medio de permutaciones de la siguiente manera.

Tomaremos una lista de tamaño  $n$  que corresponde a cada una de las funciones  $E_i$ , luego nos ubicaremos en la frontera que corresponde al par  $[1, m]$  y llenaremos como primer término de nuestra lista el índice  $m$ . Ahora en contra de las agujas del reloj seguiremos llenando la lista aumentando de uno en uno en el índice  $i$  agregando en ella los índices  $j$  correspondientes. Si en algún punto de este proceso el índice  $i$  de la frontera siguiente deja de ser continuo, entonces nos ubicaremos en el cuarto cuadrante donde se encuentra la frontera  $[p, i + 1]$ , y llenaremos nuestra lista con el índice  $p$ . De esta manera ahora recorreremos en el mismo sentido las fronteras hasta terminar el proceso o encontrar otra discontinuidad. De ser este el caso regresamos a la región  $y > 0$  y repetimos el algoritmo hasta completar la lista.

De esta manera este solitón estudiado anteriormente puede representarse como la siguiente permutación,

$$\pi = (3, 1, 2). \tag{2.68}$$

Cada término que su magnitud sea mayor a la posición en la que se encuentra está asociado a una frontera en la región  $y > 0$  y el resto en la región  $y \leq 0$ .

Ahora mostraremos como se pueden visualizar las soluciones de un solitón(1,2).

#### 2.2.4.2. Gráficas Solitón(2,1)

Estudiaremos 2 sistemas con configuraciones de autovalores diferentes.

**Ejemplo 2.1.** Sea el siguiente solitón(2,1) con los siguientes valores en sus funciones  $\theta$  y coeficientes escalares triviales.

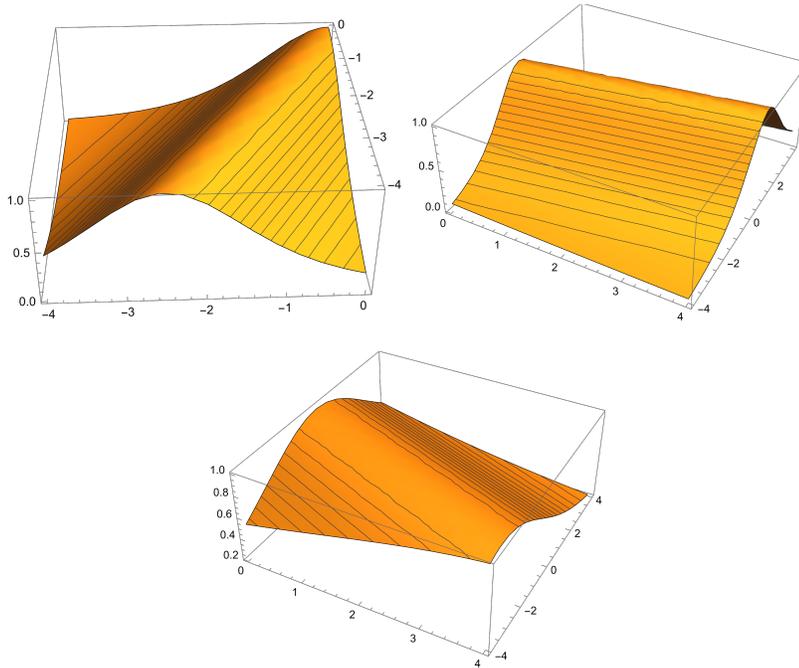
$$\vec{k} = \left( \frac{-3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{2}{4} \right), \quad (2.69)$$

$$\pi = (3, 1, 2), \quad (2.70)$$

$$\tau = \sum_{i=1}^3 E_i. \quad (2.71)$$

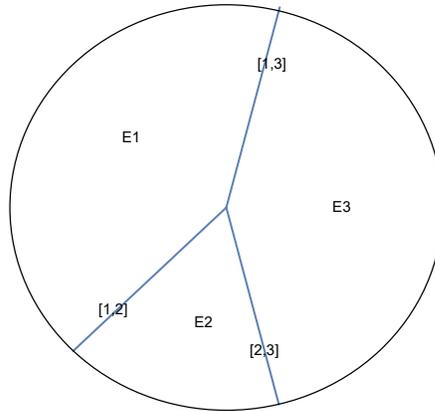
Este de forma local puede escribirse como la combinación lineal de una o dos de las funciones  $E_i$  por lo cual la solución puede representarse en términos de 2.67. Y sus fronteras pueden ser encontradas por medio de 2.63.

Realizando la sustitución directa de estas variables es posible reproducir la solución del solitón en todo el espacio así como la gráfica de las fronteras. A continuación se presentan algunas de las gráficas que pueden ser producidas de este sistema.



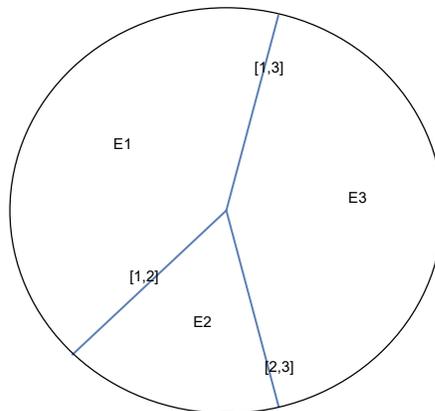
**Figura 2.1.** Curvas de nivel de la función  $u(x, y, 0)$  evaluada cerca de las fronteras; (a) [1, 2], (b) [1, 3], y (c) [2, 3]. Cada una de las curvas se encuentra mapeada dentro de los intervalos apropiados respecto de sus ejes horizontales y verticales.

Además de las curvas de nivel, es posible graficar la configuración de fronteras de este solitón en específico. La cual tiene la siguiente estructura.



**Figura 2.2.** Sistema de fronteras para el solitón  $(2,1)$   $t = 0$ , del ejemplo 2.1.

Debido a que nuestro interés se centra en la geometría intrínseca del sistema de fronteras, estas gráficas serán a las que nos referimos como gráficas de solitón. Y las curvas de nivel no serán estudiadas en los siguientes ejemplos. Además estas gráficas por convención, son mapeadas a un disco del tamaño apropiado para poder apreciar el comportamiento del sistema. Como ha sido realizado en las figuras anteriores. Un fenómeno importante que será estudiado en la siguiente sección, es que los puntos de las intersecciones de las gráficas cambian con respecto del tiempo. Este sistema no reproduce con detalle el comportamiento de estas interacciones pero es posible observarlo ligeramente al graficar el sistema de fronteras del solitón para la función  $u(x, t, 16)$ .



**Figura 2.3.** Sistema de fronteras para el solitón  $(2,1)$   $t = 16$ , del ejemplo 2.1.

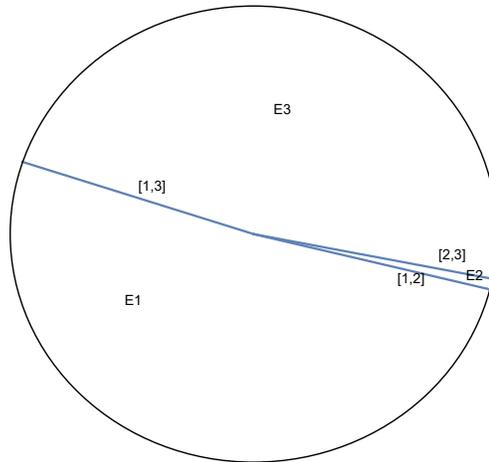
**Ejemplo 2.2.** Ahora tomamos otro sistema de autovalores para un solitón(2,1). Sea entonces el siguiente sistema de soluciones solitónicas para la ecuación KP.

$$\vec{k} = (1, 2, 3), \quad (2.72)$$

$$\pi = (3, 1, 2), \quad (2.73)$$

$$\tau = \sum_{i=1}^3 E_i. \quad (2.74)$$

Ahora representamos graficamente el sistema de fronteras asociado de esta configuración para la función  $u(x, t, 0)$ .



**Figura 2.4.** Sistema de fronteras para el solitón (2,1)  $t = 0$ , del ejemplo 2.2.

Notemos ahora que en la región E2, la representación para la función  $u$  debido a la cercanía de las fronteras, puede ser entendida como una consecuencia del caso general en donde la solución es una combinación lineal de todas las fronteras que contribuyen alrededor de sus vecindades.

### 2.2.4.3. Solitones con $n = 2$

Ahora para resolver los sistemas en los cuales tenemos una lista de  $n$  funciones, notamos que el procedimiento es equivalente al realizado pero debemos tomar en cuenta que para producir la solución en términos de funciones  $\tau$ , debemos calcular el Wronskiano de estas. Por tanto no es posible expresar directamente la solución del sistema como en los casos anteriores. Realizaremos un ejemplo del primer caso no trivial en  $n$  para ilustrar el proceso.

**Ejemplo 2.3.** Sea el sistema con  $k = 3, n = 2$

Entonces la función  $\tau$  asociada del sistema tiene la siguiente forma:

$$\tau = Wr(f_1, f_2), \quad (2.75)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\sigma} sgn \begin{vmatrix} a_{i\sigma} & a_{j\sigma} \\ a_{\sigma i} & a_{\sigma j} \end{vmatrix} Wr(E_i, E_j). \quad (2.76)$$

Que para este caso tenemos la expansión en 3 términos de esta manera,

$$\tau = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} Wr(E_1, E_2) + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} Wr(E_1, E_3) + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} Wr(E_2, E_3), \quad (2.77)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (k_1 - k_2) E_1 E_2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} (k_1 - k_3) E_1 E_3 + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} (k_2 - k_3) E_2 E_3. \quad (2.78)$$

Notemos que este solitón depende de los resultados de las determinantes de las submatrices, donde estas constantes son la reinterpretación de los coeficientes escalares que acompañaban a las funciones  $E_i$  en el caso anterior. Pero ahora debido a la naturaleza del problema necesitamos 2 índices para poderles identificar. Además las fronteras que pueden presentarse en este solitón están dadas por estas nuevas combinaciones de las funciones  $E_i E_j$ , las cuales al momento de realizar el análisis asintótico del problema. Serán las responsables de establecer las nuevas regiones dominantes, en caso de estar presentes en la combinación lineal anteriormente expuesta.

**Definición 2.7.** Un Dato de un Solitón de KP es una matriz  $A_{kn}$ , la cual está formada por los coeficientes que acompañan a las funciones  $E_i$ .

Debido a que nuestro interés se centra en entender las soluciones generales de estos problemas, estudiaremos a detalle en la siguiente sección las propiedades que tienen estas matrices. Y como se relacionan con las funciones  $E_i$  para la producción de solitones con  $n$  funciones arbitrarias.

