Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

CREACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN BASADO EN LA TEORÍA MODERNA DE PORTAFOLIOS

Luis Eduardo Mack Alvizures

Asesorado por Alejandro José Vargas De León, Dr.

Guatemala, mayo de 2022

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CREACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN BASADO EN LA TEORÍA MODERNA DE PORTAFOLIOS

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

LUIS EDUARDO MACK ALVIZURES
ASESORADO POR ALEJANDRO JOSÉ VARGAS DE LEÓN, DR.

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, MAYO DE 2022

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO	M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR	Lic. Rubén Darío Narciso Cruz
EXAMINADOR	Lic. Hugo Allan García Monterrosa
EXAMINADOR	Lic. William Roberto Gutiérrez Herrera

Ref. D.DTG. 004-2022
Guatemala 30 de mayo de 2022

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Matemárica Aplicada, al trabajo de graduación titulado: "CREACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN BASADO EN LA TEORÍA MODERNA DE PORTAFOLIOS", presentado por el estudiante universitario Luis Eduardo Mack Alvizures, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
-USAC-ECFM-

M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

JMIC/Paola

AGRADECIMIENTOS

Comienzo agradeciendo a mis padres y hermanos que me formaron para ser lo que soy. Agradezco a todos mis amigos que me han apoyado a lo largo de mi carrera, específicamente a Damián, Cristian y Luz que fueron los que me dieron ánimos en momentos en los que sentía que ya no podía.

Agradezco a mi asesor Alejandro Vargas, por la paciencia y motivación que me dio. Finalmente agradezco al licenciado William, por apoyarme a que el proceso de revisión fuera rápido.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo, a mis papás, hermanos y amigos.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$:=$	es definido por
$> <$	mayor que y menor que
$\geq \leq$	mayor o igual que, menor o igual que
$\emptyset$	conjunto vacío
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
E^c	complemento de E
$\subsetneq$	estrictamente contenido
$E \setminus F$	diferencia entre E y F
$E \cup F$	unión entre E y F
$E \cap F$	intersección entre E y F
$\mathcal{P}(X)$	conjunto potencia de X
μ_P	media del portafolio
μ_i	media del valor financiero i
S_i	valor financiero i
$\text{rango}(f)$	conjunto de imágenes de la función f
$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$	variables aleatorias
$\text{cov}(\mathbb{X})$	covarianza de $\mathbb{X}$
$\text{Var}(\mathbb{X})$	varianza de $\mathbb{X}$
σ_i^2	varianza del valor financiero i
σ_i	desviación estándar del valor financiero i
$\sigma_{i,j}$	covarianza de los valores financieros i y j
ρ_{ij}	coeficiente de correlación de los activos i y j
Ω	espacio muestral
$\mathcal{F}$	σ-álgebra de eventos
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	espacio de probabilidad
γ_P	tercer momento del portafolio

OBJETIVOS

General

Describir un panorama amplio acerca de la Teoría Moderna de Portafolios e introducir modelos de inversión basados en ésta teoría.

Específicos

1. Definir y explicar los conceptos necesarios para estudiar la Teoría Moderna de Portafolios
2. Desarrollar y describir los diferentes modelos que existen sobre la Teoría Moderna de Portafolios.
3. Fomentar el estudio de las inversiones por medio de la Teoría Moderna de Portafolios.
4. Describir el proceso para crear un portafolio óptimo usando la Teoría Moderna de Portafolios.

INTRODUCCIÓN

En Guatemala existen pocos textos enfocados al estudio de las aplicaciones de la estadística. Esto se evidencia en el hecho de que la mayoría de estudios publicados por las instituciones nacionales se limitan al uso de la estadística descriptiva. Es infrecuente que se hagan predicciones o modelos que intenten explicar el fenómeno observado. El enfoque de este trabajo, es por lo tanto, aplicar matemática estadística para seleccionar portafolios de inversión.

La Teoría Moderna de Portafolios (MPT por sus siglas en inglés), es una teoría que utilizan los inversionistas para maximizar el retorno esperado basado en un nivel dado de riesgo de mercado, tomando en cuenta que mayor riesgo implica mayor retorno.

Para la creación de un portafolio de inversión se estudiarán diferentes modelos. Basaremos este trabajo en el Modelo Estandar de Markowitz, el cual busca maximizar el Retorno Esperado para un nivel fijo de Riesgo. Para dar un panorama amplio de la Teoría Moderna de Portafolios se presentarán diferentes modelos, todos utilizando como base en él.

Nuestro objetivo principal es mostrar un panorama amplio de esta teoría y hacer una introducción a modelos que puedan ser utilizados para seleccionar portafolios.

En el primer capítulo se desarrolla la teoría necesaria para comprender los modelos expuestos en el segundo capítulo. En el segundo capítulo, se explica la Teoría Moderna de Portafolios y los modelos que se derivan de ésta. Éstos modelos serán utilizados en el tercer capítulo para la creación de un portafolio con datos reales. Luego concluiremos lo efectivo de estos modelos y compararemos contra otros escenarios.

1. CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1. Conceptos estadísticos

Esta sección está basada en [2].

Un **experimento aleatorio** es aquel que puede ser repetido bajo las mismas condiciones inciales y el resultado es variable y depende del azar. Al conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio lo llamaremos **espacio muestral** y lo denotaremos con la letra griega Ω y a un resultado particular como ω.

Existen diferentes maneras de asignar la probabilidad. Si ω es un conjunto finito, una manera común de calcular la probabilidad es realizar el cociente entre el número de elementos de un conjunto A dividido por el espacio muestral completo ω (por ejemplo al tirar un dado la probabilidad que salga 6 es $1/6$ pues son 6 casos posibles y en solo 1 de ellos nos da 6). Nos limitaremos a definir la probabilidad de manera axiomática. Estos axiomas fueron propuestos por el matemático ruso Andrey Nikolaevich Kolmogorov.

1.1 Definición. Una **medida de probabilidad**, o solamente una probabilidad, es una función $P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente (donde $\mathcal{P}(\Omega)$ es el conjunto de subcojuntos de Ω).

(1) $P(A) \geq 0$,

(2) $P(\Omega) = 1$,

(3) $P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ cuando $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ajenos dos a dos.

Los elementos de cualquier espacio muestral pueden ser cualquier cosa, por ejemplo: el conjunto de canarios de colores azules, rojos, amarillos y verdes; conjunto de personas que sufrieron un accidente automovilístico en el año 2016; las posibles parejas de resultados al lanzar dos dados, etc. Por lo anterior es necesario definir alguna estructura.

1.2 Definición. Una colección de subconjuntos $\mathcal{F}$ de un espacio muestral Ω es una σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones:

(1) Tenemos que $\Omega \in \mathcal{F}$.

(2) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.

(3) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (donde $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una familia finita o infinita contable de conjuntos).

A los elementos de $\mathcal{F}$ se le conocen como eventos. Como ejercicio sencillo, podemos ver que $\emptyset$ está en F, e intersecciones finitas de elementos en F están en F.

A partir de aquí restringimos nuestro estudio no a todos los subconjuntos del espacio muestral, sino a solo aquellos que sean elementos de una σ-álgebra dada.

Veamos que las propiedades definidas en una σ-álgebra tienen sentido y son necesarias. Sea

$$\Omega = \{\text{Canarios azules, rojos, amarillos y verdes}\}.$$

Es obvio que siempre debemos considerar al espacio muestral completo como un evento, por lo tanto $\Omega \in \mathcal{F}$. Si consideramos el evento, *al nacer el canario es amarillo*, entonces también podría ocurrir que *al nacer el canario no es amarillo*, esto implica la segunda propiedad. Finalmente, si consideramos los eventos *al nacer el canario es rojo* y el evento *al nacer el canario es azul* entonces podríamos considerar la unión de dos eventos, es decir el evento *al nacer el canario es azul o rojo* y es por esto que esperamos que se cumpla la propiedad (3). Finalmente, podría interesarnos la propiedad *al nacer el canario es azul y rojo*, en cuyo caso estamos considerando la intersección de dos eventos.

1.3 Definición. Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en donde Ω es un conjunto arbitrario, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad definida sobre F.

En la mayoría de casos Ω será el espacio muestral, como era de esperarse, trabajamos las probabilididades no sobre Ω sino sobre $\mathcal{F}$, de esta manera nos aseguramos que las propiedades de la medida de probabilidad se cumplan y que tenga sentido lo que estamos trabajando.

Como ya hemos recalcado, un experimento aleatorio puede tener como eventos a los elementos de una σ-álgebra, por lo que es de interés darle un valor numérico a dichos eventos. Para lograr nuestro objetivo definimos una variable aleatoria la cual es en esencia una función que mapea elementos del espacio muestral a un número real.

1.4 Definición. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una **variable aleatoria** es una función $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ del espacio muestral de un experimento a los números reales que cumple que para cualquier número real x tenemos

$$\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}. \tag{1.1}$$

Algunas veces escribiremos v.a. para referirnos al término variable aleatoria.

Un conjunto de Borel se define como un elemento de la mínima σ-álgebra de subcojuntos de $\mathbb{R}$ que contienen a todos los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ (también podemos pensarlo como un conjunto formado por intersecciones y uniones contables de los intervalos cerrados $[a, b]$).

La notación $(\mathbb{X} \in A)$ donde $\mathbb{X}$ es una v.a. y A es un conjunto de Borel, denota al conjunto $\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in A\}$. Por ejemplo $(\mathbb{X} \in (-1, 1))$ denota todos los elementos de Ω que se mapean al intervalo $(-1, 1)$ a través de la v.a.

1.5 Lema. *Si A es un conjunto de Borel, entonces $(\mathbb{X} \in A)$ es un elemento de $\mathcal{F}$.*

Antes de proceder a la demostración enunciemos un par de propiedades de teoría de conjuntos, las demostraciones son sencillas y se ven en cualquier curso de teoría de conjuntos [14, Capítulo 1, pág. 20].

Sea $f \colon X \to Y$ una función con inversa $f^{-1} : \text{rango}(f) \to X$. Sean U y V dos subconjuntos de A. Entonces:

(1) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

(2) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

(3) $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$.

(4) $f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c$ donde c representa el complemento de un conjunto.

Demostración lema 1.1. Supongamos que A es de la forma $(-\infty, x)$, entonces $(\mathbb{X} \in A) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \in A\} = \{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) \leq x\}$, que por la Ecuación (1.1) está en $\mathcal{F}$. Notemos que $(\mathbb{X} \in A) = \mathbb{X}^{-1}(A)$. Hemos demostrado que la preimagen de conjuntos con los que generamos el álgebra de Borel están en $\mathcal{F}$. ¿Qué pasa con el resto? Recordemos que el álgebra de Borel y $\mathcal{F}$ son σ-álgebras. Además por las propiedades anteriores sabemos que una función inversa preserva, intersecciones, uniones y complementos. Cualquier otro elemento del álgebra de Borel Z puede ser generado por uniones, intersecciones o complementos de los elementos de la forma $(-\infty, x)$. Por lo enunciado anteriormente se sigue que la preimagen de Z bajo $\mathbb{X}$ es un elemento de $\mathcal{F}$. Lo último es precisamente lo que queremos demostrar. $\square$

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas comenzaremos definiendo una v.a. discreta y más adelante definiremos una continua.

1.6 Definición. Una variable aleatoria se dice que es **discreta** si su rango es un conjunto discreto, esto es, un conjunto finito o numerable.

Hasta el momento no hemos hablado de probabilidades sobre una v.a. Una *función de densidad* f es una función que indica la probabilidad en los distintos valores que toma la variable. En el caso de una variable aleatoria discreta esperaríamos que la probabilidad sobre $x \in \text{rango}(\mathbb{X})$ sea igual a la probabilidad $P(U)$ donde U es el conjunto de todos los $\omega \in \Omega$ tales que $\mathbb{X}(\omega) = x$.

Para una variable aleatoria discreta, la función de densidad f y la medida de probabilidad P son objetos similares y cumplen el mismo propósito, con la leve diferencia que P actúa sobre $\mathcal{F}$ mientras que f lo hace sobre $\mathbb{R}$. De manera formal definimos:

1.7 Definición. Sea $\mathbb{X}$ una variable aleatoria discreta con valores x_0, $x_1, \ldots$, esto es, $\mathbb{X} := \text{rango}(\mathbb{X}) = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Entonces la **función de densidad** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define como

$$f(x) = \begin{cases} P(\mathbb{X} = x) \text{ para } x = x_0, x_1, x_2, \ldots \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Para el caso continuo el rango de la variable aleatoria pueden ser cualquier número real no negativo por lo que buscamos una función que sea adecuada para calcular la probabilidad que la v.a. tome un valor en algún intervalo. Presentamos la siguiente definición

1.8 Definición. Sea $\mathbb{X}$ una variable aleatoria cualquiera. La función de distribución de $\mathbb{X}$, denotada por $F(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se define como la probabilidad

$$F(x) = P(\mathbb{X} \leq x).$$

Citamos a continuación las palabras de Luis Rincón sobre la importancia de dicha función [2, Def. 2.4, pág. 130]: «La función de distribución resulta ser muy importante desde el punto de vista matemático, pues siempre puede definirse dicha función para cualquier variable aleatoria y a través de ella quedan representadas todas las propiedades de la variable aleatoria.»

Procedemos a definir variable aleatoria continua.

1.9 Definición. Se dice que una variable aleatoria es continua si su función de distribución $F(x)$ es una función continua.

1.10 Definición. Sea $\mathbb{X}$ una variable aleatoria continua. Decimos que la función integrable y no negativa $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la **función de densidad** de $\mathbb{X}$ si para cada cualquier intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$P(\mathbb{X} \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Notemos que una medida de probabilidad P y la función de densidad f son objetos diferentes para una variable aleatoria continua, por ejemplo $P(\mathbb{X} = a) = 0$ para cualquier valor real a mientras que $f(a)$ es un número fijo y no necesariamente debe ser menor que 1. A continuación enlistamos algunas propiedades interesantes de f.

1.11 Lema. *Sea $\mathbb{X}$ una variable aleatoria y f la función de densidad asociada. Entonces:*

(1) $f(x) \geq 0$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$.

(2) Para el caso discreto $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$.

(3) Para el caso continuo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Puede consultar [2, Def. 2.2 y 2.3, págs. 118 a 122] para más información acerca del lema anterior.

Estamos listos para dar una definición formal a variables aleatorias independientes. Intuitivamente podemos pensar que dos eventos son independientes si la probabilidad que ocurra un evento A no afecta la probabilidad que ocurra el evento B.

1.12 Definición. Se dice que las variables aleatorias $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ son **independientes** si los eventos $(\mathbb{X} \leq x)$, $(\mathbb{Y} \leq y)$ son independientes, i.e.

$$P[(\mathbb{X} \leq x) \cap (\mathbb{Y} \leq y)] = P(\mathbb{X} \leq x)P(\mathbb{Y} \leq y).$$

Continuamos con la definición de probabilidad condicional.

1.13 Definición. Sean A y B dos eventos (elementos del mismo espacio muestral) y supongamos que B tiene probabilidad estrictamente positiva. La probabilidad condicional del evento A, dado el evento B, se denota por el símbolo $P(A \mid B)$ y se define como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Intuitivamente la **esperanza matemática** de una variable aleatoria $\mathbb{X}$ con función de densidad $f(x)$, es la media que se espera de repetir un experimento aleatorio una cantidad elevada de veces, donde la probabilidad de cada suceso obedece a la medida de probabilidad P. De esto derivamos la definición:

1.14 Definición. La **esperanza matemática** $E[\mathbb{X}]$ de una variable aleatoria discreta con rango $\mathbb{X} = \{x_0, x_1, \ldots\}$ y con función de densidad $f(x)$ se define como:

$$E[\mathbb{X}] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i).$$

En caso la variable sea continua y la función densidad sea $f(x)$ se calcula de la siguiente manera:

$$E[\mathbb{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Usualmente se denota a la esperanza matemática por $\mu = E[\mathbb{X}]$. La esperanza cumple las siguientes propiedades:

1.15 Lema. *Sea $\mathbb{X}$ una variable aleatoria. Entonces,*

(1) Si la variable aleatoria es siempre positiva entonces $E[\mathbb{X}]$ es positiva.

(2) $E[c] = c$ donde c es constante.

(3) $E[\mathbb{X}]$ es un operador lineal, i.e. $E[c\mathbb{X} + d] = cE[\mathbb{X}] + d$ donde c y d son constantes.

Algunas veces no nos interesa la esperanza de $\mathbb{X}$, sino de algún polinomio g de $\mathbb{X}$. En ese caso a g se le conoce como una función de una variable aleatoria, y podemos definir la esperanza de $E[g(\mathbb{X})]$ de la siguiente forma.

1.16 Definición. Sea $\mathbb{X}$ una variable aleatoria y sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $g(\mathbb{X})$ es una variable aleatoria con esperanza finita. Entonces:

1. $E[g(\mathbb{X})] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\mathbb{X}}(x)dx$ si la variable aleatoria $\mathbb{X}$ es continua.
2. $E[g(\mathbb{X})] = \displaystyle\sum_{x} g(x) f_{\mathbb{X}}(x)$ si la variable aleatoria $\mathbb{X}$ es discreta.

En ambos casos $f_{\mathbb{X}}$ denota la función de densidad de $\mathbb{X}$.

A $E[\mathbb{X}]$ se le conoce como el primer momento de $\mathbb{X}$, a $E[\mathbb{X}^2]$ como el segundo, y a $E[\mathbb{X}^n]$ como el n-avo momento de $\mathbb{X}$.

Los otros dos conceptos estadísticos que se utilizan frecuentemente a lo largo de este trabajo, so los de varianza y covarianza. La varianza es una medida que nos dice que tanto se separan los valores de la media (o la esperanza). Si los valores se separan mucho de la media entonces el valor de la varianza será alto, mientras que si se separan poco entonces será pequeño. Mientras que la covarianza nos dice qué tanto están relacionados dos variables aleatorias.

1.17 Definición. Sea $\mathbb{X}$ una v.a. discreta con función de densidad $f(x)$. La varianza de $\mathbb{X}$ se define como el número

$$\mathrm{Var}(\mathbb{X}) = \sum_{x} (x-\mu)^2 f(x),$$

cuando esta suma es convergente y μ es la esperanza de $\mathbb{X}$.

Para una variable continua $\mathbb{X}$ con función de densidad $f(x)$ se define

$$\mathrm{Var}(\mathbb{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx,$$

cuando esta integral es convergente.

Similar a la esperanza, la varianza tiene distintas propiedades. (Proposición 2.8, pág. 172 de la bibliografía [2]).

1.18 Lema. *Sea c una constante en $\mathbb{R}$, y $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ variables aleatorias con varianza finita. Entonces:*

(1) $\mathrm{Var}(\mathbb{X}) \geq 0$.

(2) $\mathrm{Var}(c) = 0$.

(3) $\mathrm{Var}(c\mathbb{X}) = c^2 Var(\mathbb{X})$.

