



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

Geometría Riemanniana de variedades y subvariedades en Producto Warped: espacio-tiempos de Robertson-Walker y Formalismo ADM para una hipersuperficie de curvatura constante

ASESORADO POR:

DR. GUILLERMO A. LOBOS, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS,
DR. JUAN A. PONCIANO, UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA.

Guatemala, Octubre de 2023

Ref. D.DTG. 005-2023
Guatemala, 19 de octubre de 2023

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación titulado: **“Geometría Riemanniana de variedades y subvariedades en producto warped: espacio-tiempos de Robertson-Walker y formalismo ADM para una hipersuperficie de curvatura constante”**, presentado por el estudiante universitario Gabriel Alberto Barrios de León, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.



“ID Y ENSEÑAD A TODOS”



M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Geometría Riemanniana de variedades y subvariedades en
Producto Warped: espacio-tiempos de Robertson-Walker y
Formalismo ADM para una hipersuperficie de curvatura constante**

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO A LA JEFATURA DEL DEPARTAMENTO DE
FÍSICA POR

GABRIEL ALBERTO BARRIOS DE LEÓN

ASESORADO POR:

DR. GUILLERMO A. LOBOS, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS,
DR. JUAN A. PONCIANO, UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE
GUATEMALA.

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

Guatemala, Octubre de 2023

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



Consejo Directivo Interno

Director	MSc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Representante Docente	Arq. Ana Verónica Carrera Vela
Representante Docente	M.A. Pedro Peláez Reyes
Representante de Egresados	Lcdo. Urías Amitaí Guzmán García
Representante de Estudiantes	Sr. Elvis Enrique Ramírez Mérida
Representante de Estudiantes	Sr. Óscar García Orantes
Secretario	Ing. Edgar Damián Ochoa Hernández

Tribunal que practicó el examen general privado

Director	MSc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Examinador	Lic. José Carlos Bonilla
Examinador	Dr. Enrique Pazos
Examinador	MSc. Freddy Rodríguez
Secretario	Ing. Edgar Damián Ochoa Hernández

AGRADECIMIENTOS

A mi Dios, por darme la oportunidad de estudiar los misterios detrás de su creación. A Él sea la gloria.

A mi papá, a mi mamá, y a Betty, por su amor, sus consejos, por su apoyo incondicional y por acompañarme en cada aventura durante mi carrera. Por permitirme estudiar la carrera que me apasiona. Por darme las oportunidades que no tuvieron.

A Guillermo Lobos, por darme la oportunidad de expandir mi conocimiento bajo su tutela, por compartir su sabiduría y experiencia conmigo, y por su paciencia durante la realización de este trabajo.

A David Ketcheson, por permitirme ser parte de su equipo y darme la oportunidad de comenzar mi carrera como científico. Por sus consejos, su paciencia, y por su instrucción.

A mis asesores, Juan Ponciano y Giovanni Ramírez, y a mis catedráticos en la ECFM, por su instrucción dentro del salón de clases, y su apoyo en actividades extracurriculares.

A mi familia y amigos, por ser un apoyo incondicional, por compartir mi gozo en los buenos tiempos, y ser un refugio en los malos tiempos. A mis tíos (Lilian, Hilda, Lalito y Tati). Al Toffy, por ser mi compañero fiel.

DEDICATORIA

A mi papá, Francisco.
A mi mamá, Jovita.
A mi abuela, Betty.

*¡Cuán grande riqueza es, aun entre los pobres, el ser hijo de un
buen padre!*
- Juan Luis Vives

Índice general

Objetivos	12
Introducción	15
1. Variedades Pseudo-Riemannianas	16
1.1. Tensor métrico	16
1.1.1. Isometría	17
1.1.2. Índice	17
1.1.3. Referenciales	17
1.2. Variedades Riemannianas	17
1.2.1. Espacios pseudo-Euclideos E_s^n	18
1.3. Variedades de Lorentz	18
1.3.1. Cono de luz LC	18
2. Conexión y Derivada Covariante	19
2.1. Derivada Direccional	19
2.1.1. Derivada direccional dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$	20
2.2. Conexión de Levi-Civita	20
2.2.1. Conexión Afín	20
2.2.2. Derivada Covariante	20
2.2.3. Conexión afín en una variedad Pseudo-Riemanniana	21
2.3. Símbolos de Christoffel	21
2.3.1. Base local	21
2.4. Transporte paralelo	22
2.5. Geodésicas	22
2.5.1. Ecuación geodésica	22
2.5.2. Vecindario normal	23
2.5.3. Bola geodésica	23
3. El Tensor de Curvatura de Riemann	24
3.1. Curvatura seccional	24
3.1.1. Variedad llana	25
3.2. Tensor de Ricci	25
3.2.1. Variedades de Einstein	26
3.2.2. Curvatura de Ricci	26
3.3. Espacios Forma	27
3.3.1. Variedades con curvatura constante	27
3.3.2. Espacios reales, espacios de Lorentz y espacio-tiempos de de-Sitter	27
3.4. Ecuaciones de Einstein	28

4. Subvariedades	29
4.1. Immersiones y embebimientos	29
4.2. Subespacio normal	29
4.3. Fórmula de Gauss	30
4.4. Fórmula de Weingarten	30
4.5. Subvariedades umbilicales y totalmente geodésicas	31
4.6. Vector de curvatura media	31
4.7. Teorema fundamental de las subvariedades	32
4.7.1. Más definiciones	32
4.8. Primer espacio normal	33
4.9. Subvariedades totalmente geodésicas	33
4.10. Subvariedades totalmente umbilicales	33
4.11. Curvatura escalar	34
5. Productos Warped: fibrados, foliaciones y espacios cocientes	35
5.1. Warped Product	35
5.1.1. Hojas y Fibras	36
5.1.2. Lifts	36
5.1.3. Conexión en un Producto Warped	37
5.1.4. Geodésicas en productos warped	38
5.1.5. Homotecia	38
5.2. Curvatura	39
5.2.1. Desviación geodésica	39
5.2.2. Lift del Tensor de Curvatura	39
5.3. Variedades Producto Warped de Einstein:	42
5.3.1. Foliaciones	42
6. Espacio-tiempos de Robertson-Walker	44
6.1. Motivación histórica	44
6.1.1. Cosmología	44
6.1.2. Observaciones astronómicas	44
6.2. Espacio-tiempo de Robertson-Walker	45
6.3. Espacio en reposo	46
6.4. Proposiciones en espacios de Robertson-Walker	46
6.5. Proposiciones de variedades transversales y variedades tipo espacio	49
6.6. Comentario final sobre la clasificación de los espacio-tiempos de Robertson-Walker	50
7. Formalismo ADM:	51
7.0.1. Curvatura extrínseca	52
7.0.2. Descomposición 3 + 1 del espacio-tiempo	52
7.0.3. Espacio-tiempo de curvatura constante	54
7.0.4. Formalismo Hamiltoniano	54
Conclusión	55

8. Apéndice 1: Conceptos básicos de Geometría Diferencial	56
8.1. Curvatura	56
8.1.1. Curvaturas principales	57
8.1.2. Curvatura de Gauss	57
8.2. Coordenadas	57
8.2.1. Cartas y Atlas	57
8.2.2. Espacios topológicos	58
8.2.3. Homomorfismos, homeomorfismos e isomorfismos	58
8.3. Variedades	59
8.3.1. Productos	59
8.4. Espacios tangente	59
8.4.1. Derivaciones y diferenciales	60
8.4.2. Campos Vectoriales	60
8.4.3. Flujo	61
8.4.4. Espacios duales	61
8.4.5. Diferencial de una aplicación	62
8.5. Base del espacio tangente	62
9. Apéndice 2: Tensores y mapeos multilineales	63
9.1. Mapeos bilineales	63
9.2. Base ortonormal	64
9.3. Tensores	64
9.4. Formas	65
9.4.1. Producto Externo	66
9.4.2. Formas diferenciales	66
9.4.3. Derivada Exterior	66
10. Apéndice 3: Grupos y Álgebras de Lie	67
10.1. Grupos de Lie	67
10.2. Álgebra de Lie	68
10.2.1. Constantes de estructura	68
10.3. Mapeo Exponencial	68
10.3.1. Matriz Exponencial	68
10.3.2. Exponenciales y generadores	70
11. Apéndice 4: Variedad Ambiente: ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci	71
11.1. Proyecciones Ortogonales	71
11.2. Tensor de curvatura en la variedad ambiente	71
11.3. Ecuación de Gauss	72
11.4. Fórmula de Codazzi	72
11.5. Fórmula de Ricci	73
11.6. Forma contraída de las Ecuaciones Fundamentales para una hipersuperficie	74
12. Apéndice 5: Gradiente, Hessiano y Laplaciano	75
12.1. Fórmula de Bochner	76
12.2. Identidad de Ricci	77
13. Apéndice 6: Métrica de Robertson-Walker	78

Objetivos

Objetivo General

Realizar una investigación sobre la geometría diferencial en variedades con producto warped para derivar un Lagrangiano del Formalismo ADM para una hipersuperficie en un espacio-tiempo de curvatura constante.

Objetivos Específicos

1. Estudiar variedades Riemannianas y Pseudo-Riemannianas con producto warped.
2. Realizar una investigación que permita adquirir conocimiento sobre la clasificación de algunas subvariedades en los espacios Robertson-Walker.
3. Derivar un caso específico del Formalismo ADM para un espacio-tiempo de curvatura constante.

Introducción

La geometría Riemanniana es una rama de la Geometría Diferencial que estudia variedades diferenciales, es decir, espacios topológicos que son localmente euclídeos, equipadas con un producto interno en el espacio tangente de cada punto. El concepto de *variedad* fue introducido en el siglo XIX por Bernhard Riemann, alumno de Carl Friedrich Gauss, generalizando la noción de distancia, así como los conceptos de longitud, ángulos y curvatura (entre otros), haciendo uso de un tensor métrico: un campo tensorial que asigna suavemente un producto interno a cada espacio tangente.

Además de dar lugar al estudio de geometría generalizada en varias dimensiones, las variedades tienen aplicaciones en algunas ramas de la física, siendo las más conocidas la Relatividad General y las teorías de Gauge, que a su vez son aplicables a Teoría Cuántica de Campos y al Modelo Estándar de la física de partículas. Sophus Lie, bajo la influencia de Felix Klein, introdujo los grupos de transformación, y más adelante varios matemáticos de renombre, tales como Elwin Christoffel, Tullio Levi-Civita y Gregorio Ricci, continuarían el estudio del cálculo tensorial que posteriormente usaría A. Einstein para sentar las bases matemáticas de su teoría de la Relatividad General.

El cambio de paradigma propuesto por Einstein a comienzos del siglo XX propone un punto de vista geométrico para la gravedad donde el espacio deja de ser pensado como estático e inerte y, en cambio, debe considerarse como susceptible ante la presencia de la masa y la energía. Las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales son escritas en términos del tensor métrico, describen la curvatura del espacio-tiempo en función del tensor de energía-momento. Luego, la distancia más corta entre dos puntos deja de ser una línea recta, como sucede en un espacio plano (o euclídeo); en cambio, se utilizan geodésicas para calcular longitudes de arco en variedades Riemannianas y pseudo-Riemannianas, destacando éstas últimas por no estar restringidas a las formas bilineales positivas-definidas.

Para dichos cálculos es necesario disponer de un tensor métrico. De hecho, un modelo del espacio-tiempo es un tensor métrico que es solución de las ecuaciones de Einstein. Dado que la complejidad de estas ecuaciones es elevada, existen pocas soluciones exactas, las cuales a su vez describen universos con muchas suposiciones y simetrías. No obstante, estos modelos son suficientes para describir la curvatura del espacio-tiempo a escalas muy grandes, o bien, alrededor de objetos muy masivos como estrellas o agujeros negros. Uno de estos modelos es descrito por la métrica de Robertson-Walker, la cual surge a partir del Principio Cosmológico, el cual establece que, a grandes escalas, el universo es el mismo en cualquier punto. Matemáticamente, los espacio-tiempos de Robertson-Walker describen una variedad pseudo-Riemanniana homogénea e isotrópica que es el producto de una variedad temporal unidimensional y otra espacial de tres dimensiones. Sin embargo, muchos modelos de interés son descritos por variedades producto cuya métrica contiene algunas modificaciones.

Una *variedad con producto warped* es una variedad que resulta del producto de dos variedades pseudo-Riemannianas B y F , y su métrica es dada por:

$$g = g_B + f^2 g_F,$$

donde f es una función en B . Este término fue introducido por R. L. Bishop y B. O'Neill en 1964. Ejemplo de este tipo de variedades son los ya mencionados espacio-tiempos de Robertson-Walker, los cuales consisten de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una variedad Riemanniana S de curvatura constante.

Este trabajo recopila en 7 capítulos varios conceptos y proposiciones de geometría diferencial en variedades con producto warped, y se ha consultado como referencia principal el libro "Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds" de Bang-Yen Chen, en particular, para el contenido de los primeros cuatro capítulos. Se comienza definiendo a las variedades pseudo-Riemannianas y se continúa con las bases matemáticas para luego estudiar la curvatura de una variedad haciendo uso del tensor de curvatura de Riemann.

Para la comprensión de los conceptos se recopilan definiciones y conceptos tomados de diferentes fuentes consultadas durante los últimos meses, en su mayoría libros de texto de matemáticas como el de Do Carmo (1976) o el de J. Munkres (2014) que fueron consultados para familiarizarse con algunos conceptos de topología y geometría de superficies que no se abordan durante la Licenciatura en Física Aplicada; asimismo, gran parte de los conceptos básicos de geometría diferencial colocados en el primer apéndice fueron tomados del libro de D. Salamon y J. Robbin (2019).

Con la finalidad de que un lector familiarizado con la mayoría de conceptos pueda dirigirse directamente a la información recopilada sobre variedades pseudo-Riemannianas, el primer apéndice incluye las definiciones de curvatura, variedades diferenciales y espacios tangentes. En el segundo apéndice se aborda brevemente el concepto de tensores a partir de mapeos multilineales, para continuar en el tercer apéndice con álgebras de Lie y definir el mapeo exponencial.

Los siguientes apéndices son los más importantes, ya que en estos son enunciadas algunas ecuaciones interesantes de las variedades con producto warped que, a su vez, permiten derivar otras proposiciones para profundizar en su estudio. En el apéndice 4 demostramos las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci para una variedad ambiente, y en el apéndice 5 se introducen operadores relacionados con la derivada covariante: el gradiente, el hessiano, la divergencia y el laplaciano, junto con la demostración de algunas propiedades. Finalmente, el último apéndice consiste de una breve deducción de la métrica de Robertson-Walker.

Durante los capítulos 4, 5 y 6 se enuncian y demuestran proposiciones de variedades con producto warped y variedades de Einstein tomadas de Bang-Yen Chen: esto con la finalidad de no solo convencerse de los resultados sino también completar los pasos faltantes en las demostraciones incluidas en el libro. Al final del capítulo 6 se demostrarán propiedades de espacios en reposo y algunas subvariedades en espacio-tiempos de Robertson-Walker.

Finalmente, el Capítulo 7 habla sobre el Formalismo ADM: un método que estudia la Relatividad General de manera dinámica haciendo uso de la Mecánica Hamiltoniana, permitiendo la aplicación de métodos numéricos tales como problemas de condiciones iniciales y simulaciones numéricas.

Puesto que ésta aproximación presenta algunos contratiempos a la hora de realizar dichas simulaciones, como menciona *M. Alcubierre (2006)*, nuevos métodos se han buscado para sustituir al Formalismo $3 + 1$ y, en particular, al ADM. Es importante contrastar la eficiencia de diferentes métodos, por lo cual al final de este trabajo, y a modo de cierre, derivamos un Lagrangiano para el caso de una hipersuperficie en un espacio-tiempo de curvatura constante. Este resultado es obtenido gracias al estudio de Geometría Riemanniana que es abordado en los primeros capítulos, y tiene potenciales aplicaciones en Relatividad Numérica y problemas de Cauchy.

1

Variedades Pseudo-Riemannianas

“Mathematics consists of proving
the most obvious thing in the
least obvious way.”

-George Pólya

Nuestra atención se centrará en las variedades de Riemann y las variedades pseudo-Riemannianas, las cuales son variedades donde existe la noción de distancia entre puntos. Para poder describirlas, es preciso disponer de la definición de tensores, por lo cual los mapeos bilineales han sido definidos en el Apéndice 2.

1.1. Tensor métrico

La geometría Riemanniana estudia variedades diferenciales equipadas con un producto interno en el espacio tangente de cada punto. Para definir el producto interno para vectores tangentes es necesario disponer de un tensor métrico, el cual es un campo tensorial definido a continuación.

Definición 1. *Un **tensor métrico** (pseudo-Riemanniano) en una variedad diferenciable M es un campo tensorial simétrico $(0,2)$ no-degenerado en M con índice constante. i.e. g asigna a cada $x \in M$ un producto escalar en el espacio tangente $T_x M$, y el índice de g es el mismo para cada x . [12][24][33]*

Como todo producto escalar induce una norma, y dado que toda norma induce una distancia, un tensor métrico induce una norma y, consecuentemente, una distancia. En notación, $g(u, v) = \langle u, v \rangle$, donde u, v son vectores tangentes.

Definición 2. *La norma de un vector tangente es dada, en términos de la métrica g por $\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$.*

1.1.1. Isometría

Definición 3. Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales con producto escalar $T : V \rightarrow W$ es una **isometría** si preserva los productos escalares.

En el caso de espacios métricos, una isometría conserva las distancias.

1.1.2. Índice

La matriz asociada a la métrica resulta ser simétrica y real. Los autovalores de esta matriz son los coeficientes ϵ_i que aparecen en la descomposición de cualquier vector como combinación lineal de vectores de una base en la ecuación 9.1 en el Apéndice 2. Dichos valores pueden tomar los valores $+1, 0, -1$.

Resulta que cada uno de estos coeficientes es el autovalor para una de las dimensiones del espacio. Por convenio, los autovalores positivos denotan dimensiones virtuales (temporales), los negativos dimensiones físicas (espaciales o físicas, en inglés «physical»). Un Índice se escribe con tres letras: (v, p, r) .

1. v : es la máxima dimensión del subespacio donde el producto escalar es positivo definido.
2. p : es la máxima dimensión del subespacio donde el producto escalar es negativo definido.
3. r : es la cantidad de vectores distintos de cero cuyo producto escalar devuelve el cero.

Si $r \neq 0$, decimos que es degenerada.

Consideramos solamente el caso $r = 0$, y podemos denotar el Índice solo con dos enteros positivos: $(v, p, 0) = (v, p)$.

Del teorema espectral, es posible conocer la dimensión del espacio:

$$\dim(V) = v + p.$$

1.1.3. Referenciales

En este contexto, definimos un **referencial** como una base del espacio tangente de una variedad diferenciable con métrica g . Se le llama **referencial ortonormal** si está formada por vectores ortonormales. El libro “Introduction to Finite Frame Theory” [16] es una referencia completa sobre el tema, aunque en este trabajo no se profundizará sino para introducir las álgebras de Lie y los tensores.

1.2. Variedades Riemannianas

Definición 4. Se dice que una variedad diferenciable es **Pseudo-Riemanniana** si está equipada con un tensor métrico g . [12]

Definición 5. Una variedad Pseudo-Riemanniana con índice igual a 0, se llama **Variedad Riemanniana**. [12]

Dicho de otra forma, una variedad Pseudo-Riemanniana es una variedad con tensor métrico, los mapeos multilineales no son necesariamente positivos-definidos. Para una variedad Riemanniana, en cambio, su producto escalar es positivo definido.

