

## VÓRTICES EN EL EFECTO HALL CUÁNTICO

Luciano Miguel Delgado Cota

Asesorado por J. A. Ponciano, Ph.D.

#### UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



#### VÓRTICES EN EL EFECTO HALL CUÁNTICO

# TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO A LA JEFATURA DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA POR

LUCIANO MIGUEL DELGADO COTA ASESORADO POR J. A. PONCIANO, PH.D.

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

## UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



#### CONSEJO DIRECTIVO

Director M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera

Representante Docente Arqta. Ana Verónica Carrera Vela

Representante Docente M.A. Pedro Peláez Reyes

Representante de Egresados Lic. Urías Amitaí Guzmán García

Representante de Estudiantes Elvis Enrique Ramírez Mérida

Representante de Estudiantes Oscar Eduardo García Orantes

Secretario Ing. Edgar Damián Ochoa Hernández

#### TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

Director M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera

Examinador MSc. Freddy Estuardo Rodríguez Quezada

Examinador Dr. José Rodrigo Sacahui Reyes

Examinador Dr. Enrique Pazos Avalos

Secretario Ing. Edgar Damián Ochoa Hernández





## Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ref. D.DTG. 007-2022 Guatemala 14 de noviembre de 2022

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación titulado: "VÓRTICES EN EL EFECTO HALL CUÁNTICO", presentado el estudiante universitario Luciano Miguel Delgado Cota, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

Ref,122 JMIC/Paola

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS
LISTA DE SÍMBOLOS
OBJETIVOS
INTRODUCCIÓN
1. Fundamentos
1.1. El efecto Hall clásico
1.1.1. El modelo de Drude
1.2. Efecto Hall cuántico entero
1.3. Efecto Hall cuántico fraccionario
1.4. Niveles de energía de Landau
1.4.1. Potencial gauge
1.4.2. Agregando un campo magnético
1.4.3. Potencial gauge simétrico
1.5. Flujo espectral
1.5.1. El efecto de Aharonov-Bohm
2. Efecto Hall cuántico 2
2.1. El efecto Hall cuántico entero
2.1.1. Niveles de Landau llenos
2.1.1.1. Modos de borde $\dots \dots \dots$
2.1.2. Robustez de los estados Hall
2.1.2.1. El rol del desorden
2.1.2.2. El rol de la invarianza Gauge $\dots \dots \dots$
2.1.2.3. El rol de la topología $\dots \dots \dots$
2.2. Efecto Hall cuántico fraccionario

2.2.1. Estados de Laughlin	39
2.2.1.1. La función de onda de Laughlin	39
2.2.1.2. Hamiltoniano de prueba	42
2.2.2. Cuasi huecos y cuasi partículas	44
2.2.2.1. Excitaciones neutrales	46
2.2.2.2. Carga fraccional	46
2.2.2.3. Aniones	47
2.2.2.4. Estado fundamental degenerado	48
2.2.2.5. Orden Topológico	49
2.2.3. Jerarquía de las fracciones de llenado	50
2.2.3.1. Fermiones compuestos	52
3. Vórtices	55
3.4. Soluciones de Vórtices	00
4. Teoría de Chern-Simons	71
4.1. Introducción	71
4.2. El efecto Hall cuántico entero	72
4.2.1. Compacidad	76
4.3. Efecto Hall cuántico fraccionario	77
4.3.1. Estadística fraccionaria	81
4.3.2. Teoría de Chern-Simons en un toro	82
4.4. Dualidad partícula-vórtice	85
4.4.1. El modelo XY	85
4.4.2. EL modelo abeliano de Higgs	86
4.4.3. Teoría de Chern-Simons Ginzburg-Landau	88
5. Soluciones tipo vórtices	91
5.1. El modelo de Zhang-Hansson-Kivelson (ZHK)	
5.2. Vórtices de Chern-Simons	
5.2.1. Modelo abeliano de Higgs con término de Chern-Simons	
5.2.1. Modelo abeliano de ringgs con termino de Chern-Simons	
5.2.1.1. Energia de una configuración estatica	
5.2.2.1. Configuraciones de energía finita.	101

	5.2.3.	Vortices radialmente si	imétricos	 	•	 •	 •	 •	 •	. 102
СО	NCLUS	SIONES								107
BII	BLIOGI	RAFÍA								109

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Para observar el efecto Hall, se aplica un campo magnético a un con-	
	ductor que transporta corriente. Cuando $I$ tiene la dirección $x$ y ${\bf B}$	
	la dirección $y$ , los portadores de cargas tanto se desvían hacia arriba	
	en el campo magnético. El voltaje Hall se mide entre los puntos $a$ y	
	c. Tomado de [17]	2
1.2.	Resistividad Hall $[k\Omega]$ contra campo magnético $[T]$ . Este es el efecto	
	Hall entero. Por esto, von Klitzing ganó el premio novel en 1985.	
	Tomado de [11]	6
1.3.	Resistividad Hall $[k\Omega]$ contra campo magnético $[T]$ . Comportamiento	
	de la resistividad Hall en función del campo magnético. Tomado de $\left[11\right]$	8
1.4.	Energía contra vector de onda. Se muestra el comportamiento de	
	las energías $E_{n,k}$ en el espacio de vectores de onda es claramente	
	constante en ausencia de un campo eléctrico. Elaboración propia.	15
1.5.	Energía contra vector de onda. En presencia de un campo eléctrico los	
	niveles de energía $E_{n,k}$ ahora dependen linealmente en $k$ . Elaboración	
	propia	16
2.1.	Potencial contra posición. En (2.1a) se muestra un potencial adecua-	
	do y en (2.1b) y (2.1c) se muestran potenciales que no son suaves.	
	Elaboración propia	29
2.2.	Cuando se enciende un campo magnético a lo largo del eje (B apunta	
	directamente hacia afuera de la pantalla), la fuerza de Lorentz impulsa	
	un componente circular de corriente y la resistencia entre los bordes	
	interior y exterior aumenta. Este aumento de resistencia debido al	
	campo magnético se llama magnetor resistencia. Tomado de [1]. $$	32

3.1.	Campos escalar y gauge contra coordenada radial. Las funciones de
	perfil $\phi(\rho)$ (curva naranja) y $a_{\theta}(\rho)$ (curva azul) para el vórtice $N=1$
	con $\lambda=1.0.$ Las curvas se mueven hacia la izquierda al aumentar $\lambda.$
	Elaboración propia
4.1.	Ciclos $\gamma_1$ y $\gamma_2$ definidos sobre el toro ${\bf T}^2$ . Elaboración propia 83
5.1.	Campos escalar, eléctrico y magnético contra coordenada radial. Vór-
	tice topológico con simetría radial. Funciones $f(r)$ (curva azul), $E(r)$ (curva
	amarilla) y $B(r)$ (curva negra) para el vórtice $N=1$ y $\lambda=1.0$ . Ela-
	boración propia

## LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolo

 $\rho_{xy}$ .

## Significado

 $\Phi = \frac{\hbar}{em}.$   $\omega_B = eB/m.$   $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}.$   $N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\theta} \chi^{\infty}(\theta) d\theta.$ Cuanto de flujo magnético. Frecuencia de ciclotrón. Longitud de escala magnética. Carga topológica. Constante de Plank reducida. Primer número de Chern.  $c_1$ . Conductividad Hall cuantizada.  $\sigma_{xy}$ . Resistividad Hall cuantizada.

## **OBJETIVOS**

## General

Estudiar la aparición de vórtices en la teoría Hall cuántico y la dualidad de vórticepartícula.

## Específicos

- 1. Explicar las características principales del efecto Hall cuántico entero y fraccionario.
- 2. Explicar las teorias de campo global y gauge con vórtices para campos estáticos.
- 3. Resolver numéricamente y analizar las ecuaciones de vórtices en el efecto Hall cuántico.

## INTRODUCCIÓN

El efecto Hall, descubierto en 1879 por Edwin H. Hall, se debe a la naturaleza de la corriente en un conductor. La corriente consiste en el movimiento de pequeños portadores de carga, típicamente electrones, huecos, iones o los tres. Cuando un campo magnético está presente, estas cargas experimentan una fuerza, llamada fuerza de Lorentz. Cuando dicho campo magnético está ausente, las cargas siguen trayectorias aproximadamente rectas entre colisiones con impurezas, fonones, entre otros. Sin embargo, cuando se aplica un campo magnético con un componente perpendicular, sus trayectorias entre colisiones son curvas, por lo que las cargas en movimiento se acumulan en una cara del material. La resistividad Hall clásica es  $\rho_{xy} = E_Y/J_x$ .

El efecto Hall cuántico entero es una versión cuantizada del efecto Hall que se observa en sistemas de electrones bidimensionales sometidos a bajas temperaturas y fuertes campos magnéticos, en los que la resistencia Hall  $(\frac{\hbar}{\nu e^2})$  exhibe escalones que toman los valores cuantificados. También existe el efecto Hall cuántico fraccionario, que como su nombre lo indica, la resistencia Hall muestra mesetas cuantificadas en valores fraccionarios.

Hay descripciones fenomenológicas del efecto Hall cuántico en teoría de campos y de estás teorías surgen objetos matemáticos conocidos como vórtices que se interpretan como partículas de estadística intermedia. Los vórtices son solitones topológicos en dos dimensiones, soluciones a sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que están localizados dentro de una región y su forma es permanente, excepto por un cambio de fase. El efecto Hall cuántico fraccionario puede entenderse como un efecto Hall cuántico entero para fermiones compuestos, un electrón que da lugar a un vórtice debido a la antisimetría unido a m-1 vórtices adicionales. Los m vórtices forman un fermión cuando m es impar y de aquí nace la dualidad vórtice-partícula. Un buen ejemplo son los sistemas cuya solución aproximada se obtiene en los capítulos 3 y 5 luego de simplificarlos usando un ansatz radialmente simétrico. Los vórtices de las soluciones numéricas corroboran la teoría

de la dualidad vórtice-partícula en el efecto Hall cuántico resumidos en el sistema de ecuaciones.

Las partículas compuestas pueden tener estadísticas permaneciendo entre los fermiones y bosones. Tales partículas son llamadas aniones. Esta propiedad permitió a Zhang et. al., motivado por el trabajo iniciado por Ginvin-McDonal hacer un cambio de estadística, como si fuera una "transmutación estadística", de un Hamiltoniano fermiónico a uno bosónico. Esto los llevó a plantear el lagrangiano de la teoría.

La teoría de Chern-Simons Ginzburg-Landau (CSGL) es una descripción fenomenológica del efecto Hall fraccionario y se estudia en presencia de un potencial de confinamiento. El efecto está relacionado con cambios, por acumulación de carga, en el borde cuando cambia el potencial químico y permite reproducir correctamente varias de sus características. Fue postulado por Zhang et. al. y también se conoce como la teoría Zhang-Hansson-Kivelso (ZHK).

Estudiaremos teorías de campo que describen el efecto Hall cuántico fraccionario y se analizan soluciones. El contenido se separa en cinco capítulos y se desarrolla la teoría necesaria para presentar una introducción a la teoría de CSGL. En el capítulo 1 partimos del efecto Hall clásico y del modelo de Drude estudiaremos las bases del efecto Hall cuántico entero y fraccionario y herramientas como el potencial gauge de Landau, la conexión de Berry, la fase de Berry y el efecto de Aharonov-Bohm. En el capítulo 2 desarrollaremos más a fondo el efecto Hall cuántico viendo la razón causante de las mesetas y los picos observadas en los experimentos para las resistividades, el ansatz propuesto por Robert Laughlin para el efecto Hall cuántico fraccionario y la aparición de las cuasi partículas y los cuasi huecos.

Por otra parte, en el capítulo 3 apoyándonos en la teoría básica de campos y de solitones abordaremos los conceptos más importantes de vórtices donde veremos el rol que toma la carga topológica y sus diferentes interpretaciones. Los lagrangianos que se trabajan son de campos estáticos, funciones de Ginzburg-Landau, en la teoría global y la teoría gauge y el método estándar para una obtener una solución aproximada. En el capítulo 4 profundizamos más en las teorías de Chern-Simons donde se replantea el efecto Hall cuántico entero y fraccionario desde la perspectiva de una teoría de campo construida con el término de Chern-Simons y viendo la dualidad vórtice-partícula de los electrones y las cuasi partículas en las teorías Abeliana de Higgs y del modelo XY. Finalmente el capítulo 5 hace uso del método mostrado en el capítulo 3 para resolver las ecuaciones estáticas de vórtices, esta vez aplicado al

modelo abeliano de Higgs con los términos de Maxwell y Chern-Simons y finalmente presentamos una solución numérica para una expresión sin el término de Maxwell.

#### 1. Fundamentos

La historia del efecto Hall comienza en 1879 cuando Edwin H. Hall descubrió que un pequeño voltaje transversal apareció a través de una delgada tira de metal portadora de corriente en un campo magnético aplicado [17]. Hasta entonces, de los resultados experimentales solo se obtenía la movilidad de densidad de portadores, y la separación de estas dos importantes cantidades físicas tenía que depender de otras mediciones difíciles. El descubrimiento del efecto Hall permitió una medición directa de la densidad de portadores. Desde entonces, el desarrollo de la técnica ha dado lugar a una herramienta práctica, que hoy en día se utiliza de para caracterizar las propiedades eléctricas y la calidad de casi todos los materiales semiconductores.

Vamos a comenzar considerando un número grande de electrones, estos se restringen a permanecer en un plano dos dimensional y se activa un campo magnético intenso. Este sistema provee la configuración para un sorprendente resultado en la física. Estos fenómenos son conocidos colectivamente como el efecto Hall cuántico.

La conductividad Hall toma valores cuantizados

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi h} \nu.$$

Originalmente fue encontrado que  $\nu$  tiene valor entero. A diferencia de la cuantización a nivel microscópico, esta vez es diferente: esta es la cuantización de una propiedad macroscópica emergente en un sistema "sucio" involucrando varias partículas y su explicación requiere algo nuevo [11].