(4) $\mathrm{Var}(\mathbb{X} + c) = \mathrm{Var}(\mathbb{X})$.

(5) $\mathrm{Var}(\mathbb{X}) = E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X})$.

La esperanza y la varianza son funciones de una variable aleatoria que nos dan información de su comportamiento. Por otro lado, la **covarianza** es una medida de relación entre variables aleatorias.

1.19 Definición. Sean $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ dos variables aleatorias (no importa si son continuas o discretas) y μ_x, μ_y sus respectivas medias. Entonces definimos la covarianza entre $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ como:

$$\sigma_{xy} = \mathrm{cov}(x, y) = E[(\mathbb{X} - \mu_x)(\mathbb{Y} - \mu_y)].$$

Dado que la covarianza puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, conviene aplicarle una transformación para estandarizarla (por estandarizar nos referimos a acotar la covarianza). Esta estandarización se hace a través del **coeficiente de correlación**, el cual funciona como medio de comparación.

1.20 Definición. El coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ se define como:

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \rho_{xy} = \frac{E[(\mathbb{X} - \mu_x)(\mathbb{Y} - \mu_y)]}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathbb{X})\mathrm{Var}(\mathbb{Y})}}.$$

No es difícil demostrar que $|\rho_{xy}| \leq 1$, lo que nos permite utilizarlo para hacer comparaciones (para esta demostración utilizaremos propiedades de la covarianza, por lo que la demostración la daremos más adelante). Decimos que dos variables aleatorias $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ están:

- positivamente correlacionadas si $\rho > 0$.
- negativamente correlacionadas si $\rho < 0$.
- no correlacionadas si $\rho = 0$.

Algunas propiedades de la covarianza son las siguientes [2, Cap. 4.9 y 4.10. Págs. 336-341]:

(1) $\mathrm{cov}(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = \mathrm{Var}(\mathbb{X})$.

(2) $\mathrm{cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \mathrm{cov}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.

(3) $\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = E(\mathbb{Y}\mathbb{X}) - E(\mathbb{Y})E(\mathbb{X})$.

(4) Si $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ son independientes, entonces $\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 0$.

(5) $\operatorname{cov}(a\mathbb{X}+b, c\mathbb{Y}+d) = ac\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

(6) $\operatorname{Var}(\mathbb{X}\pm\mathbb{Y}) = \operatorname{Var}(\mathbb{X}) + \operatorname{Var}(\mathbb{Y}) \pm 2\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

(7) $|\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y})| = 1$ si y sólo si $\mathbb{Y} = a\mathbb{X}+b$, $a \neq 0$ (en otras palabras, que $\mathbb{X}$ esté perfectamente correlacionado con $\mathbb{Y}$ implica que $\mathbb{X}$ es una función lineal de $\mathbb{Y}$ y viceversa).

1.21 Teorema. *Dados dos variables aleatorias $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ tenemos que $|\rho_{xy}| \leq 1$.*

Demostración. Sean σ_x^2 y σ_y^2 las varianzas de $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ respectivamente. Por propiedad (1) de la varianza:

$$0 \leq \operatorname{Var}\Big(\frac{\mathbb{X}}{\sigma_x} \pm \frac{\mathbb{Y}}{\sigma_y}\Big).$$

Tenemos por propiedades de la varianza y covarianza (denotamos las propiedades de la varianza como v y las de la covarianza como c):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\Big(\frac{\mathbb{X}}{\sigma_x} \pm \frac{\mathbb{Y}}{\sigma_y}\Big) &= \frac{\operatorname{Var}(\mathbb{X})}{\sigma_x^2} + \frac{\operatorname{Var}(\mathbb{Y})}{\sigma_y^2} \pm 2cov\Big(\frac{\mathbb{X}}{\sigma_x}, \frac{\mathbb{Y}}{\sigma_y}\Big) \text{ c.6 y v.3} \\
&= 1 + 1 \pm 2\frac{\operatorname{cov}(\mathbb{X},\mathbb{Y})}{\sigma_x\sigma_y} \text{ c.5} \\
&= 2 \pm 2\rho(\mathbb{X},\mathbb{Y}).
\end{aligned}$$

De la última línea es inmediato el resultado. $\square$

Finalizamos esta sección con un resultado importante. El Teorema de Bayes, del cual se han derivado varias modelos y aplicaciones.

1.22 Teorema. ***(Teorema de Bayes)*** *Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición de Ω tal que $P(B_i) \neq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea A un evento tal que $P(A) \neq 0$. Entonces para cada $j = 1, 2, \ldots, n$,*

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A \mid B_i)P(B_i)}.$$

Demostración. Por la definición de probabilidad condicional tenemos

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{P(A)}.$$

Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición de Ω, tal que $P(B_i) \neq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(A \cap \Omega) = P\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) \\
= P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\Big)
\end{aligned}
$$

Dado que los conjuntos B_i son disjuntos a pares, y nuevamente por la definición de probabilidad condicional:

$$
\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i).
\end{aligned}
$$

De donde tenemos lo que queremos demostrar. □

Algo que resaltar es que el Teorema de Bayes no se limita solamente a variables discretas. Es posible derivar análogos para variables aleatorias continuas o combinaciones de ambas. Una aplicación importante a recalcar, es que podemos en algunos casos utilizar el Teorema de Bayes al momento de ajustar distribuciones a un conjunto de datos.

1.2. Conceptos financieros

Finalizada la sección de conceptos estadísticos, procedemos a definir algunos conceptos financieros que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Este capítulo está basado principalmente en [4, Caps. 2 y 3].

Comencemos definiendo qué es un valor financiero.

1.23 Definición. Un **valor financiero** es un contrato legal que representa el derecho de recibir un beneficio en el futuro bajo algunas condiciones.

Hay muchas maneras de categorizar un valor financiero. Un inversor puede decidir comprar directamente en un número diferente de valores. De manera alternativa, un inversor puede invertir en un intermediario (conocido como fondo común), el cual junta diferentes inversiones y luego venden porciones de éstas en un portafolio de los instrumentos financieros que posee. Las inversiones directas se pueden clasificar por tiempo en el horizonte.

Las inversiones en compra de deuda que tienen una vida de menos de un año son conocidas como *instrumentos del mercado monetario*. Éstos se dividen aún más dependiendo si son emitidos por un gobierno o una entidad privada. Instrumentos con tiempo de vida de más de un año se conocen como *instrumentos del mercado de capitales*. Estos instrumentos se pueden dividir dependiendo si son instrumentos de patrimonio o deuda y se pueden volver a dividir de acuerdo a si son emitidos por el gobierno o por una entidad privada. La última categoría de activos son instrumentos derivados, que se llaman de esta manera porque sus ganancias dependen del precio primario de un activo.

1.2.1. Instrumentos del mercado monetario

Los valores del mercado monetario, son instrumentos de deuda a corto plazo vendidos por los gobiernos, instituciones financieras y corporaciones. La característica de estos valores es que tienen vencimiento en el momento de la emisión de un año o menos. El menor tamaño de una transacción en un instrumento del mercado monetario excede usualmente los \$100 000. Además algunos valores no se cambian o negocian. Dado el tamaño de la transacción y el hecho de que no se negocian activamente, muchos individuos que desean obtener estos instrumentos lo hacen a través de un fondo común. La mayoría de instrumentos del mercado monetario[1] son letras del tesoro, acuerdos de compra (REPOS por su siglas en inglés Repurchase agreement), LIBOR (por London Interbank Ordered Rate), certificados de depósito (CD), aceptaciones bancarias, papeles comerciales y eurodólares. A continuación mencionamos más acerca de algunos.

1.24 Definición. Las **letras del tesoro** son títulos de deuda pública a corto plazo. Su vencimiento suele situarse entre los tres y dieciocho meses. El comprador de las letras obtiene la ganancia de intereses fijos durante la duración del mismo hasta su vencimiento [9].

1.25 Definición. Un **acuerdo de compra** es un acuerdo entre un prestatario y un prestamista para vender y recomprar una valor gubernamental. El prestatario, usualmente un distribuidor de valores del gobierno, instituirá el repo a través de un contrato para vender valores a un prestamista a un precio determinado y, al

[1] En este trabajo solo mencionamos conceptos financieros de los mercados americanos. Conceptos similares se pueden encontrar en Guatemala.

mismo tiempo, un contrato para recomprar los valores gubernamentales en una fecha futura a un precio especificado. La diferencia entre los dos precios es el retorno al prestamista. El acuerdo de repo es un préstamo garantizado a corto plazo para el cual el monto de la garantía requerida depende del riesgo de la garantía. El vencimiento del repo es usualmente corto (menos de 14 días), siendo los repos nocturnos bastante comunes. Repos de mayor longitud, usualmente denominados como «recompra a plazo», tienen vencimientos de 30 o más días. La institución del lado opuesto del repo posee un repo inverso. El partido haciendo el repo inverso obtiene un contracto para comprar una valor a un precio determinado y venderla de regreso a un precio y tiempo predeterminado. Los repos y los repos inversos juegan un papel importante en el precio de valores derivados ya que permiten tomar posiciones cortas en bonos.

1.26 Definición. La tasa de oferta interbancaria de Londres (LIBOR por London Interbank Offered Rate) es la tasa a la que grandes bancos internacionales en Londres se prestan dinero entre sí mismos. Es usada como tasa base para préstamos de largo plazo, incluso en mercados americanos. A pesar que es una tasa entre bancos de Londres, es usualmente citada para préstamos en dólares. Es común ver instrumentos de deudas de largo plazo con tasas que cambian periódicamente (y por lo tanto con algunas características de instrumentos de corto plazo). Estas tasas cambiantes usualmente se fijan ya sea como la tasa de una letra del tesoro más una tasa fija o la tasa LIBOR más una tasa fija.

1.2.2. Otros instrumentos

Aunque todos los instrumentos de corto plazo se consideran que tienen muy poco riesgo, tienden a ofrecer pequeñas diferencias en sus retornos de acuerdo al tipo, e incluso la institución específica que las ofrece.

- Los CDs (certificados negociables de depósito) son depósitos con un banco.

- Las aceptaciones bancarias son contratos de un banco para pagar una suma específica de dinero en una fecha específica. Tantos los CDs como las aceptaciones bancarias se venden a tasas que dependen de los calificación crediticia del banco que los respalda, aunque los CD están asegurados por la Federal Deposit Insurance Corporation hasta un límite de $10 000.

- Los Eurodollar y Eurodollar CDs son depósitos con denominación de dolar respaldados por un banco extranjero o una sucursal europea de un banco estadounidense. Dado que los bancos extranjeros a menudo están sujetos a menos regulación que los bancos de EEUU, los instrumentos emitidos por bancos extranjeros generalmente conllevan pagos de intereses más altos que los instrumentos similares emitidos por bancos de EEUU.

- Los papeles comerciales son un instrumentos de deuda de corto plazo, emitidos por corporaciones grandes y conocidas, y las tasas son determinadas en parte por la solvencia de la corporación.

1.2.3. Instrumentos del mercado de capitales

Los instrumentso del mercado de capitales incluyen valores con vencimiento mayor a un año y algunos que no tienen vencimiento. Estos mercados usualmente se dividen de acuerdo a si los instrumentos contienen un conjunto prometido de flujos de efectivo a lo largo del tiempo o si ofrecen participación en las ganancias futuras de una compañía. El primer sector es usualmente referido a mercados de renta fija, mientras que el segundo es el mercados de renta variable. Las acciones preferentes, discutidas al final, son un instrumento que tiene algunas de las características de cada uno de los dos tipos. A continuación, explicamos brevemente los diferentes instrumentos, se entiende que la mayoría de definición que daremos están pensadas en el contexto de EEUU.

1.27 Definición. Los **valores de ingreso fijo** tienen un calendario de pago específico. La mayoría son bonos tradicionales y promesas de pago por cantidades y tiempos específicos. Usualmente estos valores tienen fechas pre-especificadas para los pagos de los intereses y una fecha específica para el repago del capital. En casi todos los casos, el incumplimiento de algún pago específico pone la fianza como vencida, con todos los pagos restantes (intereses perdidos más capital) para ser pagados inmediatamente. Los valores de renta fija varían en la promesa del retorno debido a sus diferencias, incluidas el vencimiento del bono, la solvencia del emisor y el estado imponible del bono.

1.28 Definición. Un **bono del Estado** es una modalidad de bono emitido por un país y su gobierno como modo de financiación y que supone para su poseedor la ganancia de intereses fijos durante la duración del mismo hasta su vencimiento, que suele situarse entre los tres y cinco años [10].

1.29 Definición. Los **valores de agencias federales** son valores emitidos por varias agencias federales de EEUU, a las que se les ha otorgado el poder de emitir deuda para ayudar a ciertos sectores de la economía. Las valores de las agencias federales usualmente se piensan como substitutos cercanos a los valores del tesoro. Aunque los valores de las agencias federales no tienen todo el respaldo en la creencia y solvencia del gobierno federal, los inversores asumen que el gobierno no permitirá que una agencia falle en sus pagos. Sin embargo, la falta de garantías explícitas del gobierno federal, además que los mercados por agencias son usualmente menos líquidos que los mercados por instrumentes del tesoro, ha resultado en que los instrumentos de estas agencias se vendan con pequeños incrementos en las ganancias, comparados con las notas y bonos del tesoro.

1.30 Definición. Los **bonos municipales** son instrumentos de deuda vendidos por entidades políticas, como estados, ciudades, distritos escolares, entre otros. Son diferentes al gobierno federal o sus agencias. Difieren de los bonos de agencia en que pueden (y en raras ocasiones ocurre) incumplir con los pagos, también difieren en que sus intereses están exceptos de impuestos federales y usualmente (dentro del estado que las emite) impuestos estatales. Los principales tipos de bonos municipales son: bonos por obligación, los cuales están respaldados por la credibilidad y solvencia del emisor y bonos de ingresos, los cuales están respaldados por un proyecto particular o la agencia municipal operando el proyecto. Debido a que los bonos municipales están exentos de impuestos en EEUU, se venden por menor promesa de ganancias que los bonos no municipales que tienen el mismo riesgo. Para encontrar las equivalencias en ganancias, uno debe comparar explícitamente el valor descontado de los flujos de efectivo después de los impuestos con los flujos de efectivo antes de los impuestos. Es una práctica común usar la siguiente aproximación para calcular ganancias imponibles equivalentes:

$$\text{Ganancias imponibles equivalentes} = \frac{\text{ganacias municipales exentas de impuestos}}{1 - \text{tasa de impuesto marginal}}.$$

Uno debe ser cuidadoso, mientras que el pago de intereses los bonos municipales están exentos de impuestos, las ganancias de capital están sujetas a impuestos.

1.31 Definición. Los **bonos corporativos** son generalmente similares a los bonos gubernamentales en los patrones de pago. Estos prometen pagar intereses en intervalos períodicos y retornar el capital en una fecha determinada. La mayor diferencia es que estos bonos son emitidos por una empresa y por lo tanto tienen riesgo de incumplimiento. Los bonos corporativos se clasifican de acuerdo a su calidad por varias agencias. Los bonos corporativos difieren en riesgo no solo por las diferencias en la probabilidad de incumplimiento de la corporación emitiéndolas sino también, por las diferencias en la naturaleza sus reclamos sobre los activos y ganancias de las corporaciones emisoras. Por ejemplo, los bonos asegurados tienen alguna clase de especificación que los respalda en caso de bancarrota, mientras que los bonos no asegurados no las tienen. Para ganar protecciones contra la bancarrota, los bonos corporativos usualmente ponen ciertas restricciones a la administración de los poseedores de los bonos, como parte del contrato del préstamo. Estas restricciones pueden incluir la limitación del pago de dividendos o el agregar nuevas deudas. Otra característica notable de los bonos corporativos es que, en la mayoría de los casos, son exigibles, lo que significa que las corporaciones pueden obligar al tenedor del bono a entregarlos a un precio fijo (normalmente por encima del precio al que se vendieron inicialmente los bonos) durante un período de tiempo determinado. Las corporaciones tienden a exigir los bonos en momentos en que las tasas de interés están por debajo de las que existían cuando el bono se vendía por primera vez. Por lo tanto el poseedor del bono se arriesga a reinvertir sus ganancias, debido a una exigencia, a menores tasas de interés de las que tenía el bono al momento de ser emitido.

1.32 Definición. Las **acciones ordinarias** representan un derecho de propiedad sobre las ganancias y los activos de una corporación. Una vez que se paga a los tenedores de derechos de deuda, los administradores de la empresa pueden pagar las ganancias restantes a los accionistas en forma de dividendos o reinvertir parte o la totalidad de las ganancias en el negocio.

Finalizamos esta sección definiendo un concepto que usaremos más adelante.

1.33 Definición. Los inversionistas pueden vender valores que no les pertenecen. Este tipo de intercambio es conocido como **venta corta** y es utilizado para vender valores cuando se espera que su precio caiga en el futuro.

El intercambio se hace por medio de un corredor el cual toma prestado el valor de otro inversor para realizar la venta. Para cubrir su posición corta, el inversionista debe en el futuro comprar el valor y devolverlo a la institución que se lo prestó. Cualquier beneficio que incluya la acción, como dividendos, deben ser pagados por el inversionista que vendió corto. De esta forma el inversor que confirió el valor no se percata que su acción fue tomada [4, Capítulo 3].

En resumen, una venta corta es un proceso financiero el cual nos permite tomar prestada una acción de algún «amigo» para venderla. La idea de por qué utilizar una venta corta es la siguiente: supongamos que creemos que el valor de las acciones de la empresa MackTech van caer de \$150.00 a \$120.00 por acción para el final del periodo fiscal. Nuestro «amigo» espera mantener los beneficios de la acción, los cuales incluyen un dividendo del \$4 para el final del año fiscal. Así que el flujo del dinero se da de la siguiente forma, primero tomamos prestada la acción y la vendemos a \$150.00. Al finalizar el año le pagamos \$4.00 dólares a nuestro «amigo» por los dividendos y podemos volver a comprar la acción por \$120.00 para saldar la deuda. Por lo que terminaríamos el año con una ganancia de \$26.00.

En la vida real el papel del amigo es tomado por un corredor, el cual podría solicitar beneficios adicionales. Además, como el precio de una acción puede incrementarse infinitamente, para protegerse de ello los inversionistas ponen un punto máximo de pérdida. Alcanzado este punto recuperan la acción para no continuar con futuras posibles pérdidas.

Claro, no existe inversión que sea segura. Si el inversor es novato, no se recomienda vender corto. Un ejemplo claro de algo imprevisto es la subida del valor de las acciones de GameStop. [12]

GameStop a inicios de 2021 se encontraba en problemas. Sus acciones habían comenzado a bajar y se esperaba que siguieran bajando, entonces varias firmas de inversión decidieron vender corto para ganar dinero.