Pero antes vemos un ejemplo sencillo para explicar la nueva notación de las gráficas producidas.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $A$  el siguiente dato de un solitón, con esta lista de valores en las funciones  $\theta$  del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2. \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

$$\vec{k} = \left(\frac{-3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right). \quad (2.80)$$

Este corresponde al caso  $k = 3, n = 2$ , la función asociada al sistema está dada por,

$$\tau = E_1E_2 + E_1E_3 + E_2E_3. \quad (2.81)$$

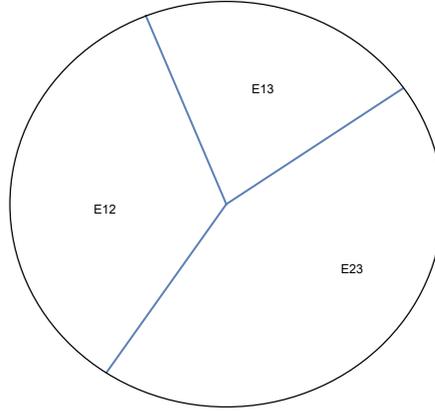
Notemos que estos valores fueron escogidos para obtener una combinación lineal con coeficientes lineales. Ahora procedemos a realizar el análisis asintótico el cual puede resumirse por medio de la siguiente permutación:

$$E_1E_2 \rightarrow E_1E_3 \rightarrow E_2E_3. \quad (2.82)$$

$$\pi = (231). \quad (2.83)$$

Notemos que en estos solitones con 3 fronteras solo existen 2 tipos distintos de permutaciones diferentes, las cuales ya han sido ejemplificadas.

Para encontrar la gráfica del solitón debemos encontrar cuando los términos de los exponentes son iguales, realizamos el bosquejo de la gráfica para mostrar el cambio de nomenclatura de las regiones  $E_{ij}$ .



**Figura 2.5.** Gráfica del sistema de fronteras para el solitón(1,2)  $t = 0$  del ejemplo 2.4.

Ahora para estudiar el caso general debemos refinar un par de conceptos, encontraremos una relación explícita entre los datos del solitón y las expresiones en términos de los determinantes de las submatrices para producir la función  $\tau$  asociada. Además debemos establecer un criterio general para poder producir las gráficas de estos sistemas generalizados.

## 2.3. Soluciones Solitónicas Generales

Encontraremos una expresión de las funciones  $\tau$  que relacione directamente los datos del solitón asociado. Y luego exploraremos las gráficas de los mismos.

### 2.3.0.1. Grassmanianos y Encajes de Plücker

Encontraremos que las combinaciones lineales que conformarán las funciones  $\tau$ , pueden expresarse como las llamadas relaciones de Plücker, que a su vez están relacionadas con el método bilinear de Hirota.

**Definición 2.8.** El Grassmaniano  $Gr(n, k)$  de un espacio  $V$  de dimensión  $k$ , es el espacio de todos los subespacios lineales  $n$ -dimensionales del mismo.

Abusamos ligeramente de la notación convencional, utilizando  $k$  para referirnos a la dimensión del espacio favoreciendo la notación que hemos utilizado hasta el momento.

**Proposición 2.3.** La lista de funciones  $f$  que están asociadas a una solución de KdV por medio de una función  $\tau$  forman una base para  $Gr(n, k)$ .

*Demostración.* Por definición la función  $\tau$  es el wronskiano de la lista de las funciones  $f$ , y por la relación que tiene con la solución  $u$  de KdV, implica que  $\tau$  es no nulo. Por lo tanto la lista de las funciones es linealmente independiente y forma una base  $n$ -dimensional.  $\square$

La forma explícita de esta base es conocida como celdas de Schubert, las cuales son construidas por medio de todas las permutaciones posibles de las matrices escalonadas reducidas, respecto de sus columnas. Y la combinación lineal de estas celdas produce el espacio deseado. Algo importante de notar es que esta representación al momento de realizar la expansión en términos de la función  $\tau$  puede reproducir componentes nulos respecto de los términos  $E_i$ . Como puede ser notado de forma explícita en la ecuación 2.76. Esto es de suma importancia y deberá ser considerado para el estudio de las soluciones.

**Definición 2.9.** Una incrustación de Plücker  $pl$  es un mapeo de una Grassmaniana a un espacio proyectivo asociado mediante la siguiente relación.

$$pl : Gr(n, W) \rightarrow P(\Lambda^n W). \quad (2.84)$$

Donde el espacio objetivo es el espacio proyectivo del álgebra exterior de  $n$  formas de  $W$ . La construcción explícita de este no será desarrollada, pero los conceptos a utilizar pueden ser consultados en [15].

Para terminar esta sección desarrollaremos de forma explícita como pueden ser realizados estos encajes en términos de los datos de solución.

**Ejemplo 2.5.** Tomando la estructura que hemos utilizado hasta el momento producimos la siguiente representación matricial.

$$A = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Bajo el encaje de plücker tenemos la siguiente transformación,

$$pl(A) : A \rightarrow f_1 \wedge \dots \wedge f_n. \quad (2.86)$$

Debido a la propiedades de transformación de los  $k$ - covectores, podemos represen-

tar elementos en nuestro espacio objetivo por medio de la siguiente relación.

$$pl(A) = f_1 \wedge \dots \wedge f_n, \quad (2.87)$$

$$= \det(M)E_1 \wedge \dots \wedge E_n. \quad (2.88)$$

Lo que nos muestra explícitamente la proyectivización del campo en el cual nuestras funciones han sido definidas. Y estas relaciones de transformación dan una intuición básica de las consecuencias de la extensión al infinito, que pueden ser consultadas en [24].

**Ejemplo 2.6.** Otra construcción es por medio de las matrices de Vardenmonde asociadas al sistema de autovalores, en el cual obtenemos el dato del solitón al multiplicar un elemento de la Trasminada  $M$  la matriz de Vardenmonde asociada. Esta construcción no se utilizará pero se muestra el procedimiento.

$$\vec{\theta}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ k_i \\ \vdots \\ k_i^n \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1^k & \dots & \dots & k_k^k \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

$$\tilde{A} = \theta M, \quad (2.90)$$

$$\tilde{A}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{A}_k = \sum \Delta(M)_I Wr(\theta_1, \dots, \theta_k). \quad (2.91)$$

Lamentablemente para mantener la notación de los índices utilizados, se pierde ligeramente la claridad. Esta expresión es equivalente al 1.7.

### 2.3.0.2. Funciones $\tau$ y Relaciones de Plücker

Uno de los resultados más importantes del estudio de sistema integrables y las soluciones solitónicas fue obtenido por Mikio Sato. Este resultado proporciona una nueva forma de caracterizar las funciones  $\tau$  por medio de una Grassmaniana infinito dimensional. Además debido a que los objetos transformados por medio de un encaje de Plücker deben cumplir ciertas restricciones, estas condiciones nos permiten reproducir las soluciones de la ecuación diferencial. Las restricciones que deben cumplir estos objetos son llamadas Relaciones de Plücker, las cuales encontraremos que están directamente relacionadas con las expresiones obtenidas por medio del método bilinear de Hirota. Y las condiciones obtenidas en la sección 1.3.

**Definición 2.10.** Sea  $M \in Gr$ , las relaciones de Plücker esta matriz están dadas

por la siguiente ecuación:

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r M_{i_1 \dots i_{n-1}, j_r} M_{j_0 \dots \hat{j}_r, \dots, j_n} = 0. \quad (2.92)$$

**Teorema 2.3.1.** *Cualquier solución de la ecuación KP puede representarse por medio de un Grassmanniano infinito dimensional*

*Demostración.* La demostración, es fundamental en el estudio de los sistemas integrales y una varios enfoques de estudio de los mismos, puede ser consultada en el trabajo original de Mikio Sato en [24].  $\square$

Centrándonos en el caso finito dimensional bajo las restricciones de la ecuación KP, podemos representar una función  $\tau$  de la siguiente manera.

$$\tau = \sum_{I \binom{[k]}{n}} \Delta(A)_I E_I, \quad (2.93)$$

$$= \sum_{I \binom{[k]}{n}} \Delta(A)_I \prod_{j < n} W r(E_{I_1}, \dots, E_{I_n}), \quad (2.94)$$

$$= \sum_{I \binom{k}{n}} \Delta(A)_I \prod_{j < n} (k_{i_j} - k_{i_n}) e^{\theta_I}. \quad (2.95)$$

Donde la primera expresión fue realizada en el ejemplo 1.7 y la segunda es la expansión de los Wronskianos individuales obtenidos anteriormente al estudiar las soluciones para casos no triviales de  $n$  funciones  $f$ .

Notemos que en el ejemplo 1.6, se encontró que una función  $\tau$  solución de la ecuación KP, es a su vez solución del sistema Bilinear Asociado de Hirota 2.31, que puede apreciarse a su vez como la expansión del método de Laplace de la matriz asociada. Además evidentemente como la expresión obtenida en 1.141 es equivalente a las relaciones de Plücker anteriormente expuestas, entonces la solución del sistema bilinear de Hirota puede interpretarse como las relaciones de Plücker para el sistema físico correspondiente.

Estas relaciones son de suma importancia porque permiten la generalización de las soluciones de las ecuaciones de tipo KP en mayor cantidad de dimensiones de forma natural, como el proceso realizado en los ejemplos mencionados. Y producen otro resultado fundamental, en el cual podemos caracterizar de cierta manera las soluciones de KP dependiendo de los resultados de las mismas.

**Teorema 2.3.2.** *Las soluciones regulares de la ecuación KP son aquellas donde todas las menores del Dato de Solitón asociado  $A$ , son positivas.*

*Demostración.* La demostración fue realizada por medio de la construcción de celdas positroides definidas en el trabajo A. Postnikov y esta puede ser consultada en [17].  $\square$

Una consecuencia directa de este teorema es que los términos individuales de las relaciones de Plücker deben ser positivos para producir una solución regular.

Un poco de intuición que nos permite entender el panorama de este teorema y las soluciones regulares, se encuentra en la expansión de la ecuación 2.76 la cual expresa una combinación lineal en términos de las menores. Si por ejemplo una de estas menores fuese nula, la dimensión de nuestra solución o la cantidad de fronteras se reduciría. Por tanto para eliminar este tipo de problemáticas, en el resto de este estudio trabajaremos con las soluciones regulares de la ecuación KP.

**Ejemplo 2.7.** Mostramos un dato de solitón regular y uno irregular para el caso  $k = 3, n = 2$ .

Dato regular,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

Dato no regular,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1. \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Ahora que ya conocemos las características necesarias para producir soluciones de la ecuación KP, vamos a estudiar las gráficas de las mismas.



### 3. Gráficas de Solitones y Cuerpos de Newton Okounkov

Definiremos finalmente qué es una gráfica de un solitón, estudiaremos construcciones y propiedades de las mismas. Y utilizando realizaremos la construcción de los cuerpos de Newton Okounkov.