Posteriormente, fue encontrado que  $\nu$  no solo esta restringido a tomar valores enteros, también valores racionales específicos. Las fracciones más prominentes experimentalmente son  $\nu=1/3$  y  $\nu=2/5$ . Pero para esto es necesario otro ingrediente, es la interacción entre electrones los cuales resultan en un estado cuántico altamente correlacionado que ahora es un nuevo estado de la materia [11]. Las partículas cargadas que vagan alrededor del sistema portan una fracción de la carga del electrón, como si el electrón se partiera a si mismo en varias piezas.

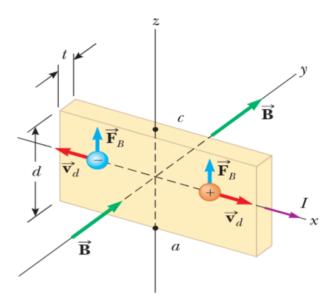
En efecto, no es la carga del electrón que se fragmenta: esto pasa con las esta-

dísticas del electrón [11]. Dado que el electrón es un fermión, lo cual significa que la distribución de muchos electrones es gobernada por la función de distribución de Fermi-Dirac. Cuando el electrón se descompone, así también lo hace su naturaleza fermiónica. Los constituyentes individuales ya no son fermiones, pero tampoco bosones, en vez son una nueva entidad conocida como aniones [11] los cuales, en los casos más simples, permanecen entre los bosones y fermiones como veremos al final del siguiente capítulo.

Debido a este tipo de comportamiento llamativo, el efecto Hall cuántico ha tenido una constante fuente de nuevas ideas, proporcionando pistas sobre donde buscar fenómenos interesantes y nuevos. Ejemplos importantes incluyen el tema de aislantes topológicos, orden topológico y computación cuántica topológica [11].

## 1.1. El efecto Hall clásico

Para comenzar, consideremos que se enciende un campo magnético  $\mathbf{B}$ , apuntando en la dirección z. Mientras, los electrones son restringidos a moverse solo en el plano (x, y). Una corriente constante I fluye en la dirección x. El efecto Hall enuncia que este induce un voltaje  $V_H$  en la dirección y [17], como se muestra en la figura (1.1).



**Figura 1.1.** Para observar el efecto Hall, se aplica un campo magnético a un conductor que transporta corriente. Cuando I tiene la dirección x y  $\mathbf{B}$  la dirección y, los portadores de cargas tanto se desvían hacia arriba en el campo magnético. El voltaje Hall se mide entre los puntos a y c. Tomado de [17]

El efecto Hall aparece del hecho que un campo magnético causa que las partículas

cargadas se muevan en círculos. Recordemos las bases. La ecuación de movimiento para una partícula de masa m y carga -e en un campo magnético es

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Cuando el campo magnético apunta en la dirección z, tal que  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , y la partícula se mueva solo en el plano transverso, así  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ , la ecuación de movimiento se convierte en dos ecuaciones diferenciales acopladas

$$m\ddot{x} = -eB\dot{y} \ y \ m\ddot{y} = eB\dot{x} \tag{1.1}$$

La solución general es

$$x(t) = X - R\sin(\omega_B t + \phi) \ y \ y(t) = Y + R\cos(\omega_B + \phi) \tag{1.2}$$

Vemos que la partícula se mueve en un círculo el cual, para B>0, esta en una dirección en contra de las agujas del reloj. El centro del círculo, (X,Y), el radio del círculo R y la fase  $\phi$  son todos arbitrarios. Sin embargo, la frecuencia con la cual la partícula va alrededor del círculo es fija, y está dada por

$$\omega_B = \frac{eB}{m}.\tag{1.3}$$

Esta es llamada la frecuencia de ciclotrón [11].

#### 1.1.1. El modelo de Drude

Ahora repetiremos los cálculos con dos componentes adicionales. El primero es un campo eléctrico **E**. Este acelerará las cargas y, en la ausencia de un campo magnético, podría resultar en una corriente en la dirección de **E**. El segundo ingrediente es un término de fricción lineal, el cual es supuesto para captar el efecto del electrón rebotando en todo aquello que impida su progreso, el latice subyacente u otros electrones [4, 11]. La ecuación resultante de movimiento es

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau}$$
(1.4)

El coeficiente  $\tau$  en el término de fricción es llamado el tiempo de dispersión, también conocido como tiempo de relajación o tiempo de colisión [4]. Puede ser entendido como el tiempo promedio entre colisiones.

Nos interesan soluciones en equilibrio de (1.4) el cual tiene  $d\mathbf{v}/dt = 0$ . La velocidad de la partícula debe entonces ser

$$\mathbf{v} + \frac{er}{m}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{er}{m}\mathbf{E}.\tag{1.5}$$

La densidad de corriente J está relacionada a la velocidad por

$$\mathbf{J} = -ne\mathbf{v}$$

donde n es la densidad de portadores de carga. En notación matricial (1.5) se vuelve

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J} = \frac{e^2 n \tau}{m} \mathbf{E}$$

Podemos invertir esta matriz para obtener una ecuación de la forma

$$J = \sigma E$$

Esta ecuación es conocida como la Ley de Ohm. La constante de proporcionalidad  $\sigma$  es la conductividad. La ligera novedad es que, en la presencia de un campo magnético,  $\sigma$  no es un número: es una matriz. A veces llamada el tensor de conductividad. Escribimos esto como

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

La estructura de la matriz, con componentes diagonales idénticos, y componentes fuera de la diagonal iguales pero con signo opuesto, sigue de la invarianza rotacional. Por el modelo de Drude, la expresión explícita para la conductividad es

$$\sigma = \frac{\sigma_{DC}}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_B \tau \\ \omega \tau & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \sigma_{DC} = \frac{ne^2 \tau}{m}$$

Aquí  $\sigma_{DC}$  es la conductividad DC en ausencia de campo magnético [11]. Los términos fuera de la diagonal en la matriz son responsables del efecto Hall: en equilibrio, una corriente en la dirección x requiere un campo eléctrico con un componente en la dirección y [11].

La resistividad es definida como el inverso de la conductividad. Esto se mantiene

igual cuando ambos son matrices,

$$\rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Del modelo de Drude, tenemos

$$\rho = \frac{1}{\sigma_{DC}} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Los componentes fuera de la diagonal del tensor de resistividad  $\rho_{xy} = \omega_B \tau / \sigma_{DC}$ , tienen un par de buenas propiedades. Primero, son independientes del tiempo de dispersión  $\tau$  y segundo, la propiedad está en aquello que se mide [11]. Usualmente medimos la resistencia R, la cual difiere de la resistividad  $\rho$  por factores geométricos. Sin embargo, para  $\rho_{xy}$ , esas dos cosas coinciden. Consideremos una muestra de material de longitud L en la dirección y. Eliminamos un voltaje  $V_y$  en la dirección y y medimos la corriente resultante  $I_x$  en la dirección x. La resistencia transversa es

$$R_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{LE_y}{LJ_x} = \frac{E_y}{J_x} = \rho_{xy}$$

En contraste, si medimos la resistencia longitudinal  $R_{xx}$  entonces tendremos que dividir en longitudes apropiadas para extraer la resistividad  $\rho_{xx}$ .

Para una corriente  $I_x$  fluyendo en la dirección x, y el campo eléctrico asociado  $E_y$  en la dirección y, el coeficiente Hall es definido por

$$R_H = -\frac{E_y}{J_x B} = \frac{\rho_{xy}}{B}$$

Así en el modelo de Drude, tenemos

$$R_H = \frac{\omega_B}{B\sigma_{DC}} = \frac{1}{ne}.$$

Vemos que el coeficiente de Hall solo depende en la información microscópica acerca del material: la carga y densidad de las partículas [11]. El coeficiente Hall no depende en el tiempo de dispersión  $\tau$ ; este es menos sensitivo a cualquier proceso de fricción que estén en el material [11].

Se concluye que las resistividades deben ser

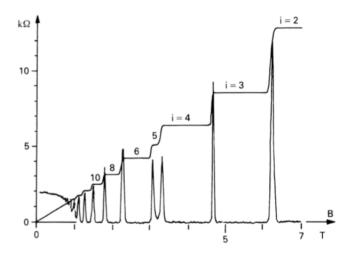
$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau} \text{ y } \rho_{xy} = \frac{B}{ne}.$$

Note que solo  $\rho_{xx}$  depende en el tiempo de dispersión  $\tau$ , y  $\rho_{xx} \to 0$  como el proceso de dispersión se vuelve menos importante y  $\tau \to \infty$ .

## 1.2. Efecto Hall cuántico entero

El aspecto cuántico se vuelve importante cuando tratamos con bajas temperaturas y fuertes campos magnéticos donde cosas más interesantes suceden.

Es útil distinguir entre dos efectos Hall diferentes los cuales están asociados a dos fenómenos relacionados. Estos son llamados efecto Hall entero y fraccionario. Ambos fueron descubiertos experimentalmente y solo subsecuente mente entendidos teóricamente [13]. El primer experimento explorando el régimen cuántico del efecto Hall fue realizado en 1980 por von Klitzing, usando muestras preparadas por Dorda y Pepper [13]. Las resistividades se muestran en la figura 1.2 Ambos la resistividad



**Figura 1.2.** Resistividad Hall  $[k\Omega]$  contra campo magnético [T]. Este es el efecto Hall entero. Por esto, von Klitzing ganó el premio novel en 1985. Tomado de [11]

Hall  $\rho_{xy}$  y la resistividad longitudinal  $\rho_{xx}$  exhiben comportamientos interesantes. Quizás la característica más llamativa en los datos es el hecho que la resistividad Hall  $\rho_{xy}$  presenta mesetas para un rango de campos magnéticos, antes de saltar repentinamente a las siguiente meseta. En esas mesetas, la resistividad toma el valor

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}, \ \nu \in \mathbf{Z}.\tag{1.9}$$

Las mediciones del valor de  $\nu$  indican que es un entero con una precisión extraordi-

naria. La cantidad  $2\pi\hbar/e^2$  es llamada el cuanto de resistividad [11] (con -e, la carga del electrón). Ahora es usado como el estándar para la medición de la resistividad. La precisión de medición para  $\nu$  en diferentes dispositivos difiere apenas en 3 partes en  $10^{10}$  [11]. El efecto Hall cuántico es ahora usado como la base para medir el cociente de constantes fundamentales. Esto significa que, por definición, el estado  $\nu = 1$  en (1.9) es un entero exacto.

El centro de cada una de esas mesetas ocurre cuando el campo magnético toma los valores

$$B = \frac{2\pi\hbar n}{\nu\epsilon} = \frac{n}{\nu}\Phi_0$$

donde n es la densidad de electrones y  $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$  es conocido como el cuanto de flujo [15]. La sorpresa es que la meseta existe con la cuantización persistiendo sobre un rango de campos magnéticos, esto se explica en el capítulo 2.

Los sistemas experimentales son típicamente sucios, llenos de impurezas. El nombre técnico para esto es desorden. Aún, en el efecto Hall cuántico, a medida que incrementa la cantidad de desorden la meseta se vuelve más prominente, no menor [11, 13]. En efecto, en la ausencia de desorden, las mesetas se supone que se anulan completamente. Cuando el valor de  $\rho_{xy}$  se encuentra sobre una meseta, la resistividad longitudinal se anula  $\rho_{xx} = 0$ . Solamente presenta picos cuando  $\rho_{xy}$  salta a la siguiente meseta, como en la figura 1.2.

Usualmente entendemos un sistema con  $\rho_{xx} = 0$  como un conductor perfecto. Pero hay algo un poco contra intuitivo con la anulación de la resistividad en la presencia de un campo magnético. Para ver esto, podemos regresar a la definición (1.7) la cual, en componentes se lee

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \ y \ \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}$$
 (1.10)

Si  $\rho_{xy}=0$  entonces podemos obtener la relación familiar entre conductividad y resistividad:  $\sigma_{xx}=1/\rho_{xx}$ . Pero si  $\rho_{xy}\neq 0$ , entonces tenemos una relación más interesante. En particular vemos

$$\rho_{xx} = 0 \implies \sigma_{xx} = 0 \text{ (si } \rho_{xy} \neq 0).$$

Mientras, podríamos usualmente llamar un sistema con  $\sigma_{xx} = 0$  un conductor perfecto. Veamos cual es la razón

La sorpresa particular tiene más para hacer con las palabras que usamos para describir el fenómeno de la física subyacente. En particular, no tiene nada que hacer

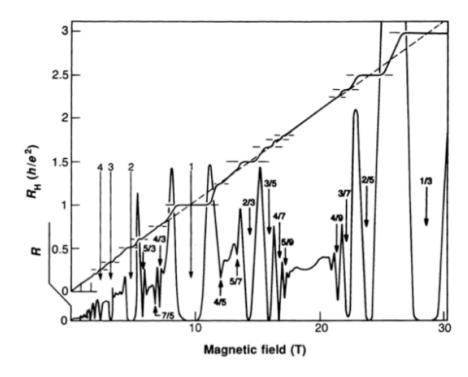


Figura 1.3. Resistividad Hall  $[k\Omega]$  contra campo magnético [T]. Comportamiento de la resistividad Hall en función del campo magnético. Tomado de [11]

con la mecánica cuántica: este comportamiento ocurre en el modelo de Drude en el límite  $\tau \to \infty$  donde no hay dispersión. En esta situación, la corriente está fluyendo perpendicular al campo eléctrico aplicado, así que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0$ . Pero recordemos que interpretamos la expresión  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  como el trabajo hecho en aceleración de cargas. El hecho que esto se anule significa que tenemos una corriente estacionaria fluyendo sin hacer algún trabajo y, correspondientemente, sin ninguna disipación [11]. El hecho que  $\sigma_{xx} = 0$  nos dice que ninguna corriente está fluyendo en la dirección longitudinal (como un aislante) mientras el hecho que  $\rho_{xx} = 0$  nos dice que no hay disipación de energía [11] (como un conductor perfecto).

## 1.3. Efecto Hall cuántico fraccionario

A medida que el desorden es disminuido, las mesetas del efecto Hall entero se vuelven menos prominentes. Pero otras mesetas emergen en valores fraccionarios. Esto fue descubierto en 1982 por Tsui y Störmer usando muestras preparadas por Gossard [13]. Las resistividades se ven como en la figura (1.3)

Este es el efecto Hall cuántico fraccionario. En la meseta, la resistividad Hall

otra vez toma la forma simple (1.9), pero ahora con  $\nu$  un número racional

$$\nu \in \mathbb{Q}$$
.