El problema se dio cuando un grupo de individuos de la plataforma Reddit decidieron comprar acciones de GameStop en conjunto. Al llenar el mercado, las acciones de GameStop comenzaron a subir y los inversionistas comenzaron a entrar en pánico. Poco a poco se fue llenando el mercado y cada vez habían menos acciones para comprar, lo que a su vez aumenta el precio. Debido a la subida de acciones y a la falta de ellas, muchos inversionistas no tenían forma de cubrir sus posiciones, esto causó que perdieran cantidades sustanciales de dinero.

1.3. Otras definiciones importantes

Ya hemos terminado con los conceptos financieros. Lo último que nos hace comentar en este capítulo es acerca de algunos conceptos matemáticos sobre optimización que serán útiles. Aquellos lectores con conocimientos de optimización, pueden saltarse esta sección y continuar con el Capítulo 2. Esta parte está basada en [13].

1.34 Definición. Consideramos el problema de la optimización como

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

La función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que deseamos minimizar es una función de valor real, y es llamada la *función objetivo*, o *función costo*. El vector $\mathbf{x}$ es un n-vector de variables independientes, que es, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^T \in \mathbb{R}^n$. Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son llamadas usualmente *variables de decisión*. El conjunto Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, llamado *conjunto de restricciones* o *conjunto factible*.

El problema de optimización anterior puede verse como un problema de decisión que involucra buscar el «mejor» vector $\mathbf{x}$ de las variables de decisión sobre todos los posibles vectores en Ω. Por el mejor «vector>", nos referimos al que da como resultado el valor más pequeño de la función objetivo. Este vector es llamado el **mínimo** de f sobre Ω. Es posible que aquí puedan haber muchos mínimos. En este caso, buscar cualquiera de los mínimos es suficiente.

Aquí también son problemas de optimización los que requieren maximizar la función objetivo. Estos problemas, sin embargo, pueden ser representados en la forma anterior porque maximizar f es equivalente a minimizar $-f$. Por lo tanto, podemos fijar nuestra atención a los problemas de minimización sin perdida de generalidad.

El problema anterior es una forma general de optimización restringida, porque las variables de decisión son restringidas a estar en el conjunto restringido Ω. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, entonces nos referimos al problema como un problema de optimización *no restringida*.

2. TEORÍA MODERNA DE PORTAFOLIOS

Invertir es complicado. Aunque invertir por medio de una cuenta bancaria, compra de bienes o invertir en la famosa bolsa de valores financieros nos da mejores probabilidades de ganar dinero que en la lotería o en los casinos, los riesgos de hacer una mala inversión siempre existen y podemos perder dinero.

Simples estrategias basadas en la mera intuición humana pueden generar retornos. Estar atento a las noticias para saber si un mercado está en crisis o creciendo (lo que se conoce como *market timing*), escoger una cuenta bancaria con buenas tasas de intereses e incluso comprar bienes, son estrategias razonables de inversión.

Invertir todo nuestro capital en un único activo puede ser una mala decisión; una inflación descontrolada, la devaluación de los bienes, o un cambio inesperado en el mercado son ejemplos de cosas que pueden ocurrir sin haberlas previsto, algunas más probables que otras.

Es razonable, por lo anterior, no invertir todo nuestro capital en un solo activo, sino buscar una combinación de activos que se acomode al riesgo que estamos dispuestos a tomar. La idea central de la Teoría Moderna de Portafolios (MPT, por sus siglas en inglés) es escoger el portafolio que maximice el retorno esperado, para un riesgo dado.

Para escoger el portafolio adecuado debemos ser capaces de medir cuánto contribuye cada activo al riesgo y al retorno del portafolio. Una vez tengamos las diferentes combinaciones de valores financieros, esperamos que la persona que esté invirtiendo prefiera aquellos portafolios que maximicen el retorno y minimicen el riesgo.

Nuestro objetivo principal en este capítulo es desarrollar la teoría matemática para crear los modelos que nos permitan escoger el portafolio que se acomode mejor a nuestras necesidades. Recordemos que los objetivos de cada individuo o institución son diferentes y es esto lo que determina el tiempo y el riesgo a tomar.

2.1. Modelo estándar de Markowitz

Supongamos que la empresa MackTec tiene la posibilidad de escoger entre una cantidad diferente de valores financieros $S_1, S_2, \ldots, S_n$, como letras del tesoro, bolsa de valores financieroes o una cuenta bancaria. Nuestro objetivo es definir un portafolio de inversión $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ donde x_j es el porcentaje de nuestro presupuesto asignado al activo S_j. De lo anterior obtenemos nuestra primera limitante, esperamos gastar el presupuesto completo, por lo que nuestra restricción sería

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Para cada selección de valores financieros financieros tendremos un resultado. Markowitz define dos criterios, el **retorno esperado** y la **volatilidad del portafolio** [1].

2.1 Definición. El **retorno** $R_{Pt}(x)$ de un portafolio en el escenario t es la media ponderada del retorno de cada valor financiero individual. Sea x_j el porcentaje del presupuesto asignado al valor financiero S_j, sea r_{jt} el retorno del valor financiero S_j en el escenario t y n el número de valores financieros.

$$R_{Pt}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_{jt}.$$

A lo largo de este trabajo y por simplicidad, comunmente utilizamos μ_i para decir el retorno esperado de un valor financiero i y r_{it} para el retorno del valor financiero i en el periodo t.

2.2 Definición. El **retorno esperado** de un valor financiero es la media ponderada del retorno en cualquier escenario. Llamamos p_k la probabilidad que se de el escenario k y r_{jk} el retorno en el escenario k. Podemos entonces escribir el retorno esperado de un valor financiero como la esperanza del retorno, *i.e.*

$$\mu_j = E(r_j) = \sum_{k=1}^{K} p_t r_{jt}, \tag{2.2}$$

donde suponemos que los escenarios posibles son un número finito K [11, Sección 2].

Agregamos la suposición que el inversor quiere maximizar su retorno, para lo cual debe maxímizar la función de retorno esperado del portafolio completo:

$$\mu_P = E(R_P) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j. \tag{2.3}$$

La Ecuación 2.2 está pensada para el caso en el que r_j se comporta como una variable aleatoria discreta. Esto no siempre será el caso, por lo que conviene pensar el retorno esperado como la esperanza de una variable aleatoria. En lo que sigue, trataremos al retorno esperado de esta forma.

Nótese que podemos agregar la suposición $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$. El punto óptimo el cual cumple (2.1) y maximiza (2.2) se da en $x_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, en otras palabras, todo el capital se debe gastar en el valor financiero que pueda generar la mayor ganancia. Esta solución es ambiciosa pero riesgosa, porque solo hay dos posibles resultados: o el inversor lo gana todo; o lo pierde todo. Debido al riesgo, algunos inversionistas prefieren agregar restricciones del tipo $x_j \leq u_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ al presupuesto. En este caso la solución ambiciosa se vería de la siguiente forma

$$x_0 = \left(u_1, u_2, \ldots, 1 - \sum_{j=1}^{k} u_j, 0, 0, \ldots, 0\right)$$

donde $\sum_{j=1}^{k} u_j \leq 1$ y $\sum_{j=1}^{k+1} u_j \geq 1$. Esta solución nos dice que debemos invertir lo más que se pueda del presupuesto en los valores financieros que puedan generar el mayor retorno [11, Sección 2]. Un claro problema de este modelo es, ¿cómo determinar cuales restricciones de presupuesto son adecuadas? Además, ¿cómo determinamos cuáles valores financieros generan mayor retorno? Markowitz propone una manera distinta de medir el riesgo.

Una de las maneras más conocidas de medir el riesgo es la desviación estándar de los retornos esperados. La idea es crear más soluciones intermedias; que la ganancia no sea a todo o nada. Para ello utilizamos la Definición (1.19).

2.3 Definición. La **covarianza** σ_{ij} de los retornos i y j la definimos como

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (r_{ik} - \mu_i)(r_{jk} - \mu_j).$$

2.4 Definición. La **desviación estándar** del portafolio la definimos como:

$$\sigma_P = \sqrt{E[R_P(x) - \mu_P]^2}. \tag{2.4}$$

La última ecuación la llamamos **riesgo** o **volatilidad** del protafolio. Es razonable pensar que un inversor también considerará minimizar el riesgo. Decimos que un portafolio es **eficiente**, u **óptimo de Pareto**, si y solo si cualquier otro portafolio factible que mejora una de las dos optimizaciones, empeora la otra [1]. Alternativamente podemos decir que un portafolio es eficiente si tiene el mayor retorno esperado de todos los portafolios que tienen la misma varianza. La **varianza de un valor financiero** se define como

$$\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^{K} p_k (r_{ik} - \mu_i)^2. \tag{2.5}$$

A la curva que se obtiene al graficar las soluciones óptimas en un plano compuesto por los ejes riesgo vs retorno esperado la llamaremos **frontera efectiva**. Antes de resolver el problema general, veamos qué ocurre para diferentes niveles de covarianza[1]. Vamos a suponer que no permitimos que haya ventas cortas (ver Definición 1.33). Supongamos que escogemos entre dos valores financieros que se muestran a continuación.

Tabla 2.1. Información de dos valores financieros.

	Retorno Esperado	Desviación Estándar
valor financiero 1	15 %	5 %
valor financiero 2	10 %	3 %

Fuente: Cap. 4 y 5 [4], valores supuestos.

Recordemos que el retorno esperado está dado por

$$\mu_P = E(R_P) = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 \tag{2.6}$$

donde,
μ_1 es el retorno esperado de la valor financiero 1.
μ_2 es el retorno esperado de la valor financiero 2.
x_1 es el presupuesto asignado a la valor financiero 1.
x_2 es el presupuesto asignado a la valor financiero 2.

Además de la ecuación (2.1) sabemos que $x_1 + x_2 = 1$. Podemos reescribir la

[1]Este ejemplo está basado en las secciones 4 y 5 de la siguiente fuente [4]. Por favor considerar leer a los autores originales del libro.

ecuación anterior como

$$x_2 = 1 - x_1. \tag{2.7}$$

Sutituyendo en (2.6) obtenemos

$$\mu_P = x_1\mu_1 + (1 - x_1)\mu_2. \tag{2.8}$$

Recordemos la definición de desviación estandar de un portafolio (Definición 2.4), como tenemos dos valores financieros vamos a tratar de simplificar la ecuación (2.4).

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= E[R_P - \mu_P]^2 = E[x_1 r_{1j} + x_2 r_{2j} - x_1\mu_1 - x_2\mu_2]^2 \\ &= E[x_1(r_{1j} - \mu_1) + x_2(r_{2j} - \mu_2)]^2.\end{aligned}$$

Podemos aplicar las propiedades de la esperanza dadas en el capítulo anterior (Definiciones (1.14, 1.17)) para deducir:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= E[x_1^2(r_{1j} - \mu_1)^2 + 2x_1x_2(r_{1j} - \mu_1)(r_{2j} - \mu_2) + x_2(r_{2j} - \mu_2)^2] \\ &= x_1^2 E[(r_{ij} - \mu_1)^2] + 2x_1x_2 E[(r_{1j} - \mu_1)(r_{2j} - \mu_2)] + x_2^2 E[(r_{2j} - \mu_2)^2].\end{aligned}$$

Combinando las definiciones dadas de covarianza y varianza en el capítulo anterior con nuestras definiciones nuevas podemos concluir.

$$\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + x_2^2\sigma_2^2. \tag{2.9}$$

Para simplificar nuestro análisis, definimos el **coeficiente de correlación** entre dos valores financieros i, j como:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}.$$

Como se mencionó en (1.20), la importancia de definirlo de esta manera es que nos permite realizar comparaciones. Si este coeficiente es positivo, entonces el movimiento de una de las variables impacta en cierto sentido a la otra, ambas en la misma dirección. Si es negativo sucede que el impacto es en dirección opuesta. Finalmente si es 0, entonces se entiende que lo que le ocurra a una variable no impacta a la otra.

Combinando nuestra definición de coeficiente de correlación, la Ecuación (2.9) y la Ecuación (2.7) concluimos que nuestra ecuación se convierte en:

$$\sigma_P = [x_1^2\sigma_1^2 + (1 - x_1)^2\sigma_2^2 + 2x_1(1 - x_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2]^{1/2}. \tag{2.10}$$

Veamos algunos ejemplos de diferentes niveles de correlación.

Caso 1-Correlación perfecta positiva ($\rho = +1$): Si el coeficiente de correlación es +1, en este caso la Ecuación (2.10) se convierte en

$$\sigma_P = [x_1^2\sigma_1^2 + (1 - x_1)^2\sigma_2^2 + 2x_1(1 - x_1)\sigma_1\sigma_2]^{1/2}.$$

Esto es un cuadrado perfecto por lo que obtenemos:

$$\sigma_P = x_1\sigma_1 + (1 - x_1)\sigma_2.$$

Despejamos x_1;

$$x_1 = \frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

y al sustituir lo anterior en la ecuación (2.8)

$$\mu_P = \left(\mu_2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\sigma_2\right) + \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)\sigma_P.$$

Lo que nos dice que el retorno μ_P del portafolio depende linealmente de la varianza. Para nuestro ejemplo la ecuación sería:

$$\mu_P = 10 - \frac{15 - 10}{5 - 3}(3) + \frac{15 - 10}{5 - 3}\sigma_P$$

$$\mu_P = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\sigma_P.$$

Cuando existe correlación perfecta el menor riesgo que podemos tomar es invirtiendo en el valor financiero que tenga el menor riesgo posible, y no podemos hacer nada para disminuirlo. Esto se ve claramente en la **Figura 2.1**. En este caso diversificar solo nos sirve para conseguir un nivel de riesgo intermedio.

Caso 2- Correlación perfecta negativa ($\rho = -1$): Similar a lo que hicimos antes al sustituir $\rho = -1$ en la Ecuación (2.10) se simplifica en

$$\sigma_P = [x_1^2\sigma_1^2 + (1 - x_1)^2\sigma_2^2 - 2x_1(1 - x_1)\sigma_1\sigma_2]^{1/2}.$$

Esto es nuevamente un cuadrado perfecto, así que

$$\sigma_P = x_1\sigma_1 - (1 - x_1)\sigma_2,$$

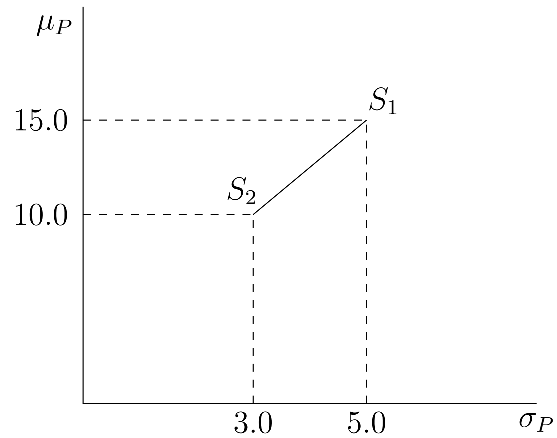

Figura 2.1. Riesgo vs. Retorno con $\rho = +1$. Fuente: [4, Cap. 5].

o también podemos tener

$$\sigma_P = -x_1\sigma_1 + (1 - x_1)\sigma_2. \tag{2.11}$$

Dado que σ_P es un valor financiero real positivo, cualquiera de las dos soluciones existe siempre que el lado derecho sea no negativo. Además es claro que una ecuación es simplemente -1 veces la otra. Algo importante es que podemos encontrar una combinación de valores financieros que tenga riesgo 0. Para ello veamos que al sustituir $\sigma_P = 0$ y despejar x_1 en la Ecuación (2.11), tendríamos que $x_1 = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$. Como tanto σ_1, como σ_2, son mayores que 0, entonces x_1 es mayor que 0. Este combinación siempre involucrará invertir en alguna combinación de ambos valores financieros.

La gráfica de las opciones que tenemos está dada por la combinación de dos rectas con pendientes de la misma magnitud pero en sentido opuesto e intersecto igual (si desea probar este hecho puede aplicar el procedimiento del caso 1 para encontrar las ecuaciones). Para nuestro ejemplo, el riesgo 0 se logra en $x_1 = 3/(5 + 3) = 3/8$ *i.e.* invirtiendo $3/8$ de nuestro presupuesto en la valor financiero 1. Para graficar primero queremos eliminar x_1 del sistema:

$$\mu_P = 10 + 5x_1$$

$$\sigma_P = 8x_1 - 3$$

y también del sistema que se forma al cambiar la última ecuación por su negativo

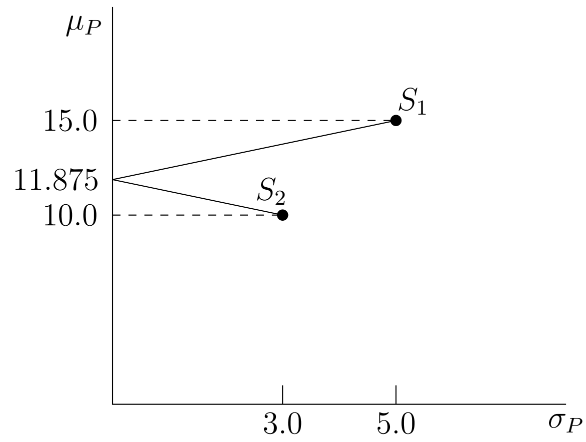

Figura 2.2. Riesgo vs. Retorno con $\rho = -1$. Fuente: [4, Cap. 5].

(con la condición $\sigma_P \geq 0$). El primer sistema produce la recta

$$\mu_P = \frac{95}{8} + \frac{5}{8}\sigma_P.$$

Mientras que el segundo produce la recta

$$\mu_P = \frac{95}{8} - \frac{5}{8}\sigma_P.$$

La **Figura 2.2** muestra el resultado de graficar ambas rectas. Una última observación de la gráfica es que es posible encontrar una combinación de valores financieros para cualquier nivel de riesgo, siempre y cuando este sea menor al mayor riesgo (donde mayor riesgo se entiende el riesgo mayor entre todas las valores financieros).

Caso 3-No correlación ($\rho = 0$): Para ver qué pasa en los lugares intermedios vamos a trabajar el caso en el que $\rho = 0$. Sustituyendo dicho valor financiero en (2.10) nos da como resultado

$$\sigma_P^2 = x_1^2\sigma_1^2 + (1 - x_1)^2\sigma_2^2.$$

Para nuestro ejemplo tenemos el sistema

$$\sigma_P^2 = 25x_1^2 + 9(1 - x_1)^2$$

$$\mu_P = 10 + 5x_1.$$

Podemos eliminar x_1 para conseguir la siguiente ecuación

$$\sigma_P^2 = \frac{34\mu_P}{25} - \frac{154\mu_P}{5} + 181.$$

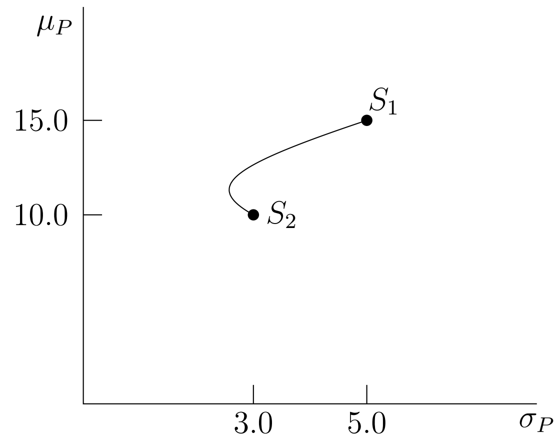

Figura 2.3. Riesgo vs. Retorno con $\rho = 0$. Fuente: [4, Cap. 5].