**Definición 3.1.** Una gráfica de un solitón  $C_t(A)$  es el conjunto de locos en el plano  $xy$ , donde el límite tropical del logaritmo de la función  $\tau$  es no lineal.

Además por convención, estas gráficas son encajadas en un disco del tamaño apropiado para poder apreciar el comportamiento del sistema. Esta definición utiliza terminología que no hemos desarrollado, pero a continuación exploraremos el significado de esta definición en conjunto de una interpretación física bastante natural que se da de las mismas.

#### 3.1. Geometría Tropical

A grandes rasgos la geometría tropical es una rama relativamente reciente de las matemáticas, la cual se trabaja en un semi anillo  $\mathbb{T}$  de reales extendidos, en los cuales se agrega únicamente uno de los infinitos dependiendo de la convención. Y se cambian las definiciones de las operaciones clásicas de la siguiente manera.

$$\mathbb{T} = \{\mathbb{R} \cup \{-\infty\}\} \tag{3.1}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{T}, \tag{3.2}$$

$$x \oplus y = \max(x, y), \tag{3.3}$$

$$x \otimes y = x + y. \tag{3.4}$$

Esta es la versión máxima de la geometría tropical y será la convención que utilizaremos en este estudio, obviaremos por lo general otras construcciones.

Ahora exploraremos las relaciones que nos permitirán obtener una noción física de las gráficas de solitones y nos centraremos únicamente en definir el límite tropical de las funciones  $\tau$ . Vamos a estudiar como se relacionan las operaciones de elementos en los espacios convencionales y los elementos de este espacio, sea entonces el siguiente binomio con coeficientes en  $\mathbb{F}$  y escalares unitarios,

$$|at^x + bt^y|. \quad (3.5)$$

Vamos a utilizar la desigualdad triangular para acotar el resultado de esta combinación lineal de la siguiente manera.

$$|at^x + bt^y| \leq 2\max\{|at^x|, |bt^y|\}, \quad (3.6)$$

$$|at^x + bt^y| \leq 2\max\{|a||t^x|, |b||t^y|\}, \quad (3.7)$$

$$|at^x + bt^y| \leq 2\max\{|t^x|, |t^y|\}. \quad (3.8)$$

Ahora supongamos que  $x > y$ , para poder establecer una la cota inferior que no será de utilidad al factorizar  $t^x$  en la expresión original, con lo que obtenemos:

$$|t^x(a - bt^{y-x})| \leq |at^x + bt^y| \leq 2|t^x|. \quad (3.9)$$

Aplicando ahora un logaritmo base  $t$ , obtenemos la siguiente relación,

$$x + \log_t\left(\left|1 - \frac{b}{a}t^{y-x}\right|\right) \leq \log_t|at^x + bt^y| \leq x + \log_t(2). \quad (3.10)$$

Evaluando este límite en el infinito obtenemos por el teorema de la comparación, que para  $x \neq y$ , el logaritmo de esta combinación da como resultado,

$$\log_t|at^x + bt^y| = x. \quad (3.11)$$

Por tanto vamos a identificar la relación encontrada como la suma tropical entre estos elementos de la siguiente manera,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \log_t(at^x + bt^y) \cong x \oplus y. \quad (3.12)$$

Este proceso puede generalizarse para una cantidad arbitraria por medio de inducción, pero esto no será realizado.

**Ejemplo 3.1.** Vamos a encontrar el análogo tropical de la siguiente expresión:

$$z = \sum e^{\beta\theta_i}. \quad (3.13)$$

Para realizar esta evaluación necesitamos hacer la sustitución  $t = e^\beta$ , lo que nos da la siguiente relación,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \log_t z = \log_t \left( \sum t^{\theta_i} \right). \quad (3.14)$$

Notemos entonces que podemos identificar este resultado como el proceso de realizar la suma tropical de todos los elementos de la combinación, como ha sido desarrollado anteriormente. Por tanto el resultado de esta expresión es el máximo de todas las componentes  $\theta$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = \bigoplus \theta_i = \max\{\theta_i\}. \quad (3.15)$$

A este proceso le llamaremos el límite tropical  $\lim_{tr}$ , o la tropicalización de algun elemento en nuestro espacio original.

Notemos ahora que obtener el límite tropical de un objeto desde el punto de vista de la física nos permite simplificar un objeto compuesto, en distintas partes de forma conveniente. Como lo puede ser deshacerse de la fase o la obtención de energías máximas y mínimas en una función de partición, como ha sido mostrado anteriormente.

Completaremos ahora esta sección computando el límite tropical de una función  $\tau$ . Para realizar este proceso empleamos un cambio de escala de las variables, el que convenientemente desde el punto de vista físico facilita bastante la interpretación. Entonces sea:

$$\tilde{x}_i = \frac{x}{\epsilon}, \quad \epsilon \ll 1, \quad (3.16)$$

$$t_i = \frac{\tilde{x}_i}{k^i}. \quad (3.17)$$

Lo que en términos de nuestras funciones se puede reescribir como,

$$\tilde{\tau} = \sum \epsilon \Delta(A)_I \tilde{E}_I, \quad (3.18)$$

$$= \sum \Delta(\tilde{A}) \tilde{E}_i. \quad (3.19)$$

Notemos que esta nueva función  $\tau$  mantiene la misma composición dada por la ecuación 2.95, por tanto sin pérdida de la generalidad podemos referirnos a la versión escalada sin necesidad de distinguirlas de manera explícita.

Ahora aplicando el límite tropical obtenemos la siguiente relación.

$$\lim_{tr}\tau = \lim_{tr} \sum \Delta(A_I)E_I, \quad (3.20)$$

$$= \ln_t(\Delta(A)_I \prod (k_{i_j} - k_{i_n})) + \max\{\theta_I\}, \quad (3.21)$$

$$= \max\{\log(\Delta(A)_I \prod (k_{i_j} - k_{i_n})) + \theta_I\}. \quad (3.22)$$

Realizando consideraciones de convergencia notemos que el primer término es de orden  $\epsilon$ , y recordando que físicamente nos interesará estudiar el comportamiento asintótico de las gráficas, entonces vamos a realizar la siguiente aproximación en el límite de estas relaciones,

$$\lim_{tr}\tau = \max\{\theta_I\}. \quad (3.23)$$

Notemos ahora que la expresión anterior cambia su construcción explícita dependiendo de la región del plano en la que estemos situados. Entonces vamos a realizar el mismo proceso estándar de fijar un tiempo específico para poder estudiar las dimensiones en el plano  $xy$ .

$$\lim_{tr}\tau(t_1, t_2, c) \cong \max\{\theta_I(x, y, c)\}. \quad (3.24)$$

Ahora para producir la gráfica del solitón, realizamos un procedimiento equivalente a la construcción de fronteras realizado anteriormente, que en este caso se resume en buscar las coordenadas donde existe una transición entre máximos de las funciones  $\theta_I$ .

**Ejemplo 3.2.** Sea un solitón(2,1), entonces el límite tropical de la función  $\tau$  asociada puede expresarse como,

$$\lim_{tr}\tau = \max\{E_1, E_2, E_3\}. \quad (3.25)$$

Y entonces su gráfica del solitón para un tiempo fijo  $C_t$ , está dada en los puntos donde las coordenadas cumplen la ecuación 2.63.

Notemos que existe una noción muy cercana a las funciones de partición generalizadas definidas por los principios y el marco teórico de la mecánica estadística.

Con respecto de la tropicalización de estructuras similares a la construcción de las funciones  $\tau$ . Una de las ventajas de este proceso es que extrae las constantes que romperían nuestra noción de estados de probabilidad. Este procedimiento puede consultarse con mayor detalle en [9]

## 3.2. Gráficas de Solitón

### 3.2.1. Delimitaciones Generales

Ahora exploraremos el procedimiento para generar las gráficas de solitones para configuraciones generales. Notemos que físicamente que por lo discutido en la sección anterior, una gráfica de solitón puede interpretarse como los puntos críticos entre 2 o 3 fases que están asociadas a las regiones dominadas por las funciones  $E_I$ . Ahora exploraremos ciertas propiedades de las gráficas.

Vamos a categorizar las partes de una gráfica de la siguiente manera.

- El borde de una gráfica es la frontera del disco en la cual ha sido encajada.
- Los vértices externos son los puntos en los que se cumplen las relaciones  $\theta_I(x, y) = \theta_J(x, y)$ , donde  $(x, y)$  se encuentran en el borde de la gráfica. Y además se cumple la desigualdad  $\theta_{I,J} \geq \theta_F$ , para cualquier otra función  $\theta$  asociada al sistema.
- Los vértices internos son los puntos en los que se cumple la relación  $\theta_I(x', y') = \theta_J(x', y')$ . Donde  $|x'|, |y'| \leq |x|, |y|$ . Para cualquier otro punto de la recta de intersección entre las funciones  $\theta$ .
- Una región o cara de la gráfica es el conjunto de todos los puntos encerrados entre vértices, o entre vértices y el borde de la gráfica.
- Un solitón de tipo línea o arista, es cualquier recta que une dos vértices de la gráfica.

Suele abusarse de la notación y llamar solitones no actotados a los vértices externos en algunos contextos.

Ahora vamos a estudiar propiedades de los vértices externos, los cuales son fundamentales para nuestro estudio.

**Teorema 3.2.1.** *La cantidad de vértices externos de un dato de solitón  $A_{kn}$  para la parte superior del plano está dada por  $n$ , y la cantidad de vértices externos en la parte inferior del plano está dada por la diferencia  $k - n$ .*

*Demostración.* La idea detrás de esta demostración, es que tenemos un sistema de  $\binom{k}{n}$  ecuaciones lineales, las cuales se ven reducidas por las desigualdades impuestas en la definición de los vértices externos. Realizando un poco de álgebra notamos que la solución de estas ecuaciones está dada por:

$$x = -y(k_i + k_j) + \mathbf{A}_{t_{IJ}}. \quad (3.26)$$

Donde  $\mathbf{A}_{t_{IJ}}$  es una constante la cual no es relevante para nuestro enfoque, pero notamos que esta relación produce un sistema de ecuaciones lineales no triviales. Y debido a la naturaleza asintótica de los vértices externos, las soluciones deseadas pueden obtenerse únicamente bajo la intersección de no más de 2 rectas y estas pueden formar no más de un vértice externo a pares.

Esta ruta de demostración es bastante extensa, pero nos da la intuición detrás de la magnitud del teorema, una demostración más corta, pero que utiliza herramientas combinatoriales que no han sido desarrolladas en este estudio, puede ser consultada en [11].  $\square$

Notemos que ahora nos es posible tomar un dato de solitón regular  $A_{kn}$ , y en base para un sistema de valores  $\vec{k}$  construir una gráfica de solitón  $C_t$  asociada de la siguiente manera. Encajamos el plano en un disco de tamaño apropiado para el borde, luego computamos su sistema de  $k$  vértices externos utilizando análisis asintótico. Y para terminar utilizando la ecuación 3.26, podemos encontrar cualquier otro vértice interno de la gráfica. Ahora bien, debemos discutir las convenciones de notación para identificar estas estructuras, además de estudiar como se comportan estas gráficas respecto a su evolución temporal.