1.2.1. Espacios pseudo-Euclideos E_s^n

En el caso de un espacio euclídeo, como \mathbb{R}^n de dimensión n , usamos la notación E_s^n para indicar que es un espacio euclídeo de dimensión n , de las cuales s son temporales, y solo $(n - s)$ son espaciales. Veamos las variedades de Lorentz para que quede más claro.

Para $s = 0$, el espacio es euclídeo como siempre.

Definición 6. *En general, decimos que E_1^n es un n -espacio de Minkowski para $n > 1$.*

Definición 7. E_1^4 es un **espacio-tiempo** de Minkowski.

1.3. Variedades de Lorentz

Estos son los espacio-tiempos E_1^4 que se estudian en Relatividad Especial.

Una variedad de Lorentz es una variedad pseudo-Riemanniana que tiene solo una dimensión temporal. Si n es la dimensión del espacio, y una variedad cumple con $(n - 1, 1)$ o $(1, n - 1)$, decimos que la variedad es de Lorentz.

En el caso $n = 4$, es decir, tres dimensiones espaciales y una temporal, las distancias en una variedad de Lorentz son dadas por:

$$ds^2 = -d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.1)$$

Observación 1. *Una variedad Riemanniana puede ser pensada también como el espacio de configuraciones (de mecánica analítica) equipado con una métrica g . [37]*

Vectores tipo espacio, tipo tiempo y tipo luz:

Ahora hablemos sobre los vectores tangentes.

Definición 8. *Un vector tangente $v \in T_x M$ cae en uno de los siguientes tipos causales:*

1. Un vector v es **tipo espacio** si $\langle v, v \rangle > 0$.
2. Un vector v es **tipo tiempo** si $\langle v, v \rangle < 0$.
3. Un vector v es **tipo luz** o **null** si $v \neq 0$ pero $\langle v, v \rangle = 0$.

1.3.1. Cono de luz LC

Un cono de luz es el conjunto de elementos [12]

$$LC := \{v \in E_s^n \mid \langle v, v \rangle = 0\}.$$

Definición 9. *Un vector que no es de tipo espacio (i.e. es tipo luz o tipo tiempo), es llamado **causal**.*

Antes de enunciar ejemplos de espacios de Lorentz, es necesario definir la curvatura escalar. Se discutirán los espacios forma en el capítulo 3.

2

Conexión y Derivada Covariante

“Mathematics is the art of giving the same name to different things.”

-Henri Poincaré

2.1. Derivada Direccional

Un campo X de vectores tangentes lo podemos expresar como $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Es conveniente usar la notación:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i,$$

donde x^1, \dots, x^n son un sistema de coordenadas en un abierto $U \subset M$. Las componentes del tensor métrico son $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$.

En una variedad M , sea $F(M)$ el conjunto de todas las funciones reales suaves en M . Para $x \in M$, dados $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, según la definición 68 de campos, y $f \in F(M)$, definimos los Corchetes de Lie como $[V, W]_x(f) = V_x(Wf) - W_x(Vf)$. [12]

La **derivada direccional** $L_X f$ nos dice cómo cambia una función f por la acción de un campo X .

$$L_X f(a) := \frac{d}{dt} f \circ x(t)|_{t=t_0},$$

donde x es una curva que representa $X(a)$ en el punto $a \in U$. En coordenadas locales:

$$L_X f = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = X^j \partial_j f. \tag{2.1}$$

2.1.1. Derivada direccional dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

En el Apéndice 2 hablamos un poco sobre la derivada exterior. Sea $U \subset M$ un abierto en M , y sea q una carta definida por $q = (q^1, q^2, \dots, q^n) : U \rightarrow V$, con $V \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la 1-forma $\alpha : U \rightarrow T^*U$. De hecho, cualquier 1-forma α en U puede ser descrita únicamente por

$$\alpha = \alpha_j dq^j,$$

donde las componentes de $(dq^1, dq^2, \dots, dq^n)$ forman una base del espacio cotangente T^*M , y los coeficientes α^j son suaves. α_j se obtiene de la siguiente expresión:

$$\alpha_j = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial q^j} \right) = \alpha(\partial_j).$$

Por otro lado, para un abierto $U \subset M$, una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ induce una 1-forma df definida por

$$df(a)X(a) := \left. \frac{d}{dt} f \circ x(t) \right|_{t=t_0}. \quad (2.2)$$

Cuando se le aplica la 1-forma α al campo X , $df(X) = L_X(f)$. Se puede demostrar, para dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ [37]

$$d\alpha(X, Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]). \quad (2.3)$$

Esto será útil más adelante con el tensor de torsión y el tensor de curvatura de Riemann.

2.2. Conexión de Levi-Civita

2.2.1. Conexión Afín

En una variedad diferencial, una conexión afín es un objeto geométrico que *conecta* espacios tangentes, de modo que los campos puedan ser diferenciables.

Definición 10. *En una variedad diferenciable M , una **conexión afín** ∇ es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que cumple $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in F(M)$*

1. $\nabla_X Y$ es $F(M)$ -lineal en X .
2. $\nabla_X Y$ es \mathbb{R} -lineal en Y .
3. $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

2.2.2. Derivada Covariante

El símbolo ∇_X es la **derivada covariante respecto a X** , la cual es una generalización de la derivada direccional. La derivada covariante respecto a un campo nos dice cómo cambia una función o un vector por la acción de un campo. De hecho, X no tiene que ser un campo vectorial: puede ser un solo vector tangente o puede ser también un campo tensorial.

2.2.3. Conexión afín en una variedad Pseudo-Riemanniana

Definición 11. *El tensor de torsión T de una conexión afín ∇ es un tensor tipo (1,2) definido por $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$.*

Definición 12. *La conexión de Levi-Civita es libre de torsión ($T = 0$), y es la única conexión afín en una variedad pseudo-Riemanniana que conserva la métrica. [12]*

Además, la conexión de Levi-Civita satisface[12]:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Enunciamos la fórmula de Koszul[12]:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Y Z, X \rangle &= Y\langle Z, X \rangle + Z\langle X, Y \rangle - X\langle Y, Z \rangle - \langle Y, [Z, X] \rangle \\ &\quad + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.3. Símbolos de Christoffel

En la sección 10.2.1 de este trabajo se provee una pequeña definición de las constantes de estructura como los coeficientes necesarios para expresar *el cambio* producido por dos elementos de la base del espacio tangente, es decir, un Corchete de Lie, como combinación lineal de los elementos de la base.

2.3.1. Base local

Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ un sistema de coordenadas (también llamada *base holonómica* del fibrado tangente) en M . Los vectores tangente forman una base respecto a $\{x_i\}$ en el TM .

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i.$$

El cambio que produce un vector e_i sobre otro vector tangente e_j es la conexión de Levi-Civita

$$\nabla_{e_i} e_j.$$

que es una derivada covariante.

Queremos expresar la derivada covariante de uno de los vectores tangente como combinación lineal de los otros vectores tangente.

Definición 13. *Los Símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k son los coeficientes que permiten expresar la derivada covariante, dada por la conexión de Levi-Civita, en términos de las coordenadas de la variedad. Es decir, son los coeficientes que satisfacen*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

con $1 \leq i, j \leq n$. También son llamados *coeficientes de conexión*. [42]

Las propiedades que nos interesan de los símbolos de Christoffel son las siguientes ecuaciones:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{t=1}^n \frac{g^{kt}}{2} \left(\frac{\partial g_{jt}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_t} \right), \quad (2.5)$$

donde g_{ij} son las componentes del tensor métrico y $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ son sus inversos.

2.4. Transporte paralelo

El transporte paralelo es casi un *test* para determinar si una superficie está curvada. Desarrollamos una intuición de este concepto y luego daremos la definición formal.

Sea $\mathfrak{V}(\gamma)$ el conjunto de campos en M a lo largo de una curva γ . Sea $Z \in \mathfrak{V}(\gamma)$, y sea Z' el cambio de Z a lo largo de la curva. Decimos que Z es paralelo a γ si $Z' = 0$. En términos de los símbolos de Christoffel:

$$\frac{dZ_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{du_i}{dt} Z_j = 0.$$

Ahora, definimos la curva: $\gamma : I \rightarrow M$, donde $I = [a, b]$. Sea $z \in T_a M$. El **transporte paralelo a lo largo de γ** es la función[12]

$$P_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} : T_{\gamma(a)} M \rightarrow T_{\gamma(b)} M.$$

“Un campo vectorial puede cambiar de punto en punto por dos razones distintas: por las variaciones dinámicas del campo campo, o bien por los efectos de la variedad. Un ejemplo físico de lo primero sería un campo vectorial correspondiente a la dirección y fuerza del viento en cada punto de la Tierra. Las variaciones de este campo vectorial entonces son dinámicas, ya que son debidas a las distintas circunstancias meteorológicas en diferentes puntos.

Un ejemplo del segundo sería un campo vectorial constante apuntando al Polo Norte. Aquí también varía el campo vectorial de punto en punto, pero por razones geométricas (y no dinámicas): la dirección norte es distinta en diferentes puntos de la Tierra.”[22]

2.5. Geodésicas

Una geodésica es el camino más corto entre dos puntos. En el caso de espacios planos, son líneas rectas, pero al hablar de superficies y espacio-tiempos curvados, los caminos más cortos pueden ser curvas, es decir, la distancia más corta entre dos puntos se obtiene mediante longitudes de arco.

Definición 14. Una *geodésica* en el espacio-tiempo es una curva que medida en cada sistema de referencia por el que pasa es recta y uniformemente parametrizada.

En particular, una geodésica es una curva $\gamma(t)$ que transporta paralelamente a un vector tangente $u = d\gamma/dt$ a lo largo de sí mismo[42]:

$$\nabla_u u = 0$$

2.5.1. Ecuación geodésica

El vector tangente u puede ser escrito como $u = \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, de donde se obtiene la **ecuación geodésica**:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (2.6)$$

2.5.2. Vecindario normal

Definición 15. *Un subconjunto de una variedad o un espacio se llama **conjunto radialmente convexo** si no contiene agujeros, es decir, si podemos dibujar líneas (no necesariamente rectas) que unan cualesquiera puntos sin que haya agujeros en medio.*

Para cada punto $p \in M$ existe un vecindario U en $T_p M$ donde el mapeo exponencial mapea U en un vecindario U alrededor de p en M . Decimos que U es un **vecindario normal de p** si U es radialmente convexo. [12]

2.5.3. Bola geodésica

Ahora consideramos una variedad cuyo espacio tangente $T_p M$ en un punto p es una esfera. Digamos que estas esferas son espacios tangentes de radio r (en general, son hiperesferas, pero hagámoslo visual solo para las esferas que conocemos). Ahora, con el mapeo exponencial, queremos mapear estas esferas en la superficie (puede ser visto como si quisiéramos ver la sombra o la proyección de una esfera sobre un plano, que es un círculo). Esto se puede lograr si r es muy pequeño de modo que, visto muy de cerca, la proyección de la esfera es precisamente un círculo en la variedad. Si pedimos que este círculo sea un *vecindario normal*, entonces le llamamos una **bola geodésica**.

3

El Tensor de Curvatura de Riemann

“One of the endlessly alluring aspects of mathematics is that its thorniest paradoxes have a way of blooming into beautiful theories.”

Philip J. Davis.

En este capítulo hablaremos sobre el tensor de curvatura y sus aplicaciones en geometría Riemanniana.

Al hablar de un tensor, hablamos de un mapeo multilineal; específicamente, toma tres campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y devuelve otro campo, i.e. $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ y se define como:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (3.1)$$

También puede ser expresado dentro de un producto si se incluye un cuarto campo $W \in \mathfrak{X}(M)$:

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, w \rangle.$$

Este tensor satisface la primera identidad de Bianchi[12]:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0. \quad (3.2)$$

y la identidad diferencial de Bianchi[36]:

$$\nabla_X R(Y, Z)W + \nabla_Y R(Z, X)W + \nabla_Z R(X, Y)W = 0. \quad (3.3)$$

3.1. Curvatura seccional

Definición 16. Una *sección plana* π en un punto $x \in M$ es un plano tangente (de dos dimensiones) que es subespacio de $T_x M$. [12]

Dada una base de π formada por vectores u y v , definimos la cantidad Q [4] como

$$Q(u, v) = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2, \quad (3.4)$$

de modo que $|Q(u, v)|$ es el área encerrada por el paralelogramo de lados u y v . Luego, la curvatura π es llamada **curvatura seccional** K :

$$K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{Q(u, v)}, \quad (3.5)$$

la cual no depende de la elección de la base.

También, para una variedad de curvatura constante c , el tensor de curvatura satisface

$$R(u, v)w = c[\langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v]. \quad (3.6)$$

3.1.1. Variedad llana

Una variedad se dice llana si su curvatura seccional es cero en todo punto.

De la ecuación 3.5 es posible interpretar también que el Tensor de Curvatura de Riemann es una generalización de la curvatura Gaussiana. Un espacio es plano en general si el tensor de Riemann se anula. En la Definición 2 de «curvatura» se expuso que es posible pensar en la curvatura como el inverso del radio del círculo que mejor encaja en un punto de la curva (ecuación 8.2 en el Apéndice 1). En el caso de un espacio plano, es como si el radio de este círculo fuera infinito, de modo que la curvatura tiende a 0.

Seguramente habrás escuchado que existe una singularidad en el centro de un agujero negro: En este punto la curvatura del espacio-tiempo tiende a infinito, y siguiendo el razonamiento de la ecuación 8.2, esto puede interpretarse como un círculo cuyo radio tiende a 0, esto es, un solo punto.

3.2. Tensor de Ricci

Puesto que el tensor de Riemann tiene una forma bastante compleja, es más práctico evaluar el llamado Tensor de Ricci, el cual mide cuánto se aleja un espacio de ser plano, y es definido como la traza del Tensor de Curvatura de Riemann.

Observación 2. *Dejaré aquí una definición del Tensor de Ricci sin escribir su forma explícita; para su definición en términos del tensor métrico puede consultarse libros como el de Sperrhake[40] o Gravitation[42].*

$$Ric(X, Y) = Tr\{Z \rightarrow R(Z, X)Y\}, \quad (3.7)$$

donde $Tr(\xi)$ es la traza de algún tensor ξ . Explícitamente,

$$Ric(X, Y) = \sum_{l=1}^n \epsilon_l \langle R(e_l, X)Y, e_l \rangle, \quad (3.8)$$

donde $\{e_1, \dots, e_m\}$ es un referencial ortonormal.

Nota 2: Cuando se habla de que un tensor es la traza de otro, es porque se puede pensar en el Tensor de Riemann como una *matriz de matrices*. Esto no puede generalizarse para

cualquier tensor. De hecho, el proceso de calcular la traza es formalmente llamado «contracción», y es necesario multiplicar el tensor de Riemann por la métrica para *contraer* sus índices.

Definición 17. *Cuando el tensor de Ricci es igual a cero ($Ric = 0$), decimos que la variedad es plana o **Ricci Flat**.*

3.2.1. Variedades de Einstein

Si g es el tensor métrico de una variedad pseudo-Riemanniana M , decimos que M es una **variedad de Einstein** si se satisface que $Ric = kg$, donde k es una constante.[12] Decimos que M es **Einsteiniana** si se cumple $Ric = fg$ para alguna función $f \in F(M)$.

3.2.2. Curvatura de Ricci

Para un vector tangente $u \in T_p M, p \in M$, la curvatura de Ricci se define como $Ric(u, u)$, y se denota por $Ric(u)$, o bien, simplemente por R . Explícitamente[36]:

$$\begin{aligned} Ric(U) &\equiv R = Tr(Ric); \\ &= \sum_j \langle Ric(e_j), e_j \rangle; \\ &= \sum_j Ric(e_j, e_j); \\ &= \sum_{m,l} g^{ml} g^{rs} R_{mrts}; \end{aligned}$$

donde $R_{mrts} \equiv R(\partial_m, \partial_r, \partial_l, \partial_s)$.

Del trabajo [36] de *V. Sampaio, 2014*, es posible deducir una relación entre el el tensor de Ricci y la curvatura de Ricci como corolario de la identidad diferencial de Bianchi:

Corolario 1. *Para una variedad Riemanniana (M, g) se cumple*

$$2div(Ric(X)) = \nabla_X R.$$

Demostración

La definición de divergencia es dada por la ecuación 12.5 en los apéndices:

$$\begin{aligned} div(Ric(X)) &= \sum_i (\nabla_i Ric)(X, e_i) = \sum_i Tr(\nabla_i R)(X, e_i) \\ &= \sum_i \sum_j \langle (\nabla_i R)(e_j, X) e_j, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la ecuación 3.3 obtenemos:

$$\langle (\nabla_j R)(X, e_i) e_j, e_i \rangle + \langle (\nabla_X R)(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle + \langle (\nabla_i R)(e_j, X) e_j, e_i \rangle = 0;$$

$$\begin{aligned}
\because \operatorname{div}(\operatorname{Ric}(X)) &= \sum_i \sum_j (-\langle \nabla_j R \rangle(X, e_i) e_i, e_j) - \langle (\nabla_X R)(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle); \\
&= \sum_j (-\sum_i \langle \nabla_j R(X e_i) e_i, e_j \rangle + \sum_i \langle \nabla_X R(e_i, e_j) e_i, e_j \rangle); \\
&= \sum_j (-\operatorname{tr}(\nabla_j R(X, e_j)) + \operatorname{tr}(\nabla_X R)(e_j, e_j)); \\
&= \sum_j (-\nabla_j \operatorname{Tr}(R)(X, e_j) + e_X \operatorname{Tr}(R)(e_j, e_j)); \\
&= -\sum_j \nabla_j \operatorname{Ric}(X, e_j) + \sum_j \nabla_X \operatorname{Ric}(e_j, e_j).
\end{aligned}$$

Por la definición de divergencia de la ecuación 12.5, y tomando en cuenta que la curvatura de Ricci es igual a la traza del tensor de Ricci, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(X)) &= -\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(X)) + \nabla_X(\operatorname{Tr}(\operatorname{Ric})) \\
&= -\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(X)) + \nabla_X R.
\end{aligned}$$

de donde obtenemos $2\operatorname{div}(\operatorname{Ric}(X)) = \nabla_X R$. □

3.3. Espacios Forma

3.3.1. Variedades con curvatura constante

Decimos que una variedad tiene curvatura constante si su curvatura seccional K es constante (digamos, una constante c). [12]

3.3.2. Espacios reales, espacios de Lorentz y espacio-tiempos de de-Sitter

Veamos algunos casos útiles al hablar de espacios con curvatura constante. Recordemos que E_s^n es un espacio euclídeo (plano) de n dimensiones, de las cuales s son temporales (o donde la norma es negativa definida).

Los **espacios de forma indefinidos** son tres, y se definen para los tres casos de curvatura seccional constante:

1. $c = 0$: El espacio es llano, i.e. un espacio pseudo-euclídeo E_s^n .
2. $c > 0$: es para un espacio esférico. De hecho, dado que pueden existir s dimensiones temporales, es útil llamarlo «espacio pseudo-esférico» $S_s^n(c)$ donde, al igual que para los espacios pseudo-euclídeos, n es la dimensión total del espacio y s denota el índice.
3. $c < 0$: es para un «espacio pseudo-hiperbólico», y lo denotamos por $H_s^n(c)$, con n la dimensión total del espacio y s el índice.

En particular, $E_1^n, S_1^n(c), H_1^n(c)$ son los modelos estándar de los **espacios Lorentzianos**. $S_1^4(c), H_1^4(c)$ son llamados **Espacio-tiempo de de-Sitter** y **Anti-espacio-tiempo de de-Sitter** respectivamente.