La **Figura 2.3** nos muestra la gráfica de la ecuación anterior. Podemos notar que nuevamente existe una combinación de valores financieros que nos da un riesgo menor al que se obtiene al seleccionar solamente uno de los dos. Para encontrar el menor riesgo vamos a derivar la Ecuación (2.10) respecto de x_1. Esto se explica pues tenemos una función continua en dos variables en un conjunto cerrado y acotado, tanto x_1, como x_2 están en un rectángulo, y se cumple la condición $x_1 + x_2 = 1$ [5, Teorema 8, Capítulo 14]. En general, la derivada es

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial x_1} = \frac{2x_1\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + 2x_1\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4x_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{2[x_1^2\sigma_1^2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2 + 2x_1(1-x_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}]^{1/2}}. \tag{2.12}$$

Igualamos a 0 y despejamos x_1 para encontrar el mínimo el cual es

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}. \tag{2.13}$$

Lo cual para nuestro ejemplo da como resultado

$$x_1 = \frac{9}{25+9} = \frac{9}{34}$$

Como una última observación veamos que no siempre será posible disminuir el riesgo. Esto se ve claro al igualar la Ecuación (2.13) a 0. De ello

$$\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} = 0,$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

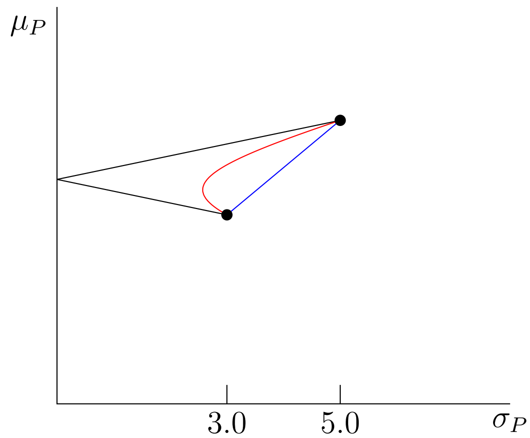

Figura 2.4. Riesgo vs. Retorno. Fuente: [4, Cap. 5].

En nuestro ejemplo particular a partir de $\rho_{12} = 3/5 = 0.60$ no es posible encontrar una combinación de valores financieros que disminuya el riesgo.

Uno podría graficar los ejemplos de correlación perfecta positiva y correlación perfecta negativa en un mismo plano y suponer que cualquier otra correlación tendrá su gráfica acotada por las **Figuras 2.2 y 2.1**. Esto se puede ver en la **Figura 2.4**. Mientras más correlación exista entre los valores financieros, más nos acercaremos a la gráfica del caso 1 y diversificar tendrá menor efecto. Por el contrario, mientras más negativa sea la correlación, diversificar nos da la posibilidad de tomar un menor riesgo. Para cualquier otro caso, podremos diversificar en cierta medida. De cualquier manera, dado que en la mayoría de casos existe correlación y esta no es perfectamente positiva, seleccionar una combinación de valores financieros es deseado ya sea para disminuir el riesgo o seleccionar entre todos los portafolios con un mismo riesgo, aquel que tenga el mayor retorno.

2.1.1. Frontera efectiva

Está sección está basada en los capítulos 5 y 6 de [4], se recomienda su lectura para profundizar en el tema. Pensemos en un inversor. Si tiene la opción de escoger esperamos que tome entre varios portafolios

(1) Aquellos que tengan el menor riesgo posible con un nivel fijo de retorno y

(2) aquellos que tienen el mayor retorno posible con un mismo nivel de riesgo.

Esto se ejemplifica en la **Figura 2.5**. Vemos que B es preferible sobre A porque ofrece un mayor retorno bajo el mismo nivel de riesgo, mientras que C es preferible sobre D porque ofrece un menor riesgo para el mismo retorno.

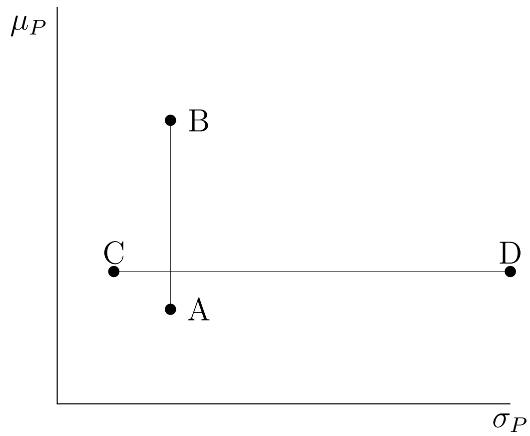

Figura 2.5. Ejemplo de selección. Fuente: [4, Cap. 5].

La afirmación anterior es importante pues nos permite demostrar que la frontera efectiva es una curva cóncava. En efecto veamos los 3 casos posibles. La figura mostrada en la **Figura 2.6.b**, no es posible porque hemos demostrado que cualquier conbinación de valores financieros no puede tener más riesgo que la línea que une ambos (y esto solo ocurre si la correlación es perfectamente positiva). Pero, ¿Qué se puede decir acerca de la **Figura 2.6.c**? Aquí todos los portafolios tienen menos riesgo que la línea que une ambos portafolios. Sin embargo, esto es imposible. Vea los portafolios nombrados como U y V. Estos son simples combinaciones de la varianza mínima del portafolio. Como U y V son portafolios, todas las combinaciones de U y V están ya sea en una línea recta que une a a U y a V o arriba de dicha línea. Así que el caso es imposible y la única forma posible es la presentada en la **Figura 2.6.a**.

Con dichas consideraciones, podemos ver que el conjunto efectivo consiste de la curva que envuelve a todos los portafolios que están entre el portafolio con varianza mínima global y el portafolio con máximo retorno. Este conjunto de portafolios se le conoce como la frontera efectiva. Dicha frontera es en efecto cóncava por razones expuestas en el párrafo anterior.

Concluyendo la parte intuitiva, podemos comenzar a formalizar nuestro análisis. El problema de encontrar portafolios efectivos puede ser separado en cuatro casos, los cuales listamos en orden del más fácil al más difícil de resolver.

(i) Se admiten ventas cortas y se puede pedir prestado o conferir a riesgo 0.

(ii) Se admiten ventas cortas pero no se puede pedir prestado ni conferir a riesgo 0.

(iii) No se admiten ventas cortas pero sí se puede pedir prestado o conferir a ries-

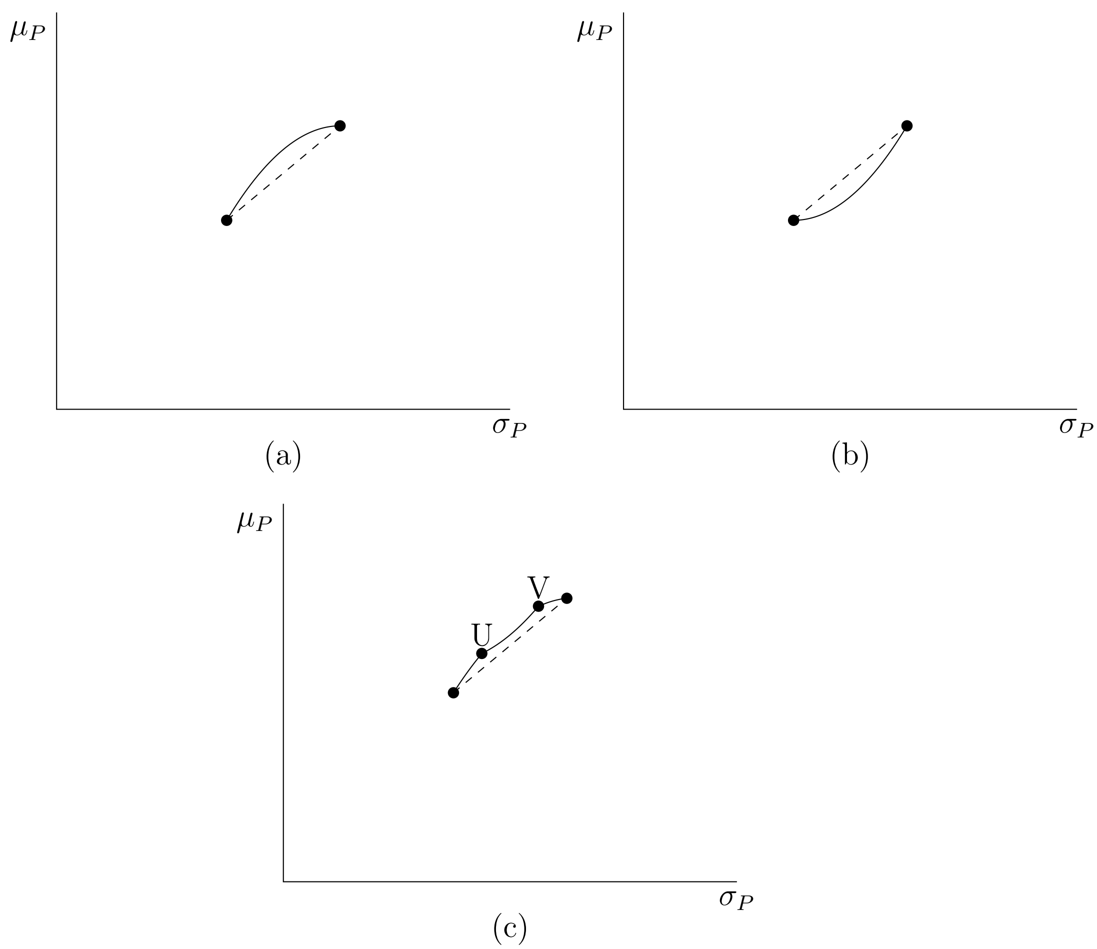

Figura 2.6. Tres posibles casos. Fuente: [4, Cap. 5].

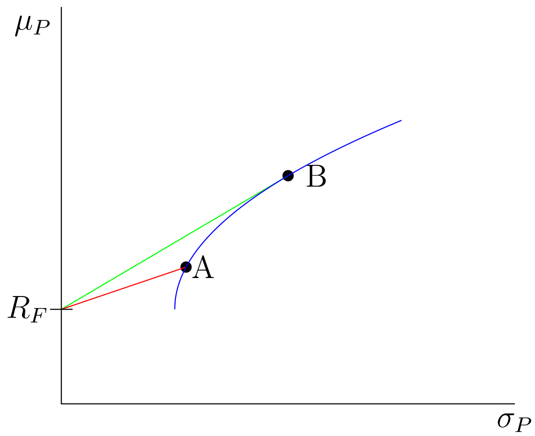

Figura 2.7. Selección portafolio óptimo. Fuente: [4, Cap. 6].

go 0.

(iv) No se admiten ventas cortas ni se puede pedir prestado ni conferir a riesgo 0.

Veamos cada caso con detalle.

Caso (i): Cuando hablamos de riesgo 0, nos referimos a inversiones donde tenemos certeza de la cantidad de dinero que recibiremos o pagaremos en el futuro. Podemos conferir a riesgo 0 a través de una cuenta bancaria o la compra de letras del tesoro. Mientras que podemos pedir un préstamo a riesgo 0 a través de la venta corta de letras del tesoro.

Habiendo hecho las consideraciones anteriores, realicemos el análisis para el **Caso (i)**. Cuando asumimos que se permiten ventas cortas, podemos pedir prestado y conferir a una misma tasa de interés que llamaremos R_F. Esta tasa tiene riesgo 0 pues tenemos certeza del interés que vamos a recibir. Vea la **Figura 2.7**. La gráfica en azul representa todos portafolios posibles. La semirecta $R_F - A$ (rojo) representa las combinaciones de presupuesto donde le asignamos una parte al portafolio A y el resto se confiere a la tasa R_F. Lo mismo para la semirecta $R_F - B$ (verde). Observe que la recta $R_F - B$ es preferible sobre la recta $R_F - A$. Esto se debe a que los puntos sobre la recta $R_F - B$ tienen mayor retorno esperado que los puntos sobre la recta $R_F - A$ bajo los mismos niveles de riesgo.

Es fácil ver entonces que el portafolio deseado P es único (en la mayoría de casos) y será el que tenga la recta con mayor pendiente. La recta que une los puntos $(0, R_F)$, (σ_P, μ_P) tiene pendiente

$$\theta = \frac{\mu_P - R_F}{\sigma_P}.$$

Esta función es nuestra **función objetivo** (Seción 1.3) sujeto a la condición (2.1):

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \ \{x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

Este es un **problema de maximización con restricciones**. Para resolverlo apliquemos el procedimiento que se muestra a continuación. Markowitz demuestra una simplificación para el riesgo del portafolio [1].

Esta fórmula es,

$$\sigma_P = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}. \tag{2.14}$$

La restricción (2.1), puede ser sustituida en R_F para llegar a:

$$R_F = 1 \cdot R_F = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j \Big) R_F = \sum_{j=1}^{n} (x_j R_F).$$

Por lo que nuestra función objetivo se transforma en lo siguiente,

$$\theta = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j (\mu_j - R_F)}{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}}.$$

Lo que queremos maximizar es una función multivariable, por lo que podemos utilizar los métodos clásicos de cálculo[2]. Debemos derivar respecto de cada variable e igualar a 0. Esto produce el sistema de ecuaciones simultaneas:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_n} = 0 \end{gathered}$$

[2]Volvemos a tener una función continua en un conjunto cerrado y acotado. Ver [5, Teorema 8, Capítulo 14]

Tabla 2.2. Tabla información valores financieros.

	Retorno Esperado	Desviación Estándar
valor financiero 1	15 %	7 %
valor financiero 2	10 %	5 %
valor financiero 3	20 %	13 %

Fuente: Elaboración propia.

En [4] se demuestra que

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = -\lambda(x_1\sigma_{1i} + x_2\sigma_{2i} + \cdots + x_i\sigma_i^2 + \cdots + x_n\sigma_n) + \mu_i - R_F = 0$$

donde $\lambda = (\mu_P - R_F)/\sigma_P^2$. Al hacer la sustitución $\lambda x_n = z_n$, se forma el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\mu_1 - R_F &= z_1\sigma_1^2 + z_2\sigma_{12} + \cdots + z_n\sigma_{1n} \\
\mu_2 - R_F &= z_1\sigma_{21} + z_2\sigma_2^2 + \cdots + z_n\sigma_{2n} \\
&\vdots \\
\mu_n - R_F &= z_1\sigma_{n1} + z_2\sigma_{n2} + \cdots + z_n\sigma_n^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

El sistema anterior está asociada a la matriz de covarianzas $K = \sigma_{ij}$ que es una matriz cuadrada de $n \times n$. Por lo tanto, el sistema tiene solución si esta matriz es invertible. Consultar [3, Teorema 3.26, Capítulo 3.B], para mas detalles de cómo resolver dicho sistema. El lector puede verificar que se puede hacer la siguiente simplificación, debido a que queremos que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$:

$$x_k = z_k / \sum_{i=1}^{n} z_i. \tag{2.16}$$

Así que para encontrar el portafolio óptimo primero resolvemos el sistema para encontrar z_i y luego sustituimos $x_i = \lambda z_i$. Una solución alternativa al problema anterior se logra a través de la técnica de multiplicadores de Lagrange.

Realicemos un ejemplo, supongamos que tenemos para invertir en 3 valores financieros, de las cuales se presentan sus varianzas y retornos esperados a continuación:

Además supongamos que las covarianzas son $\sigma_{12} = 0.5$, $\sigma_{23} = 0.6$ y $\sigma_{13} = 0.4$. También podemos pedir prestado o conferir a una tasa del 5 %. Con esta información,el Sistema (2.15) se transforma en:

$$\begin{aligned}
15-5&=49z_1+0.5(7)(5)z_2+0.4(7)(13)z_3,\\
10-5&=0.5(7)(5)z_1+25z_2+0.6(5)(13)z_3,\\
20-5&=0.4(7)(13)z_1+0.6(5)(13)z_2+169z_3.
\end{aligned}$$

El cual tiene soluciones:

$$z_1\approx 0.164,\ \ z_2\approx 0.003,\ \ z_3\approx 0.057.$$

De (2.16) podemos concluir: $z_1+z_2+z_3=0.224$,

$$x_1\approx 0.164/0.224,\ \ x_2\approx 0.003/0.224,\ \ x_3\approx 0.057/0.224.$$

$$x_1\approx 0.732,\ \ x_2\approx 0.013,\ \ x_3\approx 0.255.$$

Finalmente calculamos el retorno esperado del portafolio

$$\mu_P=0.732(15)+0.013(10)+0.255(20)=16.21\,\%.$$

También calculamos la varianza del portafolio,

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2=(0.732)^2(15)^2&+(0.013)^2(10)^2+(0.255)^2(20)^2\\
&+2(0.732)(0.013)0.5(7)(5)\\
&+2(0.013)(0.255)0.6(5)(13)\\
&+2(0.732)(0.255)0.4(7)(13)\approx 160.78.
\end{aligned}$$

Con esta información concluimos que la frontera efectiva será la recta con pendiente

$$\theta=\frac{\mu_P-R_F}{\sigma_P}=\frac{16.21-5}{12.65}\approx 0.886$$

la cual tiene intercepto $(0,5)$. La **Figura 2.8** muestra la gráfica de dicha recta.

Caso (ii): Si el inversor no quiere agregar la suposición que puede pedir prestado o conferir a riesgo 0, podemos hacer algo similar al caso anterior. Para este caso todos los portafolios deseados estarán incluidos en la **Figura 2.7** la parte azul. Ahora observe la **Figura 2.9**, dicha figura nos sugiere un procedimiento para encontrar la frontera efectiva. Suponga primero que puede prestar y conferir a una tasa del 2 % sin riesgo, esto da el portafolio A, si repetimos el procedimiento para

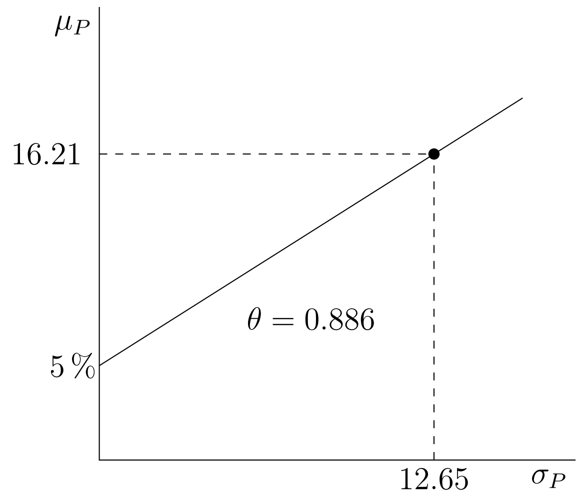

Figura 2.8. Frontera efectiva caso 1. Fuente: [4, Cap. 6].