### 3.2.2. Construcciones Explícitas

Debido a que nuestro interés se centra en la estructura topológica de las gráficas, en el resto de esta sección favoreceremos el uso de la terminología combinatorial expresando los datos de solitón como permutaciones específicas, como ha sido desarrollado con anterioridad. Para ello delimitaremos el procedimiento para la construcción de las gráficas dada un sistema físico en específico.

### 3.2.2.1. Construcción de Gráficas por medio de Permutaciones

Dado un dato de solitón  $A_{kn}$ , este sistema contiene  $n$  vértices externos superiores y  $k - n$  vértices externos inferiores. Para representar este fenómeno por medio de permutaciones, dado un sistema  $\pi = (a, b, c)$ , cada vértice externo superior está indexado por una posición  $[i, \pi(i)]$  donde  $\pi(i) < i$ , que se recorre de derecha a izquierda en la parte superior del plano. Y cada vértice externo inferior está dado por la condición contraria e indexando de como  $[\pi(i), i]$ , recorriendo de derecha a izquierda en la parte inferior de la gráfica.

Además de obtener un sistema para etiquetar los vértices externos de una gráfica específica. Podemos obtener la etiqueta explícita de la región izquierda del plano donde  $x \ll 0$ , sin necesidad de realizar algún tipo de cálculos. Esta región  $E_I$  se obtiene indexando a una lista  $I$ , cada una de las posiciones de una permutación donde se produce un vértice externo.

Este sistema de caracterización, es una generalización de la convención explicada anteriormente en el capítulo 2, sobre la estructura de las gráficas de solitones.

No profundizaremos en la teoría y propiedades de la combinatoria del sistema, si no únicamente construiremos la terminología y los procesos para la producción de gráficas. Estas construcciones pueden ser consultadas con detalle en [12].

**Ejemplo 3.3.** Tomemos de base los solitones construidos en los ejemplos 2.2 y 2.4. Estos como fue desarrollado anteriormente están dados por las siguientes permutaciones asociadas a los sistemas,

$$\pi_{2.2} = (3, 1, 2), \quad (3.27)$$

$$\pi_{2.4} = (2, 3, 1). \quad (3.28)$$

Utilizando la caracterización definida anteriormente, esto da lugar para el primer caso de un solitón(2,1) y en el segundo caso un solitón(1,2). Con sus vértices externos indexados por medio de la notación definida anteriormente.

Además la regiones izquierdas donde  $x \ll 0$  de estos solitones, están dada por las funciones  $E_I$  indexadas como  $E_1$  y  $E_{21}$  respectivamente.

Para terminar con este ejemplo, algo bastante de importante de notar es que estos resultados son independientes del sistema de  $\vec{k}$  asociado, además el tiempo específico en el cual se realiza la gráfica del solitón.

Ahora que ya nos es posible etiquetar todos los vértices externos de una gráfica y cada una de las regiones. Vamos a proporcionar un algoritmo para etiquetar los vértices internos de un sistema específico, sin necesidad de resolver las ecuaciones 3.26.

### 3.2.2.2. Categorización de Vértices Internos

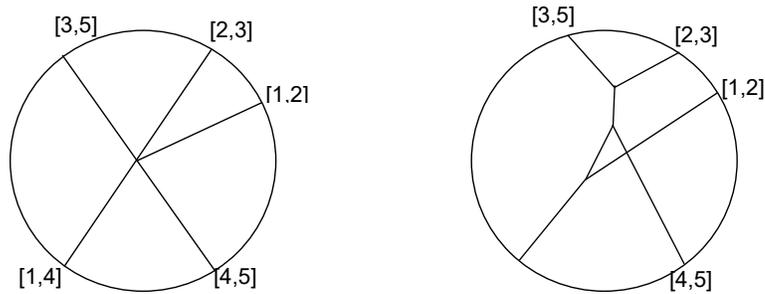
Para producir el resto de elementos de una gráfica de solitón podemos fácilmente realizar los cálculos explícitos para encontrar el resto de elementos. Esto puede producir únicamente un problema de notación en el momento en el que tenemos un punto el cual es solución de más de 2 ecuaciones simultáneamente. Para evitar este tipo de problemas de categorización y facilitar la producción de gráficas sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones, se utiliza el siguiente algoritmo.

Dada una gráfica de solitón, la cual ya tenga sus vértices externos etiquetados, se realizará el siguiente procedimiento.

1. Se encontrará el camino minimal, que se refiere al camino con menor cantidad de vértices entre 2 puntos. Que une a los vértices externos  $[1, \pi(1)]$  y  $[\pi(a), 1]$ .
2. Se realizará el mismo proceso para el resto de vértices externos, de forma en que se computen todos los caminos minimales entre los mismos.
3. Se etiquetará cada vértice interno como  $[i, j]$  con  $i < j$ . Como la intersección de dos caminos minimales que unen a los vértices  $[i, \pi(i)], [\pi(a), i]$  con  $[j, \pi(j)], [\pi(b), j]$ .

Ahora exploraremos un par de ejemplos de construcciones generales de gráficas de solitones.

**Ejemplo 3.4.** Sea un solitón con  $k = 5, n = 3$ , dado por un dato de solitón y sistema de valores  $\vec{k}$ , tales que produzcan gráfica de solitón la cual todas las funciones  $\theta_I$  se intersequen en el origen en el instante  $t = 0$ .

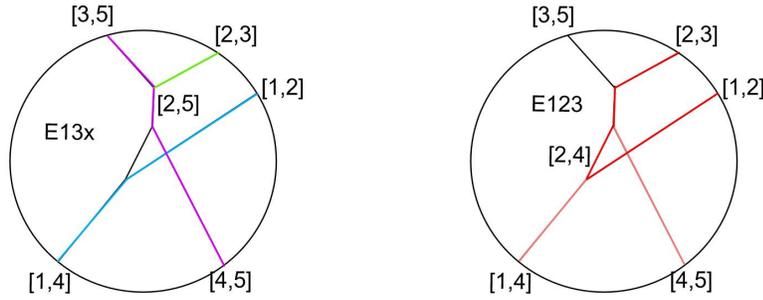


**Figura 3.1.** Gráfica de Solitón  $\pi = (2, 3, 5, 1, 4)$  para (a)  $t = 0$ , (b)  $t = 16$ , ejemplo 3.4.

Notemos que la topología respecto de las conexiones de los vértices internos de la gráfica a primera vista, parece que fue ligeramente modificada respecto de la evolución temporal. Ya que existen configuraciones como en 3.1 (b), donde una línea de solitón se sobrepone con otra sin formar vértices internos, a diferencia de lo que parecería en el tiempo inicial. Esta dificultad de visualización, ya que la topología de las gráficas es invariante respecto del tiempo. Se debe a la convención que hemos utilizado hasta el momento para realizar las gráficas. El fenómeno que se esconde detrás de estas dificultades son las relaciones de dispersión de los solitones. Estas y la demostración explícita de la invarianza topología no serán desarrolladas pero pueden ser consultadas en [11]. Estas relaciones producen estos fenómenos que solo son posibles de corroborar de manera explícita realizando los cálculos, ya que un vértice interno solo puede ser formado como la intersección de no más de 3 aristas distintas. En la siguiente sección se esclarecerá estos fenómenos y como poder evitar estos problemas mediante un algoritmo de graficación.

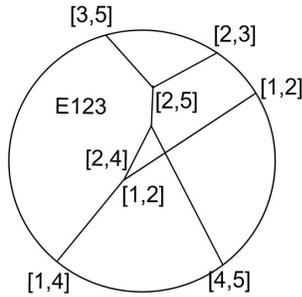
Ahora notemos que en la gráfica los vértices han sido indexados de manera explícita utilizando nuestro convenio de selección. Donde para la permutación  $\pi = (2, 3, 5, 1, 24)$ , los términos donde el valor del número es mayor a su orden en la lista, corresponden a los vértices superiores y en caso contrario producen vértices inferiores. Lo que es consistente con el caso  $k = 5, n = 3$ , el cual por el teorema 3.2.1, obtenemos que es un solitón(3,2).

Para terminar mostramos el proceso de indexación para los vértices internos de la gráfica del solitón.



**Figura 3.2.** Proceso de indexación de la Gráfica de Solitón ejemplo 3.4.

Finalmente obtenemos la gráfica de solitón asociada a la cual podemos también indexar la región izquierda obtenida por los índices de los elementos que producen los vértices externos superiores.



**Figura 3.3.** Gráfica del Solitón(3,2), obtenida tras terminar el algoritmo de indexación de la sección 3.2.2.

Para terminar es importante aclarar que debido a nuestro criterio de graficación existen vértices internos que pueden producir la misma indexación que los externos, en dado caso esto suceda a futuro debido a la convención estandarizada y la interpretación física. La etiqueta del vértice interno será obviada ya que esa arista corresponde a la misma línea de solitón en ambos vértices.

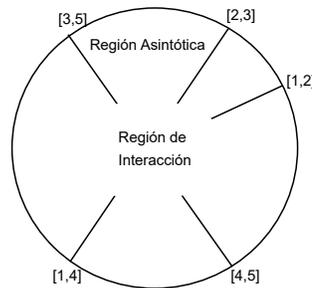
Notemos que la ventaja de este procedimiento es que solamente debemos realizar un análisis asintótico en las regiones restantes, para obtener toda la información del sistema sin haber necesitado realizar todos los cálculos explícitos.

### 3.2.3. Evolución Temporal de las Gráficas

Notemos que para categorizar la evolución temporal de las gráficas de solitones, debemos computar una de ellas para encontrar su topología en el plano  $xy$  para un tiempo específico. Ya que una traslación temporal, solamente cambia los puntos de las intersecciones específicas entre las funciones  $\theta_I$ , como puede observarse por ejemplo en la ecuación 3.26. Ahora nos enfocaremos en solventar estos problemas de claridad respecto a que existan en las gráficas de solitón puntos en los cuales 2 rectas se intersequen pero no exista un vértice asociado a las mismas, lo cual es imposible debido a su definición 3.2.1.

Entonces debido a que la topología de la gráfica para nuestros fines no presenta cambios relevantes respecto de su evolución temporal, vamos a obviar estos comportamientos y nos centraremos en analizar la estructura para un tiempo en específico, el cual por lo general será  $t = 0$ . Y para arreglar estos problemas de claridad, construiremos otro tipo de gráficas las cuales mostrarán de forma explícita la geometría de la configuración de estas gráficas de solitones. Nuevamente se le recomienda al lector consultar los detalles de estas construcciones y sus relaciones con los fenómenos discutidos en [12]. Para terminar mostraremos la terminología que suele ser empleada para describir este fenómeno.