3.4. Ecuaciones de Einstein

Para describir de manera cualitativa la interacción entre el espacio-tiempo y la materia, la teoría de Einstein requiere los siguientes principios, para los cuales se ha consultado el libro de Bert-Janssen[22].

1. **Principio de Equivalencia:** Establece que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio.
2. **Principio de Covarianza:** Las leyes físicas son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.

Del Principio de Covarianza, sabemos que la ecuación debe tener una forma tensorial:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

donde $G_{\mu\nu}$ describe la curvatura del espacio, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento¹, y κ es una constante de proporcionalidad. La forma concreta del tensor $G_{\mu\nu}$ es la siguiente:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda, \quad (3.9)$$

siendo $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y R la curvatura de Ricci, además de incluir la *Constante Cosmológica* Λ .

Por otro lado, la constante κ toma la forma $\kappa = 8\pi G_N$, con G_N la constante de Newton².

Para el caso de un universo plano, $\Lambda = 0$, las ecuaciones de Einstein forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales lineales acopladas de segundo orden, que en notación tensorial se compactan en una sola ecuación:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

¹El Tensor de Energía-Momento se define como el flujo del cuadrimomento p^μ a través de una superficie x^μ constante. Si \mathcal{L}_ϕ es un lagrangiano cuyos términos describen la dinámica de un campo ϕ que interactúa con la gravedad, entonces el tensor de energía-momento puede expresarse por[22]

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

² G_N es también llamada *Constante de Gravitación Universal*.

4

Subvariedades

In mathematics, you don't understand things. You just get used to them.

John von Neumann

Este capítulo está basado en su mayoría en el libro de Bang-Yen Chen[12], Capítulo 2.

4.1. Immersiones y embebimientos

Sea $\phi : M \rightarrow N$ un mapeo entre dos variedades.

Definición 18. ϕ es una **immersion** si el mapeo entre los espacios tangentes $\phi_{*x} : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} N$ es inyectivo para todo $x \in M$. [12]

Definición 19. Si, además, ϕ es un homomorfismo en $\phi(M)$, de modo que preserve su estructura, entonces se le llama **encaje**. [12]

Definición 20. La **codimensión** de la immersion es la resta $\dim(N) - \dim(M)$.

Definición 21. Decimos que una immersion es **isométrica** si preserve los productos escalares, i.e.

$$\langle u, v \rangle_x = \langle \phi_{*x} u, \phi_{*x} v \rangle_{\phi(x)}.$$

4.2. Subespacio normal

Sea $\phi : M \rightarrow N$ una immersion isométrica, con $\dim(M) < \dim(N)$; llamamos **variedad ambiente** a N . $u \in T_x M$ y $v \in T_{\phi(x)} N$. Es posible descomponer el espacio tangente de N como una suma directa:

$$T_{\phi(x)} N = T_x M \oplus T_x^\perp M, \quad (4.1)$$

y $T_x^\perp M$ es el **subespacio normal**. Luego, cualquier vector puede ser expresado de la forma:

$$v = \text{tan}(v) + \text{nor}(v).$$

Además, para campos tensoriales $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ definimos el tensor de curvatura para la variedad ambiente como

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z.$$

4.3. Fórmula de Gauss

Denotamos la conexión de Levi-Civita en N (la variedad ambiente) como $\tilde{\nabla}$. Un campo vectorial \tilde{X} es llamado **extensión de X** en N si su restricción en $\phi(M)$ es X . Definimos las componentes tangencial y normal de $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ como $\nabla_X Y$ y $\sigma(X, Y)$ respectivamente. La **fórmula de Gauss** tiene la forma[9][19]:

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad (4.2)$$

donde ∇ es la Conexión de Levi-Civita en M , y $\sigma : TM \times TM \rightarrow T^\perp M$ es la Segunda Forma Fundamental, la cual satisface para alguna función $f \in \mathcal{F}(M)$ y campos $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\sigma(X, Y) = \sigma(Y, X); \quad (4.3)$$

$$\sigma(X, fY) = f\sigma(X, Y); \quad (4.4)$$

$$\sigma(X, Y + \sigma(Z, W)) = \sigma(X, Y). \quad (4.5)$$

4.4. Fórmula de Weingarten

La conexión afín en el fibrado normal $T^\perp M$ será denotada por D , y se define por $D : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}^\perp \rightarrow \mathfrak{X}^\perp$, dada por:

$$D_X Z = \text{nor}(\tilde{\nabla}_X Z),$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. D_X es llamada *derivada covariante normal*. [31]

Definición 22. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $U \in \mathfrak{X}(N)$. El campo tensorial $(1, 1)$ A en M , $A : T_x M \rightarrow T_x M$ que satisface

$$\langle A(X), Y \rangle = \langle \sigma(X, Y), U \rangle,$$

es llamado **Operador de Forma** de M derivado de U . [31]

Observación 3. Los autovalores del operador de forma evaluado en algún punto de una variedad resultan ser las curvaturas principales en ese punto, y sus autovectores son las direcciones de dichas curvaturas.

Para algún campo normal ξ de M en N , la **fórmula de Weingarten**[10] es la descomposición de $\tilde{\nabla}_X \xi$ como

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + D_X \xi. \quad (4.6)$$

Una relación entre la segunda forma fundamental y el operador de forma es dada por:

$$\langle \sigma(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi(X), Y \rangle. \quad (4.7)$$

Ver apéndices: Se ha incluido una sección con la deducción completa de las ecuaciones de Gauss, Ricci y Codazzi para variedades ambiente.

4.5. Subvariedades umbilicales y totalmente geodésicas

Definición 23. Una *inmersión isométrica* $\phi : M \rightarrow N$ es **totalmente geodésica** si la segunda forma fundamental se anula uniformemente, i.e. $\sigma = 0$.

Definición 24. Si en una variedad M se cumple que $A_\xi = \rho I$ para algún campo normal ξ y una función $\rho \in F(M)$, entonces ξ recibe el nombre de **sección umbilical** (es localmente esférico).

También se dice que M es umbilical respecto a ese campo.

Definición 25. Si M es umbilical respecto a todos sus campos normales, entonces M es una **variedad totalmente umbilical**.

4.6. Vector de curvatura media

Como su nombre lo indica, es un promedio sobre todas las curvaturas principales de una variedad o hipersuperficie, y viene dado por:

$$H = \left(\frac{1}{n}\right) Tr(\sigma). \quad (4.8)$$

También, el vector de curvatura media es una fracción de la traza del operador de forma, ya que los autovalores de éste y los de la segunda forma fundamental coinciden:

$$H = \left(\frac{1}{n}\right) Tr(A).$$

Para el caso de $n = \dim(M)$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal (referencial), el vector H se reescribe:

$$H = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{j=1}^n \epsilon_j \sigma(e_j, e_j). \quad (4.9)$$

Si D es una conexión en el subespacio normal, se le llama *conexión normal*.

Definición 26. Un campo normal ξ se dice **paralelo** si $D\xi = 0$.

Definición 27. Se dice que la variedad M tiene **vector de curvatura media paralelo** si $DH = 0$.

Teorema 1. Para el caso de una variedad totalmente umbilical, la segunda forma fundamental satisface[12]:

$$\sigma(X, Y) = \langle X, Y \rangle H.$$

Demostración

Sea $\phi : M \rightarrow N$ un aimmerción isométrica entre variedades. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriales en una subvariedad M que es umbilical respecto a cualquier campo vectorial normal, de modo que $A_\xi = \rho I, \forall \xi$ Luego, por la ecuación (4.8) tenemos:

$$\sigma(X, Y) = \langle A_\xi(X), Y \rangle \hat{n} = \langle X, Y \rangle \hat{n} \rho;$$

donde I es el operador identidad y \hat{n} es un vector unitario.

El vector de curvatura media H puede ser escrito en términos de la traza del Operador de Forma. Pero para una subvariedad totalmente umbilical se cumple que el operador forma es proporcional a la identidad, cuya traza resulta ser el número de curvaturas principales de la (hiper)superficie.

$$\therefore \sigma(X, Y) = \langle X, Y \rangle H.$$

□

Definición 28. Una subvariedad pseudo-Riemanniana se dice *minimal* si $H = 0$.

4.7. Teorema fundamental de las subvariedades

Los siguientes dos teoremas son tomados del libro de Bang-Yen Chen.[12][15]

Teorema 2. Sea (M_t^n, g) una n -variedad pseudo-Riemanniana simplemente conexa con índice t , y supongamos que existe un fibrado vectorial $(m - n)$ -dimensional $v(M_t^n)$ con índice $s-t$, sobre M_t^n , con tensor de curvatura \mathbb{R}^D y un $(0,2)$ tensor σ . Para una cross-section ξ de $v(M_t^n)$, definimos A_ξ como $g(A_\xi X, Y) = \langle \sigma(X, Y), \xi \rangle$. Si las ecuaciones de Gauss, Ricci, Codazzi se satisfacen, entonces (M_t^n) puede ser isométricamente inmersa en un espacio forma real $\mathbb{R}_x^m(c)$ m -dimensional de curvatura constante c .

Teorema 3. Si $\phi' \phi : M_t^n \rightarrow \mathbb{R}_s^m(c)$ dos immersiones isométricas. Supongamos que existe una isometría $\phi : M_t^n \rightarrow M_t^n$ tal que ϕ puede ser cubierta por un mapeo entre fibrados $\bar{\phi} : \nu \rightarrow \nu'$ que preserva las métricas de los fibrados, las conexiones y las segundas formas fundamentales. Entonces existe una isometría Φ de $\mathbb{R}_s^m(c)$ tal que $\Phi \circ \phi = \phi'$.

Definición 29. Dos subvariedades de una variedad pseudo-Riemanniana N se dicen *congruentes* si existe una isometría de N que mapea una en la otra.

4.7.1. Más definiciones

Definición 30. Dos subvariedades M_1, M_2 de N s dicen *congruentes* si existe una isometría de N que mapea una en la otra.

Si M_s^n es una subvariedad minimal en el pseudo-espacio euclídeo E_s^m , entonces $Ric \leq 0$, con una igualdad si y solo si la subvariedad es totalmente geodésica.

4.8. Primer espacio normal

Ahora, descomponemos el espacio normal como suma directa de dos subespacios:

$$T_p^\perp M = \mathfrak{N}^0 \oplus \mathfrak{N}^1. \quad (4.10)$$

donde definimos $\mathfrak{N}^0 = \{\xi \in T_p^\perp M \mid A_\xi = 0\}$ y $\mathfrak{N}^1 = \{\sigma(V, W) \in T_p^\perp M \mid V, W \in T_p M\}$.

4.9. Subvariedades totalmente geodésicas

Si $\phi : M \rightarrow N$ es un aimmersión isométrica de M en N , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es subvariedad de N totalmente geodésica.
2. Las geodésicas de M son geodésicas de N .
3. $\forall x \in M, v \in T_x M$, la geodésica γ_v , que cumple con $\gamma_v(0) = x, \gamma'_v(0) = v$, yace localment en M . [12]

4.10. Subvariedades totalmente umbilicales

Del trabajo [2] de *Anh et al*, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4. *Sea $\phi : M_t^n \rightarrow N_s^m$, M_t^n una inmersión isométrica. M_t^n es una subvariedad totalmente umbilical ssi. las geodésicas nulas de M_t^n son también geodésicas de N_s^m .*

Demostración

1. Supongamos que M_t^n es toatlmente umbilical en N_t^m . Si $\gamma : I \rightarrow M_t^n$ es una geodésica nula de M_t^n , entonces $\gamma'(t)$ es un vector nulo para todo t . Entonces, $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0$, y del teorema 4 obtenemos: $\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \sigma(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$, así que γ también es geodésica de N_t^m .
2. Si v es un vector nulo de M_t^n , y las geodésicas de M_t^n son también geodésicas de N_t^m , entonces se satisface $\sigma(v, v) = 0$. Para algún $x \in M_t^n$, sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_x M_t^n$ tal que $\langle e_i, e_i \rangle = -1$ para $i = 1, \dots, t$ y $\langle e_j, e_j \rangle = 1$ para $j = t+1, \dots, n$, de modo que $e_i \pm e_j$ son vectores nulos porque satisfacen $\langle e_i \pm e_j, e_i \pm e_j \rangle = 0$.
 $\therefore \sigma(e_i, e_i) + \sigma(e_j, e_j) = 0; \sigma(e_i, e_j) = 0$.
 Si $t \geq 2$, tenemos $e_{i_1} + e_{i_2} + \sqrt{2}e_n$ es un vector nulo para $1 \leq i_1 \neq i_2 \leq s$, y $\sigma(e_{i_1}, e_{i_2}) = 0$.
 También, para $n - t \geq 2$ se tiene $\sigma(e_{j_1}, e_{j_2}) = 0$ para $t+1 \leq j_1 \neq j_2 \leq n$. De modo que se cumple la condición del Teorema 4 en todo punto, y M_t^n es totalmente umbilical.

□

4.11. Curvatura escalar

Finalmente, una generalización de la definición de *curvatura* es la **curvatura escalar** τ definida por:

$$R = \sum_{i < j} K(e_i, e_j). \quad (4.11)$$

La curvatura escalar indica cuánta es la diferencia entre el volumen de una bola geodésica en una variedad curvada y el volumen de una bola *estándar* en un espacio plano (euclídeo).

De Bang-Yen Chen [12], el siguiente teorema relaciona la curvatura escalar con la segunda forma fundamental y el vector de curvatura media.

Teorema 5. *Para una subvariedad M_t^n pseudo-Riemanniana de un espacio forma real $R_s^m(c)$, la curvatura media, el vector de curvatura media y la segunda forma fundamental de M_t^n satisfacen:*

$$R = \frac{n^2}{2} \langle H, H \rangle - \frac{1}{2} S_\sigma + \frac{n(n-1)}{2} c, \quad (4.12)$$

donde $S_\sigma = \sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j \langle \sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j) \rangle$.

Demostración

Sea $\{e_i\}$ un referencial ortonormal de M_t^n . La ecuación de Gauss devuelve

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j \langle R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j \langle \tilde{R}(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \langle \epsilon_i \sigma(e_i, e_j), \epsilon_j \sigma(e_j, e_i) \rangle - \sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j \langle \sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j) \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, la curvatura seccional K :

$$K(e_i \wedge e_j) = \epsilon_i \epsilon_j \langle R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle.$$

De éstas dos ecuaciones,

$$2R = n(n-1)c + n^2 H^2 - S_\sigma.$$

que es equivalente a la ecuación 4.12. □

5

Productos Warped: fibrados, foliaciones y espacios cocientes

“Las cebollas tienen capas. Los ogros tienen capas. Las cebollas las tienen...”

-Shrek

Se abordan las variedades con producto warped, el cual es una generalización del producto cartesiano. Los teoremas de éste capítulo son todos tomados de *Bang-Yen Chen (2017)*.

5.1. Warped Product

Estaremos utilizando dos variedades pseudo-Riemannianas B y F a las cuales llamaremos Base con métrica g_B y Fibra con métrica g_F respectivamente. Consideremos la variedad dada por el producto $B \times F$, para el cual definimos algunas proyecciones ¹ para elementos $(p, q) \in B \times F$, con $p \in B, q \in F$

$$\pi : B \times F \rightarrow B,$$

$$\pi(p, q) = p;$$

que recoge solo elementos de la base B , y

$$\eta : B \times F \rightarrow F,$$

$$\eta(p, q) = q;$$

que solo devuelve elementos de F .

¹Una proyección ortogonal se define como la representación de objetos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2 .

Definición 31. Un producto $B \times F$ se dice que es **producto warped** si su métrica tiene la forma $g = g_B + f^2 g_F$, donde f es una función de elementos de B . Se escribe $B \times_f F$, y su métrica se define para $X \in \mathfrak{X}(M)$ como:

$$\langle X, X \rangle = \langle \pi_*(X), \pi_*(X) \rangle + f^2(\pi(x)) \langle \eta_*(X), \eta_*(X) \rangle. \quad (5.1)$$

Nótese que para el caso en que f es una función constante, el producto warped se reduce al caso trivial $B \times F$.

5.1.1. Hojas y Fibras

Sea (p, q) un elemento de la variedad $B \times_f F$, donde $p \in B, q \in F$.

Definición 32. Dado un elemento específico $q \in F$, las **hojas** son elementos de la forma $B \times \{q\}$.

Decimos que los vectores tangentes a las hojas son **horizontales**.

Definición 33. Dado un elemento $p \in B$, las **fibras** son elementos de la forma $\{p\} \times F$.

Decimos que los vectores tangentes a las fibras son **verticales**.

5.1.2. Lifts

Sea $u \in T_p B$ un vector tangente de la base, y sea un elemento $q \in F$. Definimos el lift de u hacia (p, q) como $\bar{u} \in T_{(p,q)}$ como el único vector que satisface $\pi_*(\bar{u}) = u$.

Análogamente, \bar{X} es el lift del campo $X \in \mathfrak{X}(B)$ cuyo valor en cada punto (p, q) es el lift de X_p hacia (p, q) .

Definimos el conjunto de todos los lifts horizontales como $\mathfrak{L}(B)$, y los lifts verticales como $\mathfrak{L}(F)$. De hecho, dados campos $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{L}(B), \bar{V}, \bar{W} \in \mathfrak{L}(F)$ satisfacen:

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}] &= [X, Y]^- \in \mathfrak{L}(B); \\ [\bar{V}, \bar{W}] &= [V, W]^- \in \mathfrak{L}(F); \\ [\bar{X}, \bar{V}] &= 0. \end{aligned}$$

Lema 1. Sea $\lambda \in F(B)$. El gradiente del lift $\lambda \circ \pi$ hacia λ de $B \times_f F$ es el lift del gradiente de λ en B , i.e. $\pi_*(\nabla(\lambda \circ \pi)) = \nabla\lambda$.

Demostración

En el Apéndice 5 se menciona la definición del gradiente.

Si v es un vector vertical en TM , se tiene que $\pi_*(v) = 0$.

$$\because \langle \nabla(\lambda \circ \pi), v \rangle = v(\lambda \circ \pi) = \pi_*(v)\lambda = 0.$$

así que $\nabla(\lambda \circ \pi)$ es horizontal. Entonces, para un z horizontal, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \pi_*(\nabla(\lambda \circ \pi)), \pi_*(z) \rangle &= \langle \nabla(\lambda \circ \pi), z \rangle \\ &= z(\lambda \circ \pi) = (\pi_* z)\lambda = \langle \nabla\lambda, \pi_* z \rangle, \end{aligned}$$

así que $\pi_*(\nabla(\lambda \circ \pi)) = \nabla\lambda$ en todo punto. □

La Figura 5.1 provee un diagrama que facilita la interpretación del lema anterior.

5.1.3. Conexión en un Producto Warped

Para campos $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$, $V, W \in \mathfrak{L}(F)$, denotamos la conexión del producto warped $B \times_f F$ por ∇ , y la conexión de Levi-Civita será ∇' .

Definición 34. $\nabla_X Y \in \mathfrak{L}(B)$ es el lift de $\nabla_X Y$ en B .

Teorema 6. Para campos $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$, $V, W \in \mathfrak{L}(F)$, se cumplen los siguientes enunciados:

$$\nabla_X V = \nabla_V X = (X \ln(f))V; \quad (5.2)$$

$$\text{nor}(\nabla_V W) = \sigma(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla f; \quad (5.3)$$

$$\text{tan}(\nabla_V W) \in \mathfrak{L}(F); \quad (5.4)$$

la última ecuación es el lift de $\nabla'_V W$ en F .