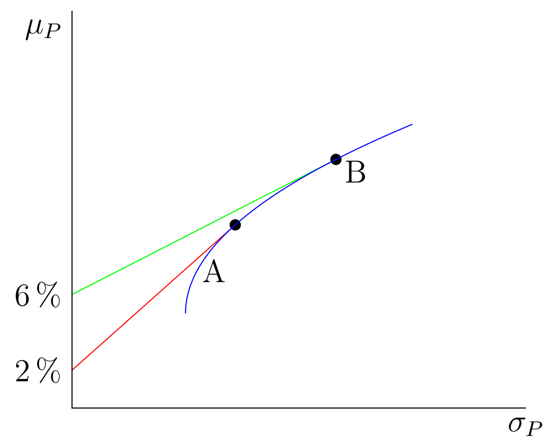

Figura 2.9. Selección portafolio óptimo. Fuente: [4, Cap. 6].

6 % obtenemos el portafolio B. De esta manera podemos ir variando el riesgo para ir encontrando todos los portafolios deseados. Entremos en detalle. Recordemos del caso anterior que para un riesgo fijo obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\mu_1 - R_F &= z_1\sigma_1^2 + z_2\sigma_{12} + \cdots + z_n\sigma_{1n} \\
\mu_2 - R_F &= z_1\sigma_{21} + z_2\sigma_2^2 + \cdots + z_n\sigma_{2n} \\
&\vdots \\
\mu_n - R_F &= z_1\sigma_{n1} + z_2\sigma_{n2} + \cdots + z_n\sigma_n^2.
\end{aligned}$$

Para cada valor de R_F existe una única solución de z_i. Por lo que podemos dejar R_F como un parámetro y resolver z_i en términos de R_F. Esto resulta en una solución del tipo

$$z_k = A_k + B_k R_F$$

donde A y B son constantes. Dichas constantes tienen un valor diferente para cada k, pero no cambian respecto de R_F. Una vez tengamos cada z_k en función de R_F, podemos variar R_F para determinara la cantidad a invertir en cada valor financiero ,en varios puntos de la frontera efectiva.

Caso (iii): Ahora supongamos que el inversor planea prestar o conferir a riesgo 0 pero no quiere vender corto. Este caso es similar al primero. Igual que antes el portafolio óptimo es el que maximiza el parámetro θ. Podemos formular este problema como:

$$\text{Maximizar } \theta = \frac{r_P - R_F}{\sigma_P}$$

sujeto a

$$(1) \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
$$(2)\ x_i \geq 0 \ \text{ para todo } i.$$

La segunda condición se debe a que no deseamos vender corto. Podríamos pensar en resolver este problema de la misma manera que antes y en algunos casos las soluciones que obtengamos serán en efecto lo que esperamos. El problema es que ahora puede ocurrir algo como lo que se ve en la **Figura 2.10** donde el máximo se da en un punto que no podemos alcanzar (Punto M). Por lo que nos conformamos con el punto M', en dicho punto

$$d\theta/dx_i < 0.$$

La condición anterior se puede reescribir como

$$\frac{d\theta}{dx_i} + U_i = 0.$$

Donde U_i es una constante que depende de x_i. Esta es la primera condición de Karush-Khun-Tucker para el máximo.

Veamos dos notas importantes de la condición anterior. Si el máximo ocurre cuando $x_i > 0$ entonces $U_i = 0$. Por otro lado si el máximo se da cuando $x_i = 0$ entonces se cumple que $U_i > 0$. Esta es la segunda condición de Karush-Khun-Tucker

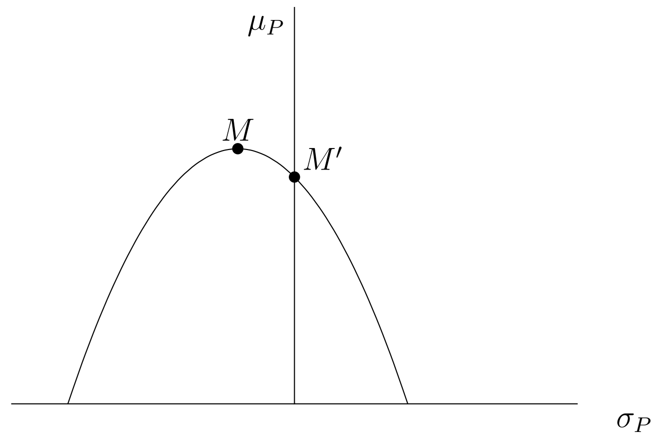

Figura 2.10. Portafolio en máximo inalcanzable. Fuente: [4, Cap. 6].

y puede ser escrita como

$$\begin{aligned} x_i U_i &= 0, \\ x_i &\geq 0, \\ U_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Las 4 condiciones de Karush-Khun-Tucker son:

$$\begin{aligned} &(1)\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ &(2)\ x_i U_i = 0, \\ &(3)\ x_i \geq 0, \\ &(4)\ U_i \geq 0. \end{aligned}$$

Si encontramos un portafolio que cumpla las 4 condiciones, entonces dicho portafolio es el portafolio óptimo.

Caso (iv): Finalmente si el inversor no quiere agregar ninguna suposición extra. Lo que se puede hacer es minimizar el riesgo para cualquier nivel de retorno. Esto produce el siguiente problema:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

sujeto a

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\\
&(2)\ \sum_{i=1}^{n} (x_i \mu) = r_P,\\
&(3)\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Este problema se conoce como un problema cuadrático de programación. Esto se debe a que encontraremos términos como x_i^2, $x_i x_j$. Varios paquetes en el programa R-Studio resuelven este problema, y algunos están basados en la técnica vista en el caso anterior. Por el momento dejaremos el análisis aquí y lo retomaremos más adelante. Vale la pena que mencionar que se pueden agregar suposiciones adicionales. Como ponerle un límite a la cantidad que se le quiere asignar a cada valor financiero o poner un mínimo al dividendo (a la posible ganancia). Pero no trabajaremos esos casos particulares por el momento.

2.2. Simplificando la selección del portafolio

Para poder aplicar la teoría moderna de portafolios necesitamos saber varias cosas, por ejemplo, retornos (esto se estudia en la sección 2.4), varianzas y correlaciones. El problema surge cuando queremos seleccionar un portafolio que está compuesto de muchos valores financieros, en ese caso no solo se necesita saber el retorno esperado de cada valor financiero, sino también, los coeficientes de correlación entre cada uno de ellos. Para simplificar un poco el proceso se han desarrollado varias técnicas. En esta sección nos enfocaremos en algunos de estos modelos.

2.2.1. Modelo de un solo factor

El modelo de un solo factor asume que el comovimiento entre valores financieros se debe a una influencia común o un índice. Este modelo, aparte de servir para calcular la matriz de correlación, es útil en algunos tests que nos permiten ver si un mercado es eficiente y está en equilibrio.

Nuevamente basamos esta sección en la siguiente referencia [4, Capítulos 7 y 8].

Se ha observado que si el mercado en general sube, la mayoría de valores financieros tienden a subir de precio, y cuando el mercado cae, la mayoría de valores financieros tienden a decrecer en precio. Esto se conoce como comovimiento de acciones, esto es, existe un índice común (conocido como índice de mercado) el cual hace que cierto conjunto de acciones se muevan en la misma dirección. Lo que queremos entonces es relacionar al retorno del valor financiero con el índice del mercado. Podemos escribir el retorno del valor financiero como sigue:

$$R_i = a_i + \beta_i R_m.$$

Donde a_i es una componente del retorno del valor financiero S_i y es independiente del mercado (una variable aleatoria). Además R_m es la tasa de retorno del índice del mercado (una v.a.) y β_i es el cambio esperado de R_i dado un cambio en R_m.

Hemos separado a R_i en dos componentes importantes. Una es la parte de R_i sensible al cambio del mercado y la otra a_i representa la parte de R_i que es insensible (independiente) del cambio del retorno del mercado. Podemos separar a_i en dos componentes, una es su valor financiero esperado α_i y la otra e_i representa el elemento aleatorio de a_i. Entonces

$$a_i = \alpha_i + e_i$$

donde e_i tiene un valor financiero esperado igual a cero. La ecuación del retorno puede ser escrita de la siguiente manera

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i. \tag{2.17}$$

Tanto e_i, como R_m son variables aleatorias, tienen una distribución de probabilidad, una media y desviación. Denotemos sus desviaciones estandar como σ_{e_i} y σ_m respectivamente.

Es conveniente que e_i y R_m no estén correlacionados. Esto es

$$cov(e_i, R_m) = E\Big[(e_i - 0)(R_m - \mu_m)\Big] = 0.$$

Si en efecto esto ocurre, la Ecuación (2.17) describe el retorno R_i en términos de variables aleatorias que no influyen una a la otra. Es decir, se describe en términos de una variable intrínseca R_i, y de otra variable que se mueve con el mercado.

Las estimaciones de α_i, β_i y $\sigma_{e_i}^2$ se obtienen de análisis de regresión de series de tiempo. Esta técnica nos garantiza que e_i y R_m no estén correlacionados (al menos en el periodo que se haya usado para hacer el ajuste).

La hipótesis central del modelo de un solo factor es que e_i es independiente de e_j, para cualquier pareja de valores financieros en dicho mercado. Esto es equivalente a $E[e_i e_j] = 0$.

Dicha hipótesis es importante, ya que nos dice que la razón por la que los mercados se mueven juntos, es por un comovimiento conjunto del mercado y no hay nada fuera de este que implique comovimiento entre valores financieros (en la Sección 2.2.4 hablamos qué se puede hacer si no agregamos dicha hipótesis).

El problema es que no hay nada en la manera que calculamos α_i, β_i y σ_{e_i} que fuerce a que $E[e_i e_j] = 0$. Que tan bien funcione el modelo, dependerá en que tan buena (o mala) nuestra aproximación sea.

Hay 3 resultados importantes del modelo de un solo factor, los cuales son:

(1) El retorno medio es, $\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_m$.

(2) La varianza del retorno de la valor financiero es, $\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2$.

(3) La covarianza de retornos entre las valor financieros i y j es, $\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$.

Veamos que el retorno esperado y la varianza de cada valor financiero tienen una parte que no depende del mercado, mientras que la covarianza se debe únicamente del mercado. Esto explica la razón por la que los valores financieros se mueven juntos y esto es por una respuesta común a un movimiento en el mercado. Estos 3 resultados pueden ser derivados de las condiciones que hemos impuesto y no se demostrarán en esta tesis. Para una demostración detallada consultar [4, Capítulos 7 y 8].

Si el modelo se cumple entonces podemos reescribir la Ecuación 2.3 como sigue:

$$\mu_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i + \mu_m \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i. \tag{2.18}$$

Veamos algunas características del modelo. Comencemos definiendo el β_p del portafolio completo como la media ponderada de cada β_i asociado a cada valor financiero en el portafolio. Donde los pesos x_i, son el porcentaje invertido en cada fracción del portafolio. Entonces

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i.$$

Similarmente, definimos α_p del portafolio como

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i.$$

Esto implica que la Ecuación 2.18 puede ser escrita como

$$\mu_P = \alpha_p + \beta_p \mu_m. \tag{2.19}$$

Podemos hacer un análisis similar para la varianza. Recuerde que la varianza de un portafolio se puede escribir de la siguiente manera (ver Ecuación 2.14):

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}.$$

Reemplazando los valor financieros de σ_i y σ_{ij}, obtenemos

$$\sigma_P^2 = \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \beta_i^2 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_i x_j \beta_i \beta_j + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{e_i}^2. \tag{2.20}$$

Observe que si nuestro portafolio se compone de N valores financieros, tenemos que calcular α_i, σ_{e_i} y β_i para cada valor financiero, y agregamos las estimaciones de σ_m y μ_m. Esto en total nos da $3N + 2$ estimaciones. Por el contrario si no se hiciese esta simplificación, tendríamos que calcular σ_i, μ para cada valor financiero y $\binom{N}{2}$ covarianzas, lo que nos da un total de $N(N+1)/2 + 2N = (N^2 + 5N)/2$. Lo anterior es de orden 2 mientras que el método de un solo índice es de orden 1.

Si tomamos al portafolio P como el mercado completo usando $x_i = 1/n$, entonces $\mu_P = \mu_m$. Esto implica, por la Ecuación 2.19 que $\beta_P = 1$, $\alpha_P = 0$. De ello diremos que un valor financiero es más o menos riesgoso que el mercado dependiendo si su beta es mayor o menor que 1.

Veamos más a fondo el riesgo de una valor financiero individual. La Ecuación 2.20 puede ser reescrita como

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{e_i}^2.$$

Reagrupando términos,

$$\sigma_P^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\beta_j\Big)\sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_{e_i}^2.$$

Así que el riesgo del portafolio se puede expresar como;

$$\sigma_P = \beta_p^2\sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_{e_i}^2.$$

Asumamos por un momento que invertimos la misma cantidad en cada valor financiero. Esto convierte a la ecuación anterior en

$$\sigma_P^2 = \beta_p^2\sigma_m^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sigma_{e_i}^2.$$

El segundo término es $1/n$ veces el **riesgo residual** del portafolio. A medida que incrementamos el tamaño de nuestro portafolio el segundo término se va desvaneciendo, incluso para portafolios de un tamaño moderado. (Esto pasa para la mayoría de portafolios incluso si el modelo no es apropiado.)

El riesgo que no podemos eliminar a medida que diversificamos nuestro portafolio, es el riesgo asociado al término β_p. Si el riesgo residual se aproxima a cero, el riesgo del portafolio se aproxima a

$$\sigma_P = \beta_p\sigma_m = \sigma_m\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i.$$

Note que σ_m es igual para cualquier valor financiero que tomemos, mientras que β_i representa el riesgo que contribuye el valor financiero i al portafolio.

Para una valor financiero individual su riesgo está dado por $\beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2$. Dado que el segundo término tiene a afectar poco al portafolio a medida que diversificamos, se le conoce como **riesgo diversificable** o riesgo no sistemático. Por el contrario ya que σ_m^2 es igual para todas las valor financieros, y no podemos eliminar completamente el riesgo, a β_i se le conoce como **riesgo no diversificable** de una valor financiero o riesgo sistemático. Dado que el riesgo diversificable se puede eliminar escogiendo un portafolio suficientemente grande, usualmente β_i se toma como la medida de riesgo de una valor financiero.

2.2.2. Técnicas de estimación de beta

Datos Históricos: Recordemos la Ecuación 2.17 la cual describe el retorno de un valor financiero

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i.$$

Nosotros no podemos medir el verdadero valor financiero de α_i, β_i, e_i. Es más estos valor financieros pueden diferir a lo largo del tiempo. Sin embargo para poder estimar β_i a través de los datos históricos debemos asumir que no cambian a lo largo del tiempo, de esta manera podremos estimar α_i, β_i y σ_{e_i}.

El procedimiento es el siguiente, primero hacemos una gráfica de $R_i(t)$ vs. $R_m(t)$ para obtener un gráfico de dispersión similar al mostrado en la **Figura 2.11**. Para cada unidad de tiempo t (usualmente un mes) graficamos dos puntos, uno que representa el retorno del mercado en esa unidad de tiempo $R_m(t)$ y el otro que representa el retorno del valor financiero S_i, denotado por $R_i(t)$ para esa unidad de tiempo. Repetimos hasta cubrir todo el intervalo de tiempo. Lo último que hay que hacer es encontrar la recta que minimice la suma de la desviación de la distancia vertical desde dicha recta a cada punto. La pendiente de dicha recta será nuestra mejor estimación de β_i y el intercepto será la mejor aproximación de α_i. Formalmente,

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \Big[(R_i(t) - \mu(t))(R_m(t) - \mu_m(t)) \Big]}{\sum_{t=1}^{T} \big[R_m(t) - \mu_m(t) \big]^2}$$

donde $\mu_m(t)$ es la media de retornos del mercado en el intervalo dado, $\mu(t)$ es la media de retornos del valor financiero i en el intervalo de tiempo dado, y $R_i(t)$, $R_m(t)$ representan una medición del retorno del valor financiero y del retorno del mercado (respectivamente) para un tiempo fijo t. Vale la pena resaltar que al método anterior se le conoce comúnmente como el método de mínimos cuadrados de Gauss. De lo anterior α_i se calcula simplemente como

$$\alpha_i = \mu(t) - \beta_i \mu_m(t).$$

Los valor financieros que encontramos de α_i y β_i por medio de la regresión, son estimaciones de los parámetros verdaderos α_i y β_i que existen para el valor financiero. Estas estimaciones están sujetos a error y pueden no ser iguales a los verdaderos parámetros que existen en dicho periodo de tiempo. Además α_i y β_i no son perfectamente estacionarios a lo largo del tiempo. Pueden cambiar a medida que características de la firma cambian. A pesar de todo lo anterior la manera más fácil

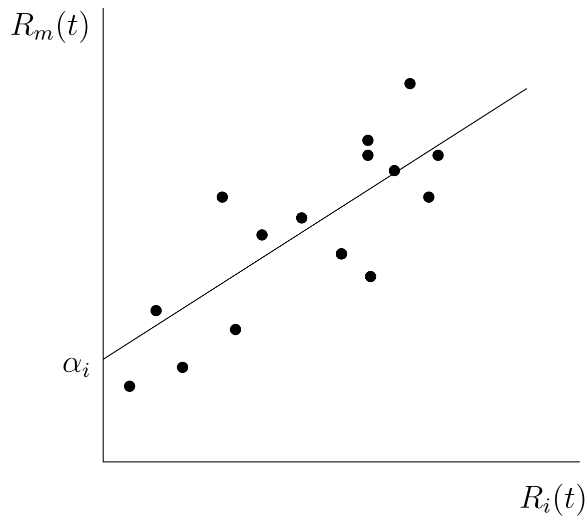

Figura 2.11. Retorno mercado vs. valor financiero. Fuente: [4, Cap. 7].

de estimar el parámetro β_i para el futuro es utilizar un estimado obtenido utilizando regresión lineal sobre periodos pasados.

¿Qué tan acertado son las predicciones de los betas históricos? Bien, eso dependerá de varias cosas, tanto Levy [16] como Blume [15] han hecho análisis extensivos en la relación de los betas a través del tiempo. Resulta interesante que en algunos estudios realizados por los nombrados anteriormente, se ha encontrado que mientras betas en un portafolio grande contienen buena información acerca de los betas[3] futuros, betas en valores financieros individuales tienen mucha menor información acerca de los betas del futuro. Una razón por lo que se da lo anterior es porque el riesgo puede variar. Una segunda razón es que cada periodo se mide con un error aleatorio, lo que significa que mientras mayor el error, menor poder predictivo se tendrá. Estos cambios difieren para cada valor financiero algunos aumentan otros decrecen. Estos errores tendrán a cancelarse y por lo tanto observamos menor cambio en el beta del portafolio que en el de las valor financieros.