**Ejemplo 3.5.** Sea el solitón dado por la figura 3.2, la región en la cual se produce cualquier tipo de intersección entre las rectas que marca fronteras distintas de funciones  $\theta_I$ , aunque no produzca un vértice interno es conocida como la región de interacción. Y la gráfica puede ser separada en 2 regiones de la siguiente manera.



**Figura 3.4.** Gráfica de las regiones del Solitón(3,2), obtenida del ejemplo 3.4.

Estos objetos son de interés matemático y son llamados collares de Grassman.

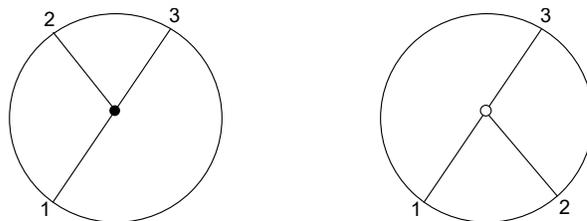
### 3.3. Gráficas Plábicas

Ahora construiremos objetos conocidos como gráficas plábicas generalizadas utilizando una gráfica de solitón. Con lo cual es posible mitigar los problemas anteriores, con respecto a que se necesita calcular explícitamente la evolución temporal del gráfico y la incertidumbre entre intersecciones y vértices internos de las gráficas. En esta sección nuevamente nos apoyaremos sobre el trabajo clave de Yuji Kodama en [12]. Ya que no serán cubiertos ciertos detalles de las definiciones que fueron expuestas en ese artículo. Hacemos saber al lector que trabajos se basan en las contribuciones originales de Postnikov como en [17], pero afinan y reducen el costo de compresión y cómputo de estas gráficas.

**Definición 3.2.** Una gráfica plábica generalizada, es una gráfica no dirigida dibujada adentro de un disco, con  $k$  vértices externos separados y ordenados de manera arbitraria sobre el borde de la misma. Cada vértice interno es coloreado con un círculo blanco cuando este une 2 aristas en su parte inferior con una arista en su parte superior. Y es coloreado de color negro cuando este une una arista en su parte inferior, con dos aristas en su parte superior. Se permiten las intersecciones de las gráficas en forma de  $X$ , pero estas no forman un vértice debido a que unirían 2 aristas en su parte inferior con 2 aristas en su parte superior. Cualquier otro tipo de intersección está prohibida.

Notemos inmediatamente que estas gráficas respetan el comportamiento producido por las gráficas de solitón, y nos permiten tener una intuición que facilita bastante la identificación de puntos donde una gráfica de solitón presenta una intersección que no es vértice interno de la misma.

**Ejemplo 3.6.** Mostramos las gráficas plábicas de un solitón(2,1) y un solitón(1,2).



**Figura 3.5.** Gráficas plábicas (a) solitón(1,2), (b) solitón(2,1).

La convención para etiquetar los vértices externos de una gráfica plábica con respecto de una gráfica de solitón, es bastante sencilla. Esta consta en tomar cualquier par  $[i, \pi(i)]$ , o  $[\pi(j), j]$ . Y colocar como vértice el término de la permutación, en vez del índice del par respectivo.

### 3.3.1. Sistema de Construcciones Plábicas-Solitón

Realizar gráficas plábicas puede ser una herramienta útil para realizar análisis visuales de los sistemas físicos de solitones, sin necesidad de realizar los cálculos. Pero esto requiere la necesidad de obtener 2 tipos distintos de gráficas para analizar los sistemas. Ahora definiremos una dinámica en la construcción plábica con la cual es posible producir o recuperar una gráfica de solitón por medio de trayectorias en estos sistemas plábicos, con lo cual ya no será necesario producir ambas gráficas para realizar el análisis completo del sistema.

Produciremos entonces el siguiente sistema de trayectorias  $\mathcal{T}$  de la siguiente manera. Una trayectoria es un proceso que comienza en cada uno de los vértices externos, en el cual se produce un camino que sigue a su arista asociada hasta llegar a un vértice interno. En cada vértice interno se sigue el camino por la arista de la derecha, si este vértice es de color negro. Y se sigue el camino de la arista izquierda cuando este vértice sea de color blanco. Este proceso se repite hasta llegar al borde en uno de los vértices externos de la gráfica. Algo importante de mencionar es que la trayectoria depende de la orientación de la gráfica. El proceso para elegir la orientación para elegir un camino se realiza suponiendo que este siempre que entra en un vértice por la parte inferior del mismo. O sea se realiza una rotación para que el camino se encuentre directamente hacia abajo del vértice en el cual se realiza la elección, y la dirección de salida se realiza por medio del criterio mencionado De forma que las trayectorias vistas desde una perspectiva fija, no cumplen las reglas anteriormente mencionadas. Finalmente parametrizaremos cada una de las trayectorias  $T_i$ , colocándole como índice el vértice externo de salida de una de estas.

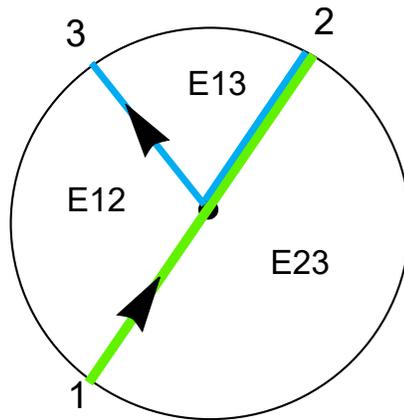
La ventaja de este sistema de trayectorias es que permite recuperar la información de la gráfica del solitón asociado.

**Teorema 3.3.1.** *Dado un sistema de trayectorias  $\mathcal{T}$  en una gráfica plábica, este permite reproducir las etiquetas de los vértices externos y las regiones de una gráfica de solitón  $C_t$  asociada. Por medio de particiones izquierdas de las trayectorias en la gráfica plábica, y los vértices externos de llegada de las trayectorias  $T_i$ .*

*Demostración.* La demostración de este teorema se reduce a realizar las cuentas y la combinatoria de estas definiciones con respecto de las construcciones de las gráficas de solitones. Esta conjunto con la definición de las trayectorias  $\mathcal{T}$ , que son un refinamiento del trabajo realizado por Postnikov. Pueden ser consultadas nuevamente en [12].  $\square$

Ahora realizaremos varios ejemplos de las gráficas de solitón obtenidas en secciones anteriores, en los cuales produciremos sus gráficas plábicas asociadas y el sistema de trayectorias con lso cuales podemos recuperar las etiquetas originales de las gráficas de solitón.

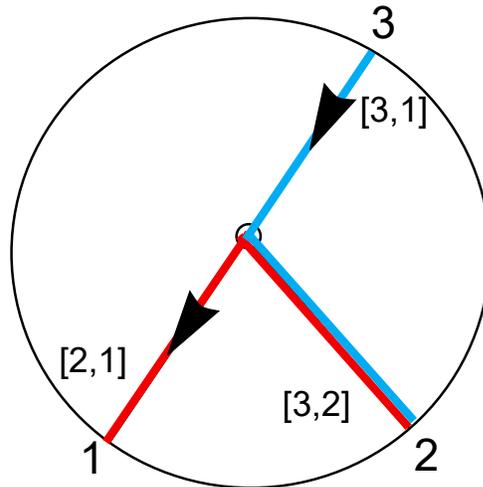
**Ejemplo 3.7.** Sean las siguientes graficas plábicas de los solitones  $(2,1)$  y  $(1,2)$ . Dadas por la figura 3.7. Produciremos a continuación su sistema de trayectorias con lo cual se recuperarán las etiquetas de las aristas y las regiones dominantes.



**Figura 3.6.** Gráficas plábica de trayectorias  $T_1, T_2$  del solitón  $(1,2)$ . Se ejemplifica la Indexación de Regiones dominantes.

Notemos que es importante tomar en cuenta la orientación de salida de los caminos, ya que al ver el camino  $T_2$  con respecto de la gráfica ejemplificada. Aparentemente este toma un giro en la dirección contraria de nuestro sistema de trayectorias. Debido a eso fue colocado de manera explícita la trayectoria utilizada, pero es importante recordar que las gráficas plábicas son no dirigidas.

Ahora estudiaremos el proceso de indexación para recuperar los vértices exteriores de la gráfica de solitón.



**Figura 3.7.** Gráficas plábica de trayectorias  $T_2, T_3$  del solitón(2,1). Se ejemplifica el proceso de Indexación de Vértices exteriores.

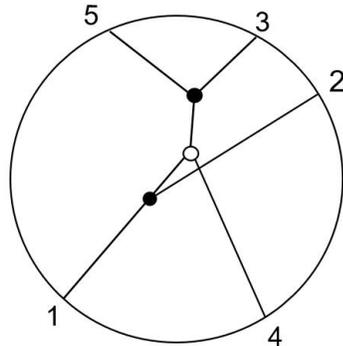
De igual manera es posible recuperar los valores de los vértices internos, pero este no será realizado ya que está fuera de nuestro enfoque de estudio.

Para terminar realizaremos un ejemplo con mayor complejidad, basándonos en el solitón del ejemplo 3.4.

### 3.3.2. Ejemplos Generales Gráficas Plábicas

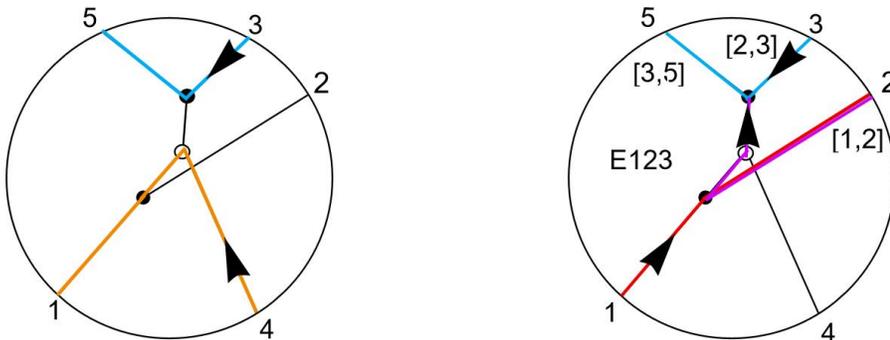
Para terminar este tema, realizaremos dos ejemplos de construcciones de una gráfica plábica por medio de un solitón específico. Para empezar se realizará la construcción explícita del sistema plábico y trayectorias de la gráfica de solitón del ejemplo 3.4. Y luego se realizará el proceso inverso de reconstruir una gráfica de solitón en base a una gráfica plábica asociada. Así como su representación por medio de permutaciones.