Cabe aclarar que no todas las fracciones aparecen. Las mesetas más prominentes están en  $\nu=1/3,1/5$  y 2/5, sin embargo, hay muchos más. La basta mayoría de esos denominadores son enteros impares. Pero hay excepciones, en particular la meseta que tiene  $\nu=5/2$  [13].

A medida que el desorden disminuye, más y más mesetas emergen. Se ve plausible que, en el límite de una muestra perfectamente limpia, pudiéramos obtener un número infinito de mesetas lo cual nos trae de regreso a la física clásica de una linea recta para  $\rho_{xy}$  [13].

El efecto Hall cuántico entero puede entenderse usando electrones libres. En contraste, para explicar el efecto Hall cuántico fraccionario necesitamos tomar la interacción entre electrones en cuenta. Las bases de la teoría fueron primero asentadas por Robert B. Laughlin [13].

## 1.4. Niveles de energía de Landau

Ahora haremos un repaso de la mecánica cuántica de partículas libres moviéndose en un campo magnético de fondo y el fenómeno resultante de los niveles de Landau. Despreciaremos el espín del electrón. Esto es más o menos apropiado para la mayoría de los sistemas Hall cuántico realizados físicamente. La razón es que en la presencia de un campo magnético B hay una separación de Zeeman entre las energías de los espines arriba y abajo por  $\Delta = 2\mu_B B$  donde  $\mu_B = e\hbar/2m$  es el magnetón de Bohr [18]. Nos centraremos en campos magnéticos fuertes donde grandes energías son necesarias para girar el espín. Esto significa que, si nos restringimos a bajas energías, los electrones actúan como si efectivamente no giraran.

Primero necesitamos ver brevemente algo de la estructura clásica en la presencia de un campo magnético. El lagrangiano para una partícula de carga -e y masa m moviéndose en una campo magnético de fondo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

es

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - e\ddot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A}.$$

Bajo una transformación gauge [12],  $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla \alpha$ , el lagrangiano cambia por una derivada total:  $L \to L - e\dot{\alpha}$ . Este es suficiente para asegurar que la ecuación de movimiento (1.1) se mantiene sin cambio bajo una transformación gauge.

El momento canónico apareciendo del Lagrangiano es

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}} - e\mathbf{A}.$$

Este momento difiere de aquello a lo que normalmente llamamos momento  $m\dot{\mathbf{x}}$ , por  $m\dot{\mathbf{x}}$  entendemos el momento mecánico.

Ahora calculamos el Hamiltoniano

$$H = \dot{\mathbf{x}} \cdot p - L = \frac{1}{2m} (p + e\mathbf{A})^2$$

Si escribimos el Hamiltoniano en términos del momento mecánico entonces este parecería igual al que tendríamos en la ausencia del campo magnético:  $H = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}$ . Es el enunciado de que un campo magnético no realiza trabajo y no cambia la energía del sistema. Sin embargo, hay más para el marco de referencia del Hamiltoniano que solo el valor de H. Necesitamos recordar cuales variables son variables canónicas. Esta información está codificada en la estructura de los brackets de Poisson de la teoría (o en la estructura simpléctica del espacio de fase) y, en la teoría cuántica, es transferido dentro de las relaciones de conmutación entre operadores [18]. El hecho que x y p son canónicos significa que

$$\{x_i, p_i\} = \delta_{ij} \text{ con } \{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$
 (1.11)

Cabe resaltar que p no es invariante gauge. Quiere decir que el valor numérico de p no puede tener ningún significado físico ya que este depende de la elección del campo gauge [11, 12]. En contraste, el momento mecánico  $m\dot{\mathbf{x}}$  es invariante gauge pero, no tiene estructura canónica de Poisson [18]. Específicamente, el bracket de Poisson del momento canónico con si mismo no se anula

$$\{m\dot{x}_i, m\dot{x}_j\} = \{p_i + eA_i, p_j + eA_j\} = -e\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right) = -e\epsilon_{ijk}B_k.$$
 (1.12)

Ahora debemos resolver para el espectro y funciones de onda del Hamiltoniano cuántico,

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2. \tag{1.13}$$

Observemos que no se usaran sombreros en los operadores; solamente debemos recor-

dar que son operadores cuánticos. Ya que la partícula está restringida a permanecer en el plano, escribimos  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Mientras, tomamos el campo magnético para ser constante y perpendicular a este plano,  $\nabla \times \mathbf{A} = B\hat{\mathbf{z}}$ . Las relaciones de cuantización canónica que siguen de (1.11) son

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \text{ con } [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0.$$

Esto es muy similar a la solución algebraica del oscilador armónico y tiene la ventaja que no necesitamos especificar una elección del potencial gauge A [12]. La desventaja es que no se obtienen las funciones de onda específicas en términos de la posición de los electrones [11].

Para proceder, trabajamos con las relaciones de conmutación para el momento mecánico. Hacemos

$$\pi = p + e\mathbf{A} = m\dot{\mathbf{x}}.\tag{1.14}$$

Entonces las relaciones de conmutación del bracket de Poisson (1.12) son

$$[\pi_x, \pi_y] = -ie\hbar B. \tag{1.15}$$

Resulta útil introducir nuevas variables. Estos son los operadores de creación y destrucción [18], enteramente análogos a esos usados en el oscilador armónico. Son definidos como

$$a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x - i\pi_y) y a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x + i\pi_y) y.$$

Por tanto la relación de conmutación para estos operadores es

$$[a, a^{\dagger}] = 1.$$

También podemos notar que esta es la misma relación de conmutación para los operadores de creación y destrucción en el oscilador armónico [18]. El Hamiltoniano (1.13) toma la forma

$$H = \frac{1}{2m}\pi \cdot \pi = \hbar\omega_B \left( a^{\dagger} \cdot a + \frac{1}{2} \right)$$

donde  $\omega_B = eB/m$  es la frecuencia de ciclotrón que tenemos en (1.3).

Ahora, podemos construir el espacio de Hilbert en la misma forma que para el

oscilador armónico: introducimos primero un estado fundamental  $|0\rangle$  tal que  $a|0\rangle = 0$  y construyendo el resto del espacio de Hilbert haciendo actuar al operador  $a^{\dagger}$  [18],

$$a^{\dagger} | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle$$
 y  $a | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle$ .

El estado  $|n\rangle$  tiene energía

$$E_n = \hbar \omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right) \ n \in \mathbf{N}. \tag{1.16}$$

Aprendimos que en la presencia de un campo magnético, los niveles de energía de una partícula se vuelven igualmente espaciados, con un hueco entre cada nivel proporcional al campo magnético B [18]. Los niveles de energía son llamados niveles de Landau. Notemos que este no es un pequeño cambio: el espectro luce muy diferente al de una partícula libre en la ausencia de un campo magnético [18].

Empecemos con una partícula libre moviéndose en el plano. Este tiene dos grados de libertad. Pero el resultado final fue en términos del oscilador armónico el cual solo tiene un grado de libertad. Se dejó pasar algo por alto. Los niveles de energía de Landau (1.16) son el espectro correcto de la teoría pero, al menos para el oscilador armónico, esto revela que cada nivel de energía no tiene un único estado asociado a este. En cambio hay una degeneración de estados [15].

La separación entre los niveles de Landau es  $\Delta = \hbar \omega_B = e\hbar B/m$ . Pero, para electrones libres, esto precisamente coincide con el efecto Zeeman  $\Delta = g\mu_B B$  entre espines, donde  $\mu_B = e\hbar/2m$  es el magnetón de Bohr y g=2 [18]. Como si las partículas de spín arriba en el nivel de Landau n tuvieran exactamente la misma energía que las partículas con espín abajo en el nivel n+1. La razón es doble. Primero, el valor verdadero de la frecuencia de ciclotrón es  $\omega_B = eB/m_{eff}$ , donde  $m_{eff}$  es la masa efectiva del electrón moviéndose en su ambiente [11]. Segundo, el factor g también varía debido a efectos de la estructura de banda.

## 1.4.1. Potencial gauge

Para encontrar funciones de onda correspondiente a los autoestados de energía, primero necesitamos especificar un potencial gauge A tal que

$$\nabla \times \mathbf{A} = B\hat{\mathbf{z}}.$$

Cabe aclarar que no solamente hay una elección. En esta sección vamos a trabajar con

$$A = xB\hat{\mathbf{y}},\tag{1.17}$$

el campo es llamado el gauge de Landau. Notemos que el campo magnético  ${\bf B}$  es invariante bajo simetría traslacional y simetría rotacional en el plano (x,y). Sin embargo, la elección de  ${\bf A}$  no lo es; este rompe la simetría de traslación en la dirección x (pero no en la dirección y). Esto significa que, mientras la física sea invariante bajo todas las simetrías, los cálculos intermedios no presentarán invarianza [11]. Este tipo de comportamiento es común cuando se usan campos magnéticos.

El Hamiltoniano (1.13) es

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (p_y + eBx)^2).$$

Debido a que se presenta la invarianza traslacional en la dirección y, podemos buscar estados de energía los cuales también sean autoestados de  $p_y$ . Esto sugiere un ansatz usando la separación de variables [11]

$$\psi_k(x,y) = e^{iky} f_k(x), \tag{1.18}$$

vemos que el operador  $p_y$  solo es reemplazado por su valor propio  $\hbar k$ 

$$H\psi_k(x,y) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (\hbar k + eBx)^2)\psi_x(x,y) \equiv H_k\psi_k(x,y).$$

Este es el Hamiltoniano para un oscilador armónico en la dirección x, con el centro desplazado del origen,

$$H_k = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{m\omega_B^2}{2}(x+kl_B^2)^2.$$
 (1.19)

La frecuencia del oscilador armónico es otra vez la frecuencia del ciclotrón  $\omega_B = eB/m$ , y también hemos introducido una escala de longitud  $l_B$ . Esta es una escala de longitud característica la cual gobierna cualquier fenómeno cuántico en un campo magnético [13, 15]. Es llamada la longitud magnética

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. ag{1.20}$$

Para dar una idea de esto, en un campo magnético de B=1 Tesla, la longitud magnética para el electrón es  $L_B=2.5\times 10^{-6}m$ .

Los autovalores de energía son

$$E_n = \hbar \omega_B \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Pero ahora podemos escribir la función de onda de forma explicita. Este depende en dos números cuánticos

$$\psi_{n,k}(x,y) \sim e^{iky} H_n(x+kl_B^2) e^{-(x+kl_B^2)/2l_B^2}$$
 (1.21)

con  $H_n$  las funciones de onda polinomiales de Hermite habituales del oscilador armónico [18]. El  $\sim$  refiere a que las funciones de onda no se han normalizado.

Una ventaja de este enfoque es que inmediatamente podemos ver la degeneración en cada nivel de Landau. La función de onda (1.21) depende en dos números cuánticos, n y k pero los niveles de energía dependen solo en n [15].

Necesitamos restringirnos a una región finita del plano (x,y). Escogemos un rectángulo con lados de longitud  $L_x$  y  $L_y$ . Queremos conocer la cantidad de estados que se ajustan dentro de este rectángulo.

Tener un tamaño finito  $L_y$  es como poner el sistema en una caja en la dirección y. Sabemos que el efecto de esto es cuantizar el momento k en unidades de  $2\pi/L_y$ .

Por otra parte, tener una tamaño finito  $L_x$  es algo más sutil. La razón es que, como mencionamos arriba, la elección gauge (1.17) no ha manifestado invarianza traslacional en la dirección x. Esto significa que el argumento será heurístico. Debido a que las funciones de onda de (1.21) están exponencialmente localizados alrededor  $x = -kl_B^2$ , para una muestra finita restringida a  $0 \le x \le L_x$  podríamos esperar los valores de k permitidos para estar entre  $-L_x/l_B^2 \le k \le 0$ . El resultado final es que el número de estados es

$$\mathcal{N} = \frac{L_y}{2\pi} \int_{-L_x/l_B^2}^0 dk = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{eBA}{2\pi\hbar}$$
 (1.22)

donde  $A = L_x L_y$  es el área de la muestra.

La degeneración (1.22) es muy grande. Hay un número macroscópico de estados en cada nivel de Landau. El espectro resultante luce como la figura 1.4, con  $n \in \mathbb{N}$  etiquetando los niveles de Landau y la energía independiente de k.

Para introducir una nueva notación para describir la degeneración (1.22). Escribimos

$$\mathcal{N} = \frac{AB}{\Phi_0} \quad \text{con } \Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}, \tag{1.23}$$



**Figura 1.4.** Energía contra vector de onda. Se muestra el comportamiento de las energías  $E_{n,k}$  en el espacio de vectores de onda es claramente constante en ausencia de un campo eléctrico. Elaboración propia.

 $\Phi_0$  es llamado el flujo cuántico o cuanto de flujo [15, 13]. Esto puede ser pensado como el flujo magnético contenido dentro del área  $2\pi l_B^2$ . Esto juega un rol importante en un número de fenómenos cuánticos en la presencia de campos magnéticos [11].