Técnica de Blume: Varios autores como Blume y Vasicek han notado que los betas en el periodo futuro tienen a ser más cercanos a 1 que los betas obtenidos de datos históricos (ver [15] y [17]). El siguiente paso lógico es modificar los betas pasados para tratar de obtener esta tendencia. Blume [15] fue el primero en proponer un esquema para hacerlo. Él corrigió betas pasados al medir directamente este ajuste hacia 1 y asumiendo que el ajuste en un periodo es un buen estimado del ajuste del siguiente periodo.

[3] Aquí estamos hablando de las estimaciones de beta, los verdaderos valores financieros no se conocen.

Veamos como funciona esto. Podemos calcular los betas del periodo 1948-1954. Podemos luego calcular los betas de los mismos valor financieros para el periodo 1955-1961. Luego podemos regresar los betas del último periodo contra los betas del periodo anterior a este. Cuando Blume hizo esto para los periodos mencionados obtuvo

$$\beta_{i2} = 0.343 + 0.677\beta_{i1}$$

donde β_{i2} es el beta del último periodo (1955-1961) y β_{i1} del periodo anterior a este (1948-1954).

Ahora, supongamos que queremos predecir el beta para cualquier valor financiero en el periodo 1962-1968. Entonces calculamos (via análisis de regresión) su beta para los años 1955-1961. Para saber como se debe modificar este beta, lo sustituimos por β_{i1} en la ecuación. Luego calculamos β_{i2} en la ecuación ya mencionada y lo usamos como predicción.

Técnica de Vasicek: Como mencionamos en la subsección anterior, se ha observado con evidencia empírica que las estimaciones de beta en el periodo de predicción tienden a estar más cerca de 1 que los betas obtenidos por los datos históricos. La primera manera de hacer el ajuste es ajustar cada beta hacia el beta promedio. Por ejemplo, tomando la primera mitad de los datos históricos y sumándoles la mitad del beta promedio mueve cada beta histórico a la mitad del promedio.[4]

Es deseado no ajustar todos los valores financieros en la misma medida hacia la media, en vez de eso, queremos ajustar dependiendo de la incertidumbre (el error de muestreo) de cada beta. Mientras más grande sea el error de muestro, mayor debe ser el ajuste. Vasicek [17] propone el siguiente peso para cada beta que incorpora las propiedades ya mencionadas:

$$\frac{\sigma^2_{\mu(\beta_1)}}{\sigma^2_{\mu(\beta_1)} + \sigma^2_{\beta_{i1}}} \text{ para } \beta_{i1} \quad \mathbf{y} \quad \frac{\sigma_{\beta^2_{i1}}}{\sigma^2_{\mu(\beta_1)} + \sigma^2_{\beta_{i1}}} \text{ para } \mu(\beta_1).$$

Aquí, $\mu(\beta_1)$ es la media de las betas, en el periodo histórico (periodo 1). Luego $\sigma^2_{\mu(\beta_1)}$ es la varianza de la distribución de las betas sobre la muestra de valores financieros. La suma de cuánto varía cada valor respecto de la media de valores financieros. Tenemos que β_{i1} es el beta estimado del valor financiero S_i en el periodo 1 y $\sigma^2_{\beta_{i1}}$ es el cuadrado del error estándar del beta de la valor financiero i en el periodo 1, i.e. cuánto varían los β_i respecto del valor financiero estimado, en el periodo que se tomó para hacer el ajuste.

[4]Esta técnica es bastante usada, por ejemplo por Merrill Lynch

Note que los pesos sumados dan 1 y que, a mayor incertidumbre se tenga sobre un beta estimado, menor peso se pondrá sobre él. El beta predicho para el periodo siguiente de la valor financiero i es:

$$\beta_{i2} = \frac{\sigma_{\beta_{i1}^2}}{\sigma^2_{\mu(\beta_1)} + \sigma^2_{\beta_{i1}}}\mu(\beta_1) + \frac{\sigma^2_{\mu(\beta_1)}}{\sigma^2_{\mu(\beta_1)} + \sigma^2_{\beta_{i1}}}\beta_{i1}.$$

El procedimiento ajusta observaciones con largos errores estándar más hacia la media, en contraste con observaciones con pequeños errores estándar. Vasicek nos muestra que esta técnica es bayesiana. Aunque esta técnica no predice una tendencia de los betas como lo hace la técnica de Blume, sufre de su propia fuente potencial de sesgo. En esta técnica el peso puesto en el beta del valor financiero, relativo al peso puesto en la media de la muestra, está inversamente relacionado con el error estándar de la estimación del beta del valor financiero. Dado que los betas que tienen mayor valor, tendrán errores estándares más grandes asociados respecto a los betas con menor estimación, esto implica, que los betas con mayor estimación bajarán de valor en un porcentaje mayor que los betas con menor estimación. Esto produce una subestimación del beta futuro respecto al beta promedio en la muestra de valores financieros que se usó para estimar los betas. Si no hay ninguna razón para creer que los valores financieros van a decrecer continuamente, esta estimación se puede mejorar al ajustar todos los betas hacia arriba de tal manera que que tengan la misma media que tenían en el periodo histórico.

Klemosky y Martin [18], encontraron ambas técnicas (Blume y Vasicek) producen mejores predicciones de las futuras betas. El error cuadrático medio al predecir las betas fue en varias ocasiones cortado a la mitad al utilizar una de las técnicas. También encontraron que la técnica de Vasicek tiene una pequeña tendencia de superar a la técnica de Blume. Sin embargo, las diferencias fueron pequeñas y el orden varia en diferentes periodos de tiempo.

Para ir finalizando esta subsección, recordemos que para poder aplicar la teoría de Markowitz uno debe ser capaz de obtener correlaciones, varianzas y retornos. Las correlaciones entre valores financieros, (asumiendo que las hipótesis del modelo de un solo factor son ciertas) se pueden expresar como una función de beta:

$$\rho_{ij} = \frac{\beta_i \beta_j \sigma^2_m}{\sigma_i \sigma_j}.$$

Otra manera de medir la utilidad de las betas, al mismo tiempo que medimos el rendimiento al predecir futuras betas, es ver qué tan bien predicen la futura estructura de correlación entre valores financieros.

2.2.3. Predicciones de los coeficientes de correlación

Eltor, Gruber, y Ulrich [23] han comparado la habilidad de los siguientes modelos de predecir la estructura de correlaciones entre valores financieros:

(1) Usar la matriz de correlaciones histórica.

(2) Predicciones de la matriz de correlaciones, preparadas al estimar los betas utilizando el periodo histórico anterior.

(3) Predicciones de la matriz de correlaciones, preparadas al estimar los betas utilizando dos periodos anteriores y actualizando utilizando la técnica de Blume.

(4) Predicciones de la matriz de correlaciones, preparadas de la misma manera que el tercer modelo pero actualizadas via la técnica Bayesiana de Vasicek.

Quizás lo más sorprendente del estudio, es que se encontró que la primera técnica tiene peor rendimiento que las otras 3, con un nivel de significancia estadística. Esto demuestra que parte de la estructura de las correlaciones observada no capturada por el modelo de un solo índice representa ruido aleatorio. El punto es que el método de un solo factor que se supone simplifica el proceso y por lo tanto pierde información en realidad hace un mejor trabajo prediciendo que utilizar el conjunto completo de información.

Por el contrario la comparación entre los tres métodos es un poco ambigua. Rankear los 3 métodos dependerá si hacemos el ajuste a la predicción media. Como no es recomendado hacerlo, el método Bayesiano es el que mejor funciona.

Se puede decir más acerca del método y otras modificaciones que se pueden hacer para capturar mayor información. Pero nosotros dejaremos el análisis hasta este punto (ver [4] para más información).

2.2.4. Modelo de múltiples factores

Se ha encontrado evidencia que hay influencia más haya del movimiento del mercado, que causan que los valores financieros se muevan juntos. Tan temprano como 1966, King [24] encontró evidencia de la influencia de la industria. Dos diferentes esquemas se han planteado para lidiar con estas influencias adicionales, el modelo Multi-índice o de múltiples factores general y el modelo de índice de la industria.

Fuentes adicionales de covarianza entre valores financieros se pueden introducir a las ecuaciones de riesgo y retorno al incluir estas influencias adicionales a la ecuación general del retorno. Se hace la hipótesis que el retorno de cualquier valor financiero es una función del retorno del mercado, cambios en los niveles de las tasas de interés, y un conjunto de índices de la industria. Si R_i es el retorno del valor financiero i, entonces el retorno en el valor financiero i se puede relacionar a las influencias que afectan su retorno de la siguiente manera:

$$R_i = a_i^* + b_{i1}^* I_1^* + b_{i2}^* I_2^* + \cdots + b_{iL}^* I_L^* + c_i.$$

En esta ecuación I_j^* es el nivel actual del índice j, y b_{ji}^* es una medida de la respuesta del retorno del valor financiero i respecto a los cambios del índice j. Así que b_{ij}^* tiene el mismo significado que β_i en el caso del modelo de un solo factor. Como en el caso del modelo de un solo factor c_i puede ser separado en dos partes: a_i^* (el valor financiero esperado del retorno único) y c_i (la componente aleatoria del retorno único; tiene media 0 y varianza σ_{ci}^2).

Aunque el modelo se puede utilizar tal y como se presenta, el modelo tiene propiedades matemáticas particulares si los índices están no correlacionados. Esto nos permite simplificar el cálculo del riesgo y la selección del portafolio. Afortunadamente existen métodos para convertir cualquier conjunto de índices correlacionados en un conjunto de índices no correlacionados. Simplificamos la ecuación anterior como:

$$R_i = a_i + b_{i1} I_1 + b_{i2} I_2 + \cdots + b_{iL} I_L + c_i \tag{2.21}$$

Los nuevos I_j cumplen que no están correlacionados (ver [4, Apéndice A, Cap. 8 páginas 169 y 170] para el procedimiento completo). Note que los asteriscos se han eliminado para denotar que los coeficientes y variables no son necesariamente las mismas que los anteriores. No solamente es conveniente hacer a los índices no correlacionados entre ellos, sino también conviene que el residuo sea no correlacionado con cada índice. Formalmente, esto implica $E[c_i(I_j - \mu(I_j))] = 0$ para todo j (recordemos que $\mu(I_j)$ es la media del índice I_j). El modelo estándar de múltiples factores (o índices) queda entonces descrito por la Ecuación (2.21).

El modelo tiene las siguientes propiedades. Por definición:

(1) La varianza residual del valor financiero financiero i es igual a σ_{ci}^2 donde $i = 1, 2, 3, \ldots, N$.

(2) La varianza del índice j es igual a σ_{Ij}^2, donde $j = 1, 2, \ldots, N$.

Por construcción:

(1) La media de c_i es igual a $\mu(c_i) = 0$ para todos los valores financieros, donde $i = 1, 2, \ldots, N$.

(2) La covarianza entre índices j y k es igual a $E[(I_j - \mu(I_j))(I_k - \mu(I_k))]$.

(3) La covarianza entre los residuos para el valor financiero i y el índice j es igual a $E[c_i(I_j - \mu(I_j))] = 0$ para todos los valores financieros y todos los índices, donde $i = 1, 2, \ldots, N$ y $j = 1, 2, \ldots, L$.

Por suposiciones:

(1) La covarianza entre c_j y c_i es 0 ($E(c_i c_j) = 0$) para todos los valores financieros donde $i = 1, 2, \ldots, N$ y $j = 1, 2, \ldots, N$ ($j \neq i$).

La hipótesis del modelo de múltiples factores es que $E(c_i c_j) = 0$. Esta hipótesis implica que la única razón por la que los valores financieros se mueven juntos es por un comovimiento común junto con el conjunto de índices que se hayan especificado. No hay otro factor más haya de estos índices que expliquen el comovimiento entre dos valores financieros. No hay nada en la estimación de este modelo que fuerce esto a ser verdad. Similar al modelo de un solo índice, que tan buen desempeño tenga el modelo, dependerá de qué tan buen la aproximación sea. Esto dependerá de que tan bien los índices que se han seleccionado para representar el comovimiento, realmente capturan el patrón de comovimiento entre valores financieros. Podemos calcular el retorno, varianza y covarianza de los valores financieros, como se presenta a continuación:

(1) El retorno esperado del valor financiero S_i es:

$$\mu_i = a_i + b_{i1}\mu(I_1) + b_{i2}\mu(I_2) + \cdots + b_{iL}\mu(I_L). \tag{2.22}$$

(2) La varianza del retorno es:

$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2\sigma_{i1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{i2}^2 + \cdots + b_{iL}^2\sigma_{iL}^2 + \sigma_{ci}^2. \tag{2.23}$$

(3) La covarianza entre los valores financieros S_i y j se calcula como:

$$\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}\sigma_{I_1}^2 + b_{i2}b_{j2}\sigma_{I_2}^2 + \cdots + b_{iL}b_{jL}\sigma_{I_L}^2. \tag{2.24}$$

De las ecuaciones anteriores podemos ver que para hacer las estimaciones de retorno, varianza y covarianza, necesitamos estimaciones de a_i para cada valor financiero (N estimaciones), b_{ik} para cada valor financiero con cada índice (LN estimaciones), un estimado de σ_{ci}^2 para cada valor financiero (N estimaciones) y un estimado de la media $\mu(I_j)$ (L estimaciones) y varianza σ_{ij}^2 de cada índice (L estimaciones). Esto es un total de $2N + 2L + LN$ estimaciones. Dicho número de estimaciones es mayor que el número de estimaciones requeridas para el modelo de un solo factor, pero considerablemente menor al número de estimaciones si no se aplica ninguno de los dos modelos. La importancia del modelo de múltiples factores no radica en su capacidad de calcular retornos y varianzas. Más bien, será utilizado para calcular los coeficientes de correlacciones.

Existe un modelos diferentes como el Modelo de Factores Industriales o mezclas de diferentes modelos, pero para los propósitos de esta tesis dichos modelos serán ignorados. Si desea conocer más se sugiere leer [4, Capítulos 7 y 8].

2.3. Críticas y modificaciones al modelo

La teoría moderna de portafolios existe desde la década de los 60 con el artículo escrito por Markowitz [1]. Muchos de sus principios aún se usan como lo son el concepto de diversificación y frontera efectiva. Sin embargo, la teoría no está exenta de críticas y problemas. Algunos problemas serán tratados más adelante y otros solo se mencionará bibliografía cómo se pueden afrontar. Las cuatro principales críticas que se le hacen al modelo son:

(i) La manera como se mide el riego pone en un mismo nivel a las subidas volátiles que las bajadas volátiles.

(ii) El modelo es bastante limitado. El modelo no toma en cuenta impuestos, inflación, comisiones, etc.

(iii) El modelo no siempre es acertado. Esto incluye; que los datos históricos no siempre son suficientes para predecir el futuro, que los inversionistas son agentes irracionales, y que cuando un mercado entra en crisis todos los valores financieros se devaluan.

(iv) El modelo no dice nada acerca de cómo medir los retornos y las varianzas.

Problemas (i) y (iv) de la teoría son tratados en este trabajo. En la Sección 2.3.3 hablamos de modificaciones para tomar en cuenta la crítica (i) y en la Sección 2.4

hablamos más acerca del problema (iv). Problemas (ii) y (iii) salen de los objetivos de este trabajo y no son tratados. Algunas soluciones que se han planteado para el problema (iii) es la aplicación de algoritmos de aprendizaje para predecir mejor el comportamiento del mercado y la creación de una rama nueva llamada **finanzas conductual** la cual intenta entender el comportamiento de los seres humanos en los mercados.

2.3.1. Oblicuidad

Esta sección está basada en el artículo publicado por los autores Yamakazi y Konno [8]. Como lo mencionan los autores, el tercer momento resulta importante cuando ninguna de las siguientes se cumple:

(i) La tasa de los retorno de los valores financieros sigue una distribución normal multivariada.

(ii) La utilidad del inversor es una función de la media y la varianza de las tasas de los retornos o puede ser aproximado por una función cuadrática de las tasas de los retornos.

Sin embargo hay alta evidencia que las dos suposiciones anteriores no siempre son aplicables. Ya sea porque los valores financieros no siguen una distribución normal o consideremos siguiente escenario. Vea la **Figura 2.12**. Ambas tienen la misma media, varianza por lo que serían iguales bajo el modelo estándar. Sin embargo, casi todos los inversionistas preferirían el portafolio cuya distribución es la gráfica morada. Esta diferencia se debe al tercer momento. Invertiremos un poco de tiempo explicando en las siguientes subsecciones como introducir el tercer momento (también llamada oblicuidad) a nuestros modelos.

2.3.2. Media, varianza y oblicuidad

Al modelo estándar agregamos la definición de utilidad (en economía la utilidad usualmente se conoce como una medida de «felicidad», esta función explica el comportamiento de los seres humanos en diferentes situaciones). Esta es una función que depende de los retornos, *i.e.*

$$U = U[R_P].$$

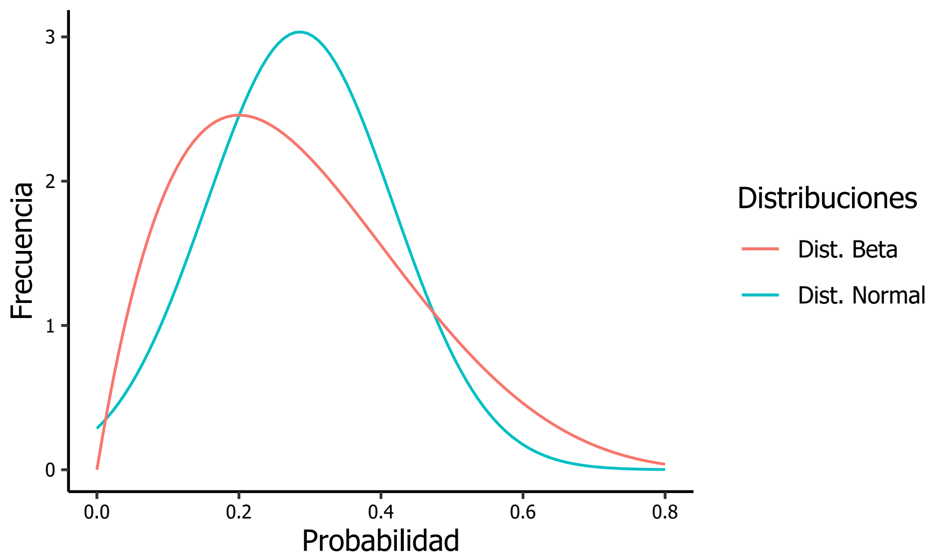

Figura 2.12. Dos distribuciones misma varianza y media, diferente oblicuidad. Fuente: Elaboración propia.