Demostración

1. Dado que $[X, V] = 0$, así que $\nabla_X V = \nabla_V X$, que son verticales. Luego, $\langle \nabla_X V, Y \rangle = \langle -V, \nabla_X Y \rangle$. De la fórmula de Koszul:

$$2\langle \nabla_X V, W \rangle = X\langle V, W \rangle. \quad (5.5)$$

Ahora, por la definición de la métrica del producto warped:

$$\langle V, W \rangle_{(p,q)} = f^2(p)\langle V_q, W_q \rangle,$$

$$\langle V, W \rangle = f^2(\langle V, W \rangle \circ \eta).$$

De la definición del gradiente (en el Apéndice 6), tenemos que $Xf = (df)X$

$$\therefore X\langle V, W \rangle = X(f^2(\langle V, W \rangle \circ \eta)) = 2fXf(\langle V, W \rangle \circ \eta);$$

$$X\langle V, W \rangle = 2ff'(\langle V, W \rangle \circ \eta)X.$$

Notemos que $(X \ln(f)) = \frac{f'}{f}X$. Entonces, multiplicamos y dividimos la expresión anterior por f para obtener:

$$X\langle V, W \rangle = 2\frac{f'}{f}f^2(\langle V, W \rangle \circ \eta)X = 2(X \ln(f))\langle V, W \rangle.$$

Por la ecuación 5.5, la ecuación 5.2 queda demostrada.

2. Ahora, de la primera propiedad:

$$\langle \nabla_V X, X \rangle f = -\langle W, \nabla_V X \rangle = -(X \ln(f))\langle V, W \rangle.$$

Pero $\langle \nabla f, X \rangle = Xf$, tanto en M como en B por el Lema 1.

$$\therefore \langle \nabla_V X, X \rangle f = -\langle V, W \rangle \langle \nabla f, X \rangle.$$

que implica la ecuación 5.3.

3. Finalmente, dado que V y W son tangentes a las fibras, $\tan(\nabla_V W)$ es la derivada covariante de las fibras que restringe V y W . Entonces, $\tan(\nabla_V W)$ es un lift vertical.

□Es natural preguntarse de dónde sale un logaritmo natural en las ecuaciones que describen campos horizontales y verticales. Para ello, recordemos el mapeo exponencial $\exp : TM \rightarrow M$. Podemos definir $\ln := \exp^{-1} : M \rightarrow TM$, tal que $X \ln(f) \in TM$. En efecto, $(X \ln f)V$ describe el cambio que cubre V por la acción de X , y viceversa; pero dado que consideramos un producto warped, también la función f debe ser incluida en la ecuación 5.1 del Teorema 6.

5.1.4. Geodésicas en productos warped

De *Barret O'Neil (1983)*, obtenemos que una curva $\gamma = (\alpha, \beta)$ en un producto warped $M = B \times_f F$ es una geodésica si, y solo si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. $\alpha'' = (\beta', \beta')f \circ \alpha \nabla f$ en B .
2. $\beta'' = \frac{-2}{f \circ \alpha} \frac{d(f \circ \alpha)}{ds} \beta'$.

5.1.5. Homotecia

Este concepto se define de la siguiente manera:

Definición 35. *Un difeomorfismo $\psi : M \rightarrow N$ de variedades pseudo-Riemannianas tal que $\psi^*(g_N) = c g_M$, para alguna constante $c \neq 0$, es llamada **homotecia de coeficiente c** . [31]*

Como si se tuviera un proyector para presentar una película en una pantalla grande: Inicialmente un cuadro de la película es muy pequeña, cabe en la cámara, pero a través del proyector aparece en la pantalla hasta diez veces más grande. Entonces, la imagen en el proyector y la que se muestra en la pantalla son homotéticas.

En particular, una isometría es una homotecia de coeficiente 1. En el caso $c = -1$, se le llama *anti-isometría*.

Una homotecia de coeficiente $c > 0$ preserva el tipo causal de los vectores tangente y de las curvas. Para un coeficiente $c < 0$, por el otro lado, *revierte* el tipo causal; por ejemplo, un vector v tipo tiempo implicaría que $d\psi v$ fuera tipo espacio.

Lema 2. *Las homotetias preservan la conexión de Levi-Civita.*

Demostración

Consideremos un espacio con conexión de Levi-Civita equipado con una métrica g , y consideremos una métrica homotética $g' = \lambda g$, con $\lambda \in C/\{0\}$ un número distinto de cero. Luego, de la fórmula de Koszul en la métrica g' :

$$2\lambda \langle \nabla_Y Z, X \rangle = \lambda Y \langle Z, X \rangle + \lambda Z \langle X, Y \rangle - \lambda X \langle Y, Z \rangle - \lambda \langle Y, [Z, X] \rangle + \lambda \langle Z, [X, Y] \rangle + \lambda \langle X, [Y, Z] \rangle.$$

y sabemos que la conexión en el espacio cuya métrica es g' satisface la fórmula de Koszul. Pero, dado que λ es distinto de cero, podemos cancelarlo en ambos lados de la expresión y obtenemos la fórmula de Koszul para g . Entonces, la conexión es la misma en ambos espacios, es decir, la de Levi-Civita. □

5.2. Curvatura

5.2.1. Desviación geodésica

Definición 36. Una *familia de geodésicas 1-parámetro* es un mapeo $\gamma : I \times I' \rightarrow M$ de $I, I' \subset \mathbb{R}$ intervalos abiertos, y que satisface

1. Dado un punto s fijo, $\gamma(s, t)$ es una geodésica parametrizada por t .
2. Localmente, $(s, t) \mapsto \gamma(s, t)$ es suave y tiene una inversa suave.[40]

La familia de geodésicas forma una superficie de dos dimensiones $\Sigma \subset M$. [40]

Definición 37. El *vector de desviación geodésica* $\delta s S$ es un vector que parte de un $s_0 \in \gamma$ hacia otro punto cercano $s_0 + \delta s$.

Sperhake (2016) define la *velocidad relativa* de geodésicas cercanas como $\nabla_T(\delta s S) = \delta s \nabla_T S$, donde T es el vector tangente a la geodésica en un $\gamma(s = \text{const}, t)$, y la *aceleración relativa* es definida por $\delta s \nabla_T \nabla_T S$. Ésta última está relacionada con el tensor de curvatura por

$$\nabla_T \nabla_T S = R(T, S)T,$$

así que la desviación geodésica es una manifestación de un tensor de curvatura no nulo.

5.2.2. Lift del Tensor de Curvatura

Definición 38. El *lift* de un tensor T de B a $M = B \times_f F$ es el pullback $\pi^*(T)$. Definimos por ${}^B R, {}^F R$ a los lifts de los tensores de curvatura de B y F respectivamente.

Se satisface que $R(X, Y)Z$ es el lift de de ${}^B R(X, Y)Z$ en B .

Dado que el Tensor de Curvatura de Riemann está relacionado con las fuerzas de marea -las cuales son una consecuencia de la desviación geodésica[40]-, es natural esperar que en una variedad con producto warped el Tensor de Curvatura de Riemann sea proporcional al hessiano H^f . Además:

Teorema 7. Para un producto warped $M = B \times_f F$ de dos variedades pseudo-Riemannianas. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ y $U, V, W \in \mathfrak{L}(F)$, entonces se cumplen los siguientes enunciados:

$$\begin{aligned} R(X, V)Z &= \frac{H^f(X, Y)}{f} V; \\ R(X, Y)V &= R(V, W)X = 0; \\ R(X, V)W &= -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla_X(\nabla f); \\ R(V, W)U &= {}^F R(V, W)U + \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} \{ \langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V \}. \end{aligned}$$

Demostración

1. Sabemos que $[V, X] = 0$ así que

$$R(X, V)Y = \nabla_X \nabla_V Y - \nabla_V \nabla_X Y.$$

Del Teorema 6,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_V Y &= \nabla_X (Y(\ln(f))V) = (XY(\ln(f)))V + (Y(\ln(f)))\nabla_X V \\ &= \{XY(\ln(f)) + (Yf)Xf^{-1}\}V + (X(\ln(f)))(Y(\ln(f))) \\ &= (XY(\ln(f)))V; \\ \therefore R(X, V)Y &= (XY(\ln(f)))V - \nabla_V \nabla_X Y. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por otro lado, $\nabla_V \nabla_X Y = (\nabla_X Y(\ln(f)))V$, y combinándolo con la ecuación 5.6, obtenemos el primer resultado.

2. Ahora, asumimos $[V, W] = 0$. Entonces,

$$R(V, W)X = \nabla_V \nabla_W X - \nabla_W \nabla_V X.$$

También, tenemos $\nabla_V \nabla_W X = (VX(\ln(f)))W + (X(\ln(f)))\nabla_V W = (X(\ln(f)))\nabla_V W$ así que $X(\ln(f))$ es constante en las fibras. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R(V, W)X &= (X(\ln(f)))\nabla_V W - \nabla_W (X(\ln(f))V) \\ &= (X(\ln(f)))(\nabla_V W - \nabla_W V) = (X(\ln(f)))[V, W] = 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, $R(X, Y; V, W) = R(V, W; X, Y) = 0$ por la definición del tensor de curvatura y por el Teorema 5. Entonces, $R(X, Y)V = 0$.

3. Notemos que $R(X, V)W$ es horizontal. Luego, $R(X, Y; W, U) = -R(W, U; X, V) = 0$. Ahora, de la ecuación Primera Identidad de Bianchi, ecuación 3.2, obtenemos

$$R(X, V)W = R(X, W)V.$$

Ahora, aplicando la primera ecuación de este teorema:

$$R(X, V; W, Y) = R(V, X; Y, W) = -\frac{H^f(X, Y)}{f} \langle V, W \rangle;$$

$$R(X, V; W, Y) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \langle \nabla_X (\nabla f), Y \rangle.$$

4. Queremos expresar el tensor de curvatura R en términos del tensor de curvatura de las fibras ${}^F R$. La ecuación de Gauss proporciona una relación entre tensores de curvatura en inmersiones isométricas:

$${}^F R(V, W; U\xi) = R(V, W; U\xi) + \langle \sigma(V, \xi), \sigma(W, U) \rangle - \langle \sigma(V, U), \sigma(W, \xi) \rangle.$$

Pero $\sigma(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla f$.

$$\therefore R(V, W; U\xi) = {}^F R(V, W; U\xi) + \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} [\langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V],$$

que es lo que buscábamos.

□

Del Teorema 7, obtenemos expresiones semejantes para el tensor de Ricci.

Corolario 2. Sean X, Y vectores horizontales, y V, W vectores verticales en un producto warped $M = B \times_f F$ con $k = \dim F > 1$. El tensor de Ricci satisface:

1. $Ric(X, Y) = {}^B Ric(X, Y) - \frac{k}{f} H^f(X, Y)$;
2. $Ric(X, V) = 0$;
3. $Ric(V, W) = {}^F Ric(V, W) - \left[\frac{\Delta f}{f} - (k-1) \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} \right] \langle V, W \rangle$.

Demostración

1. De la ecuación 3.8:

$$Ric(X, Y) = \sum \epsilon_l \langle R(e_l, X)Y, e_l \rangle = \sum \epsilon_l \langle R(X, e_l)e_l, Y \rangle,$$

pero $\dim(M) = \dim(B) + \dim(F)$, así que podemos descomponer la expresión anterior en dos sumatorias. Usando la tercera ecuación del Teorema 7:

$$\therefore Ric(X, Y) = \sum_l^b \epsilon_l \langle {}^B R(e_l, X)Y, e_l \rangle + \sum_l^k \epsilon_l \langle -\frac{\langle e_l, e_l \rangle}{f} \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

Usando la definición del Hessiano (Apéndice 3), obtenemos la primera ecuación.

$$Ric(X, Y) = {}^B Ric(X, Y) - \frac{k}{f} H^f(X, Y).$$

2. La segunda ecuación se obtiene de la misma manera: escribiendo el tensor de Ricci como la traza del tensor de curvatura de Riemann, y aplicando la segunda ecuación del Teorema 7.
3. Empleando la última ecuación del Teorema 7:

$$\begin{aligned} Ric(V, W) &= \sum \epsilon_l \langle R(e_l, V)W, e_l \rangle \\ &= \sum \epsilon_l \langle {}^F R(e_l, V)W + \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} [\langle e_l, W \rangle V - \langle V, W \rangle e_l], e_l \rangle; \\ &= {}^F Ric(V, W) + \sum \epsilon_l \left[\langle \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} \langle e_l, W \rangle \langle V, e_l \rangle - \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} \langle V, W \rangle \langle e_l, e_l \rangle \right]; \\ &= {}^F Ric(V, W) + (k-1) \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} \langle V, W \rangle + \sum \frac{1}{f^2} \epsilon_l f \langle \nabla_l \nabla f, e_l \rangle. \end{aligned}$$

Pero $\sum \epsilon_l \langle \nabla_l \nabla f, e_l \rangle = \Delta f$.

$$\therefore Ric(V, W) = {}^F Ric(V, W) + (k-1) \frac{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}{f^2} \langle V, W \rangle - \frac{\Delta f}{f} \langle V, W \rangle.$$

□

Definición 39. Una función suave f en una variedad Riemanniana es **estrictamente convexa** si en cada punto el Hessiano H^f es positivo definido, y se dice **convexa** si H^f es positivo demi-definido. [12]

5.3. Variedades Producto Warped de Einstein:

Teorema 8. *Un producto warped $M = B \times_f F$ es **Einstein** ($\lambda g = Ric$) si y solo si se cumplen los siguientes postulados[6]:*

1. (F, g_F) es Einstein con ${}^F Ric = \mu g_F$.
2. ${}^B Ric = \lambda g_B + \frac{k}{f} Hf$.
3. $\mu = (k - 1)|\nabla f|^2 + \lambda f^2 - f\Delta f$, con $k = \dim F$.

Demostración

1. Para empezar, supongamos que M es Einstein, es decir, $\lambda g = Ric$. Definimos $\mu = (k - 1)|\nabla f|^2 + \lambda f^2 - f\Delta f$, con $k = \dim F$. De la ecuación 3 del Corolario 2, obtenemos que

$${}^F Ric(V, W) = \frac{f^2}{f^2} \lambda g(V, W) - \left[\frac{\Delta f}{f} + (k - 1)\langle \nabla f, \nabla f \rangle \right] \langle V, W \rangle,$$

puesto que $g_F(V, W) = \frac{1}{f^2} g(V, W) \langle V, W \rangle$, reescribimos

$${}^F Ric(V, W) = \mu g_F,$$

así que las fibras son Einstein. Por otro lado, de la ecuación 1 del Corolario 2, y considerando que $g(X, Y) = g_B(X, Y)$, obtenemos la segunda ecuación.

2. Ahora, consideremos que se cumplen las 3 ecuaciones para M . El Corolario 2 provee las ecuaciones para el tensor de Ricci para las tres posibles combinaciones de campos horizontales y verticales, de donde se deduce que en los tres casos se satisface la condición $Ric = \theta g$, con θ una función en M .

□

Del libro de Bang-Yen Chen, sabemos que para un espacio compacto de Einstein (F, g_F) de dimensión k , con ${}^F Ric = \mu g_F$ es posible construir un producto warped de Einstein $B \times_f F$ que satisface $Ric = \lambda g$. [12]

Si B es una variedad de Riemann compacta 2-dimensional, entonces el producto warped es simplemente un producto de Riemann. [12]

Dato curioso: Nadie ha encontrado ejemplos de productos warped Einstein Compactos con función warped no constante.

5.3.1. Foliaciones

Definición 40. *Una **foliación** en M es un sub-fibrado F del fibrado tangente de M , es decir, para cualesquiera dos campos vectoriales X, Y que toman valores en F , se cumple que $[X, Y]$ también toma valores en F .*

Podemos pensar en una foliación como una cebolla o una lechuga, que está compuesta por un conjunto de *hojas* que cubren totalmente a la variedad, y deben ser de dimensión menor a la dimensión total de la variedad. También, se puede pensar en un cono de hilo (esos que se usan para coser), siendo la hoja de la foliación el hilo (digamos, una recta real) que está enrollado en toda la superficie.

Definición 41. Una subvariedad de otra variedad pseudo-Riemanniana se dice **esfera extrínseca** si es totalmente umbilical con vector de curvatura media paralelo, es decir, $DH=0$.

Definición 42. Una foliación L en una variedad pseudo-Riemanniana M es **totalmente umbilical** si cada hoja de L es totalmente umbilical.

Definición 43. Si el vector de curvatura media en cada hoja es paralelo en el fibrado normal, entonces se le llama **foliación esférica**.

Definición 44. Si cada hoja de L es una subvariedad totalmente geodésica de M , entonces L es una **foliación totalmente geodésica**, también conocida como **autoparalela**.

Observación 4. Producto Twisted

Es una generalización del producto warped, donde las funciones que multiplican a la métrica no dependen únicamente de los elementos de una de las subvariedades multiplicadas.[11][38]

Definición 45. Dadas B, F variedades pseudo-Riemannianas con respectivas métricas g_B, g_F , y una función positiva suave en M . El **producto torcido** $M = B \times_f F$ es la variedad $B \times F$ equipada con la métrica

$$g(X, Y) = g_B(\pi_*(X), \pi_*(Y)) + f^2 g_F(\eta_*(X), \eta_*(Y)). \tag{5.7}$$

Nótese que para el caso en el que f depende solo de B , se reduce a un producto warped. También, en el caso en el que B es un punto, el producto torcido es simplemente un cambio conformal en la métrica de F .

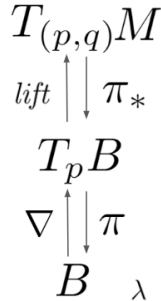


Figura 5.1: Diagrama que ilustra la acción de los *lifts*.

6

Espacio-tiempos de Robertson-Walker

“When you stumble on a beautiful theory you have the same emotional reaction that you feel in front of a piece of art”

- Gian Francesco Giudice

6.1. Motivación histórica

6.1.1. Cosmología

La cosmología es un intento por describir el universo entero haciendo algunas simplificaciones y suposiciones que permitan capturar las propiedades esenciales. En cosmología relativista, se asume que el universo puede ser modelado como un fluido -el límite continuo para un gran número de partículas-, donde las galaxias son las moléculas.[40]

Definición 46. Una variedad M se dice **isotrópica en un punto** p si dados $v, w \in T_p M$ con $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle$, existe una isometría ϕ de M tal que $d\phi(v) = w$. M se dice **isotrópica** si es isotrópica en todo punto.[31]

Principio Cosmológico: En un momento dado, el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico a grandes escalas.

6.1.2. Observaciones astronómicas

A principios del siglo XX, los astrónomos no estaban seguros del tamaño del universo: En general, se creía que serían algunas decenas de miles de años luz de diámetro. En los años

20's, Hubble observó que algunas nebulosas¹ eran del tamaño de la Vía Láctea. Además, descubrió que el universo se expande, lo cual provoca que la radiación electromagnética emitida por galaxias y nebulosas lejanas no mantengan una longitud de onda constante observada desde la Tierra. De hecho, cuanto más se aleja un objeto emisor de luz de un observador, la longitud de onda aumenta. A este fenómeno se le llama *Corrimiento al Rojo*.

Las observaciones de Hubble indicaban que las soluciones propuestas para las ecuaciones de campo de Einstein de la época no describen al universo observable. Para encontrar una solución a las ecuaciones de campo de Einstein compatible con el Principio Cosmológico, en los años 30's H. Robertson y A.G. Walker introdujeron una métrica (ecuación 13.1) para un espacio-tiempo donde todos los lugares parecen uno mismo y todas las direcciones espaciales son las mismas.