## 1.4.2. Agregando un campo magnético

El gauge de Landau es útil para trabajar en geometrías rectangulares. Uno de los aspectos particularmente fácil en este gauge es la adición de un campo eléctrico E en la dirección x. Podemos implementar esto por la adición de un potencial eléctrico  $\phi = -Ex$ . El Hamiltoniano resultante es

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (p_y + eBx)^2) + eEx.$$
 (1.24)

De nuevo, podemos usar el ansatz (1.18). Debemos completar el cuadrado otra vez escribiendo el Hamiltoniano como el de un oscilador armónico desplazado. Los estados están relacionados a los vistos anteriormente, pero con un desplazamiento

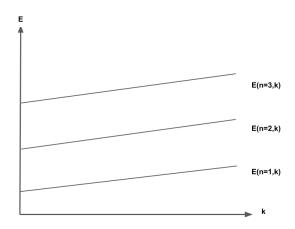
$$\psi(x,y) = \psi_{n,k}(x + mE/eB^2, y)$$
(1.25)

y las energías están ahora dadas por

$$E_{n,k} = \hbar\omega_B \left(n + \frac{1}{2}\right) - eE\left(kl_B^2 + \frac{eE}{m\omega_B^2}\right) + \frac{m}{2}\frac{E^2}{B^2}$$
 (1.26)

La degeneración en cada nivel de Landau ha sido llenada. La energía en cada

nivel ahora depende linealmente en k, como se ve la figura 1.5. Debido a que la



**Figura 1.5.** Energía contra vector de onda. En presencia de un campo eléctrico los niveles de energía  $E_{n,k}$  ahora dependen linealmente en k. Elaboración propia.

energía ahora depende en el momento, esto quiere decir que los estados derivan en la dirección y. La velocidad de grupo [13] es

$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{n,k}}{\partial k} = -\frac{e}{\hbar} E l_B^2 = -\frac{E}{B}.$$
 (1.27)

Este resultado es uno de los mejores de la física clásica; si ponemos un campo eléctrico  ${\bf E}$  perpendicular al campo magnético  ${\bf B}$  entonces las órbitas del electrón se desvían. Pero no se desvían en la dirección del campo eléctrico. En cambio, estos se desvían en la dirección  ${\bf E} \times {\bf B}$ .

Un paquete de onda k ahora está localizado en la posición  $x = -l_B^2 - eE/m\omega_B^2$ ; el término medio de arriba puede ser entendido como la energía potencial de este paquete de onda. El término final puede ser pensado como la energía cinética para la partícula en la dirección y:  $\frac{1}{2}mv_y^2$ .

# 1.4.3. Potencial gauge simétrico

Ahora veamos que sucede con un gauge simétrico, se define como

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B} = -\frac{yB}{2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{xB}{2}\hat{\mathbf{y}}.$$
 (1.28)

Esta elección de gauge rompe la simetría traslacional en ambas direcciones. Sin embargo, preserva la simetría rotacional en torno al origen. Esto significa que el momento angular es un buen número angular.

La razón principal para el estudio de los niveles de Landau en un gauge simétrico es que este es un lenguaje más conveniente para describir el efecto Hall cuántico.

Recordemos que el enfoque algebraico usa el momento mecánico  $\pi = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ . Este es un invariante gauge, pero no canónico. Podemos usar esto para construir operadores de creación, el Hamiltoniano toma la forma del oscilador armónico

$$H = \frac{1}{2m}\pi \cdot \pi = \hbar\omega_B \left( a^{\dagger} a + \frac{1}{2} \right).$$

Para ver la degeneración empezamos por introducir otro tipo de "momento" [18],

$$\hat{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A} \tag{1.29}$$

en contraste a  $\pi$ , este nuevo momento no es invariante gauge.

Los conmutadores de este nuevo momento difieren de (1.15) solo por el signo menos

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = ie\hbar B. \tag{1.30}$$

Sin embargo, la falta de la invarianza gauge se visualiza cuando tomamos los conmutadores de  $\pi$  y  $\hat{\pi}$ . Encontramos

$$[\pi_x, \hat{\pi}_x] = 2ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial x} , \ [\pi_y, \hat{\pi}_y] = 2ie\hbar \frac{\partial A_y}{\partial y} , \ [\pi_x, \hat{\pi}_y] = [\pi_y, \hat{\pi}_x] = ie\hbar \left(ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial y} + ie\hbar \frac{\partial A_y}{\partial x}\right).$$

Esto significa que no podemos, en general, diagonalizar simultáneamente  $\hat{\pi}$  y el Hamiltoniano H [18] lo cual quiere decir que no podemos usar  $\hat{\pi}$  para saber sobre otros números cuánticos.

En el gauge simétrico (1.28) todos los conmutadores se anulan y tenemos

$$[\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] = 0.$$

Podemos definir ahora un segundo par de operadores de creación y destrucción

$$b = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\hat{\pi}_x + ihat\pi_y) \ y \ b^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\hat{\pi}_x - ihat\pi_y).$$

Estos también obedecen  $[b, b^{\dagger}] = 1$ .

Si tomamos el estado fundamental como  $|0,0\rangle$  para ser aniquilado (destruido) por ambos operadores de destrucción, tal que  $a|0,0\rangle = b|0,0\rangle = 0$ . Entonces el

estado general en un espacio de Hilbert es  $|n,m\rangle$  definido por

$$|n,m\rangle = \frac{a^{\dagger n}b^{\dagger m}}{\sqrt{n!m!}}|0,0\rangle$$

Vamos a centrar nuestra atención ahora en el nivel más bajo de Landau, n=0, ya que este será el interés primario en la discusión del efecto Hall cuántico fraccionario. Los estados en el nivel de Landau más bajo son aniquilados por a, es decir,  $a |0, m\rangle = 0$ . El truco es convertir esto en una ecuación diferencial. El operador de destrucción es

$$a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x - i\pi_y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(p_x - ip_y + e(A_x - iA_y))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}\left(-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{eB}{2}(-y - ix)\right).$$

En este estado, es útil trabajar en coordenadas en el plano. Introducimos

$$z = x - iy \ y \ \bar{z} = x + iy$$

Esto es para que las funciones de onda a tratar sean holomorfas [13] y no antiholomorfas [13]. También introducimos las correspondientes derivadas holomorfas y anti-holomorfas

$$\partial = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$
 y  $\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ 

las cuales cumplen  $\partial z=\bar{\partial}\bar{z}=1$  y  $\partial\bar{z}=\bar{\partial}z=0$  [13]. En términos de esas coordenadas holomorfas a toma la forma

$$a = -i\sqrt{2}\left(l_B\bar{\partial} + \frac{z}{4l_B}\right)$$

y correspondientemente

$$a^{\dagger} = -i\sqrt{2}\left(l_B\partial - \frac{\bar{z}}{4l_B}\right).$$

Las funciones de onda del nivel más bajo de Landau  $\psi_{LLL}(z,\bar{z})$  son aquellas que se aniquiladas por este operador diferencial [13]. Pero puede ser resuelto como

$$\psi_{LLL}(z,\bar{z}) = f(z)e^{-|z|^2/4l_B}$$

para cualquier función holomorfa f(z). Entonces podemos construir los estados específicos  $|0,m\rangle$  en el nivel de Landau más bajo escribiendo b y  $b^{\dagger}$  como operadores diferenciales [11]. Encontramos

$$b = -i\sqrt{2}\left(l_B\partial + \frac{\bar{z}}{4l_B}\right) \text{ y } b^{\dagger} = -i\sqrt{2}\left(l_B\bar{\partial} - \frac{z}{4l_B}\right).$$

El estado más bajo  $\psi_{LLL,m=0}$  es aniquilado por ambos a y b. Hay un único estado dado por

 $\psi_{LLL,m=0} \sim \left(\frac{z}{l_B}\right)^m e^{-|z|^2/4l_B},$ 

esos son autoestados de momento angular. Donde el operador de momento angular [18] es

$$J = i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \hbar (z\partial - \bar{z}\bar{\partial}). \tag{1.31}$$

Entonces, aplicando al estado de Landau de nivel más bajo obtenemos

$$J\psi_{LLL,m} = \hbar m \psi_{LLL,m}. \tag{1.32}$$

En simetría gauge los perfiles de las funciones de onda (1.31) forman anillos concéntricos alrededor del origen [11]. El perfil de las funciones de onda no nos dice nada físico, ya que no es invariante gauge.

Sin embargo, merece la pena entenderlo como si pudiéramos ver la degeneración de estados en el gauge simétrico. La función de onda con momento angular m alcanza su máximo en un anillo de radio  $r = \sqrt{2m}l_B$  [15]. Esto significa que en una región con forma de disco de área  $A = \pi R^2$ , el número de estados es rigurosamente

$$\mathcal{N} = R^2/2l_B^2 = A/2\pi l_B^2 = \frac{eBA}{2\pi\hbar}$$

lo cual concuerda con el resultado (1.22).

Aun hay otra forma de ver esta degeneración que hace contacto con la física clásica [11]. La solución más general para las ecuaciones clásicas de movimiento está dada por (1.2)

$$x(t) = X - R\sin(\omega_B t + \phi) \text{ y } y(t) = Y + R\cos(\omega_B + \phi). \tag{1.33}$$

Tratemos de ver esto con lo que ya sabemos de los estados cuánticos exactos en términos de los niveles de Landau. Para ello, pensaremos sobre las coordenadas etiquetando el centro de la órbita (X, Y) como operadores cuánticos. Podemos ordenar (1.33) para dar

$$X = x(t) + R\sin(\omega_B t + \phi) = x - \frac{\dot{y}}{\omega_B} = x - \frac{\pi_y}{m\omega_B}$$

$$Y = y(t) + R\cos(\omega_B t + \phi) = y + \frac{\dot{x}}{\omega_B} = y - \frac{\pi_x}{m\omega_B},$$
(1.34)

tenemos el centro de masa de coordenadas en términos de operadores cuánticos familiares. En efecto, podemos verificar que bajo evolución temporal [18]

$$i\hbar \dot{X} = [X, H] = 0, i\hbar \dot{Y} = [Y, H] = 0.$$
 (1.35)

Si ahora regresamos al gauge simétrico podemos reemplazar las coordenadas x y y apareciendo aquí con el potencial gauge (1.28). Terminamos con

$$X = \frac{1}{eB}(2eA_y - \pi_y) = -\frac{\bar{\pi}_y}{eB} \text{ y } Y = \frac{1}{eB}(-2eA_x + \pi_x) = \frac{\bar{\pi}_x}{eB}$$

donde hemos usado la expresión (1.29). Las relaciones de conmutación (1.30) nos dice que las posiciones de la órbita en el plano (X,Y) fallan para conmutar entre ellos

$$[X,Y] = il_B^2 \tag{1.36}$$

La falta de conmutatividad es precisamente la longitud magnética  $l_B^2=\hbar/eB$ . El principio de incertidumbre de Heisenberg [18] ahora nos dice que no podemos localizar estados en ambas coordenadas X y Y. En general la incertidumbre está dada por

$$\Delta X \Delta Y = \frac{l_B^2}{2}.$$

Podemos ingenuamente contar de forma semi clásica los estados tomando el plano y encerrando en una región de área  $2\pi l_B^2$ . El número de estados en un área A [15] es

$$\mathcal{N} = \frac{A}{\Delta X \Delta Y} = \frac{A}{2\pi l_B^2} = \frac{eBA}{2\pi \hbar}.$$

# 1.5. Flujo espectral

Para ver como el potencial gauge  $\overrightarrow{A}$  puede afectar la física, consideremos un solenoide de área A, portando campo magnético  $\overrightarrow{B}$  y por tanto flujo  $\Phi = BA$ . Fuera del solenoide el campo magnético es cero, sin embargo, el vector potencial no

lo es [15]. Usando el teorema de Stokes el cual nos dice que la integral de linea fuera del solenoide está dada por

$$\oint \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{r} = \int \mathbf{B} \cdot d\overrightarrow{S} = \Phi.$$

Podemos resolverlo de una manera más fácil haciendo uso de las coordenadas polares, tenemos

$$A_{\phi} = \frac{\Phi}{2\pi r}.$$

Ahora consideremos una partícula cargada restringida a un anillo de radio r fuera del solenoide. El único grado dinámico de libertad es la coordenada angular  $\phi \in [0, 2\pi)$ . El Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m}(p_{\phi} + eA_{\phi})^2 = \frac{1}{2mr^2} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2.$$

Las energías de los autoestados son

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{in\phi} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Usando esto en la ecuación de Schorödinger independiente del tiempo  $H\psi=E\psi,$  encontramos el espectro

$$E = \frac{1}{2mr^2} \left( \hbar n + \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left( n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad n \in \mathbf{Z}$$

Note que si  $\Phi$  es un múltiplo entero del cuanto de flujo  $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ , entonces el espectro no es afectado por el solenoide.

Supongamos ahora que el solenoide es retirado y la partícula es posicionada en el estado fundamental n=0. Si incrementamos el flujo entonces, para cuando hayamos llegado a  $\Phi=\Phi_0$ , el estado n=0 se habrá transformado en el estado etiquetado con n=1. Similarmente, cada estado n=0 es desplazado al siguiente estado, n=0. Este es un ejemplo de un fenómeno llamado flujo espectral: bajo una cambio de parámetro, en este caso  $\Phi$ , el espectro del Hamiltoniano cambia, o "fluye". A medida que aumentamos el flujo por una unidad de  $\Phi$  el espectro vuelve a si mismo, pero los estados se han transformado uno en el siguiente [15].

# 1.5.1. El efecto de Aharonov-Bohm

Consideremos una configuración como la anterior donde el campo magnético está localizado en alguna región del espacio. Otra vez, consideremos una partícula la cual está situada fuera de esta región. Sin embargo, esta vez restringimos la partícula a permanecer en una pequeña caja. La física dentro de la caja puede ser interesante, así que la capturaremos incluyendo un potencial  $V(\overrightarrow{x})$  en el Hamiltoniano y, para atrapar la partícula, tomamos este potencial para ser infinito fuera de la caja.

El hecho que la caja sea pequeña se refiere a que el potencial gauge es aproximadamente constante dentro de la caja [11]. Si colocamos el centro de la caja en la posición  $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X}$ , entonces el Hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla + e\overrightarrow{A}(\overrightarrow{X}))^2 + V(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{X}).$$

Empezamos por colocar el centro de la caja en la posición  $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X}_0$  donde el potencial gauge se anula:  $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{X}_0) = 0$  (Es posible hacer una transformación gauge para asegurarnos que  $\overrightarrow{A}$  se anule en cualquier punto que escojamos). Tomamos el estado fundamental para ser

$$\psi(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{X}),$$

el cual está localizado alrededor  $(\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X})$  como debe ser. Notemos que hemos hecho la elección de fase especificando esta función de onda. Ahora movemos lentamente la caja en alguna trayectoria del espacio. Al hacer esto, el potencial gauge  $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X})$  experimentado por la partícula cambia. Es fácil verificar que la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano (1.5.1) se resuelve para el estado

$$\psi(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{X}) = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} \int_{\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X}_0}^{\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X}} \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x}) \cdot d\overrightarrow{x}\right) \psi(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{X}_0).$$

Esto funciona porque cuando la derivada  $\nabla$  se aplica al exponente, este hace un factor el cual cancela el término  $\overrightarrow{eA}$  en el Hamiltoniano.