Asumamos que el inversor trata de maximizar la utilidad esperada $E[U]$ de U. Por lo que queremos resolver el siguiente problema:

$$\text{maximizar } E[U[R_P]]$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0.$$

Vamos a asumir que U se puede aproximar como una expansión de polinomio de Taylor de tercer grado alrededor de la media μ_P:

$$\begin{aligned} U(R_P) = U(\mu_p) + U^{(1)}(\mu_P)[R_P - \mu_P] + \frac{1}{2}U^{(2)}(\mu_P)[R_P - \mu_P]^2 \\ + \frac{1}{6}U^{(3)}(\mu_P)[R_P - \mu_P]^3. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Si la distribución de R_P es simétrica alrededor de μ_P entonces el último término de la ecuación anterior desaparece y regresamos al modelo estándar. Como mencionamos antes, estamos asumiendo que este no es el caso y el tercer momento no es ignorable. Se asume usualmente que el inversor es **adverso al riesgo** y por lo tanto la función de utilidad U es una función no decreciente y cóncava. Los autores Konno y Yamakazi también argumentan que las derivadas tienen una estructura de signos alternantes, esto es,

$$U^{(k)}U^{(k+1)} \leq 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

donde $U^{(k)}$ es la k-ava derivada de U. Por lo tanto asumimos lo siguiente

$$U^{(2)} \leq 0,\ U^{(3)} \geq 0.$$

Sea

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= E[(R_P - \mu_P)^2], \\ \gamma_P &= E[(R_P - \mu_P)^3], \end{aligned}$$

e introducimos el modelo MVS (por sus siglas en inglés *mean-variance-skewness*):

$$\begin{aligned} \text{maximizar } & \gamma_P[R_P] \\ \text{sujeto a } & \mu_P = E[R_P], \\ & \mathrm{Var}(R_P) = \sigma_P^2, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde μ_P y σ_P son parámetros dados. Además sea $x^*(\mu_P, \sigma_P)$ la solución óptima y sea $\gamma_P^*(\mu_P, \sigma_P)$ el valor financiero máximo asociado de γ_P. Entonces tenemos

$$E[U[R_P]] = U(\mu_P) + \frac{1}{2}U^{(2)}(\mu_P)\sigma^2 + \frac{1}{6}U^{(3)}(\mu_P)\gamma_P^*(\mu_P, \sigma_P),$$

cuando (μ_P, σ_P) son dados. Por lo que acabamos de deducir, seremos capaces de obtener un valor aproximado de $E[U[R_P]]$ si podemos calcular la frontera efectiva de $\gamma_P^*(\mu_P, \sigma_P)$.

Definamos r_j el retorno del valor financiero S_j. Sea

$$\begin{aligned} \mu_j &= E[r_j], \\ \sigma_{ij} &= E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)] \\ \gamma_{ijk} &= E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)(r_k - \mu_k)]. \end{aligned}$$

entonces el problema (2.26) puede ser representado como

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} x_i x_j x_k$$

$$
\begin{aligned}
\text{sujeto a } & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j = \sigma_P^2, \\
& \sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j = \mu_P, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Lamentablemente, tanto el problema anterior como el planteado en (2.26) son problemas de maximización no cóncavo. Por lo que su máximo global no puede ser calculado por los algoritmos de programación no lineales que se conocen actualmente. Además es prácticamente imposible calcular tanto γ_{ijk} como σ_{ij} cuando n llega a los miles. Estaremos buscando algún tipo de aproximación para poder resolver el problema (2.26). Esta aproximación es tratada en la siguiente sección.

2.3.3. Modelo Mikowski, métrica absoluta desviación y oblicuidad

Al modelo anterior vamos a aplicarle ciertas modificaciones para que podamos resolverlo. Sea

$$
g(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \geq 0, \\ u^3, & \text{si } u < 0, \end{cases}
$$

y definamos el **tercer semi-momento menor** de una variable aleatoria X como:

$$
\gamma\_(X) = E[g(X - E[X])].
$$

En vez de maximizar el tercer momento, vamos a maximizar el tercer semi-momento menor del radio de los retornos. Además reemplazaremos la desviación estándar por la desviación absoluta (vea [8, Sección 3]) definida como $W(R_P) = E[|R_P - E[R_P]|]$. Obtenemos el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar } & \gamma\_(X) \\
\text{sujeto a } & W(R_P) \leq w, \\
& E[R_P] = \mu_P, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Aquí w es una medida del riesgo que se desea tomar (un parámetro escogido por el que desea construir el portafolio). Sea x^* una solución óptima al problema anterior. Entonces esperamos que el portafolio x^* tenga una distribución con mayor area a la derecha de la media. Por lo tanto esperamos que tenga un tercer momento alto, sino es que el máximo posible. Además, al maximizar el tercer semi-momento ayuda a tener menor probabilidad de una gran pérdida abajo del retorno esperado. Es fácil notar que (2.29) es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & E\Big[g\Big(\sum_{j=1}^{n}(r_j-\mu_j)x_j\Big)\Big] \\ \text{sujeto a } & W(\sum_{j=1}^{n} r_j x) \leq w, \\ & \sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j = \mu_P, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

La función objetivo de este problema es cóncava, pero no es fácil obtener una solución óptima a este problema si n es muy grande. Por lo que estaremos reemplazando g por una función cóncava a trozos G dada por:

$$G(u) = -|u-\rho_1|\_ - \alpha|u-\rho_2|\_,$$

donde $\alpha > 0$, ρ_1, ρ_2 son parámetros adicionales que estamos introduciendo al modelo y $|\cdot|\_$ la definimos como sigue:

$$|v|\_ = \begin{cases} 0, & \text{si } v \geq 0, \\ -v, & \text{si } v < 0. \end{cases}$$

Obtenemos por lo tanto el siguiente problema:

$$\text{minimizar } E\Big[|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \rho_1|\_\Big] + \alpha E\Big[|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \rho_2|\_\Big]$$

$$
\begin{aligned}
\text{sujeto a } W(\sum_{j=1}^{n} r_j x) &\leq w, \\
\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j &= \mu_P, \\
\sum_{i=1}^{n} x_i &= 1,\ x_i \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Podemos encontrar una representación del problema anterior utilizando datos históricos. Sea r_{jt}, el retorno en del valor financiero financiero j en el periodo t. Por lo que $t = 1, \ldots, T$ y $j = 1, \ldots, n$. Entonces

$$
E\Big[|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \rho_1|_{-}\Big] = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j - \rho_1|_{-},
$$

$$
E\Big[|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \rho_2|_{-}\Big] = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j - \rho_2|_{-}.
$$

Podemos emplear técnicas conocidas para derivar un problema de programación lineal equivalente:

$$
\text{minimizar } \frac{1}{T-1}\Big(\sum_{t=1}^{T} u_t + \alpha \sum_{t=1}^{T} v_t\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{sujeto a } u_t + \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j &\geq \rho_1,\ t = 1, \ldots, T, \\
v_t + \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j &\geq \rho_2,\ t = 1, \ldots, T, \\
\xi_t - \eta_t - \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j &= \mu_P,\ t = 1, \ldots, T, \\
\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j &= \mu_P, \\
\sum_{t=1}^{T} (\xi_t + \eta_t) &\leq w, \\
\sum_{i=1}^{n} x_i &= 1,\ x_i \geq 0\, j = 1, \ldots, n, \\
u_t \geq 0,\ v_t \geq 0, \xi_t \geq 0, \eta_t &\geq 0,\ t = 1, \ldots, T.
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

Este problema consiste de $3T+3$ restricciones y $4T+n$ variables. Cuando $T=60$ y $n=1,000$, el problema consiste de 183 restricciones y 1240 variables. Problemas lineales de este tamaño pueden ser resueltos rápidamente por el algoritmo simplex [19, Capítulo 3]. Además, el problema con miles de valor financiero financieros también puede ser resuelto sin mayor problema.

2.4. Consideraciones adicionales

Como se menciona en [4, Capítulo 10], para poder implementar la teoría moderna de portafolios, debemos ser capaces de estimar futuros retornos, varianzas y covarianzas. De todas éstas, la más difícil de estimar son los retornos futuros. La valuación de las acciones de una compañía, así como toda la bolsa de valores financieros, depende de las expectativas de todos los participantes. Los retornos futuros son dependientes de cómo varían estas expectativas con el tiempo. Como estas expectativas no se pueden observar, y hay muchas opciones, es difícil predecir el cambio en las expectativas de todos. No hay una fórmula mágica. En este capítulo discutimos algunas técnicas propuestas por [4, Capítulo 10] y mencionaremos la utilización de algoritmos de *machine learning* para predecir información requerida por nuestros modelos.

2.4.1. Asignación de valor financieros agregados

Este conglomerado de técnicas tratan el problema de cuánto invertir en cada categoría de valores financieros. Por ejemplo, ¿en qué proporción un inversor debe dividir sus valor financiero financieros entre letras de tesoro, bienes raíces, valores financieros internacionales? Como en este trabajo nos enfocamos solamente en la bolsa de valores financieros americana, no hablaremos mucho acerca de esta técnica.

2.4.2. Market timing o asignación dinámica de valores financieros

Es claro (y también demostrado por [26], [27] y [25]) como se puede hacer dinero si uno compra valor financiero antes que tengan largo retornos positivos y venderlos antes que sean negativos. El precio de los valores financieros depende de las creencias promedios de los inversores (donde cada dolar invertido genera un voto). Los estudios que se han realizado (ver [20], [21] y [22]) apuntan a que hay poca evidencia que supervisores de valores financieros (las personas manejan las cuentas de los fondos de inversiones) puedan efectivamente predecir las caídas o subidas repentinas.

2.4.3. Estimando los retornos esperados

Para poder estimar los retornos esperados que utilizaremos como entradas para nuestros modelos, primero debemos ser capaces de determinar los retornos medios de los valores financieros. Una manera de hacerlo es usar el rendimiento histórico en largos periodos de una clase de valores financieros como entrada. La información sobre el rendimiento histórico de varias clases de valores financieros, se hicieron públicos a través de Ibboston y Singuefield (1976) y posteriormente por los asociados de Ibboston. Esta información hizo posible calcular los retornos de los capitales estadounidenses desde 1926 hasta el 2022. Cuando el retorno de un mercado es constante a través del tiempo, mientras más largo es la información histórica, más preciso es estimar el retorno medio de la serie. Sin embargo, esta hipótesis no se puede asumir sobre largos periodos de guerra y paz, cambios tecnológicos y variaciones microeconómicas que pueden afectar el rendimiento de un mercado.

2.4.4. Modelos bayesianos

La estimación de los retornos esperados de bases de datos, sin importar el tiempo, siempre tiene el problema que la media se estima con un error estadístico. Algunos investigadores han atacado este problema utilizando métodos bayesianos. Un punto de partida es que la distribución del siguiente periodo incluye incertidumbre no solo acerca de la posible desviación de los retornos sobre los valores financieros esperados, sino también se desvían de sí mismos. Como bien mencionan Klein y Bawa (1976), el hecho que los retornos esperados no son conocidos, efectivamente agrega al riesgo que afrontan los inversores y esto hace que escojan de manera más conservadora. Este riesgo adicional se conoce como el **riesgo de estimación**. Los métodos bayesianos usan información *a priori* de los retornos esperados como puntos de partida para estimar los retornos esperados utilizando datos históricos. En su forma más básica, una estimación bayesiana comienza con los *prioris* acerca del valor financiero a estimar, en este caso, el retorno medio de un tipo de valor financiero. Este *priori* se actualiza utilizando datos empíricos, y el dato posterior, usado en el análisis de la varianza media, es una combinación del *piori* con la media de los datos empíricos. Este proceso «encoje» la media estimada hacia el *priori*.

2.4.5. Machine learning

Como mencionan Rohit y Kumkum Garg [6], «la predicción del mercado de valores financieros es una tarea difícil de realizar. Esto se debe a muchas incertidumbres involucradas en el movimiento del mercado. Muchos factores interactúan en el movimiento del mercado. Eventos políticos, condiciones económicas, tratados y expectativas. Predecir el movimiento del mercado es entonces una tarea difícil.»

Los métodos de *machine learning* buscan derivar patrones útiles de un conjunto de datos dado. Los conjuntos de datos son muy variados, pueden ser datos estructurados, no estructurados, videos, documentos de texto, imágenes, entre otros. El poder de estos algoritmos radica en la amplia cantidad de aplicaciones que existen y la flexibilidad que tienen. Encontramos aplicaciones como sistemas de recomendación basados en nuestras previas búsquedas hasta predecir variables financieras. Es por esta flexibilidad que el campo ha crecido en diferentes dimensiones y su importancia ha impactado en la industria.

Particularmente en el área de finanzas Kranthi Sai [7] menciona: «que en años recientes, el incremento de la utilización de métodos de *machine learning* en varias industrias ha inspirado a muchos inversores a aplicar técnicas de *machine learning* a este campo, y algunas han producido resultados prometedores.... Han habido numerosos intentos de predecir el mercado de valor financieros utilizando *machine learning*. El enfoque de estos proyectos varía en los siguientes tres aspectos:

(1) El cambio del precio puede ser a corto plazo (menos de un minuto), mediano plazo(mañana o en algunos días), o largo plaza (meses después).

(2) La cantidad de valores financiero financieros se puede limitar a solo 10, a alguna clase de valores financieros en particular, o a todos los valor financieros en general.

(3) Las predicciones pueden variar a tendencias económicas y noticias globales, a características de la compañía o simplemente limitarse a la tendencia de un valor financiero a través del tiempo.»

Terminamos este capítulo con un comentario, ya que el propósito de este trabajo es dar una introducción a la teoría moderna de portafolios, no estaremos implementando métodos para estimar retornos esperados. Nos centraremos en implementar la parte de selección del portafolio y tomaremos todo lo demás como dado o en caso sea de suma importancia, estaremos utilizando modelos lineales simples para proponer retornos esperados. El problema de predecir las entradas que requiere el modelos es amplio y se sigue publicando al respecto, por lo que se espera esta sección haya servido como una muy breve introducción hacia dónde se puede continuar esta investigación.

3. SELECCIONANDO EL PORTAFOLIO ÓPTIMO

Este capítulo se divide en dos partes, aplicación y código. En la primera parte veremos como aplicar de manera concreta la teoría que se ha desarrollado hasta el momento. La segunda parte será el apoyo a la primera y servirá para escribir en código lo que se desarrolle en la primera parte. Esta parte está basado en [4, Capítulo 9]

Para hacer la aplicación, utilizaremos el método de un Solo Factor ya que este posee propiedades deseadas (ver capítulo 2.2.1). Para hacer la selección del portafolio, necesitamos un mecanismo de ordenamiento. En este caso, qué tan deseado es un valor, está altamente relacionado con el **exceso del retorno**. El exceso de retorno es la diferencia entre el retorno esperado del valor y algún valor financiero con riesgo 0 (como podría ser una letra del tesoro). El exceso de retorno es una medida del retorno adicional de un valor, por unidad de riesgo no diversificable.

Formalmente, podemos definir el índice de exceso de retorno respecto a la tasa beta para ordenar los valores financieros como sigue:

$$\frac{\mu_i - R_F}{\beta_i}$$

donde μ_i es el retorno esperado del valor financiero S_i, R_F es el retorno del valor financiero de riesgo 0 y β_i es el cambio esperado en la tasa del retorno en el valor financiero S_i asociado a 1 % cambio en el retorno del mercado.

Cuando asumimos que el Método de un Solo Índice representa la estructura de la covarianza del retorno de los valores financieros, entonces la selección del portafolio se hace de la siguiente manera:

(1) Encontrar la tasa de exceso de retorno respecto a la tasa de beta para cada valor financiero y ordenarlas de mayor a menor.

(2) El portafolio óptimo consiste en invertir en todos los valores cuyo $\frac{\mu_i - R_F}{\beta_i}$ sea mayor a un punto de corte particular C^*. Este valor se escoge de tal manera que tenga significancia económica.

¿Cómo calcular el punto de corte C^*?

El valor de C^* se determina asumiendo que hay diferente número de valores financieros en el portafolio óptimo. Designe C_i como candidato de C^*. El valor de C_i es calculado cuando se asumen que i valores financieros pertenecen al portafolio óptimo. Debido a que los valores financieros están ordenadas, tomamos los primeros i (los de mayor retorno respecto de riesgo) valores financieros para formar a C_i. El portafolio óptimo es el único portafolio tal que al seleccionar C_i como punto de corte, selecciona solamente los valores utilizados para construirlo, y existe solamente un único C_i que cumpla dicha propiedad.

Definimos a C_i como:

$$C_i = \frac{\sigma_m^2 \sum_{j=1}^{i} \frac{(\mu_j - R_F)\beta_j}{\sigma_{ej}^2}}{1 + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{i} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{ej}^2}} \tag{3.1}$$

donde σ_m^2 es la varianza del índice del mercado y σ_{ej} es el error no sistemático *i.e.* la varianza del movimiento del mercado no asociado al índice del mercado.

La expresión anterior puede ser simplificada de la siguiente forma:

$$C_i = \frac{\beta_{ip}(\mu_p - R_F)}{\beta_i} \tag{3.2}$$

donde β_{ip} es el cambio esperado en la tasa del retorno, asociado a un cambio del 1 % en el retorno del portafolio óptimo y r_p es el retorno esperado del portafolio.

Las variables β_{ip} y r_p no se conocen hasta que se tenga el portafolio óptimo, por lo que la ecuación 3.2 no puede ser utilizada para determinar el portafolio óptimo. Sin embargo, dicha expresión puede ser utilizada para entender a C_i. Recordemos que un valor financiero será agregado si:

$$\frac{\mu_i - R_F}{\beta_i} > C_i$$

Al reagrupar y sustituir en la ecuación 3.2 se obtiene:

$$(\mu_i - R_F) > \beta_{ip}(\mu_p - R_F).$$

El lado derecho no es más que el exceso esperado de un valor financiero particular basado únicamente en el rendimiento del portafolio. El término de la izquierda es el análisis estimado del retorno esperado de un valor financiero particular. Así pues, si el análisis de un valor financiero particular nos lleva a creer que su rendimiento será mejor a lo esperado, basado en la relación del portafolio óptimo, deberá ser agregado al portafolio.

3.1. Construyendo el portafolio óptimo

Una vez se hayan determinado los valores financieros que van en el portafolio óptimo, lo siguiente es determinar una manera de calcular el porcentaje a invertir en cada uno. El porcentaje invertido en cada valor financiero es

$$x_i = \frac{Z_i}{\sum\limits_{\text{incluidas}} Z_j}$$

donde

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ei}^2}\left(\frac{\mu_i - R_F}{\beta_i} - C^*\right). \tag{3.3}$$

La segunda expresión determina la inversión relativa en cada valor financiero, mientras que la primera simplemente escala los pesos de cada valor fianciero para que la suma sea 1, y por lo tanto, asegura que se invierta el presupuesto completo. Note que la varianza residual en cada valor financiero σ_{ei}^2 juega un rol importante en determinar cuánto invertir en cada valor financiero.