6.2. Espacio-tiempo de Robertson-Walker

Definición 47. *Un espacio-tiempo de Robertson-Walker es un producto warped de la forma*

$$L_1^m(k, f) := (I \times S^{m-1}(k), g), \quad (6.1)$$

donde I es un intervalo de los reales, $m \in \mathbb{N}$, y $(S^m(k), g_k)$ es una 3-variedad Riemanniana de curvatura k constante. La función f describe si el universo se contrae o expande.

En Relatividad General se utiliza el caso particular $m = 4$:

$$L_1^4(k, f) := (I \times S^3(k), g), g = -dt^2 + f^2(t)g_k. \quad (6.2)$$

Definición 48. *Sea ∂_t la primera coordenada de un campo vectorial en $L_1^m(k, f)$, el cual es llamado **campo co-móvil del observador** en Relatividad General.*

Dos propiedades muestran algunas simetrías en este espacio-tiempo:

1. Curvatura Constante: Un espacio-tiempo de Robertson-Walker cuyas fibras tienen curvatura constante (como se ve en la ecuación 6.2, la $(m - 1)$ -variedad Riemanniana tiene curvatura constante k).

Dado que la curvatura del espacio-tiempo aparece por la presencia de objetos con masa: Si la curvatura es constante en todo el espacio, entonces la distribución de masa debe ser uniforme. Dicho de otra forma, curvatura constante es igual a un universo espacialmente homogéneo.

2. Campo tipo tiempo: Existe un campo vectorial tipo tiempo

$$K = f(t)\partial_t,$$

donde ∂_t es el lift del campo d/dt en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$ hacia $I \times S^{m-1}$, esto es, ∂_t es la primera coordenada de un campo vectorial en $L_1^m(k, f)$ llamada **campo co-móvil del observador** en Relatividad General. El campo K satisface $\nabla_X K = f'(t)X, \forall X$.

En particular, siendo L_K la derivada de Lie a lo largo de K , se tiene que $L_K g = 2f'g$.

¹Las nebulosas son nubes gigantes constituidas por concentraciones de gases entre los que predominan el hidrógeno, helio y polvo estelar que toman formas extrañas en el espacio.[34][32]

6.3. Espacio en reposo

De la ecuación 6.1, el intervalo I es una línea de tiempo, y en cada punto de ella hay un estado estático del universo, como si le pusiéramos pausa a todo el universo en un momento $t = t_0$.

Una ilustración de este concepto son los “flip books”, los cuales tienen una escena en cada página y al pasarlas muy rápido parece como si fuera una película.

Definición 49. *Un espacio en reposo o sección tipo espacio en una variedad de Lorentz es una hipersuperficie dada por un $t = t_0$ constante, es decir, es una fibra*

$$S(t_0) := \{t_0\} \times_{f(t_0)} S^{m-1}(k). \quad (6.3)$$

Ahora, consideremos un trozo de ese espacio en reposo: una subvariedad N immersa en un espacio-tiempo de Robertson-Walker.

Definición 50. *Una subvariedad pseudo-Riemanniana N de $L_1^m(k, f)$ es llamada **transversal** si está contenida en un espacio en reposo $S(t_0)$ para algún $t_0 \in I$.*

También, un concepto generalizado para los espacios de Robertson-Walker son aquellos con pequeñas deformaciones en la métrica, de modo que no necesariamente sean espacialmente homogéneos.

Definición 51. *Un espacio-tiempo de Robertson-Walker generalizado es un producto warped cuya base es un intervalo abierto de la recta real equipada con el signo opuesto en su métrica, y su fibra es cualquier variedad Riemanniana.*

Definición 52. *Una subvariedad pseudo-Riemanniana N de $L_1^m(k, f)$ es **H-subvariedad** si el campo comóvil del observador ∂_t es tangente a N en todo punto de N .*

Queremos mostrar algunas proposiciones para variedades tipo espacio y variedades transversales, pero primero debemos enunciar (y demostrar) algunas proposiciones útiles para espacio-tiempos de Robertson-Walker, las cuales son tomadas de *Bang-Yen Chen, 2017* [12].

6.4. Proposiciones en espacios de Robertson-Walker

Lema 3. *El tensor de curvatura R de $L_1^m(k, f)$ satisface las siguientes propiedades:*

1. $R(\partial_t, V)\partial_t = \frac{f''}{f}V$;
2. $R(V, \partial_t)W = -\langle V, W \rangle \frac{f''}{f}\partial_t$;
3. $R(V, W)\partial_t = 0$;
4. $R(U, V)W = \frac{k+f'^2}{f^2}\{\langle V, W \rangle U - \langle U, W \rangle V\}$,

para $U, V, W \in \mathfrak{L}(S^{m-1}(k))$.

Demostración

Las primeras tres ecuaciones son consecuencia inmediata del Teorema 7. Para la última, usamos la última ecuación del Teorema 7 para obtener:

$$R(U, V)W = \frac{f'^2}{f^2} \{ \langle V, W \rangle U - \langle U, W \rangle V \} + {}^F R(U, V)W.$$

Luego, utilizamos la ecuación 3.6 para el tensor de curvatura de las fibras ${}^F R$:

$${}^F R(U, V)W = k/f^2 [\langle V, W \rangle U - \langle U, W \rangle V].$$

donde el factor de f^2 aparece aprovechando que la métrica de un producto warped es dada por la ecuación 5.1. Combinando los dos resultados obtenidos, demostramos la última ecuación de este lema. \square

Un resultado inmediato de la última ecuación del lema 3 es el siguiente corolario:

Corolario 3. *La curvatura seccional de $L_1^m(k, f)$ es $\frac{k+f'^2}{f^2}$.*

De ello, todo plano que contiene un vector de ∂_t tiene curvatura

$$K_{\partial_t} = f''/f,$$

y los planos tangentes a una hoja $S(t)$ tienen curvatura $K = f''/f + k/f^2$. Estas dos cantidades son llamadas las *Curvaturas Seccionales Principales*.

Corolario 4. *Un espacio-tiempo de Robertson-Walker $L_1^m(k, f)$ tiene curvatura constante k si, y solo si la función warped f satisface $ff'' = f'^2 + k$.*

Demostración

1. Supongamos que $L_1^m(k, f)$ tiene curvatura constante. Luego, de la primera ecuación del lema 3, la curvatura seccional es dada por f''/f . Por otro lado, de la última ecuación sabemos que la curvatura seccional de $L_1^m(k, f)$ es $\frac{k+f'^2}{f^2}$. Igualando ambas expresiones obtenemos que la función warped satisface $ff'' = f'^2 + k$.
2. Partiendo de la suposición de que $ff'' = f'^2 + k$, obtenemos $\frac{k+f'^2}{f^2} = f''/f$, que es la curvatura seccional obtenida por los campos de la ecuación 1 del Lema 3, pero también es la curvatura seccional de la ecuación 4 del mismo Lema. Entonces, la curvatura es constante.

\square

De ello, obtenemos algunas propiedades interesantes:

Corolario 5. *Para constantes a y b , se cumplen los siguientes enunciados:*

1. $L_1^m(k, f)$ es plano si, y solo si, $f(t) = at + b$, con $k = -a^2$.
2. $L_1^m(k, f)$ tiene curvatura constante $c^2 > 0$ si, y solo si $f(t) = a \cosh(ct) + b \sinh(ct)$, $k = c^2(a^2 - b^2)$.
3. $L_1^m(k, f)$ tiene curvatura constante $-c^2 > 0$ si, y solo si $f(t) = a \cos(ct) + b \sin(ct)$, $k = -c^2(a^2 + b^2)$.

Demostración

1. Supongamos que $L_1^m(k, f)$ es plano. Del Lema 4, el tensor de curvatura es igual a 0, y $f'' = 0$, lo que implica que $f(t) = at + b$, y del Corolario 4 obtenemos que $k = -a^2$.
Para el converso, asumimos que $f(t) = at + b$ y $k = -a^2$. De ello, calculamos $f' = a, f'' = 0$. Sustituyendo en la primera ecuación del Lema 4, encontramos que $R = 0$, y $L_1^m(k, f)$ es plano.
2. Supongamos que $L_1^m(k, f)$ tiene curvatura constante $c^2 > 0$, con $k = c^2(a^2 - b^2)$. De los Corolarios 2 y 3, $\frac{ff''}{f^2} = c^2(a^2 - b^2)$. Obtenemos una ecuación diferencial con la forma $f'' - c^2(a^2 - b^2)f = 0$, que al resolverla para f obtenemos funciones hiperbólicas $f(t) = a\cosh(ct) + b\sinh(ct)$.
El converso se deduce planteando la ecuación diferencial anterior con $f(t) = a\cosh(ct) + b\sinh(ct)$ y despejando c^2 .
3. Supongamos que $L_1^m(k, f)$ tiene curvatura constante $-c^2 > 0$, con $k = -c^2(a^2 + b^2)$. Siguiendo el procedimiento análogo al inciso anterior, obtenemos la ecuación diferencial con forma semejante a un oscilador armónico, cuya solución viene dada por $f(t) = a\cos(ct) + b\sin(ct); k = -c^2(a^2 + b^2)$.
Así mismo, el converso se deduce planteando la ecuación diferencial anterior con $f(t) = a\cosh(ct) + b\sinh(ct)$ y despejando c^2 .

□

Lema 4. Para $V, W \in \mathfrak{L}(S^{m-1}(k))$, los siguientes enunciados se cumplen:

1. $\nabla_{\partial_t} \partial_t = 0$;
2. $\nabla_{\partial_t} V = \nabla_V \partial_t = (\ln f)' V$;
3. $\langle \nabla_V W, \partial_t \rangle = -\langle V, W \rangle (\ln f)'$.

Demostración

1. El primer enunciado aparece inmediatamente de la segunda ecuación del Teorema 6.
2. Para el segundo, utilizamos la ecuación 5.2, dado que $\partial_t(\ln f) = (\ln f)'$.
3. Para el último enunciado, notamos que

$$\langle \nabla_V W, \partial_t \rangle = \text{nor}(\nabla_V W) = \sigma(V, W),$$

y conocemos la expresión para la segunda forma fundamental por la ecuación 5.4.

□

6.5. Proposiciones de variedades transversales y variedades tipo espacio

Teorema 9. *La segunda forma fundamental σ de N en $L_1^m(k, f)$ se relaciona con la segunda forma fundamental $\sigma^{S(t_0)}$ de N en $S(t_0)$ por*

$$\sigma(X, Y) = \sigma^{S(t_0)}(X, Y) + \langle X, Y \rangle (\ln f)' \partial_t, \quad (6.4)$$

con $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$.

Demostración:

Descomponemos un vector tangente X en un espacio-tiempo de Robertson-Walker $L_1^m(k, f)$ guiándonos de la Fórmula de Gauss (ecuación 4.2) de la siguiente manera:

$$X = \text{nor}(X) + \psi_X \partial_t, \quad (6.5)$$

donde definimos $\psi_X \equiv -\langle X, \partial_t \rangle$ [13].

Por otro lado, definimos para una H -subvariedad N el conjunto de campos ortogonales a ∂_t por

$$\mathfrak{D}^\perp = \{X \in \mathfrak{X}(N) \mid X \perp \partial_t\}.$$

Sean $X, Y \in \mathfrak{D}^\perp$. Si ∇' es la conexión de Levi-Civita de N , entonces, por el lema 4, obtenemos que $\nabla'_\partial Y$.

También, podemos reescribir la ecuación 6.5 para el caso $X = \nabla'_X Y$:

$$\nabla'_X Y = \text{nor}(\nabla'_X Y) - \langle \nabla'_X Y, \partial_t \rangle \partial_t,$$

haciendo uso de la expresión del producto escalar entre el campo ∂_t y un vector tangente en N , la cual es dada por la tercera ecuación del lema 4, obtenemos el siguiente resultado:

$$\nabla'_X Y = \text{nor}(\nabla'_X Y) + \langle X, Y \rangle (\ln f)' \partial_t. \quad (6.6)$$

Pero al considerar campos en \mathfrak{D}^\perp , la ecuación 5.3 nos permite reescribir:

$$\sigma = \sigma^S + \langle X, Y \rangle (\ln f)' \partial_t,$$

con σ es la segunda forma fundamental de $L_1^m(k, f)$ y σ^S la segunda forma fundamental restringida a N . □

Finalmente, encontramos dos corolarios interesantes:

Corolario 6. *Una subvariedad transversal N de $L_1^m(k, f)$ es no-totalmente geodésica a menos que N esté en un espacio en reposo $S(t_0)$ con $f'(t_0) = 0$ como una subvariedad totalmente geodésica.*

Demostración

Si N es totalmente geodésica en $S(t_0)$, entonces $\sigma^{S(t_0)} = 0$. Si además asumimos $f'(t_0) = 0$, la sustitución en la ecuación 6.4 inmediatamente indica que $\sigma = 0$, y N es totalmente geodésica en $L_1^m(k, f)$. \square

Corolario 7. *Si una subvariedad transversal de $L_1^m(k, f)$ es totalmente umbilical, entonces yace en un espacio en reposo $S(t_0)$ como una variedad totalmente umbilical.*

Demostración

Supongamos que $N \in L_1^m(k, f)$ es totalmente umbilical. Luego, la segunda forma fundamental satisface $\sigma(X, Y) = \langle X, Y \rangle H$, donde H es el vector de curvatura media. Luego, sustituyendo en la ecuación 6.4:

$$\sigma^{S(t_0)} = \langle X, Y \rangle H - \langle X, Y \rangle (\ln f)' \partial_t = \langle X, Y \rangle (H - (\ln f)' \partial_t).$$

La condición para que N sea totalmente umbilical es que $A_\xi = \rho I$ para alguna función $\rho \in F(N)$ y un ξ arbitrario. Haciendo un producto en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \langle \sigma^{S(t_0)}(X, Y), \xi \rangle &= \langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle X, Y \rangle \langle H - (\ln f)' \partial_t, \xi \rangle; \\ \langle A_\xi(X), Y \rangle &= \langle (H - (\ln f)' \partial_t) X, Y \rangle. \end{aligned}$$

$\therefore A_\xi = \rho I$, y N es totalmente umbilical en $S(t_0)$. \square

6.6. Comentario final sobre la clasificación de los espacio-tiempos de Robertson-Walker

A lo largo de este capítulo hemos explorado los aspectos básicos de los espacios-tiempo de Robertson-Walker y demostrado varios teoremas clave tomados de *Bang-Yen Chen (2017)*. Se le ha dado especial atención a las variedades transversales, ya que éstas son útiles en Relatividad Numérica permitiendo abordar problemas más específicos[3]. Al estudiar las propiedades del tensor de curvatura, la relación de la segunda forma fundamental y las variedades transversales, hemos logrado una comprensión más profunda de la estructura y la evolución del universo.

7

Formalismo ADM:

“To know that we know what we know, and to know that we do not know what we do not know, that is true knowledge.”

- Nicolás Copérnico

Con la finalidad de estudiar Relatividad General con métodos numéricos, es útil separar las Ecuaciones de Campo de Einstein de tal manera que sea posible obtener información de la evolución del campo gravitacional a partir de datos conocidos, por ejemplo, condiciones iniciales. La Relatividad Numérica recurre a distintos formalismos para abordar este problema[3].

Según *Corichi & Núñez*[14], la forma covariante de las ecuaciones de Einstein (ecuación 3.10) presenta algunas restricciones para variables dinámicas. Una forma de estudiar la dinámica en Relatividad General es considerando un problema de Cauchy donde se analizan las dinámicas como la evolución de una hipersuperficie tipo espacio de tres dimensiones.

En este capítulo se abordará el Formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM), el cual es una aproximación a la Relatividad General a partir de la Mecánica Hamiltoniana. Es posible derivar las ecuaciones de campo de Einstein de la Acción de Einstein-Hilbert, dada por la siguiente ecuación:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (7.1)$$

siendo $g = |g|$ el determinante del tensor métrico, y R es la curvatura escalar del espacio-tiempo, la cual en ocasiones aparece precedida por el superíndice n (la dimensión) para distinguir la curvatura escalar del espacio completo de la de una subvariedad; para el espacio-tiempo de cuatro dimensiones, $R = {}^4 R$. La densidad lagrangiana es dada por $L = \sqrt{-g}R$.

Construir una teoría Hamiltoniana Clásica requiere de momentos canónicos conjugados para las variables dinámicas (las componentes dinámicas del tensor métrico) tomando las derivadas parciales respecto a las velocidades generalizadas. Así como para los espacio-tiempos de Robertson-Walker es posible estudiar subvariedades transversales, en éste contexto consideramos que el espacio-tiempo está formado por hipersuperficies que no se intersectan entre sí. Cada hipersuperficie S es una sección tipo espacio como en la definición 49.

Si g es el tensor métrico del espacio-tiempo, la métrica inducida en la hipersuperficie S será denotada por γ_{ij} [23].

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \eta_\mu \eta_\nu,$$

para $\eta^\mu = -\frac{g^{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}}$ un vector normal a la hipersuperficie que es pensado como la 4-velocidad de un observador normal a N . [23]

7.0.1. Curvatura extrínseca

En la literatura de física relacionada con el Formalismo ADM, la segunda forma fundamental es interpretada como la *curvatura extrínseca* de una hipersuperficie embebida en una variedad, y es denotada por K_{ab} , y es definida por:

$$K_{ab} \equiv -e_b *^4 \nabla_a n, \quad (7.2)$$

con n el vector normal a e_b .

Para $S \subset M$, la curvatura extrínseca mide cuán curvada está la hipersuperficie S respecto a M . Asimismo, para dos puntos en la hipersuperficie, indica cuánto distan sus vectores normales de ser paralelos uno con otro.[14]

7.0.2. Descomposición 3 + 1 del espacio-tiempo

De acuerdo a *M. Alcubierre (2006)*, los problemas con condiciones iniciales son bastante útiles para predecir la evolución de un sistema en el tiempo, de modo que las ecuaciones fundamentales son empleadas para predecir el futuro o el pasado del sistema. Esta es la motivación para separar los roles del espacio y del tiempo: a esta formulación de la Relatividad General se le conoce como *Formalismo 3 + 1*. Sea $X : S \rightarrow M$ un mapeo uno a

uno. Si ξ^a son las coordenadas intrínsecas de S , las coordenadas en M son dadas por $x^\mu = X^\mu(\xi^a, t)$, para t etiqueta a cada hipersuperficie en un tiempo dado. Definimos sus componentes:

$$t^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{dt}. \quad (7.3)$$

De la Fórmula de Gauss (4.2), podemos descomponer t^μ de la siguiente manera:

$$t^\mu = -(t * n)\eta^\mu + \gamma^{ab}(t * e_b)X_a^\mu,$$

$$t^\mu \equiv N\eta^\mu + N^a X_a^\mu. \quad (7.4)$$

En la ecuación anterior introducimos la Función de Lapso $N \equiv \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}$ y la Función de Cambio $N^a \equiv N^2 g^{0a}$.

$\{N, N^a, \gamma_{ij}\}$ son las *Variables ADM* que determinan por completo la geometría del espacio-tiempo. Ahora, es posible reescribir el tensor métrico en términos de estas variables:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_a N^a - N^2 & N_a \\ N_b & \gamma_{ab} \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

De ello, se obtiene

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}, \quad (7.6)$$

con $\gamma \equiv \det(\gamma_{ij})$.

Puesto que hemos encontrado una expresión para el tensor métrico en términos de las Variables ADM, ahora encontraremos una expresión para la curvatura escalar en términos de la segunda forma fundamental K_{ab} y su traza $K \equiv K^a_a$, siendo éste último un término relacionado con el Vector de Curvatura Media mediante la siguiente ecuación:

$$K = nH, \quad (7.7)$$

donde n es la dimensión de la hipersuperficie.