Antes de continuar definimos la conexión y fase de Berry [15, 23]. La fase de Berry aparece para un Hamiltoniano general el cual escribimos como

$$H(x^{\alpha}, \lambda^i).$$

El Hamiltoniano depende en dos tipos diferentes de variables, los  $x^{\alpha}$  son los grados de libertad del sistema que son las variables que deseamos resolver para cualquier

problema, típicamente son las posiciones o espines de las partículas [11].

En contraste, las otras variables,  $\lambda^i$  son los parámetros del Hamiltoniano, estos son fijos con sus valores determinados por algún aparato externo que probablemente involucra perillas y diales y haces de luces, etc [11].

La idea consiste en escoger los valores de los parámetros  $\lambda$  y colocar el sistema en un autoestado de energía específico  $|\psi\rangle$  el cual se toma para que sea el estado fundamental. Asumimos que este es único (esta suposición puede no ser así) [11]. La conexión de Berry es

$$\mathcal{A}_{i}(\lambda) = -i \left\langle n \middle| \frac{\partial}{\partial \lambda^{i}} \middle| n \right\rangle \tag{1.37}$$

y la fase de Berry se define como

$$e^{i\gamma} = \exp\left(-i\oint_C \mathcal{A}_i(\lambda)d\lambda^i\right)$$
 (1.38)

donde C es una trayectoria cerrada en el espacio de parámetros [15, 23].

Ahora aplicamos el método estándar de Berry: tomamos la caja en el ciclo y lo traemos de vuelta al inicio [15, 23]. La función de onda se convierte en

$$\psi(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{X}) \to e^{i\gamma}\psi(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{X}_0) \text{ con } e^{i\gamma} = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} \oint \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x}) \cdot d\overrightarrow{x}\right). \tag{1.39}$$

Comparando esto a nuestra expresión global para la fase de Berry, vemos que en este contexto particular la conexión de Berry es identificada con el potencial electromagnético

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{X}) = \frac{e}{\hbar}\overrightarrow{A}(\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X}).$$

El electrón tiene carga q=-e pero, en lo que sigue, vamos a necesitar tratar partículas con diferentes cargas. En general, si una partícula de carga q va alrededor de una región conteniendo flujo  $\Phi$ , este recogerá una fase de Aharonov-Bohm [13, 15]

$$e^{iq\Phi/\hbar}$$

Esto tendrá un rol importante en nuestra discusión del efecto Hall cuántico fraccionario. En el siguiente capítulo analizaremos más a fondo los efectos Hall cuántico entero y fraccionario.

### 2. Efecto Hall cuántico

Procederemos a desarrollar con más detalle el efecto Hall cuántico entero y fraccionario y justificar algunos resultados presentados en el capítulo 1, como la cuantización de la conductividad Hall y la presencia de niveles de llenado fraccionarios. La invarianza gauge y la topología del sistema permiten llegar a tales conclusiones. También como el desorden afecta en los estados de energía y permite la existencia de las mesetas en rangos de campo magnético.

## 2.1. El efecto Hall cuántico entero

Este fenómeno puede ser entendido sin tomar en cuenta las interacciones entre electrones. Esto quiere decir que asumiremos que los estados cuánticos para una única partícula en un campo magnético como el descrito en la sección (1.4) mantendrá los estados cuánticos cuando hayan muchas partículas presentes [11]. La única manera que una partícula sepa de la presencia de otra será por el principio de exclusión de Pauli.

### 2.1.1. Niveles de Landau llenos

El dato experimental para la resistividad Hall muestra un número de mesetas etiquetadas por un entero  $\nu$ . Mientras, el espectro de energía forma niveles de Landau, también etiquetados por un entero, resulta ser que esos enteros son los mismos que  $\rho_{xy} = 2\pi\hbar/e^2\nu$  y cuando precisamente el nivel de Landau  $\nu$  esta lleno [15].

Sabemos que en una meseta, la resistividad Hall toma el valor

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}$$

con  $\nu \in \mathbb{Z}$ . Pero, del cálculo clásico en el modelo de Drude, tenemos la expectación

que la conductividad Hall debe depender en la densidad de electrones, n

$$\rho_{xy} = \frac{B}{ne},$$

vemos que la densidad necesaria para obtener la resistividad de la  $\nu$ -ésima meseta es

$$n = \frac{B}{\Phi_0} \nu \tag{2.1}$$

cuando  $\nu$  niveles de Landau están llenos [15]. Hay un hueco en el espectro de energía. Para ocupar el siguiente estado el costo en energía es  $\hbar\omega_B$  donde  $\omega_B=eB/m$  es la frecuencia de ciclotrón [15]. Mientras estemos en temperaturas  $k_BT\ll\hbar\omega_B$ , esos estados se mantendrán vacíos [15]. Cuando ponemos un pequeño campo eléctrico, no hay lugar para el movimiento de los electrones: estos se atascan en su posición como un aislante [13]. Quiere decir que el tiempo de dispersión  $\tau\to\infty$  y tenemos  $\rho_{xx}=0$ .

Ya conocemos que la velocidad de la partícula está dada por

$$m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$$

donde  $p_i$  es el momento canónico. La corriente es  $\mathbf{I} = -e\dot{\mathbf{x}}$ , lo cual significa que, en la perspectiva de la mecánica cuántica, la corriente total está dada por

$$I = \frac{e}{m} \sum_{\text{Estados llenos}} \langle \psi | - i\hbar \nabla + e\mathbf{A} | \psi \rangle$$

Es mejor ver este tipo de cálculos en el gauge de Landau,  $\mathbf{A} = xB\hat{\mathbf{y}}$ . Introducimos un campo eléctrico E en la dirección x tal que el Hamiltoniano esté dado por (1.24) y los estados por (1.25). Con el nivel  $\nu$  de Landau lleno, la corriente en la dirección x es

$$I_{x} = \frac{e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{k} \langle \psi_{n,k} | -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} | \psi_{n,k} \rangle = 0$$

Esto se anula debido al cálculo del valor de expectación del momento del oscilador armónico [18]. Mientras, la corriente en la dirección y es

$$I_{y} = -\frac{e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{k} \langle \psi_{n,k} | -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + exB | \phi_{n,k} \rangle = -\frac{e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{k} \langle \psi_{n,k} | \hbar k + eBx | \psi_{n,k} \rangle.$$

El segundo término de arriba está calculando el valor esperado de la posición  $\langle x \rangle$  de los autoestados. Pero sabemos de (1.21) y (1.25) que esos estados de oscilador

armónico están desplazados del origen, así que  $\langle \psi_{n,k} | x | \psi_{n,k} \rangle = -\hbar k/eB - mE/eB^2$  [11, 18]. El primero de esos términos cancela el término  $\hbar k$  en la expresión para  $I_y$ . Se tiene la expresión

$$I_y = e\nu \sum_k \frac{E}{B}.$$
 (2.2)

La suma sobre k solo da el número de electrones los cuales se calcularon en (1.22) para ser  $N = AB/\Psi_0$  [13, 15]. Dividimos por el área para obtener la densidad de corriente **J** en vez de la corriente **I**. El resultado de esto es

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ e\nu E/\Phi_0 \end{pmatrix}.$$

Comparando la definición del tensor de conductividad (1.6), se obtiene

$$\sigma_{xx} = 0 \text{ y } \sigma_{xy} = \frac{e\nu}{\Phi_0} \implies \rho_{xx} = 0 \text{ y } \rho_{xy} = -\frac{\Phi_0}{e\nu} = -\frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}.$$
 (2.3)

Que es exactamente lo visto en la meseta del efecto Hall cuántico entero.

#### 2.1.1.1. Modos de borde

Hay un par de aspectos que la descripción de arriba no captura. Una de esas es el rol jugado por el desorden y el otro son los modos de borde del sistema [5, 15].

Consideremos partículas moviéndose en círculos en un campo magnético. Para un campo magnético fijo, todo el movimiento de las partículas es en una dirección, digamos en contra de las agujas del reloj. Cerca de los bordes de la muestra, las órbitas deben chocar con la frontera [5, 15]. Como todo el movimiento es en contra de las agujas del reloj, la única opción abierta de estas partículas es recuperar su órbita [5, 15]. El resultado es un movimiento en salto en el cual las partículas a lo largo del límite unidimensional se mueven en una sola dirección [5, 15]. Una partícula restringida a moverse en una dirección a lo largo de un linea se dice que es quiral [5, 15]. Las partículas que se mueven en una dirección en un lado de la muestra, y en la dirección opuesta en el otro lado de la muestra. Decimos que las partículas tienen quiralidad opuesta en los dos lados. Esto asegura que la corriente neta, en la ausencia de un campo eléctrico, se anule.

Los modos de borde también aparecen en teoría cuántica, se considera el gauge de Landau y una geometría rectangular, la cual es finita solo en la dirección x [5, 15].

El Hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (p_y + eBx)^2) + V(x).$$

En la ausencia del potencial, se sabe que las funciones de onda son Gaussianas de ancho  $l_B$  (1.20) [18]. Si el potencial es suave sobre distancias de escala  $l_B$ , entonces, para cada estado, podemos hacer una expansión de Taylor alrededor de su localización X. Cada función de onda entonces experimenta el potencial

$$V(x) \approx V(X) + (\partial V/\partial x)(x - X) + \dots$$

Eliminamos el término cuadrático y, por supuesto, el término constante puede se despreciado. El resultado es un potencial lineal con una velocidad de desvío en la dirección y (1.27), esta vez dada por

$$v_y = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Cada una de las funciones de onda, etiquetadas por su momento k, se queda en una posición diferente x,  $x=-l_B^2$  y tiene una diferente velocidad de desvío. En particular, los modos en cada borde son ambos quirales, moviéndose en direcciones opuestas:  $v_y > 0$  en la izquierda, y  $v_y < 0$  en la derecha [5, 15]. Esto concuerda con el resultado clásico de salto de órbitas.

Tener un modo quiral es algo especial. Hay un teorema el cual establece que no podemos tener partículas quirales cargadas moviéndose a lo largo de una cadena, tiene que haber partículas que también puedan moverse en direcciones opuestas. En el lenguaje de la teoría de campo, esto es llamado la anomalía quiral [5, 15]. En el lenguaje de la física de la materia condensada, con partículas moviéndose en un latice, esto se sigue del teorema de Nielsen-Ninomiya [11]. La razón de que el ejemplo de una partícula en un campo magnético evita esos teoremas es porque los fermiones quiral viven en la frontera de un sistema dos dimensional, en vez de una cadena unidimensional. Es parte de la historia general: hay fenómenos físicos los cuales pueden tomar lugar en la frontera de un sistema [11].

Ahora veamos que sucede cuando llenamos los estados disponibles. Hacemos esto introduciendo un potencial químico  $E_F$  [11]. Los estados son etiquetados por el momento en  $y \hbar k$  pero, como hemos visto, este puede ser igualmente entendido como la posición del estado en la dirección x.

De nuestro entendimiento usual de aislantes y conductores, podríamos decir que

el interior (bulk) del material es un aislante (porque todos los estados en la banda están llenos) pero el borde del material es un metal [4]. Lo que se hace es introducir una diferencia de potencial  $\Delta\mu$  en los dos lados de la muestra.

Para calcular la corriente resultante necesitamos sumar sobre los estados llenos. Pero, en el nivel de nuestra aproximación, esto es equivalente a integrar sobre x

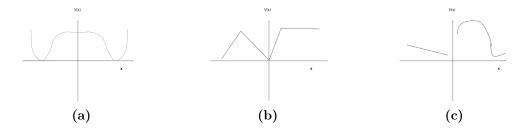
$$I_y = -e \int \frac{dk}{2\pi} v_y(k) = \frac{e}{2\pi l_B^2} \int dx \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e}{2\pi \hbar} \Delta \mu.$$
 (2.4)

El voltaje Hall es  $eV_H = \Delta \mu$ , dándonos la conductividad Hall

$$\sigma_{xy} = \frac{I_y}{V_H} = \frac{e^2}{2\pi\hbar},\tag{2.5}$$

que es la conductividad esperada para un único nivel de Landau.

Ahora la corriente está compartida entre todos los estados. Sin embargo, la parte positiva sobre el cálculo (2.4) es que no le importa la forma que el potencial V toma. Siempre y cuando este sea lo suficientemente suave, la conductividad Hall resultante se mantiene cuantizada (2.5), ver la figura 2.1. Debido a esto se podría escoger un potencial aleatorio y aún obtendríamos la respuesta cuantificada (2.4) siempre que el potencial aleatorio no se extienda por encima de  $E_F$ . Todo lo descrito arriba es



**Figura 2.1.** Potencial contra posición. En (2.1a) se muestra un potencial adecuado y en (2.1b) y (2.1c) se muestran potenciales que no son suaves. Elaboración propia.

cierto para un único nivel de Landau. Es posible generalizar a múltiples niveles de Landau, siempre y cuando el potencial químico  $E_F$  permanezca entre los niveles de Landau [11]. Correspondientemente hay n tipos de modos quiral en cada borde.

Una segunda razón de por que los modos quiral son especiales es que son difíciles de interrumpir [5]. Si se añaden impurezas al sistema, estos dispersarán los electrones [5]. Típicamente la dispersión hace que los electrones reboten alrededor en direcciones aleatorias y el efecto neto es frecuentemente que los electrones no se alejen demasiado pero, para modos quiral esto no es posible simplemente porque todos los estados se mueven en la misma dirección, eso significa que las corrientes

portadas por los modos quiral son inmunes a impurezas [5].

### 2.1.2. Robustez de los estados Hall

Los resultados anteriores muestran que si un número entero de niveles de Landau están llenos, entonces las resistividades longitudinal y de Hall son observadas en la meseta. Pero esto no explica por que esas mesetas existen en primer lugar, ni porque hay saltos abruptos entre diferentes mesetas.