Hasta este punto, hemos asumido que todas las betas son positivas. Hay razones económicas que sugiere que los betas deben ser todos positivos. Sin embargo, como nos muestran Elton, Gruber y Padberg [28], los betas negativos (y ceros) son fácilmente añadidos en el análisis.

3.2. Caso

Para finalizar esta tesis trabajaremos un caso concreto en el cual aplicaremos la teoría vista hasta ahora. En base a este caso daremos nuestras conclusiones. El caso es el siguiente: supongamos que una persona particular dispone de $1000.00 para invertir. Desea gastar todo el presupuesto en valores de 10 compañías de tecnología que ha seleccionado. ¿Cuál sería el portafolio óptimo basado en estas características?

Bien lo primero que necesitamos es información de los activos. En este caso por simplicidad se han seleccionado 10 compañías de tecnología del índice S&P500. Supondremos que la inversión se hizo el día 1 de enero de 2021, luego dejamos que pasara el tiempo y evaluaremos los resultados que se hubiesen obtenido después de un año desde la fecha de inversión.

Para todo este análisis se va a utilizar el programa estadístico R y como compilador el editor R-Studio. Se asume que el lector está familiarizado con los comandos básicos de dicho programa. La mayoría de comandos estarán comentados.

3.2.1. Limpieza y formateo

Lo primero que debemos hacer es descargar la información y dejarla en el formato que deseamos. Se utilizarán los datos históricos del año 2020 de las compañías Apple, Starbucks, Microsoft, Meta, Amazon, Tesla, NVIDIA, Alphabet, Verizon y Walmart (datos descargados de nasdaq.com).

Para cada valor hemos descargado el histórico de cinco años atrás. Pero para ajustar nuestros modelos no necesitamos toda la información. Necesitamos que, para cada valor, el programa tome solo los datos que pertenecen al año 2020. Las bases de datos de cada compañía contienen, fecha, valor de cierre, valor de apertura, valor más alto y valor más bajo. En esta caso solo nos interesa el valor de cierre. A continuación presentamos el código y la tabla resultante.

Entrada: Diez documentos .csv con la información de los valores de 10 compañias.

Salida: Tabla retornos en cada periodo.

```
#Bases de datos descargadas de www.nasdaq.com
#Para que el siguiente cdigo funcione,
#la columna con las fechas debe llamarase Date
# y la columna con el precio de cierre, Close.Last.
library(tidyverse)

#Creamos una lista con los nombres de los .csv que
#tienen los valores a analizar
filenames <- list.files(pattern="*.csv", full.names=TRUE)
#En la siguiente lnea guardamos cada tabla con valores en una lista.
ldf <- lapply(filenames, read.csv)

#Seleccionamos solo los valores del ao 2020, eliminamos el signo de
#dolar, dejamos todo en formato adecuado.
#Tomamos solo las dos columnas que nos importan, date y close.last
Select_2020_Data<-function(dataframe){
  dataframe$Date<-as.Date(dataframe$Date, "%m/%d/%Y")
```

```
  dataframe<-subset(dataframe,format.Date(Date, "%Y")=="2020")
  dataframe$Close.Last = gsub("\\$", "", dataframe$Close.Last)
  dataframe$Close.Last<-as.numeric(dataframe$Close.Last)
  dataframe<-dataframe[,1:2]
  return(dataframe)
}

#Aplicamos a cada tabla de datos en nuestra lista
ldf2<-lapply(ldf,Select_2020_Data)



#Los nombres los tomamos de filenames, eliminamos el .csv
filenames2<- list.files(pattern="*.csv")
filenames2<-gsub("\\.csv", "", filenames2)

#Creamos la matriz deseada con la informacin que #usaremos en el
    ↪ futuro.
#La matriz con los retornos (la cual seguiremos usando ms adelante)
#la nombramos returns.
#Esta es la matriz resultante del mtodo.
Returns<-ldf2 %>% reduce(full_join, by = "Date")

#Finalmente ponemos los nombre de las compaas
colnames(Returns)[2:length(Returns)] <- filenames2
```

A continuación mostramos dos tablas. En la tabla 3.1 mostramos como viene la información descargada del valor financiero Alphabet, Inc. Class A. En la tabla 3.2 mostramos la información resultante de 6 días y 3 valores financieros (tras la limpieza).

3.2.2. Selección del portafolio

Para encontrar los betas requeridos por el modelo usaremos la regresión lineal sugerida en la subsección 2.2.2. Del método de un solo índice podemos calcular el

Tabla 3.1. Tabla de ejemplo.

Date	Close.Last	Volume	Open	High	Low
04/11/2022	$2576.47	1844153	$2636.47	$2641.85	$2573.37
04/08/2022	$2665.75	1257140	$2711.67	$2713.4	$2659.31
04/07/2022	$2717.77	1311680	$2720.2	$2743.29	$2684.5479
04/06/2022	$2730.96	1623424	$2775	$2787.21	$2710.34
04/05/2022	$2811.82	1070906	$2857.38	$2859.81	$2807.65
04/04/2022	$2859.43	1298542	$2807.17	$2874.24	$2806.21

Información descargada de Alphabet, Inc. Class A. Fuente: nasdaq.com.

Tabla 3.2. Información resutante.

Date	Alphabet, Inc. Class A	Amazon, Inc.	Apple, Inc.
2020-12-31	1752.64	3256.93	132.69
2020-12-30	1736.25	3285.85	133.72
2020-12-29	1757.76	3322.00	134.87
2020-12-28	1773.96	3283.96	136.69
2020-12-24	1734.16	3172.69	131.97
2020-12-23	1728.23	3185.27	130.96

Información utilizada tras aplicado el código de limpieza. Fuente: nasdaq.com.

error no sistemático como:

$$\sigma_{ei} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[r_{it} - (\alpha_i + \beta_i R_{mt})]^2$$

donde T es el número de periodos y los demás son variables definidas en el método de un solo índice.

Antes de pasar al siguiente paso debemos aclarar un par de cosas. La información extraída está en días (los 253 días en los que se intercambiaron los valores). Por lo que si queremos comparar contra una tasa de 4 % anual debemos ya sea ajustar nuestros retornos a meses, o ajustar la tasa a una que se capitalice diariamente. En este caso usaremos la segunda. Vamos a comparar contra una tasa de 0.01 % de capitalización diaria (lo cual es equivalente a más o menos 3.9 % anual). Sin más consideraciones procedemos a presentar nuestro código.

Entrada: Una matriz que contenga la información del mercado a estudiar. La primera columna debe contener la información del número de periodos, cada columna restante representa una compañía y sus retornos. El número de filas depende de cuántos periodos se deseen utilizar para hacer el ajuste.

Salida: Matriz con información para finalizar nuestro análisis.

```
#Preparacin para las regresiones lineales
drops <- c("Periodo","Retorno_Medio")
betas<-vector()
alphas<-vector()
error<-vector()
medias<-vector()

#Hacemos las regresines lineales y guardamos en los vectores de
   ↪ alphas y betas
for (i in colnames(Retornos[ ,!(names(Retornos) %in% drops)])){
  model<-lm(reformulate("Retorno_Medio",as.name(i)), data=Retornos)
  betas<- c(betas, summary(model)$coefficients[2,1])
  alphas<-c(alphas,summary(model)$coefficients[1,1])
  #media predicha (usamos la media)
  medias<-c(medias,mean(Retornos[[i]]))
}

#Error no sistemtico
for(x in 2:(ncol(Retornos)-1)){
  error<-c(error,sum((Retornos[[x]]-(alphas[x-1]+betas[x-1]*Retornos
     ↪ [[length(Retornos)]]))^2 )/nrow(Retornos))
}

#Varianza del mercado
Var_Mercado<-var(Retornos$Retorno_Medio)



#Rankeamos los valores financieros
#R_F es el activo con riesgo 0
R_F<-0.01
Exceso_Retorno<-medias-R_F

#Creamos una nueva base de datos con toda la informacin
All_Info<-data.frame(matrix(ncol = 0, nrow = length(colnames(Valor_
   ↪ Diario)[-1]) ))
All_Info$Names<-colnames(Valor_Diario)[-1]
```

```
All_Info$Error_No_Sis_Cuad<-error
All_Info$Betas<-betas
All_Info$Exceso_Retorno<-Exceso_Retorno
All_Info$Medias<-medias

#Ordenamos usando Exceso_Retorno
All_Info <-All_Info[order((All_Info$Exceso_Retorno-R_F)/All_Info$
    ↪ Betas,decreasing = TRUE),]

#Seleccionamos
for(x in 1:length(colnames(Valor_Diario)[-1])){
  #Cutoff rate (corte)
  corte<-Var_Mercado*sum((All_Info$Medias[1:x]-R_F)*All_Info$Betas[1:
      ↪ x]/All_Info$Error_No_Sis_Cuad[1:x])/(1+Var_Mercado*sum(All_
      ↪ Info$Betas[1:x]^2/All_Info$Error_No_Sis_Cuad[1:x]))
  if(sum(All_Info$Exceso_Retorno/All_Info$Betas>corte)==x){
    Total=x
    break
  }
}

#Vector de Z
Z<-vector()
for(x in 1:Total){
  Z[x]<-All_Info$Betas[x]*((All_Info$Medias[x]-R_F)/All_Info$Betas[x
      ↪ ]-corte)/All_Info$Error_No_Sis_Cuad[x]
}

#Finalmente cunto invertir en cada uno
Invertir<-vector()
for(x in 1:Total){
  Invertir[x]<-Z[x]/sum(Z)
}
Invertir
```

```
#Info 2021
Data_2021<-vector()
for(dataframe in ldf){
  dataframe$Date<-as.Date(dataframe$Date, "%m/%d/%Y")
  dataframe<-subset(dataframe,format.Date(Date, "%m/%d/%Y")=="12/31/
     ↪ 2021")
  print(dataframe)
  dataframe$Close.Last = gsub("\\$", "", dataframe$Close.Last)
  dataframe$Close.Last<-as.numeric(dataframe$Close.Last)
  Data_2021<-c(Data_2021,dataframe$Close.Last[1])
}

#Crecimiento
Crecimiento<-100*(Data_2021-Valor_Diario[1,-1])/Valor_Diario[1,-1]

#Caso crecimiento medio
mean(unlist(Crecimiento[1,]))

#Nuestro modelo
#multiplicamos el porcentaje a invertir en los valores financieros
   ↪ Tesla, Inc (cuyo retorno en el ao 2021 fue del 49,76/%), y
   ↪ Amazon (cuyo retorno en el ao 2021 fue del 2.38\%).
sum(Invertir*c(49.75555,2.376778))

#best case
max(Crecimiento)

#worst case
min(Crecimiento)
```

Como referencia, la tabla 3.3 muestra toda la información requerida para poder realizar la selección (ENSC significa error no sistemático elevado al cuadrado y ER es el exceso de retorno).

Tabla 3.3. Información requerida

Nombres	ENSC	Betas	ER	Medias
Tesla	17.33	1.65	0.99	1.00
Amazon	2.28	0.83	0.23	0.24
NVIDIA	2.88	1.41	0.37	0.38
Apple	1.90	1.13	0.26	0.27
Walmart	2.58	0.51	0.09	0.10
Microsoft	1.02	1.12	0.16	0.17
Meta	2.64	1.04	0.14	0.15
Alphabet	1.35	0.93	0.12	0.13
Starbucks	3.23	0.97	0.10	0.11
Verizon	1.53	0.41	−0.01	−0.00

Información alimentada al modelo. Fuente: Elaboración propia.

3.3. Comentarios finales

Ya que hemos terminado nuestro análisis procedemos a las conclusiones. Pues bien del portafolio resultante podemos ver varias cosas. Recordemos que para ajustar el modelo utilizamos los datos del años 2020. Supongamos que realizamos las inversiones en el día 1 de enero de 2021. Ahora con los datos de final de año 2021, vamos a hacer comparaciones para ver qué retornos hubiéramos obtenido. Resumimos esta información a continuación (recordemos que disponíamos de \$1 000.00 para invertir):

- El peor escenario hubiese sido invertir todo a Verizon Comunication Inc. en dicho escenario nuestro retorno hubiese sido de −11.56 % (retorno del valor financiero para el periodo 2021). Por lo que hubiéramos perdido \$115.6.

- El mejor escenario hubiese sido invertir todo a NVIDIA Corporations. En dicho escenario nuestro retorno[1] hubiese sido de 125.29 % o una ganancia de \$1 252.90.

- Si hubiésemos invertido la misma cantidad en cada valor nuestro retorno hubiese sido de 34.9 % o una ganancia de \$349.

- Nuestro modelo selecciona dos compañías Amazon Inc. y T, Inc. dándonos un retorno del 46.4 % o una ganancia de \$ 464.

[1]Si hubiéramos invertido el 1 de enero del 2020 y esperamos hasta el último día del 2021, el valor que mostramos a continuación es el retorno que hubiéramos obtenido.

Con la información resumida podemos comenzar a explicar por qué se obtienen dichos resultados. Como era de esperarse nuestro modelo está entre el peor escenario y el mejor escenario, la razón es que al decidir tomar menor riesgo estamos reduciendo nuestros retornos. Finalmente notemos que nuestro modelo da mejores resultados que el escenario donde invertimos la misma cantidad a cada valor. Esto se debe a que al evaluar cada valor financiero, nuestro modelo logra descartar aquellos que producen ganancias negativas. Al eliminar valores que tienen mala evaluación, estamos aumentando los retornos que obtenemos.

CONCLUSIONES

1. Como los valores financieros no siguen un comportamiento 100 % aleatorio, podemos observar la importancia del modelo para discernir entre los valores financieros que se ven prometedores de aquellos que parecen que no darán buenos retornos.

2. Recalcamos la importancia del tiempo en el reajuste del modelo. Como se pudo observar en el caso estudiado, dado que el tiempo del ajuste fue muy amplió, hubieron cambios en en los retornos previstos de los valores financieros que el modelo no pudo capturar. Si se reajusta el modelo frecuentemente (por ejemplo cada mes o semana) es probable que estos cambios en los valores financieros sean capturados. Mejor aún, sería desarrollar modelos que consideren el tiempo de ajuste.

3. El modelo permite descartar aquellos valores financieros que probablemente den resultados negativos. Si lo comparamos con el S&P500 la ventaja de nuestro modelo sobre el índice, es que nos da una manera de descartar activos que no aportan al portafolio.

4. Vemos que el considerar el riesgo del portafolio permite reducir las posibles pérdidas al incluir activos más estables en nuestros portafolios.

RECOMENDACIONES

1. Dado que mejores predicciones de los retornos esperados dan mejores resultados, se recomienda investigar más y mejores maneras de predecir los retornos futuros de varios valores financieros.

2. Se recomienda incorporar en el modelo otra clase de valores financieros diferentes al mercado de valores. Esto para diversificar más el portafolio.

3. Se puede investigar más sobre maneras de implementar los modelos que involucran el tercer momento.

4. Se recomienda buscar maneras para saber cuándo re-alimentar el modelo. Se puede buscar alguna manera matemática de justificar si el tiempo de reajuste del modelo estándar se hace en función de t y decidir cómo calcular este parámetro y cuando cambia.

BIBLIOGRAFÍA

[1] H. Markowitz. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 1952.

[2] L. Rincón. *Introducción a la probabilidad.* UNAM, México, 2014.

[3] S. Axler. *Linear Algebra Done Right.* Springer, 2015.

[4] E. Elton, M. Gruber, S. Brown, y W. Goetzmann. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* John Wiley & Sons, Inc. 2014.

[5] J. Stewart. *Cálculo Trascendentes Tempranas.* Cengage Learning, Inc. 2018.

[6] R. Choudhry and K. Garg. A Hybrid Machine Learning System for Stock Market Forecasting. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 2008.

[7] S. Kranthi. Stock Market Prediction Using Machine Learning. *IRJET Journal*, 2018.

[8] Konno, H., Shirakawa, H. & Yamazaki, H. A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model. Ann Oper Res 45, 205–220 (1993).

[9] D. Bermejo. Letras del Tesoro. Consultado en octubre de 2020 en `https://economipedia.com/definiciones/letra-del-tesoro.html`.

[10] J. Galán. Bono del Estado. Consultado en octubre de 2020 en `https://economipedia.com/definiciones/bono-del-estado.html`.

[11] I. Bolshakova and M. Kovalev and E. Girlich. Portfolio optimization problems: A survey. *Magdeburg University, Fakultät für Mathematik* , 2009.

[12] A. Smith. The Reddit revolt: GameStop and the impact of social media on institutional investors. Consultado en abril de 2022 en `https://www.thetradenews.com/the-reddit-revolt-gamestop-and-the-impact-of-social-media-on-institutional-investors/`.

[13] E. Chong and S. Zak. *An Introduction To Optimization.* John Wiley & Sons, Inc., Canada, 2001.

[14] N. Haaser y J. Sullivan. *Análisis real.* Tr. Ricardo Vinós. Trillas, México, 1978.

[15] Blume, Marchall. Portfolio Theory: A Step toward Its Practical Application. *Journal of Business*, **43**(2):152–173, 1970

[16] Levy, Haim. Measuring Risk and Performance over Alternative Investment Horizons. *Financial Analysts Journal*, **40**(2):61–67, 1984

[17] Vasicek, Oldrich. A Note on Using Cross-Sectional Information in Bayesian Estimation of Security Betas. *Journal of Financ*, **8**(5): 1233–1239, 1973

[18] Klemkosky, Robert, and Martin, John. The Effect of Market Risk on Portfolio Diversification. *Journal of Finance*, **10**(1): 147–153, 1975

[19] H. Taha. *Investigación de Operaciones, una introducción.* 6.ª ed. Prentice Hall, México, 1998.

[20] Comer, George. Hybrid Mutual and Market Timing Performance. *Journal of Business*, **79**: 771–797, 2006

[21] Henriksson, Roy D., and Merton, Robert C. On Market Timing and Investment Performance. II. Statistical Procedures for Evaluating Skills. *Journal of Business*, **54**: 513–553, 1981

[22] Treynor, Jack, and Muzay, F. Can Mutual Funds Outguess the Market?. *Journal of Business*, **44**: 131–136, 1966

[23] Elton, Edwin J., Gruber, Martin J., and Urich, Thomas. Are Betas Best?. *Journal of Finance*, **15**(5): 1375–1384, 1978

[24] King, Benjamin. Market and Industry Factors in Stock Price Behavior. *Journal of Business*, **39**: 139–140, 1966

[25] Campbell, John Y., and Shiller, Richard. Stock Prices, Earnings and Expected Dividends. *Journal of Finance*, **43**(3): 661–676, 1988

[26] Dimson, Elroy, Marsh, Paul, and Staunton, Mike. Triumph of the Optimists: 101 Years of Global Investment Returns. *Princeton University Press*, 2002

[27] Timmermann, Alan. Elusive Return Predictability. *International Journal of Forecasting*, **24**(1): 1–18, 2008

[28] Elton, Edwin J., Gruber, Martin J., and Padberg, Manfred W. Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection. *Journal of Finance*, **8**(1): 296–302, 1978