**Ejemplo 3.8.** Construiremos primero una gráfica plábica asociada a un sistema de solitón(3,2) del ejemplo 3.4.



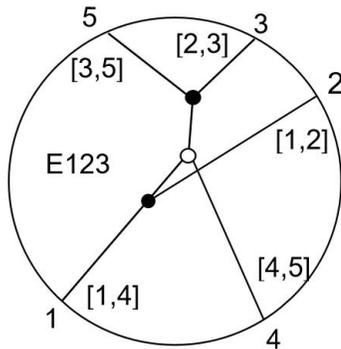
**Figura 3.8.** Gráficas plábica del solitón(3,2) del ejemplo 3.4.

Ahora ejemplificamos el proceso de trayectorias para obtener la información de la gráfica del solitón.



**Figura 3.9.** Sistema de trayectorias de un solitón(3,2), (a) muestra  $T_4, T_5$ , (b) muestra  $T_1, T_2, T_3$  e identifica los vértices externos como los destinos de las trayectorias.

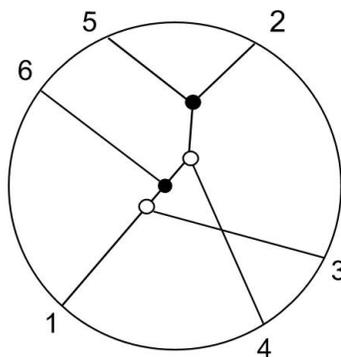
Para terminar mostraremos las etiquetas respectivas de la gráfica del solitón, encontradas por medio del sistema de trayectorias de estas gráficas plábicas.



**Figura 3.10.** Gráficas plábica(3,2) con todos los vértices externos identificados.

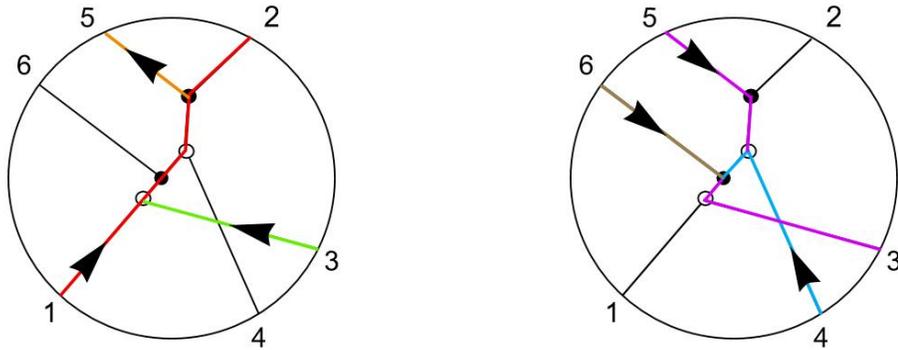
Ahora realizaremos un ejemplo del proceso inverso, asociando la dinámica de una gráfica plábica con mayor complejidad a un solitón  $(i, j)$  y su gráfica  $C_t$  de solitón respectiva. Todos los vértices internos y externos serán identificados. Además será proporcionada una lista de regiones compatibles en sus caras intermedias, las cuales dependerán de los valores y la interacción del vector  $\vec{k}$  con un dato  $A_{kn}$  específicos. De estos solo se asumirá regularidad y no se escogerá un caso particular, si no se dejará de manera explícita el sistema de solución de un conjunto de estas.

**Ejemplo 3.9.** Sea gráfica plábica asociada a un solitón(3,3).



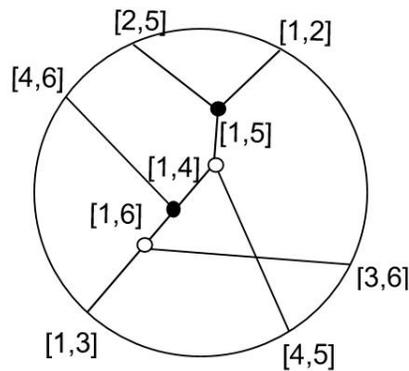
**Figura 3.11.** Gráfica plábica asociada a un solitón(3,3).

Ahora reproduciremos la dinámica del sistema encontrando todos los elementos de su sistema de trayectorias  $\mathcal{T}$ .



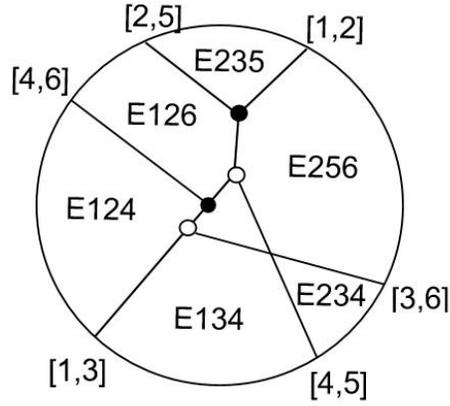
**Figura 3.12.** Sistema de trayectorias(3,3), (a) muestra  $T_1, T_2, T_3$ , (b) muestra  $T_3, T_4, T_5$ .

Este sistema produce toda la información necesaria para poder etiquetar todos los vértices internos, externos y las regiones  $x \ll 0$ ,  $x \gg 0$ . Pero debido a la naturaleza combinatorial es posible con estas restricciones seleccionar un sistema de etiquetas en las caras compatible con los vértices externos. A continuación se muestra la gráfica de solitón asociada con todos los vértices identificados.



**Figura 3.13.** Gráfica plábica con vértices identificados respecto de un Solitón(3,3).

Ahora construiremos un sistema de fronteras consistente con la estructura topológica de la gráfica plábica y su solitón(3,3) equivalente asociado.



**Figura 3.14.** Sistema de fronteras compatible asociado a un solitón(3,3).

Notemos que las regiones han sido escogidas de forma combinatorial tomando en cuenta el proceso de selección de las particiones izquierdas que son producidas por cada una de las trayectorias  $T_i$ .

Terminaremos este ejemplo mostrando una representación posible para un dato de solitón  $A_{kn}$  de este sistema y mostrando la construcción del mismo por medio de una permutación.

$$\pi = (2, 5, 1, 6, 4, 3). \quad (3.29)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Donde el Dato de solitón está en términos de la base de Schubert para  $A_{63} \in Gr(6, 3)$ . Este elemento también podría ser construido por medio de las relaciones de Plücker.

Con esto tenemos todas las herramientas necesarias para producir los cuerpos de Newton Okounkov tomando de base una gráfica de solitón específica.

## 3.4. Cuerpos de Newton Okounkov

Debido a que los Grassmanianos están relacionados con otro tipo de estructuras como las variedades tóricas, ya que estas forman parte de una categoría de variedades esféricas. El estudio de las soluciones solitónicas y datos de solitón se ha vuelto de interés en las líneas de estudio de la geometría algebraica. Esto ha motivado la construcción de mapas de momentos, que pueden ser consultados en [14]. Como pueden ser los politopos de Newton y la generalización de los mismos que son los Cuerpos de Newton Okounkov.

En este estudio construiremos los cuerpos asociados a un sistema físico por medio de una gráfica plábica asociada a un dato de solitón. Algo importante de aclarar es que realizaremos el proceso con la notación de Kodama en [12], no la original propuesta por Postnikov.

Para comenzar daremos una noción general de la motivación física y matemática y de la intuición de estas construcciones.

### 3.4.1. Politopos de Newton

Un politopo de Newton está definido como la envolvente convexa de los vectores exponentes de los monomios de un polinomio. Expresamos ahora de manera explícita la construcción de un polinomio  $p \in K[x_1, \dots, x_n] = K[\vec{x}]$ .

$$p = \sum_i \vec{b}_i \vec{x}^{a_i}, \quad (3.31)$$

$$= \vec{b}_1 \begin{bmatrix} x_1^{a_1} \\ \vdots \\ x_n^{a_1} \end{bmatrix} + \dots + \vec{b}_j \begin{bmatrix} x_1^{a_j} \\ \vdots \\ x_n^{a_j} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Entonces su politopo de Newton asociado  $N(p)$  tiene la siguiente manera,

$$N(p) = \text{conv}(p), \quad (3.33)$$

$$= \left\{ \sum c_i a_i : \sum c_i = 1, c_i \geq 0 \right\}. \quad (3.34)$$

Los politopos de Newton aparecen frecuentemente en las áreas de estudio de la geometría tropical y además se utilizan para estudiar la relevancia de variables específicas en polinomios multivariable, los detalles de los mismos pueden consultarse en [5].

Notemos que ambos de estos casos aparecen en las gráficas de las soluciones solitónicas de la ecuación KP.

Ahora realizaremos un par de ejemplos de estos politopos en el caso 2Dimensional.

**Ejemplo 3.10.** Sean los siguientes polinomios:

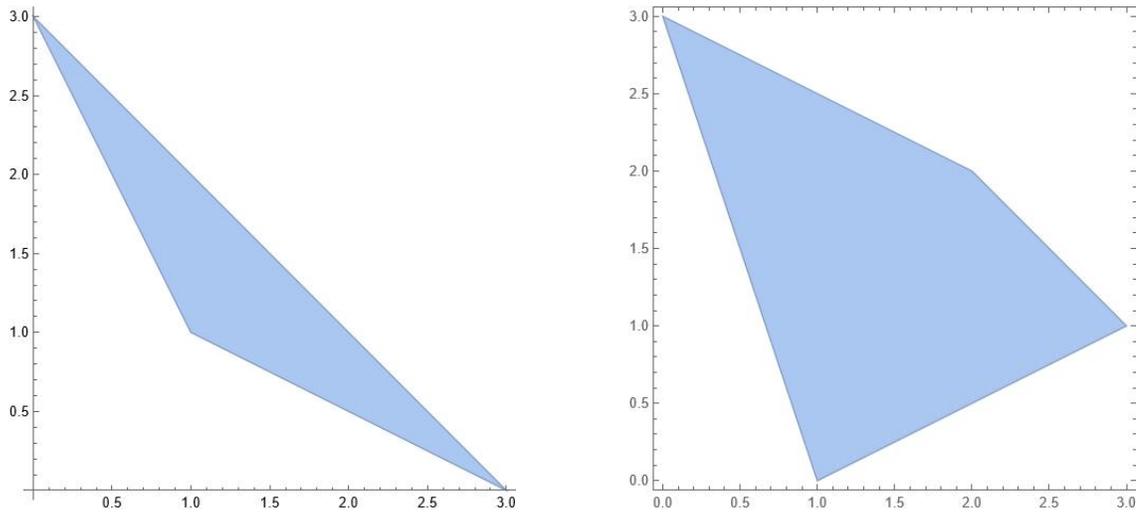
$$p_1 = x^3 + x^2y + xy + y^2, \quad (3.35)$$

$$p_2 = 10x^3y + x^2y^2 + x + y^3. \quad (3.36)$$

Imponiendo un sistema de coordenadas en el cual el exponente de la variable  $x$  se encuentre en el eje horizontal. Los politopos del primer polinomio y segundo polinomios están formados por las envolventes convexas de los siguientes puntos.

$$N(p_1) = \text{conv} \begin{bmatrix} (3, 0) \\ (2, 1) \\ (1, 1) \\ (0, 3) \end{bmatrix}, \quad N(p_2) = \text{conv} \begin{bmatrix} (3, 1) \\ (2, 2) \\ (1, 0) \\ (0, 3) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Entonces estas envolventes convexas pueden graficarse en el plano  $xy$ , y con ello obtener una gráfica de los politopos de Newton asociados a los polinomios de este caso particular de la siguiente manera.