Para ver el problema, supongamos que fijamos la densidad de electrón n. Entonces únicamente llenamos los niveles de Landau cuando el campo magnético es exactamente  $B = n\Phi_0/\nu$  para algún entero  $\nu$ .; Pero que pasa con el resto del tiempo cuando  $B \neq n\Phi_0/\nu$ ? Ahora el nivel de Landau solo está parcialmente lleno. Cuando aplicamos un pequeño campo eléctrico, hay estados accesibles para los electrones para esparcirse. La conductividad longitudinal  $\sigma_{xx}$  seguramente será distinta de cero, mientras la conductividad Hall será diferente del valor cuantizado (2.3) [11]. Sin embargo, todo el punto del efecto Hall cuántico es que los experimentos revelan que los valores cuantizados para la resistividad (2.3) persisten sobre un rango de campo magnético.

### 2.1.2.1. El rol del desorden

Resulta que las mesetas deben su existencia al desorden. Esto aparece porque las muestras experimentales son inherentemente sucias [11]. Estos contienen impurezas las cuales pueden ser modeladas por la adición de un potencial aleatorio V(x) al Hamiltoniano [11]. Hay una peculiaridad en esto, la precisión con la cual esos enteros  $\nu$  son medidos es debido a la suciedad [13].

Para ver como funciona, pensemos sobre lo que probablemente el desorden le hará al sistema. La primero es que este dividirá los autoestados degenerados que forman un nivel de Landau [11]. En el terreno general de la teoría de perturbación cuántica: cualquier perturbación, la cual no preserva una simetría, romperá la degeneración [18]. También pediremos que la fuerza del desorden sea pequeña relativa al de separación de los niveles de Landau

$$V \ll \hbar \omega_B.$$
 (2.6)

En la practica quiere decir que las muestras que exhiben el efecto Hall cuántico actualmente tienen que ser muy limpias [11]. Es decir, se necesita de desorden, pero

no demasiado.

Hay un segundo efecto del desorden: convierte muchos de los estados cuánticos de extendidos a localizados [13, 11]. Aquí, un estado extendido abarca todo el sistema, en constraste, un estado localizado está restringido a permanecer en una región del espacio [11]. Podemos ver la existencia de esos estados localizado en una perspectiva semi clásica la cual se sostiene si el potencial varía apreciablemente en escalas de distancias mucho más grandes que la longitud magnética  $l_B$ 

$$|\nabla V| \ll \frac{\hbar \omega_B}{l_B}.$$

El centro de la órbita, X entonces se desvía a lo largo de equipotenciales. Para visualizarlo, recordemos que podemos introducir operadores cuánticos (X,Y) describiendo el centro de la órbita (1.34)

$$X = x - \frac{\pi_y}{m\omega_B} y Y = y + \frac{\pi_x}{m\omega_B}$$

con  $\pi$  el momento canónico (1.14). La evolución temporal de esos operadores está dada por

$$\begin{split} i\hbar \dot{X} &= [X,H+V] = [X,V] = [X,V] \frac{\partial V}{\partial Y} = i l_B^2 \frac{\partial V}{\partial Y} \\ i\hbar \dot{Y} &= [Y,H+V] = [Y,V] = [Y,V] \frac{\partial V}{\partial X} = -i l_B^2 \frac{\partial V}{\partial X}, \end{split}$$

donde hemos usado el hecho (1.35) que, en la ausencia de un potencial [X, H] = [Y, H] = 0, junto con las relaciones de conmutación  $[X, Y] = il_B^2$  (1.36). Esto dice que el centro de masa se desvía en una dirección (X, Y) la cual es perpendicular a  $\nabla V$ : en otras palabras, el movimiento es a lo largo de equipotenciales.

Para la conductividad, la distinción entre estados localizados y extendidos es una importante. Solo los estados extendidos pueden transportar carga de un lado de la muestra a otro [11]. Así esos estados pueden contribuir a la conductividad.

Ahora veamos el tipo de comportamiento esperado para la conductividad. Supongamos que se han llenado todos los estados extendidos en un nivel de Landau dado y consideremos que pasa a medida que disminuye B con un n fijado [13]. Cada nivel de Landau puede acomodar unos pocos electrones. Pero en vez de saltar al siguiente nivel, comenzamos a poblar los estados localizados [13]. Ya que estos no pueden contribuir a la corriente, la contribución no cambia. Eso conduce a exactamente el tipo de meseta que observamos, con constante de conductividades sobre un rango de campos magnéticos [13].

Así la presencia de desorden explica la presencia de mesetas. Pero ahora tenemos que revisar el argumento original de por que las resistividades toman los valores cuantizados específicos (2.3). Esos fueron calculados asumiendo que todos los estados en el nivel de Landau contribuyen a la corriente. Ahora sabemos que muchos de esos estados están localizados por impurezas y no transportan carga. Muy probablemente esperamos el valor de la resistividad diferente. Resulta no ser así. Hay que remarcar que la corriente portada por los estados extendidos incrementa para compensar la falta de corriente transportada por los estados localizados [13]. Esto asegura que las resistividades se mantengan cuantizadas como (2.3) a pesar de la presencia de desorden [13]. Veamos a que se debe esto.

### 2.1.2.2. El rol de la invarianza Gauge

En vez de considerar electrones moviéndose en una muestra rectangular, consideraremos electrones moviéndose en una anillo. Esto es llamado el *anillo de Corbino*, figura (2.2). Usualmente argumentamos que si la conductividad Hall está cuantizada entonces no debería depender de la geometría de la muestra.

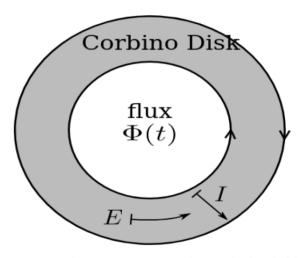


Figura 2.2. Cuando se enciende un campo magnético a lo largo del eje (B apunta directamente hacia afuera de la pantalla), la fuerza de Lorentz impulsa un componente circular de corriente y la resistencia entre los bordes interior y exterior aumenta. Este aumento de resistencia debido al campo magnético se llama magnetorresistencia. Tomado de [1].

Lo bueno acerca de la geometría del anillo es que provee una ayuda extra, en adición al campo magnético de fondo B el cual penetra la muestra, podemos introducir un flujo adicional  $\Phi$  a través del centro del anillo [11]. Dentro del anillo,  $\Phi$  es

localmente un gauge puro.

Primero veamos lo que  $\Phi$  hace con la conductividad Hall. Supongamos que se incrementa lentamente  $\Phi$  de 0 a  $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ . Aquí, por "lentamente" quiere decir que toma un tiempo  $T\gg 1/\omega_B$ . Se induce una fuerza electromagnética (fem) alrededor del anillo,  $\mathscr{E}=-\partial\Phi/\partial t=-\Phi_0/T$ . Suponga que podemos argumentar que los electrones son transferidos del interior del círculo al exterior de este en el tiempo T. Esto podría resultar en una corriente  $I_r=-ne/T$ .

$$\rho_{xy} = \frac{\mathscr{E}}{I_r} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{n}.$$
 (2.7)

Por tanto, el objetivo es argumentar que los n electrones son en efecto transferidos a través del anillo a medida que el flujo es aumentado a  $\Phi_0$ .

La idea clave es que necesitamos del flujo espectral, introducido al final del capítulo anterior. El espectro del Hamiltoniano es el mismo cuando  $\Phi$  es un múltiplo entero de  $\Phi_0$ . Sin embargo, si empezamos con un autoestado de energía particular cuando  $\Phi = 0$ , este evolucionará en un autoestado diferente de energía con  $\Phi = \Phi_0$ . Como el cambio es hecho adecuadamente lento, sobre un tiempo  $T \gg 1/\omega_B$ , el teorema adiabático asegura que el autoestado de energía final debe permanecer en el mismo nivel de Landau como el estado inicial [18].

Para ilustrar esto, primero veamos la situación sin considerar desorden. Para la geometría del anillo, es conveniente usar el gauge simétrico y coordenadas radiales,  $z = x - iy = re^{i\phi}$ . Las funciones de onda en el nivel de Landau más bajo son (1.31),

$$\psi_m \sim z^m e^{-|z|^2/4l_B^2} = e^{im\phi} r^m e^{-r^2/4l_B^2}.$$

La m-ésima función de onda es fuertemente puntiaguda en un radio  $r \approx \sqrt{2ml_B^2}$  (donde m es escogido entero tal que la función de onda permanezca dentro del anillo) [11]. Si incrementemos el flujo de  $\Phi = 0$  a  $\Phi = \Phi_0$  las funciones de onda se desplazan de m a m+1.

$$\psi_m(\Phi = 0) \to \psi_m(\Phi = \Phi_0) = \psi_{m+1}(\Phi = 0).$$

Quiere decir que cada estado se mueve hacia fuera, de radio  $r = \sqrt{2ml_B^2}$  a  $r = \sqrt{2(m+1)l_B^2}$ . El resultado neto es que, si todos los estados en el nivel de Landau están llenos, un único electrón es transferido al anillo interno hacia el exterior del anillo a medida que el flujo es incrementado de  $\Phi = 0$  a  $\Phi = \Phi = \Phi_0$  [11]. Si n niveles de Landau están llenos, entonces n electrones son transferidos del interior al exterior [11] y la resistividad Hall está dada por (2.7) como es requerido.

Ahora veamos como esto cambia en la presencia de desorden. En coordenadas polares, el Hamiltoniano toma la forma

$$H_{\Phi=0} = \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left( -\frac{i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{eBr}{2} \right)^2 \right] + V(r, \phi)$$

donde  $V(r, \phi)$  es el potencial aleatorio capturando el efecto del desorden. Notemos que el potencial depende en  $\phi$ , así el momento angular no es un buen número cuántico en este sistema. Añadiendo el flujo a través del centro cambia el Hamiltoniano a

$$H_{\Phi=0} = \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left( -\frac{i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{eBr}{2} \frac{e\Phi}{2\pi r} \right)^2 \right] + V(r, \phi).$$

El flujo  $\Phi$  afecta solo a los estados extendidos, este no cambia los estados localizados [11]. Para notar esto, intentemos deshacer el flujo por una transformación

$$\psi(r,\phi) \to e^{-ie\Phi\phi/2\pi\hbar}\psi(r,\phi).$$

Para los estados localizados, donde  $\psi$  es distinto de cero solo en alguna región finita, no hay problema en hacer esto. Sin embargo, para los estados extendidos, que se envuelven alrededor del anillo, también tenemos el requerimiento que la función de onda  $\psi$  es univaluada como  $\phi \to \phi + 2\pi$  [11]. Vemos que esto solo es cierto cuando  $\Phi$  es un múltiplo entero de  $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ .

El resultado de este argumento es que el espectro del Hamiltoniano es otra vez invariante por la izquierda cuando  $\Phi$  es un múltiplo entero de  $\Phi_0$  [11]. Pero esta vez como el flujo está aumentando de 0 a  $\Phi$ , los estados localizados no cambian [11]. Solo los estados extendidos se someten al flujo espectral; estos solo deben mapearse a ellos mismos.

#### 2.1.2.3. El rol de la topología

Describiremos una configuración en la cual podremos ver las fuertes conexiones entre la topología y la conductividad Hall [5]. La configuración esta cercanamente relacionada a la invarianza gauge que acabamos de ver. Sin embargo, consideraremos el sistema Hall en un toro espacial  $\mathbf{T}^2$ , puede entenderse como un rectángulo con bordes opuestos idénticos [3, 5]. Tomaremos las longitudes de los lados para ser  $L_x$  y  $L_y$ .

Colocamos un campo magnético uniforme B a través del toro. El primer resultado

que necesitamos es que B obedece la condición de cuantización de Dirac [5].

$$BL_x L_y = \frac{2\pi\hbar}{e} n \ n \in \mathbf{Z}$$
 (2.8)

Consideremos funciones de onda sobre el toro y pedimos: ¿que periodicidad requerida debe tener la función de onda? La primera conjetura, es que debemos insistir que las funciones de onda obedecen  $\psi(x,y) = \psi(x+L_x,y) = \psi(x,y+L_y)$ . Pero esto resulta ser también restrictivo cuando hay un flujo magnético a través del toro [5]. En cambio, se tiene que trabajar con parches; en el traslape entre dos parches diferentes. Las funciones de onda deben estar relacionadas por una transformación gauge. Introducimos los operadores de traslación magnética,

$$T(\mathbf{d}) = e^{-i\mathbf{d}\cdot\mathbf{p}/\hbar} = e^{-i\mathbf{d}\cdot(i\nabla + e\mathbf{A})/\hbar}$$
.

Esos operadores trasladan un estado  $\psi(x,y)$  por vector de posición **d**. Las condiciones de frontera apropiadas serán cuando un estado es trasladado alrededor de un ciclo del toro, este vuelve asi mismo. Así  $T_x\psi(x,y) = \psi(x,y)$  y  $T_y\psi(x,y) = \psi(x,y)$  donde  $T_x = T(\mathbf{d} = (L_x,0))$  y  $T_y = T(\mathbf{d} = (0,L_y))$ 

Es claro de la expresión de arriba que los operadores de traslación no son invariantes gauge: estos dependen en la elección que se haga de **A**. Escogeremos el gauge de Landau  $A_x = 0$  y  $A_y = Bx$ . Con esta elección, las traslaciones en la dirección x son las mismas que esas en la ausencia de un campo magnético, mientras que para las traslaciones en la dirección y escogemos una fase extra [5]. Si tomamos un estado  $\psi(x,y)$ , trasladado alrededor de un ciclo del toro, esto se convierte en

$$T_x \psi(x, y) = \psi(x + L_x, y) = \psi(x, y),$$
  
$$T_y \psi(x, y) = e^{-ieBL_y x/\hbar} \psi(x, L_y) = \psi(x, y).$$

Notemos que podemos ver explícitamente en la última de esas ecuaciones que la función de onda no es periódica en la dirección y:  $\psi(x, y + L_y) \neq \psi(x, y)$ . En cambio, las dos funciones de onda concuerdan solo hasta una transformación gauge.