Reescribiendo el Teorema Egregium Generalizado de la ecuación 11.15 con la notación del Formalismo ADM, obtenemos:

$${}^4R = {}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + 2\nabla_\lambda(\Delta^\lambda), \quad (7.8)$$

donde $\Delta^\lambda = \eta^\lambda \eta^\nu_{;\nu} - \eta^\nu \eta^\lambda_{;\nu}$

Luego, sustituyendo en la acción de Einstein-Hilbert, obtenemos una acción en función de las Variables ADM:

$$S[\gamma_{ij}, N, N^i] = \int dt \int d^3x \sqrt{\gamma} N (K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^3R + \nabla_\lambda(\Delta^\lambda)), \quad (7.9)$$

Asimismo, el Lagrangiano toma la forma

$$L = \int d^3x \sqrt{\gamma} N (K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^3R + \nabla_\lambda(\Delta^\lambda)). \quad (7.10)$$

Hasta ahora, hemos derivado algunos de los aspectos más importantes del formalismo ADM. Este formalismo es empleado en Relatividad Numérica no solo porque brinda la oportunidad de aplicar variables canónicas y estudiar la relatividad según las ecuaciones de Hamilton; en cambio, también facilita el estudio de las cantidades físicas que evolucionan en el espacio gracias a la foliación del espacio-tiempo. Cabe destacar que las ecuaciones ADM fueron originalmente pensadas para ser la base de teorías de Gravedad Cuántica, y no con el propósito de ser empleadas para realizar simulaciones numéricas[3]. Aunque desde los años 90's se han buscado alternativas al Formalismo 3 + 1, como menciona *M. Alcubierre (2006)*, las ecuaciones ADM son el punto de partida de la Relatividad Numérica. Los nuevos métodos intentan obtener simulaciones numéricas más estables y acertadas que las derivadas del Formalismo ADM[3].

Con la finalidad de comparar la eficiencia de éstos nuevos métodos con el clásico formalismo ADM, sería útil evaluar casos específicos tales como el de la sección de un espacio-tiempo de curvatura constante. No obstante, la literatura es limitada, por lo cual a continuación derivamos un Lagrangiano para este caso.

7.0.3. Espacio-tiempo de curvatura constante

Como resultado final de éste trabajo, derivaremos un Lagrangiano con Variables ADM para una hipersuperficie embebida en un espacio-tiempo de curvatura constante c . Puesto que la hipersuperficie a considerar es de tipo espacio y de tres dimensiones, tomaremos el caso particular $n = 3$ en el teorema 5.

Notemos que el vector de curvatura media cumple $K = nH$. Luego,

$${}^3R = \frac{1}{2}K^2 - \frac{1}{2}K_{ij}K^{ij} + 3c.$$

De ello, sustituyendo en (7.10), obtenemos el Lagrangiano para una hipersuperficie de curvatura constante:

$$L = \frac{1}{2} \int d^3x N \sqrt{\gamma} (K_{ab}K^{ab} - K^2 + 3c + 2\nabla_\lambda(\Delta^\lambda)). \quad (7.11)$$

Finalmente, gracias al Teorema 6.4 para espacio-tiempos R-W, es posible escribir la curvatura escalar de la hipersuperficie en términos de la curvatura escalar del espacio-tiempo y de la función warped.

7.0.4. Formalismo Hamiltoniano

Para el caso $\nabla_\lambda(\Delta^\lambda) = 0$, la Densidad Lagrangiana es:

$$\mathcal{L}_H = N \sqrt{\gamma} ({}^3R - K^2 + K_{ij}K^{ij}). \quad (7.12)$$

Calculamos los momentos conjugados:

$$\begin{aligned} \pi_N &= \frac{\partial \mathcal{L}_H}{\partial \dot{N}} = 0, \\ \pi_{N^i} &= \frac{\partial \mathcal{L}_H}{\partial \dot{N}^i} = 0. \end{aligned}$$

De *Rishabh Jha*[23], el único momento conjugado no trivial se obtiene al derivar la Densidad Lagrangiana respecto de la derivada de la métrica:

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_H}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \sqrt{\gamma} (K \gamma^{ij} - K^{ij}).$$

Definiendo $\pi = \gamma^{ij} \pi_{ij}$, *Rishabh Jha* (2022) provee la expresión para la Densidad Hamiltoniana ADM:

$$\mathbf{H}_H = 2\pi^{ij} \nabla_i N_j - N \sqrt{\gamma} {}^3R + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right). \quad (7.13)$$

Para una hipersuperficie en un espacio-tiempo de curvatura constante c , obtenemos la siguiente Densidad Hamiltoniana ADM:

$$\mathbf{H}_H = 2\pi^{ij} \nabla_i N_j - \frac{1}{2} N \sqrt{\gamma} (K^2 - K_{ij}K^{ij} + 6c) + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_{ij} \pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2} \right). \quad (7.14)$$

Conclusión

Este trabajo, motivado por la curiosidad por la rigurosa fundamentación matemática de la teoría de la Relatividad General de Einstein, es en gran parte una monografía que sintetiza varias definiciones y teoremas sobre la Geometría Riemanniana, haciendo énfasis en las variedades y subvariedades con producto warped. Además de recopilar términos y propiedades provenientes de diferentes fuentes, también se demostraron explícitamente varios teoremas escogidos de *Bang-Yen Chen (2017)*, libro que fue la referencia principal durante toda la investigación.

Dado que las variedades con producto warped desempeñan un papel importante en la cosmología, en particular en los espacio-tiempos de Robertson-Walker, se llevó a cabo un estudio detallado para comprender mejor la estructura matemática de estos modelos. Para ello, se hizo referencia al cuarto capítulo del libro de Bang-Yen Chen. Entre las proposiciones presentadas, destacan el Corolario 2, el Corolario 7, el Teorema 2 y el Teorema 9, ya que las respectivas demostraciones proporcionadas en el libro de Bang-Yen Chen contienen varios pasos implícitos y no explícitos que requieren una atención especial. Por otro lado, con el objetivo de aplicar las herramientas adquiridas durante la investigación al ámbito de la física, se realizó un estudio sobre el Formalismo ADM, ya que éste recurre a la forma contraída de la Ecuación de Gauss y permite abordar la Relatividad General de manera dinámica. Durante los primeros meses de investigación, las ecuaciones de estructura fueron estudiadas para variedades ambiente, por lo cual la descomposición $3 + 1$ es la aplicación más directa, solamente después de los espacio-tiempos de Robertson-Walker.

La aplicación del Teorema 5 fue fundamental para derivar un nuevo lagrangiano a partir del formalismo ADM, específicamente para una hipersuperficie en un espacio-tiempo de curvatura constante. Este tipo de análisis facilita la comparación del formalismo ADM con otros formalismos alternativos según su eficiencia.

Una posible dirección es la de realizar simulaciones identificando el sistema descrito por nuestro Lagrangiano como un problema de Cauchy imponiendo restricciones hamiltonianas y de momentum[44]. Las simulaciones basadas en el formalismo ADM, y más recientemente en la formulación BSSN, permiten comprender aspectos teóricos de fenómenos importantes en el estudio de gravitación tales como ondas gravitacionales, siendo un ejemplo de éstos el trabajo de *Shibata & Nakamura (1995)*, y sistemas binarios[39].

Es importante destacar que no se realizaron estudios numéricos a partir de éste resultado. Sin embargo, se reconoce la importancia de la Relatividad Numérica, por lo cual este lagrangiano abre nuevas perspectivas de investigación y permite una exploración más detallada de los problemas de condiciones iniciales en las teorías de gravitación.

8

Apéndice 1: Conceptos básicos de Geometría Diferencial

Roughly speaking, classical differential geometry is the study of local properties of curves and surfaces

Do Carmo [8]

La geometría a la que estamos acostumbrados aparece sobre superficies planas. Podemos dibujar curvas y rectas, así como medir distancias y otras propiedades de cuerpos geométricos: a este tipo de geometría se le llama Geometría Euclídea o Geometría a secas. En geometría Riemanniana estaremos estudiando superficies (e hipersuperficies) que estarán curvadas en el espacio (o hiperespacios), pero que son localmente euclídeos.

8.1. Curvatura

Las definiciones de esta sección son tomadas del libro de Do Carmo[8]. Cuando se estudia cálculo multivariable se presentan muchos ejercicios de parametrización de curvas y superficies. Podemos pensar en una curva en un plano o en un espacio euclideo (digamos, \mathbb{R}^3) como una línea que ha sido pegada en dicho espacio: prácticamente es como tomar un intervalo de los reales y deformarlo siguiendo una curva.

Formalmente:

Curva diferenciable parametrizada: Se define como un mapeo diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ en el espacio \mathbb{R}^3 .

Una curva diferenciable parametrizada se dice **regular** si $\alpha' \neq 0$, para todo $t \in I$.

También, es posible calcular la **longitud de arco** $s(t)$ de una curva desde un punto $t_0 \in I$

:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt. \quad (8.1)$$

Ahora, damos una definición para la curvatura en un punto de la curva:

Definición 53. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco $s \in I$. La **curvatura** de α en s es el número $k(s) = |\alpha''(s)|$.

Luego, la curvatura de un círculo es el inverso de su radio.

Imaginando una curva cualquiera (una línea no recta, de preferencia muy torcida) y fija un punto, podemos colocar un círculo tangente a la curva que encaje con la forma de esta. Para cada punto en la curva podemos colocar un círculo diferente, pero en un punto en particular, la curvatura en un punto se define como el inverso del radio del círculo que mejor encaja.

$$k(s) = \frac{1}{r}, s \in I. \quad (8.2)$$

De ello, podemos ver que una línea recta tiene 0 curvatura (ya que $r \rightarrow \infty$).

8.1.1. Curvaturas principales

Para el caso de una superficie (o hipersuperficie) curvada, se obtiene más de un solo valor para la curvatura en un punto, dependiendo de la parametrización escogida. Sin embargo, siempre existirá una curvatura máxima y una mínima: estas son las curvaturas principales.

8.1.2. Curvatura de Gauss

Definición 54. Sean k_1, k_2 las curvaturas principales de una superficie en un punto. La curvatura de Gauss mide la curvatura intrínseca de una superficie en un punto, y es dada por el producto de sus curvaturas principales: $K = k_1 k_2$.

8.2. Coordenadas

Existen herramientas llamadas «Atlas», que son colecciones de mapas, cada uno sobre un área pequeña, como si dividiéramos el mundo en pequeños cuadritos y a cada uno le asignamos un mapa, y a la colección de todos los mapas le llamamos *Atlas*.

Nótese que, aunque el atlas completo contienen toda la información de un planeta redondo (no plano), cada mapa individual es plano. Estamos *mapeando* una sección de una superficie en un plano (para el caso de dos dimensiones, \mathbb{R}^2). A estos mapeos les llamamos «cartas».

8.2.1. Cartas y Atlas

Definición 55. Una *carta* para un conjunto M es un par (ϕ, U) , con U un subconjunto de M y $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ es una biyección de U hacia un abierto $\phi(U)$ en \mathbb{R}^m , para algún número natural m . Un **Atlas** \mathfrak{A} en M es una colección de cartas

$$\mathfrak{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A},$$

tal que los dominios U_α cubren toda M , i.e. $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. [20]

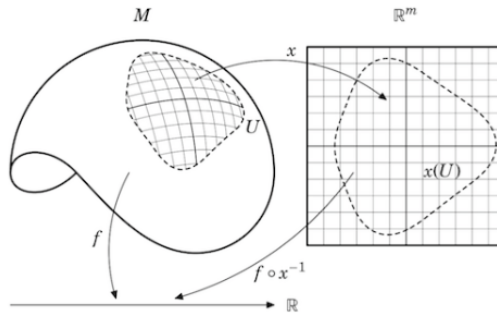


Figura 8.1: Un subconjunto de la variedad es mapeado en un espacio euclídeo. El mapeo es una carta. Imagen tomada de Math Stack Exchange.[1]

8.2.2. Espacios topológicos

Es hora de hablar de uno de los conceptos más importantes en matemáticas. Una variedad es cualquier objeto geométrico en el cual se puede encontrar la idea de curvatura y que visto muy de cerca es *plano*.

Pero antes de escribir su definición formal, necesitamos algunos aspectos básicos de topología. Consideremos un conjunto de elementos denotado por X .

Definición 56. Una **topología** en un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío \emptyset y X están en τ .
2. La unión de los elementos de cualquier colección de τ está en τ .
3. La intersección de cualquier subcolección finita de τ está en τ . [29]

Definición 57. Un **espacio topológico** es un conjunto X con una topología especificada. [29]

8.2.3. Homomorfismos, homeomorfismos e isomorfismos

Las definiciones a continuación son muy importantes, y debe entenderse que son diferentes entre sí (aunque sus nombres son muy parecidos).

Definición 58. Un **homomorfismo** es un mapeo entre dos estructuras algebraicas del mismo tipo $f : A \rightarrow A'$ que conserva las operaciones de las estructuras. [29]

Definición 59. Un **isomorfismo** entre dos objetos algebraicos es una correspondencia biyectiva que preserva la estructura algebraica. [29]

Es decir, un isomorfismo es un homomorfismo biyectivo.

Definición 60. Sean X, Y espacios topológicos; sea $f : X \rightarrow Y$ una biyección. Si tanto f como f^{-1} son continuas, se dice que f es un **homeomorfismo**. [29]

8.3. Variedades

Ahora, introducimos la definición de variedad («manifold» en inglés, por lo cual se usan las letras M, N para denotarlas).

Definición 61. Una **Variedad Topológica** es un espacio topológico M tal que todo $p \in M$ tiene un vecindario abierto U que es homeomorfo a un abierto en un espacio euclídeo.

Se dice entonces que si M tiene dimensión m , un subconjunto $U \subset M$ puede ser mapeado en un abierto de \mathbb{R}^m .

De esta forma, dados $k, m \in \mathbb{N}$, un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ es una **subvariedad m -dimensional suave de \mathbb{R}^k** ssi. todo punto $p \in M$ tiene un vecindario abierto en $U \subset \mathbb{R}^k$ tal que $U \cap M$ es difeomorfo a un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. [20]

Decimos que si M es de dimensión m , es una m -variedad.

Luego, $\phi : U \cap M \rightarrow \Omega$ es una carta de coordenadas («coordinate chart» en inglés), y su inverso $\phi^{-1} : \Omega \rightarrow U \cap M$ es una parametrización suave o lisa.

Definición 62. Un mapeo entre variedades diferenciables se llama **difeomorfismo**. Y el espacio de todos los difeomorfismos se le denota por $Diff(M)$.

8.3.1. Productos

Recordemos el producto cartesiano: Si tenemos una recta \mathbb{R} y un plano \mathbb{R}^2 , el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ es isomorfo a \mathbb{R}^3 , y se cumple que se suman sus dimensiones: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$. Si M, N son variedades de dimensión m y n respectivamente, el producto $M \times N$ tendrá dimensión $m + n$.

8.4. Espacios tangente

Definición 63. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una m -variedad y sea $p \in M$ un punto fijo. Un vector $v \in \mathbb{R}^k$ es un **vector tangente** de M en p ssi. existe una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$. [20]

Definición 64. El espacio tangente de M en p es el conjunto de vectores tangentes en p :

$$T_p M := \{\dot{\gamma}(0) | \gamma(0) = p\}, \quad (8.3)$$

γ es una curva suave. [20]

Observación 5. $T_p M$ es el espacio tangente en un punto p ; TM es el conjunto de todos los espacios tangentes $T_p M, \forall p \in M$.

Definición 65. El espacio resultado de la unión de los espacios tangentes se llama **fibrado** o **fibrado tangente** [37][17]

$$TM = \cup_{p \in M} T_p M. \quad (8.4)$$

Observación 6. En el caso de una superficie curvada en \mathbb{R}^3 , el espacio tangente es un plano (como en la Figura 7.2) -por así decirlo, un cuadrado; si fuera un volumen en \mathbb{R}^4 , el espacio tangente sería un cubo. Para más dimensiones, el espacio tangente es un hiperespacio, pero será conveniente visualizar únicamente espacios tangentes como planos y, si es necesario, como espacios en tres dimensiones.

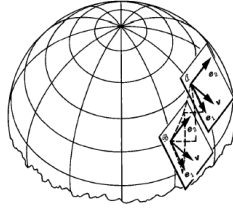


Figura 8.2: Dos planos tangentes en distintos puntos de una esfera. Imagen tomada de Wheeler et all, Cap. 10, pag. 252[42].

8.4.1. Derivaciones y diferenciales

Definición 66. Dada un álgebra A sobre un cuerpo K , una **K -Derivación** es un operador $D : A \rightarrow A$ que cumple con la regla de Leibniz:

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b.$$

Definición 67. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave que asigna un vector de \mathbb{R}^n a cada punto de M . El diferencial de f en un punto p es dado por $df(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para todo vector tangente $v \in T_pM$, se elige una curva suave $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$, y se define el vector $df(p)v \in \mathbb{R}^n$ [20]

$$df(p)v := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)). \quad (8.5)$$

8.4.2. Campos Vectoriales

Definición 68. Un **campo vectorial** X en una variedad $M \subset \mathbb{R}^k$ es un mapeo suave $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente v_p . Si X es un campo vectorial M y $f \in \mathfrak{F}(M)$, entonces Xf denota una función real en M dada por[31]

$$(Xf)(p) = X_p(f).$$

Y el espacio de todos los campos vectoriales en M lo denotamos por $\mathfrak{X}(M)$. Los siguientes teoremas son tomados de J. Robbin & D. Salamon, (2019)[20].

Teorema 10. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad, y p un punto fijo. Si U es un vecindario de p , sea $\phi : U \rightarrow \Omega$ un difeomorfismo, con $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Sea $x_p := \phi(p)$, y $\psi := \phi^{-1} : \Omega \rightarrow U$. Entonces, el espacio tangente de p es la imagen del diferencial de ψ , i.e.

$$T_pM = im(d\psi(x_p)) := \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Demostración:

Definimos una bola de radio r por: $B_r(x_p) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x - x_p| < r\} \subset \Omega$. Sea $\xi \in \mathbb{R}^m$ con algún $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon|\xi| \leq r$.

Entonces, para $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \epsilon$ se cumple $x_p + t\xi \in \Omega$. Definamos una curva infinitesimal por $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ por $\gamma(t) := \psi(x_p + t\xi)$.

De ello, $\gamma(0) = \psi(x_p) = p$. Derivando, se obtiene $\dot{\gamma}(t) = d\psi(x_p)\xi \in T_pM$. □

Teorema 11. *Sea p un punto fijo en M y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ que contiene al 0 y a una curva $\gamma : I \rightarrow M$ que satisface la siguiente ecuación para todo $t \in I$*

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)); \gamma(0) = p. \quad (8.6)$$

con solución única.[20]

Demostración:

Sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una carta en M , para un vecindario U de p . La imagen de ϕ es un abierto $\Omega := \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$, y denotamos el mapeo inverso por $\psi := \phi^{-1} : \Omega \rightarrow M$.

Del teorema 10, $d\psi(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es inyectiva y tiene su imagen en $T_{\psi(x)}M$; definimos una función suave $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) := d\psi^{-1}X(\psi(x))$ para $x \in \Omega$.

Por la existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias en \mathbb{R}^m [35], la ecuación $\dot{x}(t) = f(x(t)); x(0) = \phi(p)$, tiene una solución $x : I \rightarrow \Omega$ para I un abierto de \mathbb{R} que contiene al 0.

Por lo tanto, $\gamma := \psi \circ x : I \rightarrow U \subset M$ es solución de la ecuación 8.6. □

8.4.3. Flujo

Ahora, definiremos el flujo de un campo vectorial, el cual se puede pensar como la corriente de un río.