**Figura 3.15.** Envloventes Convexas de los sistemas de puntos, (a)  $N(p_1)$ , (b)  $N(p_2)$ .

Entendiendo el comportamiento de estos objetos, es importante notar que las soluciones de la ecuación KP de tipo  $ln\tau$ , solamente producirían politopos de Newton triviales. Ya que estas están formadas por las expresiones linealizadas en términos de combinaciones de funciones  $\theta_I$ . Esta es una de las motivaciones para utilizar otro tipo de objetos para el estudio de las mismas. No obstante, la idea general de capturar un objeto que está representado como la combinación lineal de elementos que formarán una base en  $\mathbb{R}^n$ . Es un proceso similar al que será realizado para producir los cuerpos de Newton Okounkov de los datos de solitón asociados a los mismos.

### 3.4.2. Nociones Generales Cuerpos de Newton Okounkov

#### 3.4.3. Motivación de su Construcción

Como puede ser consultado en [10], los espacios Grassmanianos están bastante relacionados con las variedades tóricas. En geometría algebraica es común computar los politopos de momentos de estas los cuales pueden caracterizar la dimensión de las funciones racionales que fungen una función importante en estas variedades. Esta noción fue generalizada por Okounkov para una categoría más amplia de objetos matemáticos. Para nuestro interés esto nos permitirá producir figuras convexas análogas a las construcciones de las variedades tóricas y a los politopos de Newton en los Datos de solitón de una Grassmaniana. Las cuales veremos a continuación que están relacionadas con las construcciones que hemos realizado hasta el momento.

Estas construcciones además están bastante ligadas a la teoría de sistemas integrables, ya que es posible por medio de una estructura simpléctica y degeneraciones tóricas es posible reproducir un sistema integrable clásico del tipo de Liouville como fue discutido en el primer capítulo. La construcción específica no será desarrollada pero puede ser consultada en [8].

Existen 2 formas de definir estos cuerpos para nuestro enfoque de trabajo. La manera natural desde la física es definiendo un superpotencial, el cual tiene un rol similar a los procesos realizados para obtener las soluciones de la ecuación KP. Este para nuestros fines es una función regular de un espacio cociente respecto de la Grassmaniana  $Gr(n, k)$  a  $\mathbb{F}$ . Y este puede representarse como una combinación lineal de  $k$  elementos los cuales están dados por las relaciones de Plücker del espacio específico.

De manera similar al proceso realizado con anterioridad es posible asignarle una gráfica plábica generalizada a la tropicalización de estos superpotenciales para un sistema de reglas de indexación y dinámica interna. Esta construcción no será utilizada pero los detalles de la misma y la demostración que esta es equivalente a un Cuerpo de Newton Okounkov el cual será desarrollado a continuación pueden ser consultadas en [21].

Se hace mención al lector que nuestra convención de grafiación de los sistemas plábicos está dada por el trabajo realizado por la línea de estudio Japonesa realizada por Hirota [12]. Y las construcciones de los artículos presentados en esta sección han sido construidas con la convención de Postnikov.

### 3.4.4. Construcción Para Datos Regulares de Solitón

Debido a la cantidad de herramientas matemáticas que no serán desarrolladas en este estudio que son necesarias para definir con generalidad un cuerpo de Newton Okounkov. Por ello en la sección anterior se proporcionó un panorama general de la noción física para la utilización de los mismos.

Por tanto para definir estos objetos se realizará una simplificación para el caso de la Grassmaniana totalmente positiva, la cual es nuestro interés de estudio.

**Definición 3.3.** Un Cuerpo de Newton Okounkov  $\Delta$  para un Dato regular de Solitón KP, es la envolvente convexa del sistema de trayectorias minimal  $\mathcal{T}_{min}$  asociado a la gráfica plábica del mismo. Esto puede expresarse de la siguiente manera.

$$\Delta(A_{kn}, \mathcal{T}) := \text{conv} \left( \overline{\bigcup \frac{\mathcal{T}_{min}(T_i)}{d} : T_i \in A, \text{deg}(T_i) = d} \right) \subset \mathbb{R}^{n(k-n)+1}. \quad (3.38)$$

Además uno de los resultados del trabajo de Lara Bossinger el cual fue fundamental para este estudio, que puede ser consultado en [?]. Nos permite escribir esta expresión para este caso particular de la siguiente manera.

$$\Delta(A_{kn}, \mathcal{T}) = \text{conv} \left( \bigcup_k \left( \bigcup \frac{N(T_i)}{k} \right) \right). \quad (3.39)$$

El cual es llamado Cuerpo Intrínseco de Newton Okounkov. Y donde en este caso es posible realizar estas construcciones por medio de las uniones de los politopos de Newton Asociados

Para terminar estas definiciones impondremos ciertas condiciones en los sistemas de trayectorias  $\mathcal{T}$ , los cuales en la literatura proporcionada son conocidos como valuaciones. Y explicaremos la diferencia entre las construcciones de nuestras gráficas plábicas y dinámica de las mismas con respecto de las propuestas por Postnikov.

**Definición 3.4.** Siguiendo la descripción de estas funciones, realizada por Harada, [8]. Una valuación a la cual nosotros le hemos definido como sistema de trayectorias. Es una función que cumple las siguientes condiciones.

$$v : \mathbb{F}(Gr(n, k)_{>0}) \rightarrow \mathbb{Z}^n. \quad (3.40)$$

$$v(fg) = v(f) + v(g), \quad (3.41)$$

$$v(f + g) \geq \min(v(f), v(g)), \quad (3.42)$$

$$v(\lambda f) = v(f). \quad (3.43)$$

Donde estamos asumiendo que los escalares son distintos de cero.

Ahora debido al abuso y distintas notaciones en las líneas de investigación utilizadas en este estudio. Debemos especificar la convención a realizar y hacemos conocer al lector que el estudio de los distintos cuerpos de Newton Okounkov producidos para distintos sistemas de trayectorias  $\mathcal{T}$  o valuaciones  $v$  diferentes. Es una línea abierta de investigación, por lo tanto es posible que los cuerpos construidos a continuación, presenten diferencias con los realizados por medio un sistema distinto de convenciones.

Entonces para producir un cuerpo de Newton Okounkov asociado a un solitón regular realizaremos las gráficas plábicas generalizadas propuestas por Kodama [12], las cuales son incompatibles con los sistemas presentados en las investigaciones con la notación de Postnikov. Debido a que existen puntos los cuales presentan más de 2 intersecciones en sus vértices. Y están representados por medio de un sistema distinto de indexación.

Por tanto las gráficas plábicas serán traducidas a nuestro sistema de convención y luego realizaremos la valuación minimal realizada por las líneas de Postnikov. La cual produce el sistemas de trayectorias  $\mathcal{T}_{min}$ , que consta en encontrar los caminos sin intersección de los vértices externos superiores hacia los vértices externos inferiores. En los cuales estos cruzan por la menor cantidad posible de caras en la partición izquierda de la gráfica plábica asociada al solitón.

Esto quiere decir que para realizar los cuerpos de Newton Okounkov, tomaremos todas las configuraciones de las combinaciones de  $k - n$  vértices externos posibles  $J = \binom{k-n}{[k-n]}$ . Encontraremos su sistema de trayectorias minimal  $\mathcal{T}$ , en el cual obtendremos una trayectoria en términos de combinaciones lineales de los vértices por los cuales estas fluyen. Y utilizaremos las ecuaciones 3.38, 3.39. Para producir los objetos deseados.

### 3.4.5. Ejemplos de Cuerpos de Newton Okounkov

Para terminar este estudio produciremos los cuerpos de Newton Okounkov de los solitones producidos en los ejemplos realizados con anterioridad. Nos referiremos a los elementos de la base de las trayectorias, los cuales son los vértices de las mismas como  $e[i, j]$  sin corchetes. Y a las trayectorias que comienzan en el vértice superior  $a$  y terminan en el vértice  $b$  como  $T_{ab}$

**Ejemplo 3.11.** Realizamos el cuerpo de Newton Okounkov asociado al solitón del ejemplo 2.1. Computaremos el sistema de trayectorias el cual está dado por:

$$T_{31} = e_{13} + e_{12}, \quad (3.44)$$

$$T_{32} = e_{13} + e_{23}. \quad (3.45)$$

Entonces el Cuerpo de Newton Okounkov asociado al sistema es,

$$\Delta \subset R^3, \quad (3.46)$$

$$\Delta = \text{conv} \left( \frac{1}{2}(e_{13} + e_{12} \cup e_{13} + e_{23}), \right) \quad (3.47)$$

$$= \text{conv} \left( \frac{e_{12} + e_{13} + e_{23}}{2} \right). \quad (3.48)$$

Para este ejemplo realizamos la representación canónica en  $R^3$  la cual está dada por,

$$\text{conv} \left( \frac{1}{2}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \right). \quad (3.49)$$

**Ejemplo 3.12.** Realizamos el cuerpo de Newton Okounkov del ejemplo 2.4. Este cuerpo presenta es funcionalmente equivalente al asociado al solitón  $\pi = (3, 1, 2)$ .

$$T_{21} = e_{12} + e_{31}, \quad (3.50)$$

$$T_{31} = e_{23} + e_{31}. \quad (3.51)$$

Este sistema reproduce un  $\Delta$  equivalente al realizado con anterioridad. Notemos que similarmente el  $\Delta$  asociado a este sistema tiene la forma:

$$\Delta = \text{conv}\left(\sum^3 a_i e_i\right). \quad (3.52)$$

**Ejemplo 3.13.** Ahora exploramos un solitones con dinámicas más interesantes, tomemos el solitón del ejemplo 3.4. Para realizar estos análisis debemos computar todas las trayectorias simultaneas compatibles lo cual no era posible en los casos anteriores debido a que las intersecciones están prohibidas. Comenzamos de nuevo para el caso donde  $J$  tiene solamente un elemento,

$$T_{21} = e_{21} + e_{14}, \quad (3.53)$$

$$T_{24} = e_{21} + e_{24} + e_{45}. \quad (3.54)$$

$$T_{31} = e_{23} + e_{25} + e_{24} + e_{14}, \quad (3.55)$$

$$T_{34} = e_{23} + e_{25} + e_{45}, \quad (3.56)$$

$$T_{51} = e_{35} + e_{25} + e_{24} + e_{14}, T_{54} = e_{35} + e_{25} + e_{14} \quad (3.57)$$

Ahora calculamos para  $J = 2$  los casos compatibles para 2 trayectorias simultaneas,

$$J = \{2, 3\}, \quad (3.58)$$

$$T_J = T_{21} + T_{34}. \quad (3.59)$$

Notemos que debido a la cantidad limitada de conexiones en la gráfica, solo existe una trayectoria válida para estos índices y esta configuración se puede escribir como la suma de las trayectorias individuales. Esto no es posible en realizarlo en el caso general. Entonces computaremos el resto de configuraciones posibles pero debido a las trayectorias obtenidas hasta el momento y al notar que  $\Delta \subset R^7$ , hemos encontrado el cuerpo de Newton Okounkov asociado a este solitón.

$$J = \{2, 5\}, \quad (3.60)$$

$$T_J = T_{12} + T_{54}. \quad (3.61)$$

Cualquier otra construcción de trayectorias simultaneas dado un índice  $J$ , es incompatible vía intersecciones.