Sin embargo, esas ecuaciones no son consistentes para ninguna elección de B. Comparando lo que sucede si trasladamos alrededor del ciclo x seguido del ciclo y o si hacemos estos en el orden opuesto tenemos

$$T_y T_x = e^{-ieBL_x L_y/\hbar} T_x T_y, (2.9)$$

ya que ambos requieren devolvernos al mismo estado, debemos tener

$$\frac{eBL_xL_y}{\hbar} \in 2\pi \mathbf{Z}.$$

Esta es la condición de cuantización de Dirac (2.8).

Ahora vamos a perturbar el sistema. Hacemos esto añadiendo dos flujos  $\Phi_x$  y  $\Phi_y$  a través de los ciclos x y y del toro [5], respectivamente. Es decir, que el potencial gauge se convierte como sigue

$$A_x = \frac{\Phi_x}{L_x} \text{ y } A_y = \frac{\Phi_y}{L_y} + Bx.$$

Asumiremos que el estado fundamental es no degenerado y que hay un hueco para el primer estado excitado [5]. Entonces, para el primer orden en teoría de perturbación, el estado fundamental se convierte en

$$|\psi_0\rangle' = |\psi_0\rangle + \sum_{n \neq \psi_0} \frac{\langle n|\Delta H |\psi_0\rangle}{E_n - E_0} |n\rangle.$$

Considerando cambios infinitesimales de  $\Phi_i$ , se puede expresar como

$$\left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_i} \right\rangle = -\frac{1}{L_i} \sum_{n \neq \psi_0} \frac{\langle n | J_i | \psi_0 \rangle}{E_n - E_0} | n \rangle.$$

Y la conductividad Hall sería

$$\begin{split} \sigma_{xy} &= i\hbar L_x L_y \sum_{n \neq \psi_0} \frac{\left\langle \psi_0 \right| J_y \left| n \right\rangle \left\langle n \right| J_x \left| \psi_0 \right\rangle - \left\langle \psi_0 \right| J_x \left| n \right\rangle \left\langle n \right| J_y \left| \psi_0 \right\rangle}{(E_n - E_0)^2} \\ &\qquad \qquad i\hbar \left[ \left\langle \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_y} \middle| \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_x} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_y} \middle| \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_y} \right\rangle \right] \\ &\qquad \qquad = i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial \Phi_y} \left\langle \psi_0 \middle| \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_x} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial \Phi_x} \left\langle \psi_0 \middle| \frac{\partial \psi_0}{\partial \Phi_y} \right\rangle \right], \end{split}$$

esta forma final de escribir la conductividad Hall provee una nueva perspectiva en el efecto Hall cuántico entero.

El espectro del Hamiltoniano solo depende en  $\Phi_i \text{mod} \Phi_0$ , lo que quiere decir que esos parámetros deben ser entendidos como periódicos: el espacio del parámetro de flujo es en si mismo un toro  $\mathbf{T}_{\Phi}^2$  [11]. Ahora queremos parametrizar este toro, para

ello introducimos variables angulares sin dimensión  $\theta_i$ 

$$\theta_i = \frac{2\pi\Phi_i}{\Phi_0} \text{ con } \theta_i \in [0, 2\pi)$$

dado un espacio de parámetros podemos considerar la fase de Berry que aparece cuando los parámetros son variados [15, 23]. Esto es descrito por la conexión de Berry que, en este caso, vive sobre  $\mathbf{T}_{\Phi}^2$  y es

$$\mathcal{A}_i(\Phi) = -i \langle \psi_0 | \frac{\partial}{\partial \theta_i} | \psi_0 \rangle.$$

El campo de fuerza, o curvatura, asociado a la conexión de Berry esta dada por

$$\mathcal{F}_{xy} = \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial \theta_y} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial \theta_x} = -\left[\frac{\partial}{\partial \theta_y} \left\langle \psi \middle| \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta_x} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial \theta_x} \left\langle \psi \middle| \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta_y} \right\rangle\right]$$

Para el toro con flujos es posible escribir

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{\hbar} \mathcal{F}_{xy}.$$

Esta es una buena fórmula. Pero no explica por que  $\sigma_{xy}$  no está cuantizada. Sin embargo, supongamos que promediamos sobre todos los flujos. En este caso integramos sobre el toro  $\mathbf{T}_{\Phi}^2$  de parámetros para obtener

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{\hbar} \int_{\mathbf{T}_{\Phi}^2} \frac{d^2\theta}{(2\pi)^2} \mathcal{F}_{xy},$$

la integral de la curvatura sobre  $\mathbf{T}_{\Phi}^2$ , es el primer número de Chern [12, 5]

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}_{\Phi}^2} d^2 \theta \mathcal{F}_{xy}.$$

Es importante resaltar, que siempre es un entero:  $C \in \mathbb{Z}$  [12]. Se sigue del argumento que se hizo en la cuantización de Dirac. El resultado neto es que si promediamos sobre los flujos, la conductividad Hall es necesariamente cuantizada como

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2\pi\hbar}C. \tag{2.10}$$

La relación entre la conductividad Hall y el número de Chern es usualmente referido al invariante TKNN [5, 15] (Thouless, Kohomoto, Nightingale y den Nijs).

## 2.2. Efecto Hall cuántico fraccionario

Como con el efecto Hall cuántico entero, estos interesantes resultados fueron primero descubiertos por físicos experimentales y no por teóricos [13]. Fue una gran sorpresa cuando, en 1982, las mesetas fueron vistas en fracciones de llenado  $\nu=\frac{1}{3}$  y más tarde en  $\nu=\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\frac{5}{9},\frac{3}{5},\dots$  en el nivel más bajo de Landau y  $\nu=\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{5},\frac{5}{2},\frac{12}{5},\frac{13}{5},\dots$  en el nivel más alto [11], así como muchos otros.

Hay dos cosas que se pueden resaltar. Primero, las interacciones entre electrones deben tener alguna influencia. Y segundo, la respuesta a por qué estas mesetas son complicadas.

Supongamos, por el valor del argumento, que tenemos  $\nu < 1$  tal que el nivel más bajo de Landau está parcialmente lleno. Cada nivel de Landau puede tener  $\mathcal{N} = AB/\Phi_0$  (espín polarizado) electrones, donde B es el campo magnético y A es el área de la muestra. Este es un número macroscópico de electrones. El número de formas para llenar  $\nu \mathcal{N}$  de estos estados es

$$\mathcal{N}!/((\nu\mathcal{N})!(\mathcal{N}-\nu\mathcal{N})!)$$

el cual, usando la fórmula de Stirling, es aproximadamente:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\nu\mathcal{N}} \left(\frac{1}{1-\nu}\right)^{(1-\nu)\mathcal{N}}.$$

Este es un número extraordinariamente grande: una exponencial de una exponencial. El estado fundamental de cualquier nivel de Landau parcialmente lleno es enormemente degenerado [11].

Ahora consideremos el efecto de la interacción de Coulomb entre electrones,

$$V_{\text{Coulomb}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |r_i - r_j|} \tag{2.11}$$

podríamos esperar que tal interacción elevara la degeneración de los estados fundamentales. El enfoque que tomamos fue usar teoría de perturbación degenerada. Pero, en este caso, la degeneración es extraordinaria donde necesitamos diagonalizar una matriz tremendamente grande. Incluso numéricamente, nadie puede hacer esto para una docena de partículas.

Como se mencionó, se esperaba las interacciones de electrones para aumentar la degeneración de los niveles de Landau, resultando en un espectro de estados de ancho  $\approx E_{\text{Coulomb}}$ . Los datos podrían ser bien explicados si este espectro tuviera

huecos en las fracciones de llenado  $\nu$  donde se ven los estados Hall.

Entonces se puede volver a repetir el procedimiento: incluimos algo de desorden, el cual introduce estados localizados dentro del hueco, que luego da lugar tanto a las mesetas en  $\rho_{xy}$  y el observado  $\rho_{xx} = 0$ . Cuanto mayor es la brecha, más prominente es la meseta observada. La historia completa requiere la jerarquía de escala de energías,

$$\hbar\omega_B \gg E_{\text{Coulomb}} \gg V_{\text{desorden}}$$
.

Asumiremos en lo que sigue que este es el caso. La cuestión en la que se centrará en su lugar es: ¿Cual es la física de los estados Hall fraccionarios?

## 2.2.1. Estados de Laughlin

El primer enfoque para el efecto Hall fraccionario fue debido a Laughlin [13], quien descubrió la física en fracciones de llenado

$$\nu = \frac{1}{m}$$

con m un entero impar. Como ya explicamos, es muy difícil diagonalizar el Hamiltoniano exactamente. En su lugar Laughlin simplemente propuso la respuesta, fue motivado por una combinación de intuición física y conjeturas [13].

### 2.2.1.1. La función de onda de Laughlin

La función de onda de Laughlin fue motivada considerando un modelo de juguete. Si se toman dos partículas interactuando en el nivel de Landau más bajo [5]. Tomamos un potencial central arbitrario entre estos

$$V = V(|r_1 - r_2|).$$

En la mecánica clásica aprendimos que problemas como estos se resuelven usando la conservación del momento angular. En la física cuántica, quiere decir que trabajamos con autoestados de momento angular [18]. Como vimos en la sección (1.4) si queremos hablar sobre el momento angular en niveles de Landau, debemos trabajar con simetrías gauge. Las funciones de onda de una partícula en el nivel de Landau más bajo toman la forma (1.31)

$$\psi_m \sim z^m e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

con z = x - iy [13]. Estos estados están localizados en un anillo  $r = \sqrt{2m}l_B$ . El exponente m de esas funciones de onda etiqueta el momento angular. Esto puede verse aplicando el operador de momento angular (1.32)

$$J = i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \hbar (z\partial - \bar{z}\bar{\partial}) \implies J\psi_m = \hbar m\psi_m.$$

Siempre y cuando despreciemos la mezcla entre los niveles de Landau (lo cual es válido si  $\hbar\omega_B\gg V$ ) entonces los autoestados de dos partículas para cualquier potencial deben tomar la forma

$$\psi \sim (z_1 + z_2)^M (z_1 - z_2)^m e^{-(|z_1|^2 + |z_2|^2)/4l_B^2},$$

donde M y m son enteros no negativos, con M determinando el momento angular del centro de masa, y m el momento angular relativo [13]. Notemos que aquí, no se ha hecho el intento de normalizar las funciones de onda. Es sorprendente que podamos escribir los autoestados para una potencial complicado V(r) sin haber resuelto la ecuación de Schorödinger, y es más sorprendente aún que todos los potenciales V(r) tienen los mismos autoestados de energía. Es el requerimiento de posicionarnos en el nivel Landau más bajo lo que nos permite hacer esto [13].

Desafortunadamente, no es posible generalizar argumentos similares para únicamente determinar los autoestados para N>2 partículas. Sin embargo, por motivos generales, cualquier función de onda de los niveles de Landau más bajos deben tomar la forma

$$\psi(z_1, ..., z_n) = f(z_1, ..., z_n) e^{-\sum_{i=1}^{N} |z_i|^2 / 4l_B^2}$$
(2.12)

para alguna función analítica f(z) [13]. Además, esta función debe ser antisimétrica bajo el intercambio de cualesquiera dos partículas  $z_i \leftrightarrow z_j$ , reflejando el hecho que los electrones son fermiones [13].

La propuesta de Laughlin para los estados fundamentales de la función de onda en la fracción de llenado  $\nu=1/m$  es:

$$\psi(z_i) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_{i=1}^n |z_i|^2 / 4l_B^2}$$
(2.13)

Para m un entero par, este puede entenderse como un estado Hall cuántico para bosones [13]. Podemos inferir de la ecuación (2.13) que el prefactor se anula con un cero de orden m cuando dos electrones vienen juntos. Mientras, el factor exponencial decrece rápidamente cuando los electrones se alejan demasiado del origen [13].

La función de onda alcanza su máximo en configuraciones que equilibran esos dos efectos.

Primero veamos que la función de onda tiene la fracción de llenado deseada. Para hacer esto, centrémonos en qué nos está diciendo la función de onda sobre una única partícula, digamos  $z_1$ . Los términos que dependen en  $z_1$  en el prefactor de la función de Laughlin son

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \sim \prod_{i=2}^N (z_1 - z_i)^m$$

lo cual dice que son m(N-1) potencias de  $z_1$ . Es decir que el momento angular máximo de la primera partícula es m(N-1) y así su radio máximo es  $R=\sqrt{2mN}l_B$ . Correspondientemente, el área de los dropletes es  $A\approx 2\pi mNl_B^2$  (donde hemos reemplazado N-1 con N) [13]. Recordemos que el número de estados en el nivel de Landau lleno es  $AB/\Phi_0=A/2\pi l_B^2\approx mN$ . Este argumento nos da la fracción de llenado

$$\nu = \frac{1}{m}.\tag{2.14}$$

El estado de Laughlin (2.13) con m=1 debe describir un nivel de Landau completamente lleno [13]. Pero es algo que podemos calcular en la perspectiva de no interacción y este provee una simple verificación en el ansatz de Laughlin.

Lo siguiente es una función de onda para muchas partículas, revisemos como construir una. Para electrones que no interaccionan. Se supone que N electrones permanecen en estados  $\psi_i$  con i=1,...,N. Debido a que los electrones son fermiones, esos estados deben ser distintos. Para construir la función de onda para varias partículas, necesitamos antisimetría sobre todas las partículas. Esto se logra por el determinante de Slater [14]

$$\psi(x_i) = \begin{vmatrix}
\psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \dots & \psi_1(x_N) \\
\psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \dots & \psi_2(x_N) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\psi_N(x_1) & \psi_N(x_2) & \dots & \psi_N(x_N)
\end{vmatrix}$$
(2.15)

Ahora es posible aplicar esto al nivel de Landau más bajo, con los estados de una partícula, construidos con números cuánticos de momento angular sucesivos

$$\psi_m(z) \sim z^{m-1} e^{-|z|^2/4l_B^2} \ m = 1, ..., N.$$

El determinante de Slater resultante da un estado de la forma general (2.12), con  $f(z_i)$  dado por la función conocida como el determinante de Vandermonde [13, 21]

$$f(z_i) = \begin{vmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_N^0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_3^{N-1} & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j).$$

Para ver esto el determinante es en efecto dado por el factor del producto, notemos que  $\prod_{i < j} (z_i - z_j)$  es el orden más bajo. Mientras tanto, el determinante es completamente antisimétrico y tiene el mismo orden que el factor del producto [13]. Esto asegura que deben ser iguales a un factor numérico general el cual puede ser verificado para ser 1. Vemos que el estado de Laughlin m = 1 en efecto concuerda con la función de onda para el nivel más bajo de Landau lleno.