Sea $\gamma : I(p_0) \rightarrow M$ la solución a la ecuación 8.6 para un punto fijo p_0 . Para $t \in I(p_0)$, definimos D como el conjunto de pares (t, p_0) .

Definición 69. *El **flujo** de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es el mapeo $\phi : D \rightarrow M$ tal que $\phi(t, p_0) := \gamma(t)$, que cumple con la ecuación 8.6*[20]

8.4.4. Espacios duales

En álgebra lineal se aprende que dado un espacio vectorial V , el conjunto de funciones lineales en V se llama *espacio dual* V^* . [5] Son útiles porque permiten la existencia de productos escalares, tales que el producto entre un elemento de la base de V y su respectivo dual sea igual a 1.

Al hablar de variedades, decimos que el espacio dual del espacio tangente T_pM es el Espacio Cotangente T_p^*M . También, la unión de todos los espacios cotangentes se llama *fibrado cotangente*. [37]

8.4.5. Diferencial de una aplicación

Dada una aplicación entre variedades $\phi : M \rightarrow N$ que mapea un punto p en un vector tangente $\phi(p) \in N$, el mapeo tangencial es un diferencial definido por:

$$d\phi|_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N. \quad (8.7)$$

En algunos libros, este diferencial aparece como ϕ_* , llamado **pushforward**, de modo que el *mapeo inverso* de $T_{\phi(p)} N$ a $T_p M$ es llamado **pullback** (retorno).[12][41][7]

8.5. Base del espacio tangente

La base estándar para el espacio tangente $T_p M$ en un punto $p \in M$ está formada por operadores diferenciales parciales:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}.$$

Luego, un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}$ puede ser escrito como $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

9

Apéndice 2: Tensores y mapeos multilineales

“Cuando un físico dice «tensor»,
un matemático piensa en campos
tensoriales.”

José Carlos Bonilla, 2022

9.1. Mapeos bilineales

Una mapeo bilineal es una función que combina elementos de 2 espacios vectoriales para formar un tercer espacio, y es lineal en cada argumento $B : V \times W \rightarrow X$. Es decir, toma dos vectores de dos espacios y los mapea en un tercero. le Cuando mantenemos fija la primera componente y variamos la segunda, obtenemos un operador lineal. Empezamos definiendo lo que es una forma:

Definición 70. Una 1-forma $\alpha \in V^*$ es una transformación lineal $\alpha : V \rightarrow R$.

Ahora, un caso particular:

Definición 71. Una **forma simétrica bilineal** B es una función R -bilineal en un espacio vectorial real V de dimensión finita $B : V \times V \rightarrow R$ tal que $B(u, v) = B(v, u), \forall u, v \in V$. [12]

En otras palabras, una forma simétrica bilineal B asigna un elemento de un campo a cualesquiera dos vectores de un espacio V .

Observación 7. solo en algunos casos muy específicos, un campo tensorial asigna una matriz a cada punto de la variedad. No ocurre siempre, pero puedes imaginar que a cada punto de la variedad le corresponde una matriz en dos o tres dimensiones llena de números (esto servirá más adelante cuando hablemos de Grupos y Álgebras de Lie).

Definición 72. Una forma bilineal simétrica B es **positiva definida** si $B(v, v) > 0$. [12]

Definición 73. Una forma bilineal simétrica B es **semi-positiva definida** si $B(v, v) \geq 0$. [12]

Definición 74. Una forma bilineal simétrica B es **no degenerada** si para todo $u \in V$, $B(u, v) = 0$ implica que $v = 0$. [12]

Es decir, B es no-degenerada si el elemento neutro es el 0. Sería degenerada si existiera un $x \neq 0$ tal que $B(x, v) = 0, \forall v$.

Es posible asignar una matriz a B respecto a una base v_1, \dots, v_n de la forma: $(b_{ij}), b_{ij} = B(v_i, v_j)$. Puesto que B es simétrica, la matriz asociada es simétrica también, y B es no degenerada ssi. su matriz asociada (b_{ij}) es invertible. [12]

Definición 75. Un **producto escalar** g en un espacio vectorial real V de dimensión finita es una forma bilineal simétrica no-degenerada. [12]

Definición 76. Un **producto interno** es un producto escalar positivo definido. [12]

Una vez asimiladas las definiciones, no es difícil notar que el producto escalar es el producto punto como lo conocemos, solo que incluye valores negativos para la *magnitud* de un vector; en caso de que la norma sea siempre positiva (o positiva definida), es un producto interno. Ahora, veamos un espacio con producto interno.

Definición 77. Un **espacio con producto interno** (V, g) es un espacio vectorial V equipado con un producto escalar g . Un subespacio U es **no-degenerado** si $g|_U$ es no degenerado.

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es igual a 0.

9.2. Base ortonormal

No hay nada nuevo aquí. La base de un espacio cuyos elementos tienen magnitud igual a 1. Cualquier vector v puede ser expresado en la forma:

$$v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(v, e_i) e_i. \quad (9.1)$$

Donde $\epsilon_i = \pm 1$. Puesto que en ocasiones consideraremos normas negativas, surge la necesidad de tener coeficientes negativos como estos.

9.3. Tensores

Hemos hablado de mapeos que toman dos elementos de espacios vectoriales llamadas «formas bilineales». Hacemos una generalización de este concepto como *mapeos multilineales* B_M que toman elementos de varios espacios y los mapean en un campo. Además, incluimos a los espacios duales V^* .

Definición 78. Una *tensor* T de tipo (p, q) es un mapeo multilinear de la forma

$$T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow R, \quad (9.2)$$

habiendo p copias de V^* y q copias de V . [27]

Habiendo definido a un tensor, deseamos extrapolar la noción de campos a éste ámbito. Partiendo de la definición de un campo vectorial como un mapeo que asigna un vector a cada punto del espacio, y un siguiendo la lógica de interpretar un campo escalar como un mapeo que asigna un escalar a cada punto del espacio, un **campo tensorial** asignará un tensor a cada punto del espacio, o en este caso, a cada punto de la variedad.

9.4. Formas

Si se desea aprender geometría diferencial a profundidad, el libro “First Steps in Differential Geometry” [28] es un buen lugar para comenzar. Los primeros tres capítulos no son necesarios, aunque siempre son útiles como un refuerzo de algunos temas, pero si solo se desean adquirir herramientas matemáticas para entender un par de cursos de física, libros como estos no son necesarios -después de todo, es un libro para pregrado en matemáticas. El capítulo 4 es bastante bueno y es el que estaré citando por aquí, además de algunas partes de un libro cuyo tema central son las Formas Diferenciales.

A grandes rasgos, mientras que los tensores son mapeos multilineales de espacios y espacios duales, una forma es un mapeo multilinear de solamente espacios vectoriales. Se llaman formas porque tienen aplicaciones al estudiar medidas.

De la definición 70, una 1-forma $\alpha \in V^*$ es una transformación lineal $\alpha : V \rightarrow R$.

Ahora, encontramos una relación con la definición de tensores:

Definición 79. Una k -forma multilinear en un espacio V es una función lineal $\alpha : V \times V \times \dots \times V \rightarrow R$. [28]

Decimos que α es **alternante** si cambiando de lugar dos componentes se obtiene $\alpha(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_k)$, y se cumple que si dos vectores v_i, v_j son iguales, $\alpha = 0$.

Un ejemplo de forma alternante $\alpha(v, w) = -\alpha(w, v)$ es cuando invertir los límites de integración solo cambia el signo de la integral:

$$\int_a^b dw = - \int_b^a dw.$$

Otro ejemplo de n -forma alternante es el determinante Ω para una matriz A cuyas columnas son vectores $a_i \in \mathbb{R}^n$ definido por $\Omega : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Omega(a_1, \dots, a_n) = \det(A)$. Y cumple con ser alternante porque si cambiamos filas por columnas, el determinante solo cambia de signo.

9.4.1. Producto Externo

Mejor conocido como *wedge product*.

Denotamos por $\Lambda_k(V)$ al espacio de k -formas en V . Si $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ es una base de V^* (base dual), definimos una k -forma en V como $\epsilon_1 \wedge \dots \wedge \epsilon_k$.

Dadas dos 1-formas, el producto wedge es definido por: $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$. [37]

Para cualesquiera dos vectores $v, w \in V$, se cumple [28]:

$$(\alpha \wedge \beta)(v, w) = \det \begin{bmatrix} \alpha(v) & \alpha(w) \\ \beta(v) & \beta(w) \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

9.4.2. Formas diferenciales

En la sección 7.6 vimos que una base para el espacio tangente $T_p M$ está formada por operadores como derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Ahora, dado que el dual del espacio tangente es el espacio cotangente, nos interesa la base de este: $\{(dx_1)_p \dots (dx_n)_p\}$ formada por elementos $(dx_i)_p \in T_p^* M$ tales que

$$(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}.$$

Luego, una 1-forma puede ser escrita como

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^n a_i (dx_i)_p, \quad (9.4)$$

de modo que $\{(dx_1)_p \wedge \dots \wedge (dx_k)_p\}$ es una base de $\Lambda_k(T_p M)$.

Definición 80. Una *k -forma diferencial* es un mapeo $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_k(T_p M)$. [28]

9.4.3. Derivada Exterior

Definición 81. Para $X \in \mathfrak{X}$, la *derivada exterior* de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es df definida por $df(X) = X|f$. [28][18]

Ejemplos de formas diferenciales [43] son los siguientes:

1. $\phi = x^2 y + e^z$ es una 0-forma (no tiene diferenciales ni productos externos)
2. $\phi = x^2 dx + (yz + 1) dz$ es una 1-forma.
3. $\phi = xyz dy dz + x dz dx + 2x dy$ es una 2-forma
4. $\phi = x^2 dx dy dz$ es una 3-forma.

10

Apéndice 3: Grupos y Álgebras de Lie

“Mathematics compares the most diverse phenomena and discovers the secret analogies that unite them.”

-Joseph Fourier.

Los grupos y álgebras de Lie aparecen casi en cualquier rama de la física. Donde hay simetrías, es probable toparse con álgebras de Lie. En Geometría Diferencial, las álgebras de Lie son herramientas poderosas que relacionan mapeos entre variedades y sus espacios tangentes; también permiten estudiar propiedades de las variedades como si de grupos se tratara. Desde Relatividad General hasta Teoría de Cuerdas, se usan álgebras de Lie en Mecánica Cuántica y Teoría Cuántica de Campos.

El mejor documento de referencia que puedo recomendar es “Lie algebra for Physicists” [41]. Estas notas proveen a cualquier estudiante de física con las herramientas necesarias (y más) para avanzar en cursos avanzados, así que con este libro basta y sobra.

10.1. Grupos de Lie

Un Grupo de Lie es básicamente un grupo continuo que actúa sobre un espacio (o una variedad). Lo interesante es que un Grupo de Lie es también una variedad diferenciable. Como introducción, comenzaremos diciendo que las matrices cuadradas (que sean invertibles) de $n \times n$ forman un grupo de Lie -esto viene de la teoría de representaciones.

Definición 82. *Un grupo de Lie es un grupo que también es una variedad, tal que los mapeos $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 * g_2$ y $g \rightarrow g^{-1}$ son suaves.* [41]

Definición 83. *Para G y H dos grupos, un **homomorfismo** es un mapeo $\phi : G \rightarrow H$ que satisface para todo $g_1, g_2 \in G$, $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \phi(g_2)$. Si es biyectivo, entonces es un*

isomorfismo. [41]

10.2. Álgebra de Lie

Con la finalidad de aclarar la diferencia entre ambos conceptos, es sencillo pensar que un grupo de Lie G es una variedad, y el álgebra de Lie \mathfrak{g} es su respectivo espacio tangente.

Definición 84. *Un álgebra de Lie sobre un campo (\mathbb{R}, \mathbb{C}) es un espacio vectorial equipado con una operación bilinear llamada **Corchetes de Lie**: $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisface para campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $[X, X] = 0$ y la identidad de Jacobi[41]:*

$$[X; [Y; Z]] + [Y; [Z; X]] + [Z; [X; Y]] = 0.$$

Los corchetes de Lie también definen al operador conmutador:

$$[X, Y] = X * Y - Y * X.$$

10.2.1. Constantes de estructura

Dados X_1, \dots, X_n una base de \mathfrak{g} un álgebra de Lie vista como espacio vectorial, podemos escribir para todo i, j :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k. \quad (10.1)$$

Los coeficientes c_{ij}^k son llamados **constantes de estructura** de \mathfrak{g} .

10.3. Mapeo Exponencial

Buscamos un mapeo del álgebra de Lie (espacio tangente) hacia el grupo de Lie (espacio/variedad). Se puede pensar que en una superficie, en un punto, hay un plano tangente: queremos un mapeo que permita brincar de este plano hacia la superficie de abajo; como si quisiéramos saltar a una piscina (la variedad) desde una plataforma (espacio tangente), siendo el trampolín es el mapeo exponencial.

Al comenzar hablamos de que podemos ver un ejemplo sencillo de grupos de Lie en matrices cuadradas invertibles.

10.3.1. Matriz Exponencial

Sea $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz real o compleja. Definimos el exponencial de X mediante una expansión en series:

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}. \quad (10.2)$$

Lema 5. *Sea G un grupo de Lie con \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Luego, se cumplen los siguientes enunciados:*

1. Para $\xi \in \mathfrak{g}$, se tiene $\exp(t\xi) \in G$, para $t \in \mathbb{R}$.
2. Para $g \in G, \eta \in \mathfrak{g}$, se cumple $g\eta g^{-1}.$ [20]

Demostración:

$\forall g \in G$ tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales tal que cada elemento $\xi \in \mathfrak{g}$ determina un campo $X_\xi \in \mathfrak{X}(G)$, definido por

$$X_\xi(g) := \xi g \in T_g G.$$

Por el teorema 2, existe una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow G$ que satisface $\dot{\gamma}(t) = X_\xi(\gamma(t)) = \xi \gamma(t); \gamma(0) = I$, de modo que el mapeo $(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}; t \mapsto \exp(t\xi)$, satisface el mismo problema de condiciones iniciales, tal que $\exp(t\xi) = \gamma(t) \in G$. Lo cual demuestra el primer enunciado.

Ahora, consideremos una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ definida por $\gamma(t) := g \exp(t\xi) g^{-1}$. Pero sabemos que $\gamma \in G$. Evaluando para el caso particular $t = 0$, aprovechando que se cumple $\gamma(0) = I$:

$$\dot{\gamma}(0) = g \xi g^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

□

Teorema 12. Si $\rho : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces $\dot{\rho} := d\rho(I) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, donde I es la identidad. Además, se cumple

$$\rho(\exp(\xi)) = \exp(t\dot{\rho}(\xi)),$$

para $\xi \in \mathfrak{g}$.

Demostración

Sea $\xi \in \mathfrak{g}, g \in G, t \in \mathbb{R}$. Por el lema 1, $\exp(t\xi) \in G$.
Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$ una curva definida por $\gamma(t) := \rho(\exp(t\xi))$ que satisface

$$\gamma(s + t) = \gamma(s)\gamma(t); \gamma(0) = I; \dot{\gamma}(0) = d\rho(I)\xi = \dot{\rho}(\xi),$$

$$\therefore \gamma(t) = \exp(t\dot{\rho}(\xi)).$$

□

Para una matriz cuadrada A , enunciamos la fórmula de Jacobi[21]:

$$d[\det(A)] = \text{tr}(\text{adj}(A)dA). \tag{10.3}$$

Como corolario de la fórmula de Jacobi, obtenemos una propiedad útil para las matrices exponenciales.

Corolario 8. Sea X una matriz $n \times n$ real o compleja. Luego,

$$\det(e^X) = e^{\text{tr}(X)}.$$

Demostración

Sea $A(t)$ una matrix invertible. De la fórmula de Jacobi,

$$\frac{d}{dt} \det(A) = \det(A) \operatorname{tr}[A(t)^{-1} \frac{d}{dt} A(t)].$$

Consideremos $A(t) = \exp(tX)$,

$$\therefore \frac{d}{dt} \det(\exp(tX)) = \det(\exp(tX)) \operatorname{tr}(\exp(-tX) \frac{d}{dt} \exp(tX)),$$

$$\frac{d}{dt} \det(\exp(tX)) = \det(\exp(tX)) \operatorname{tr}(X).$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$d[\det(\exp(tX))] = \det(\exp(tX)) \operatorname{tr}(X) dt.$$

Pero $d[e^{at}] = ae^{at}$.

$$\therefore \det(\exp(tX)) = e^{t \operatorname{tr}(X)}.$$

□

10.3.2. Exponenciales y generadores

Consideremos una matrix de $n \times n$ $X \in \mathfrak{gl}(n)$, donde el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ de $GL(n)$ es el conjunto de vectores tangentes en la identidad. Podemos asociar una curva $\gamma(t) = e^{tX}$ que satisface $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

El homomorfismo de grupo

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow GL(n).$$

es llamado **one-parameter subgroup** de $GL(n)$.

Es fácil deducir que, derivando y evaluando:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) = X.$$

Definición 85. Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Sea $X \in \mathfrak{g}$ y $\exp_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ es el único homomorfismo de grupos de Lie que cumple

$$d \exp_X \left(\frac{d}{dt} \right) = X,$$

y definimos el mapeo exponencial

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G,$$

tal que

$$\exp(X) = \exp_X(1).$$

La función exponencial define un mapeo (homeomorfismo) de un vecindario de $0 \in \mathfrak{g}$ en un vecindario del elemento neutro e de G .

¿Para qué sirve esto? Para considerar elementos infinitesimales de grupos y obtener generadores de grupos. Un elemento cercano al elemento unitario puede ser escrito como $g = e^X$.

$$e^{\epsilon X} \approx 1 + \epsilon X, \tag{10.4}$$

para ϵ infinitesimal, y $X \in \operatorname{Lie}(G)$ son llamados **generadores** en física.

11

Apéndice 4: Variedad Ambiente: ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci

11.1. Proyecciones Ortogonales

Sea $\phi : M \rightarrow N$ una inmersión isométrica de variedades, donde N es llamada **variedad ambiente**[30]. Luego, existe para cada punto $x \in M$ un vecindario U para el que $\phi : M \rightarrow N$ es un encaje, así que para cada vector $u \in T_x U$ aparece un vector $\phi_* u \in T_{\phi(x)} N$. Entonces cada espacio tangente $T_x M$ es un subespacio no-degenerado de $T_{\phi(x)} N$, y es posible decomponerlo como suma directa de la siguiente forma:

$$T_{\phi(x)} N = T_x M \oplus T_x^\perp M. \quad (11.1)$$

Se definen las proyecciones ortogonales:

$\tan : T_{\phi(x)} N \rightarrow T_x M$ y $\text{nor} : T_{\phi(x)} N \rightarrow T_x^\perp M$, de modo que cualquier vector $v \in T_{\phi(x)} N$ pueda ser escrito como $v = \tan(v) + \text{nor}(v)$.