Entonces el cuerpo asociado a este problema está dado por:

$$\Delta = \text{conv} \bigcup_J \left( \frac{\mathcal{T}_{\min}(T_I)}{d} \right). \quad (3.62)$$

$$\Delta = \text{conv}(0.5T_{21} \cup 0.33T_{24} \cup 0.25T_{31} \cup 0.33T_{34}, \quad (3.63)$$

$$\cup 0.25T_{51} \cup 0.2(T_{21} + T_{34}) \cup 0.167(T_{12} + T_{54})). \quad (3.64)$$

Podemos ignorar los exponentes para obtener de nuevo un cuerpo trivial que se genera como la combinación lineal de los 7 elementos de la base que encajan a  $\Delta$  en un espacio 7-dimensional.

**Ejemplo 3.14.** Terminaremos esta sección y este estudio con la construcción del  $\Delta$  para el solitón del ejemplo 3.9. Comenzaremos computando las trayectorias individuales.

$$T_{21} = e_{12} + e_{15} + e_{14} + e_{16} + e_{13}, \quad (3.65)$$

$$T_{24} = e_{12} + e_{15} + e_{45}, \quad (3.66)$$

$$T_{23} = e_{12} + e_{15} + e_{14} + e_{16} + e_{36}. \quad (3.67)$$

$$T_{51} = e_{25} + e_{15} + e_{14} + e_{16} + e_{13}, \quad (3.68)$$

$$T_{54} = e_{12} + e_{15} + e_{45}, \quad (3.69)$$

$$T_{53} = e_{25} + e_{15} + e_{14} + e_{16} + e_{36}. \quad (3.70)$$

$$T_{61} = e_{46} + e_{16} + e_{13}, \quad (3.71)$$

$$T_{64} = e_{46} + e_{14} + e_{45}, \quad (3.72)$$

$$T_{63} = e_{46} + e_{16} + e_{36}. \quad (3.73)$$

Para  $J = \{2, 5\}$  no existe ninguna trayectoria válida debido a las intersecciones, así que realizaremos  $J = 2, 6$ ,

$$T_{J_1} = T_{61} + T_{24}, \quad (3.74)$$

$$T_{J_2} = T_{63} + T_{24}. \quad (3.75)$$

Notemos de nuevo que debido a la simpleza de la gráfica es posible descomponer las trayectorias. Terminamos con los caminos posibles para  $J = \{5, 6\}$ .

$$T_{J_1} = T_{61} + T_{54}, \quad (3.76)$$

$$T_{J_2} = T_{63} + T_{54}. \quad (3.77)$$

Con lo cual podemos calcular  $\Delta$  de forma en que obtenemos la siguiente expresión:

$$\Delta = \text{conv} \bigcup_J \left( \frac{\mathcal{T}_{\min}(T_I)}{d} \right). \quad (3.78)$$

Donde realizamos la iteración en todas las cardinalidades y condiciones de  $J$  posibles como en los ejemplos anteriores. Notemos que nuevamente este objeto se encontró de manera explícita que está encajado en un cuerpo convexo en  $R^{10}$ , como lo indica la ecuación 3.38.

De esta manera ahora para cualquier dato regular de solitón  $A_{kn}$ , podemos definir su gráfica la cual es el límite tropical del logaritmo de una función  $\tau$  asociada. La que puede ser interpretada de forma similar al diagrama de transiciones de fase del sistema. Además a esta es posible asignarle una representación plábica generalizada y definir una dinámica interna para recuperar toda la información de la gráfica de solitón original. Y con esta información podemos generar un Cuerpo de Newton Okounkov el cual nos permite estudiar las propiedades del sistema por medio de la geometría algebraica similar a los procesos realizados para el análisis de variedades tóricas.

## CONCLUSIONES

1. La ecuación Kadomtsev Petviashvili puede ser resuelta por medio del método de Dispersión Inversa, el cual convierte al problema en un sistema de ecuaciones de Sturm Liouville. Además las soluciones de esta ecuación pueden ser expresadas como relaciones de Plücker de un Dato de solitón asociado.
2. Las gráficas de solitón  $C_t$ , nos dan para un tiempo específico un diagrama de transición de las regiones dominantes. Donde un par de funciones  $\theta_{I,J}$  son equivalentes en la frontera. Existe además una analogía de la tropicalización de las funciones solución para estudiar estas gráficas como un sistema de cambios de fase.
3. Los cuerpos de Newton Okounkov asociados a un solitón, permiten estudiar desde una nueva perspectiva la dinámica de las gráficas plábicas generalizadas que los construyeron. Y estas a su vez, por medio de la construcción de un sistema de trayectorias  $\mathcal{T}$ , son completamente equivalentes a la gráfica del solitón  $C_t$  asociado a este sistema.



## RECOMENDACIONES

1. Realizar directamente una gráfica plábica asociada en vez de construir una gráfica de solitón para producir el Cuerpo de Newton Okounkov Asociado.
2. Realizar un análisis heurístico de la ecuación 3.26, al momento de realizar una gráfica de solitón para simplificar la complejidad gráfica del dibujo.
3. Para reproducir gráficas como las que han sido realizadas en este estudio, utilizar el software de graficación de Mathematica Wolfram 13.



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Ablowitz. *Nonlinear Dispersive Waves Asymptotic Analysis and Solitons*, Cambridge University Press, 2011.
- [2] J. Ablowitz. Harvey Segur. On the evolution of packet of water waves *J. Fluid Mech*, **vol 92**, pp 691-715.
- [3] Arfken, George B. and Weber. *Mathematical methods for physicists: A comprehensive guide* Elsevier, New Delhi, 2021
- [4] L. Bossinger, M Cheung, T Magee, A Chávez. Newton–Okounkov Bodies And Minimal Models For Cluster Varieties. arXiv e-prints. Consultado en octubre de 2023 en <https://arxiv.org/abs/2305.04903>.
- [5] T. Brysiewicz. Newton Polytopes And Numerical Algebraic Geometry. arXiv e-prints. Consultado en octubre de 2023 en <https://arxiv.org/pdf/2004.12177>.
- [6] D. Griffiths *Introduction To Quantum Mechanics* Cambridge University Press, Third Edition 2017.
- [7] H. Goldstein *Classical Mechanics* Addison Wesley, Third Edition 2002.
- [8] M Harada. Integrable Systems, Toric Degenerations And Okounkov Bodies. *Inventiones mathematicae*. Consultado en septiembre de 2023 en <https://link.springer.com/article/10.1007/s00222-014-0574-4>.
- [9] Itenberg, G. Mikhalkin. Geometry In The Tropical Limit. *Mathematische Semesterberichte* . Consultado en septiembre de 2023 en <https://arxiv.org/abs/1108.3111>.

- [10] K. Rietsch AND L. Williams. Newton-Okounkov Bodies, Cluster Duality And Mirror Symmetry For Grassmanians. *Duke Mathematical Journal*. Consultado en septiembre de 2023 en [https://www.researchgate.net/publication/321511195\\_Newton-Okounkov\\_bodies\\_cluster\\_duality\\_and\\_mirror\\_symmetry\\_for\\_Grassmannians](https://www.researchgate.net/publication/321511195_Newton-Okounkov_bodies_cluster_duality_and_mirror_symmetry_for_Grassmannians).
- [11] Y. Kodama, S. Chakravarty. Classification of the line-solitons of KP II *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41** (2008) **275209**.
- [12] Y. Kodama, L. Williams, KP Solitons And Total Positivity For The Grassmanian *Inventiones mathematicae*, **198**, pages **637–699** (2014).
- [13] D Korteweg, G. D Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine Series*, 1895, **No. 240**, pp. **422-443**.
- [14] W. Fulton *An Introduction to Toric Varieties* Princeton University Press, 1993.
- [15] Loring W. Tu *An Introduction to Manifolds* Springer, 2010.
- [16] L.A Dickey *Soliton Equations and Hamiltonian Systems* (Advanced Series in Mathematical Physics) World Scientific, 2003.
- [17] A. Postnikov. Total Positivity, Grassmanians, And Networks. arXiv e-prints. Consultado en septiembre de 2023 en <https://arxiv.org/pdf/math/0609764>.
- [18] Po, Drazin. *Solitons an Introduction*. (Cambridge Texts in Applied Mathematics), Cambridge University Press, 1989.
- [19] Rayleigh, L On Waves Propagated along the Plane Surface. Consultado en septiembre de 2023.
- [20] Richard S. Palais. The Symmetries Of Solitons. *American Mathematical Society*, *Volume 34, Number 4, October 1997, Pages 339–403*.
- [21] K. Rietsch, L. Williams. Newton-Okounkov Bodies, Cluster Duality And Mirror Symmetry For Grassmanians. *Duke Mathematical Journal*, **ISSN: 0012-7094**.
- [22] Ryogo Hirota. *The direc Method in Soliton Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [23] Ryogo Hirota. Exact Solution of the Korteweg—de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. *American Physical Society*, 1971, **Vol. 27, Iss. 18**

- [24] M. Sato. Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold *Kokyuroku (Kyoto University)*, **439 (1981) 30-46**.
- [25] J. J. Sakurai *Morden Quantum Mechanics: Revised edition* Pearson, Delhi, 2006.
- [26] D. Tong *Classical Dynamics* University of Cambridge, 2005.
- [27] V. E. Zakharov , L. D. Faddeev The Korteweg–de Vries equation is a completely integrable Hamiltonian system. Consultado en septiembre de 2023 en [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=faa&paperid=2612&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=faa&paperid=2612&option_lang=rus).