11.2. Tensor de curvatura en la variedad ambiente

El tensor de curvatura de Riemann en la variedad ambiente es definido como:

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z. \quad (11.2)$$

Aplicando la ecuación 4.2,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \sigma(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \sigma(X, Z)) - (\nabla_{[X, Y]} Z + \sigma([X, Y], Z)) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y Z + \sigma(Y, Z)) + \sigma(X, \nabla_Y Z + \sigma(Y, Z)) - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Y \sigma(X, Z) \end{aligned}$$

$$-\sigma(Y, \nabla_X Z + \sigma(X, Z)) - \nabla_{[X, Y]} Z - \sigma([X, Y], Z).$$

Aprovechando la propiedad de la ecuación 4.5, y sabiendo que el tensor de Riemann se definen como $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$, la expresión se reescribe como:

$$\tilde{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \nabla_X \sigma(Y, Z) + \sigma(X, \nabla_Y Z) - \nabla_Y \sigma(X, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) - \sigma([X, Y], Z).$$

Aplicando la fórmula de Weingarten (ecuación 4.6):

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \sigma(X, \nabla_Y Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) - \sigma([X, Y], Z) - A_{\sigma(Y, Z)}X \\ &\quad + D_X \sigma(Y, Z) + A_{\sigma(X, Z)}Y - D_Y \sigma(X, Z). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Ahora, sea $W \in \mathfrak{X}(M)$ otro campo. Multiplicaremos toda la expresión anterior por este campo mediante el producto interno:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \sigma(X, \nabla_Y Z), W \rangle - \langle \sigma(Y, \nabla_X Z), W \rangle - \langle \sigma([X, Y], Z), W \rangle \\ &\quad - \langle A_{\sigma(Y, Z)}X, W \rangle + \langle D_X \sigma(Y, Z), W \rangle + \langle A_{\sigma(X, Z)}Y, W \rangle - \langle D_Y \sigma(X, Z), W \rangle. \end{aligned} \quad (11.4)$$

11.3. Ecuación de Gauss

Nótese que tanto D como σ tienen su imagen en el espacio normal tangente $T^\perp M$, por lo cual son ortogonales con los campos de TM, de modo que el producto interno entre elementos del espacio tangente y elementos del espacio normal se anula. Luego, de la ecuación previa, algunos términos son nulos, excepto:

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle A_{\sigma(Y, Z)}X, W \rangle + \langle A_{\sigma(X, Z)}Y, W \rangle. \quad (11.5)$$

Ahora, reescribimos los términos del Operador Forma utilizando la ecuación 4.7 para obtener la **Ecuación de Gauss**:

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \sigma(Y, W), \sigma(X, Z) \rangle - \langle \sigma(X, W), \sigma(Y, Z) \rangle. \quad (11.6)$$

que relaciona la curvatura en la variedad ambiente con la segunda forma fundamental.

11.4. Fórmula de Codazzi

La ecuación de Gauss provee una expresión para una parte del tensor de Riemann en la variedad ambiente, pero existe también su parte normal (denotada por $(R(X, Y)Z)^\perp$), que está formada por los términos de la ecuación (11.3) que se cancelaron durante la deducción de la ecuación de Gauss.

$$(R(X, Y)Z)^\perp = D_X \sigma(Y, Z) - D_Y \sigma(X, Z) + \sigma(X, \nabla_Y Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) - \sigma([X, Y], Z). \quad (11.7)$$

Donde $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

Para ello, utilizamos la **conexión de van der Warden Bortolotti** de la variedad ambiente, dada por

$$\tilde{\nabla} = \nabla \oplus D, \quad (11.8)$$

que puede ser aplicada a la segunda forma fundamental de la siguiente manera, utilizando la Regla de Leibniz:

$$(\tilde{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) = D_X \sigma(Y, Z) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z). \quad (11.9)$$

Luego, la **ecuación de Codazzi** es:

$$(R(X, Y)Z)^\perp = (\tilde{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \sigma)(X, Z). \quad (11.10)$$

11.5. Fórmula de Ricci

Sean ξ, η campos vectoriales normales de M . Definimos el tensor de curvatura en el fibrado normal $T^\perp M$ como \mathbb{R}^D :

$$R^D(X, Y)\xi = D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X, Y]}\xi. \quad (11.11)$$

Escribimos la ecuación 11.2 en términos de los campos normales:

$$\tilde{R}(X, Y)\xi = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi,$$

y multiplicando por otro campo normal η :

$$\langle \tilde{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \xi, \eta \rangle - \langle \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \xi, \eta \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\xi, \eta \rangle.$$

Aplicando la ecuación de Weingarten:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_Y A_\xi X, \eta \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X A_\xi Y, \eta \rangle + \langle \tilde{\nabla}_X D_Y \xi, \eta \rangle - \langle \tilde{\nabla}_Y D_X \xi, \eta \rangle - \langle D_{[X, Y]}\xi, \eta \rangle \\ &= \langle \sigma(Y, A_\xi X), \eta \rangle - \langle \sigma(X, A_\xi Y), \eta \rangle + \langle D_X D_Y \xi, \eta \rangle - \langle D_Y D_X \xi, \eta \rangle - \langle D_{[X, Y]}\xi, \eta \rangle, \\ &= \langle \sigma(Y, A_\xi X), \eta \rangle - \langle \sigma(X, A_\xi Y), \eta \rangle + \langle \mathbb{R}^D(X, Y)\xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación 4.7, podemos reescribir:

$$\langle \tilde{R}(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle R^D(X, Y)\xi, \eta \rangle + \langle A_\eta Y, A_\xi X \rangle - \langle A_\eta X, A_\xi Y \rangle.$$

Finalmente, definimos $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$ y utilizamos las propiedades dadas por las ecuaciones 4.3 y 4.4 para obtener la **ecuación de Ricci**:

$$R^D(X, Y; \xi, \eta) = \tilde{R}(X, Y; \xi, \eta) + \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle. \quad (11.12)$$

11.6. Forma contraída de las Ecuaciones Fundamentales para una hipersuperficie

Los resultados de ésta sección son tomados de *Rishabh Jha*[23]. La Ecuación de Gauss, contraída mediante el tensor métrico γ_{ij} de una hipersuperficie de tres dimensiones embebida en un espacio-tiempo, toma la forma:

$$\gamma_a^\mu \gamma_b^\nu \tilde{R}_{\mu\nu} + \gamma_{b\mu} \eta^\nu \gamma_b^\rho \eta^\sigma \tilde{R}_{\nu\rho\sigma}^\mu = R_{ab} + \sigma \sigma_{ab} - \sigma_{a\mu} \sigma_b^\mu, \quad (11.13)$$

donde $\sigma \equiv \sigma_i^i$ es la contracción de la segunda forma fundamental.

De ello, el *Teorema Egregium Generalizado* es dado por la siguiente ecuación:

$$\tilde{R} + 2\tilde{R}_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu = R + \sigma^2 - \sigma_{ij} \sigma^{ij}. \quad (11.14)$$

Por otro lado, podemos desarrollar el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior haciendo uso de la expresión $[\nabla_a, \nabla_b] \eta^\mu = \tilde{R}_{\rho ab}^\mu \eta^\rho$. En componentes:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu &= -\eta^\nu (\nabla_\lambda \nabla_\nu \eta^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\lambda \eta^\lambda), \\ &= -\nabla_\lambda (\eta^\lambda \nabla_\nu \eta^\nu - \eta^\mu \nabla_\nu \eta^\lambda) + \nabla_\nu \eta^\nu \nabla_\mu \eta^\mu - \nabla_\mu \eta^\nu \nabla_\nu \eta^\mu, \end{aligned}$$

pero $\nabla_\mu \eta^\mu = -\sigma$. Definiendo $\Delta^\lambda = \nabla_\lambda (\eta^\lambda \nabla_\nu \eta^\nu - \eta^\mu \nabla_\nu \eta^\lambda)$, podemos reescribir la ecuación 11.14:

$$\tilde{R} = R + \sigma_{ab} \sigma^{ab} - \sigma^2 + 2\nabla_\lambda (\Delta^\lambda). \quad (11.15)$$

12

Apéndice 5: Gradiente, Hessiano y Laplaciano

Las siguientes definiciones son tomadas de Bang-Yen Chen[12].

Definición 86. Para una función $f \in F(M)$, el **gradiente** de f , denotado por ∇f , es el dual del diferencial df :

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = Xf.$$

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j} du_j, \quad (12.1)$$

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u_i} \partial_j. \quad (12.2)$$

Definición 87. El **hessiano** de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por H^f es definido como la segunda derivada covariante $\nabla(\nabla f)$

$$H^f(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle. \quad (12.3)$$

De la definición del Hessiano, obtenemos otra forma de expresarlo mediante el siguiente corolario:

Corolario 9. El hessiano H^f satisface[25]:

$$H^f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f. \quad (12.4)$$

Demostración

Notemos que $X\langle \nabla f, Y \rangle = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle + \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle$.

Ahora, partiendo de la definición de Hessiano:

$$H^f(X, Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle = X\langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle = XYf - (\nabla_X Y)f.$$

□

Definición 88. Definimos la **divergencia** de una función f por

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{j=1}^n \epsilon_j \langle \nabla_j X, e_j \rangle. \quad (12.5)$$

Definición 89. El **Laplaciano** Δf es definido como

$$\begin{aligned} \Delta f &= - \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial u_k} \right], \\ \Delta f &= - \sum_{j=1}^n \epsilon_j \frac{\partial^2 f}{\partial_j^2} = -\operatorname{div}(\nabla f). \end{aligned} \quad (12.6)$$

12.1. Fórmula de Bochner

Tomado de *Kim & Kim, (2003)* [26].

Lema 6. Sea f una función suave en una variedad Riemanniana B . Entonces, para todo vector X , la divergencia del Hessiano satisface

$$\operatorname{div}(H^f)(X) = \operatorname{Ric}(\nabla f, X) + X\Delta f, \quad (12.7)$$

donde Δ es el laplaciano en B que actúa sobre formas diferenciales.

Demostración

Sea $\{e_j\}$ un referencial en un punto $p \in M$. Para empezar, notemos que $e_j(H^f(X, e_j)) = \nabla_{e_j} H^f(X, e_j) + H^f(\nabla_j X, e_j) + H^f(X, \nabla_j e_j)$. Pero $\nabla_{e_j} e_j = 0$. Partiendo de la definición de la divergencia (ecuación 12.5):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(H^f)(X) &= \sum_j \nabla_{e_j} H^f(X, e_j); \\ &= \sum_j (e_j(H^f(X, e_j)) - H^f(X, \nabla_j e_j) - H^f(\nabla_j X, e_j)); \\ &= \sum_j (e_j \langle \nabla_X \nabla f, e_j \rangle - \langle \nabla_{\nabla_j X} \nabla f, e_j \rangle); \\ &= \sum_j (\langle \nabla_j \nabla_X \nabla f, e_j \rangle - \langle \nabla_{\nabla_j X} \nabla f, e_j \rangle); \\ &= \sum_j (\langle \nabla_j \nabla_X \nabla f - \nabla_{\nabla_j X} \nabla f, e_j \rangle); \\ &= \sum_j (\langle R(X, e_j) \nabla f + \nabla_X \nabla_j \nabla f - \nabla_{\nabla_j X} \nabla f, e_j \rangle); \\ &= \sum_j \langle R(X, e_j) \nabla f, e_j \rangle + \sum_j \langle \nabla_X \nabla_j \nabla f \rangle; \\ &= \operatorname{Ric}(\nabla f, X) + \sum_j X \langle \nabla_j \nabla f, e_j \rangle; \\ &= \operatorname{Ric}(\nabla f, X) + X\Delta f. \end{aligned}$$

□

12.2. Identidad de Ricci

Hablaremos ahora del tensor de curvatura de Riemann dado por la ecuación 3.1. Para la conexión de Levi-Civita, la cual es libre de torsión, se cumple $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. De ello, se deduce

$$\nabla_{X+Y}\xi = \nabla_X\xi + \nabla_Y\xi. \quad (12.8)$$

También,

$$\nabla_{[X,Y]}Z = \nabla_{\nabla_X Y}Z - \nabla_{\nabla_Y X}Z, \quad (12.9)$$

así que una expresión interesante para la segunda derivada covariante es dada por la siguiente notación:

$$\nabla_{XY}^2 := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}. \quad (12.10)$$

Luego, podemos reescribir el Tensor de Curvatura de Riemann de la siguiente manera:

$$R(X, Y)Z = \nabla_{XY}^2 Z - \nabla_{YX}^2 Z. \quad (12.11)$$

A esta forma de escribir el tensor de curvatura (y, por lo tanto, también otra forma de definir la curvatura) se le conoce como **Identidad de Ricci**.

13

Apéndice 6: Métrica de Robertson-Walker

En la búsqueda de una solución compatible con el Principio Cosmológico, era necesaria una métrica que describa un universo no estático. Consideremos la métrica que representa simetría esférica, es decir, isotropía respecto a un punto[40]:

$$ds^2 = -dt^2 + C(t, r)dR^2 + D(r, t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Puesto que nos interesa la simetría en un momento dado, podemos reescribir la ecuación anterior separando variables:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dl^2,$$
$$dl^2 = e^{2\beta(r)}dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

para el cual, el cálculo del tensor de Ricci tiene la forma:

$$Ric = \frac{2}{R^2}[1 - \partial_r(re^{-2\beta(r)})] = k',$$

al cual se le asigna la condición de ser constante para describir un universo espacialmente homogéneo. Integrando la expresión anterior obtenemos:

$$e^{-2\beta(r)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}k'R^2 - \frac{C}{r}},$$

con C constante.

Ahora, pedimos que sea el universo sea isotrópico: en el límite $r \rightarrow 0$,

$$dl^2 \propto (dR^2 + R^2 d\Sigma^2).$$

$$\therefore \frac{1}{1 - \frac{C}{r}} = 1.$$

Entonces $C = 0$.

Finalmente, definiendo $k' = k/6$, obtenemos la métrica de Robertson-Walker de Relatividad General:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dR^2}{1 - kR^2} + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right). \quad (13.1)$$

Referencias

- [1] Faraad Armwood (<https://math.stackexchange.com/users/317914/faraad-armwood>). *Smooth atlas oriented iff transition maps have positive Jacobian determinant*. Mathematics Stack Exchange, 2017.
- [2] S. Ahn, Kim D. S e Y.-H Kim. “Totally umbilical Lorentzian submanifolds”. En: J. Korean Math. Soc. 33, 507–512 (1996).
- [3] Miguel Alcubierre. “Introduction to 3+1 Numerical Relativity”. En: *Introduction to 3+1 Numerical Relativity* (abr. de 2006). DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199205677.001.0001.
- [4] L. Andersson y R. Howard. “Comparison and Rigidity Theorems in Semi-Riemannian Geometry”. En: (1996).
- [5] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Third Edition, Springer, 2015. ISBN: 978-3-319-11079-0.
- [6] L. Besse. *Einstein Manifolds*. Classics in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2007. ISBN: 978-3-540-74311-8.
- [7] W. Burke. *Applied Differential Geometry*. Cambridge University Press, 1985. ISBN: 0 251 26317 4.
- [8] Manfredo do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976. ISBN: 0-13-212589-7.
- [9] C Chan y M. Czubak. “The Gauss Formula for the laplacian on hypersurfaces”. En: (2022).
- [10] B-Y. Chen. “Dependence of the Gauss-Codazzi Equations and the Ricci Equation of Lorentz Surfaces”. En: (2013).
- [11] Bang-Yen Chen. *Geometry of Submanifolds and Its Applications*. Tokyo, Japan. Science University of Tokyo, 1981.
- [12] Bang-yen Chen. *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds*. New Jersey : World Scientific. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2017. ISBN: 9789813208926.
- [13] B-Y Cheng y J. S. Wei. “Differential Geometry of Submanifolds of Warped Product Manifolds $I \times_f S^{m-1}(k)$ ”. En: (2008).
- [14] Alejandro Corichi y Darío Núñez. “Introduction to the ADM formalism”. En: (1991).
- [15] J. H. Eschenburg y R. Tribuzy. “Existence and uniqueness of maps into affine homogeneous spaces”. En: Rend. Sem. Mat, 89, 11–18 (1993).
- [16] Casazza P.G. Kutyniok G. Philipp F. *Introduction to Finite Frame Theory*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser, Boston, Springer, 2013. ISBN: 978-0-8176-8373-3.

- [17] M. Schmidt G. Rudolph. *Differential Geometry and Mathematical Physics Part I: Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems*. Mathematics Subject Classification. Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2013. ISBN: 978-94-007-5344-0.
- [18] M. Schmidt G. Rudolph. *Differential Geometry and Mathematical Physics Part II: Fibre Bundles, Topology and Gauge Fields*. Mathematics Subject Classification. Springer Dordrecht Heidelberg New York London, 2013. ISBN: 978-94-007-5344-0.
- [19] D. Hichethier y T. Dray. “The covariant derivative on null submanifolds”. En: (2011).
- [20] D. Salamon J. Robbin. *Introduction to Differential Geometry*. ETH-Zurich, 2019.
- [21] Heinz Neudecker Jan R. Magnus. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. ETHZ, HS. Wiley, 1999.
- [22] Bert Janssen. *Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada, 4o curso Física. 18071 Granada, España, 2013.
- [23] Rishabh Jha. “Introduction to Hamiltonian Formulation of General Relativity and Homogeneous Cosmologies”. En: *Institute for Theoretical Physics, Georg-August-Universität Göttingen, Germany* (abr. de 2022).
- [24] Jurgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Mathematics Subject Classification. Springer, 7th Edition, 2010. ISBN: 978-3-319-61859-3.
- [25] D-S. Kim e Y-H. Kim. “Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* (2003).
- [26] D.S. Kim e Y.H Kim. “Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature”. En: *Proc. Amer. Math. Soc.* 131, 2573–2576 (2003).
- [27] John Lee. “Introduction to Smooth Manifolds”. En: (2000).
- [28] Andrew McInerney. *First Steps in Differential Geometry: Riemannian, Contact, Symplectic*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2013. ISBN: 978-1-4614-7732-7.
- [29] James Munkres. *Topology*. Edinburgh Gate. Pearson, 2014. ISBN: 1-292-02362-7.
- [30] D. Nguyen. “Riemannian geometry with differentiable ambient space and operator”. En: (2021).
- [31] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Pure and applied mathematics. Academic Press, 1983. ISBN: 0-12-526740-1.
- [32] T. Padmanabhan. *Course of Theoretical Astrophysics Volume I: Astrophysical Processes*. Mathematics Subject Classification. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 978-0-521-56632-2.
- [33] A. Papadopoulos. “Physics in Riemannian Mathematics Papers”. En: (2017).
- [34] Germán Portillo. «*Nebulosas: qué son, cómo se forman y tipos*». Meteorología en Red. Consultado el 05 de noviembre de 2022. www.meteorologiaenred.com/nebulosas.html, 2018.
- [35] Dietmar Arno Salamon. *Analysis I*. Lecture Course, 2016. ISBN: 0-471-98633-X.
- [36] V. Sampaio. *Sobre sólitons de Ricci gradiente localmente conformemente planos*. Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2014.

- [37] Martin Schottenloher. *Lecture Notes on Geometric Quantization*. New Jersey : World Scientific, 2017. Mathematisches Institut der Universitat Munchen, 2022.
- [38] S. Sergey. “Liouville-type theorems for twisted and warped products manifolds”. En: (2016).
- [39] M. Shibata y Takashi Nakamura. “Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case”. En: *Phys Rev D Part Fields*. 1995 Nov 15;52(10):5428-5444. doi: 10.1103/physrevd.52.5428. PMID: 10019075. ()
- [40] Ulrich Sperhake. *Part II General Relativity Lecture Notes*. Cambridge, 2016.
- [41] Harold Steinacker. *Lie Groups and Lie Algebras for Physicists*. Universitat Wien Boltzmannngasse 5, A-1090 Wien, Austria, 2019.
- [42] J. Wheeler W. Misner S. Thorne. *Gravitation*. W. H. Freeman y Company, San Francisco, 1973. ISBN: 0-7167-0344-0.
- [43] Steven H. Weintraub. *Differential Forms: Theory and Practice*. Elsevier Inc., 2014. ISBN: 978-0-12-394403-0.
- [44] W. P. Wright. *The ADM approach to numerical relativity with an implementation in spherical symmetry*. Magister Scientiae Dissertation in the Faculty of Science. Rand Afrikaans University, 2004.