### 2.2.1.2. Hamiltoniano de prueba

El estado de Landau (2.13) no es el estado fundamental exacto del Hamiltoniano con repulsión de Coulomb. Sin embargo, es posible escribir un Hamiltoniano de prueba cuyo estado fundamental está dado por el estado de Laughlin [11].

Regresemos al problema de dos partículas interactuando a través de un potencial central general  $V(r_1 - r_2)$ , en el nivel más bajo de Landau los autoestados para cualquier potencial son los mismos, caracterizados por dos enteros no negativos [11]: el momento angular del centro de masa M y el momento angular relativo m

$$|M,m\rangle \sim (z_1+z_2)^M (z_1-z_2)^m e^{-(|z_1|^2+|z_2|^2)/4l_B^2}.$$

Debemos tomar m impar si las partículas son fermiones, m par si son bosones.

Los autovalores del potencial V están dados por

$$v_m = \frac{\langle M, n | V | M, n \rangle}{\langle M, m | M, m \rangle}.$$
 (2.16)

Estos autovalores capturan una imagen clara del perfil espacial del potencial [11]. Este se debe a, como hemos visto, que las funciones  $|M, m\rangle$  de onda alcanzan su máximo en un círculo de radio  $r = \sqrt{2m}l_B$ . Correspondientemente, los autovalores son aproximadamente

$$v_m \approx V(r = \sqrt{2ml_B}),\tag{2.17}$$

esto significa que típicamente los valores  $v_m$  son positivos para potenciales repulsivos y negativos para potenciales atractivos.

Sin embargo, los autovalores son discretos. El simple hecho nos está diciendo algo interesante: cada uno de los estados  $|M,m\rangle$  puede ser pensado como un estado ligado de dos partículas, incluso si el potencial es repulsivo [11]. Esto está en marcado contraste con la mecánica cuántica en ausencia de un campo magnético donde no hay estados ligados de energía discreta para un potencial repulsivo, solo estados dispersos con un espectro continuo [18].

Dados los autovalores  $v_m$  podemos siempre reconstruir el potencial V. En este nivel más bajo de Landau, no hay energía cinética y el potencial es el único que contribuye al Hamiltoniano [11]. Es útil escribir esto como

$$H = \sum_{m'} v_{m'} \mathcal{P}_{m'}, \tag{2.18}$$

donde  $\mathcal{P}_m$  es el operador el cual proyecta en estados en los cuales las partículas tienen momento angular relativo m.

Ahora podemos escoger el  $v_m$  que queramos para diseñar nuestro Hamiltoniano. Por supuesto, puede no ser realista cuando escribimos en términos de V(r). Consideremos la elección

$$v_{m'} = \begin{cases} 1 \ m' < m \\ 0 \ m' \ge m \end{cases} \tag{2.19}$$

Este Hamiltoniano significa que podemos pagar un costo de energía si el momento angular relativo de las partículas se pone debajo de algún valor m fijado [11]. Pero no cuesta nada tener un momento angular alto.

Podemos también usar los pseudo potenciales para construir Hamiltonianos para N partículas [11]. Para hacer esto, introducimos el operador  $\mathcal{P}_m(ij)$ . Este proyecta las funciones de onda dentro del estado en el cual las i-ésima y j-ésima partículas tienen momento angular relativo m. Entonces construimos el Hamiltoniano como

$$H = \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{i < j} v_{m'} \mathcal{P}_{m'}(ij), \tag{2.20}$$

notemos que  $\mathcal{P}_m(ij)$  y  $\mathcal{P}_m(kj)$  no conmutan el uno con otro. Esto hace que estos Hamiltonianos sean difíciles de resolver.

Ahora consideremos el Hamiltoniano de muchas partículas con  $v_{m'}$  dado por (2.19). Esta vez, pagamos un costo de energía cuando el momento angular de cualquier par de partículas es menor que m [11]. Podemos evitar este costo de energía

incluyendo un factor de  $(z_i-z_j)^m$  para cada par de partículas, y escribiendo una función de onda de la forma

$$\psi(z_i) = s(z_i) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_i |z_i|^2 / 4l_B^2}, \qquad (2.21)$$

 $s(z_i)$  puede ser polinómica mente simétrica en el  $z_i$  para preservar las estadísticas de las partículas [11].

Hay algo especial sobre este estado: entre todos los estados (2.21), este es el más compacto [11]. Vimos que este toma un área  $A = 2\pi mNl_B^2$ . Cualquier estado con  $s(z_i) \neq 1$  necesariamente se extiende sobre un área espacial grande [11]. Significa que la función de onda de Laughlin será el estado fundamental si también añadimos un potencial de confinamiento al sistema [11].

Se puede establecer en una manera ligeramente diferente en términos de momento angular. Se sabe que estados con momento angular más alto permanecen en radios más grandes. Esto significa que podemos tomar el operador de momento angular J como un representante para el potencial de confinamiento y considerar el Hamiltoniano

$$H = \sum_{m'=1}^{m-1} \sum_{i < j} \mathcal{P}_{m'}(ij) + \omega J.$$
 (2.22)

La función de onda de Laughlin tiene la energía más baja:  $E_0 = \frac{1}{2}\omega m N(N-1)$  [13]. Cualquier función de onda de la forma (2.21) con  $s(z_i) \neq 1$  tiene una extensión espacial más grande que el estado basal, y así el momento angular más grande, y así el costo de energía extra debido al segundo término; cualquier función de onda con la extensión espacial más pequeña que la función de onda de Laughlin necesariamente tiene un par de partículas con momento angular relativo menor que m y así paga un costo de energía debido al primer término [11].

El hecho que esto cuesta una energía finita para exprimir la función se espera que se mantenga también para los Hamiltonianos más realistas [11]. Usualmente es expresado diciendo que el fluido Hall cuántico es *incompresible*.

# 2.2.2. Cuasi huecos y cuasi partículas

Solo discutimos el estado fundamental  $\nu = 1/m$  de sistemas Hall cuánticos. Ahora consideramos las excitaciones. Hay dos tipos de excitaciones cargadas, conocidas como cuasi huecos y cuasi partículas [11].

Empecemos por los cuasi huecos. La función de onda describiendo un cuasi hueco

en la posición  $\eta \in \mathbb{C}$  es

$$\psi_{\text{hueco}}(z;\eta) = \prod_{i=1}^{N} (z_i - \eta) \prod_{k < j} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 / 4l_B^2}.$$
 (2.23)

Vemos que la densidad de electrón ahora se anula en la posición  $\eta$ . En otras palabras, hemos creado un "hueco" en el fluido de electrón. Mas generalmente, podemos introducir M cuasi huecos en el fluido Hall cuántico en posiciones  $\eta_j$  con j=1,...,M, con función de onda

$$\psi_{\text{M-hueco}}(z;\eta) = \prod_{j=1}^{M} \prod_{i=1}^{N} (z_i - \eta_j) \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 / 4l_B^2}.$$
 (2.24)

El cuasi hueco tiene una propiedad remarcable: este porta una fracción de la carga eléctrica del electrón [11]. En nuestra convención, el electrón tiene carga -e; el cuasi hueco tiene carga  $e^* = +e/m$ . Una explicación heurística de la carga fraccionaria es notar que si colocamos m cuasi huecos en el mismo punto  $\eta$  entonces la función de onda se convierte en

$$\psi_{\text{M-hueco}}(z;\eta) = \prod_{i=1}^{N} (z_i - \eta_j)^n \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 / 4l_B^2}.$$

Si  $\eta$  era una variable dinámica, a diferencia de un parámetro, esto es solo la función de onda original con un electrón extra en posición  $\eta$  [11]. Pero debido a que  $\eta$  no es una variable dinámica, en cambio un parámetro, realmente es una función de onda de Laughlin que describe un déficit de un único electrón en la posición  $\eta$  [11]. Esto significa que m huecos actúan como un déficit de un único electrón, así un cuasi hueco es 1/m parte de un electrón. Debe por tanto portar una carga +e/m.

También hay excitaciones del fluido Hall cuántico los cuales portan carga  $e^* = -e/m$ , es decir, el mismo signo como la carga de un electrón. Estas son cuasi partículas [11, 13]. Parece más difícil escribir autoestados de cuasi partículas comparadas a estados de cuasi huecos. Para ver este problema, notemos que queremos incrementar la densidad de electrones dentro el fluido Hall y, así, decrece el momento angular relativo de algún par de electrones [18]. En el caso de cuasi hueco, era simple incrementar el momento angular: por ejemplo, para un hueco en el origen simplemente necesitamos multiplicar la función de onda de Laughlin por el factor  $\prod_i z_i$ . Pero ahora que queremos disminuir el momento angular no estamos permitidos para dividir por  $\prod_i z_i$  como la función de onda resultante es gravemente singular. Ni podemos

multiplicar por  $\prod_i \bar{z}_i$ . Porque aunque este disminuye el momento angular, la función de onda resultante ya no permanece en el nivel de Landau más bajo [11]. En cambio, una manera simple de reducir el grado de un polinomio es derivarlo. Esto nos conduce a una función de onda candidata para la cuasi partícula

$$\psi_{\text{partícula}}(z;\eta) = \left[\prod_{j=1}^{N} \left(2\frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{\eta}\right) \prod_{k < l} (z_k - z_i)^m\right] e^{-\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2/4l_B^2}.$$
 (2.25)

La derivada actúa solo en el polinomio prefactor, no en el exponente.

#### 2.2.2.1. Excitaciones neutrales

También mencionamos que hay excitaciones colectivas neutrales del fluido Hall cuántico en el cual la densidad y carga se aniquilan en un comportamiento tipo onda sobre largas distancias [11]. Esos son similares a las excitaciones del fotón en superfluidos, excepto el costo de energía que no se anula a medida que el momento  $\hbar k \to 0$ . El hecho que estos modos están gapeados en k=0 es el enunciado que el fluido Hall es incompresible.

### 2.2.2.2. Carga fraccional

La cuestión más básica sobre los estados de Laughlin es: ¿si este reproduce correctamente la conductividad Hall? Para ver esto, podemos repetir el argumento del disco de Corbino que se utilizó anteriormente. Al igual que antes, se introdujo un flujo  $\Phi(t)$  dentro del centro del anillo el cual fue aumentado lentamente de cero a  $\Phi_0$ . Esto induce un flujo espectral así que cuando alcanzamos  $\Phi = \Phi_0$  nos quedamos en un nuevo autoestado del Hamiltoniano donde el momento angular de cada electrón es incrementado por uno. Esto se logra multiplicando la función de onda por un factor de  $\prod_i z_i$  [11]. Incluso se podría reproducir en el caso donde ambos, el círculo interno y el solenoide insertado se vuelven ligeramente más pequeños. En este caso multiplicar por  $\prod_i z_i$  nos devuelve precisamente la función de onda del cuasi hueco (2.23) con  $\eta = 0$ .

Aprendimos que a medida que incrementamos  $\Phi$  de cero a  $\Phi_0$  una partícula de carga -e/m es transferida del anillo interno al externo. Con lo cual inferimos que todo el electrón es transferido solo cuando el flujo aumenta por  $m\Phi_0$  unidades. La conductividad Hall resultante es

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{1}{m}.$$

Vale la pena hacer una pausa para describir en que sentido las partículas del fluido Hall cuántico genuinamente portan carga fraccional. Primero, debemos establecer lo siguiente: no se ha violado ninguna ley fundamental de la física. Si aislamos el fluido Hall cuántico y medimos la carga total siempre encontraremos un múltiplo entero de la carga del electrón.

Sin embargo, si se agrega un electrón (o un hueco) dentro del fluido Hall cuántico, este se dividirá en m cuasi partículas (o cuasi huecos) aparentemente independientes [13]. Los estados tienen una degeneración etiquetada por las posiciones  $\eta_i$  de los cuasi objetos. Además, esas posiciones responderán a influencias externas, como un potencial de confinamiento o un campo eléctrico aplicado, en el sentido que podemos construir soluciones para la ecuación de Schrödinger dotando las posiciones con un adecuado  $\eta_i(t)$  dependiente del tiempo [13]. Todo esto se refiere a que los objetos cargados fraccionariamente verdaderamente actúan como partículas independientes.

La carga fraccional puede ser vista experimentalmente en pruebas de ruido de disparo [13].

#### 2.2.2.3. Aniones.

Sabemos que las partículas cuánticas caen dentro de dos categorías: bosones y fermiones. Sin embargo, si las partículas están restringidas a moverse en un plano dos dimensional entonces hay una laguna para el argumento usual y muchas cosas más interesantes pueden presentarse.

Primero el argumento usual nos dice que debemos restringirnos a bosones y fermiones. Tomamos dos partículas idénticas descritas por la función de onda  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Ya que las partículas son idénticas, todas las probabilidades deben ser las mismas si las partículas son intercambiadas [18]. Es decir que  $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2$  así que, en el intercambio, las funciones de onda difieren por como máximo una fase

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\pi\alpha} \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \tag{2.26}$$

Ahora supongamos que intercambiamos otra vez. Realizar dos intercambios es equivalente a una rotación [18], así debemos regresar donde empezamos. Esto da la condición

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{2i\pi\alpha} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \implies e^{2i\pi\alpha} = 1.$$

Hay dos posibilidades familiares, el bosón ( $\alpha = 0$ ) o el fermión ( $\alpha = 1$ ).

El punto débil del enunciado es que cuando rotamos dos partículas 360° debemos volver a donde empezamos. ¿Por que debe esto ser cierto? La respuesta se obtiene

considerando la topología de las lineas de mundo que las partículas hacen en el espacio-tiempo [11].

En d=3 dimensiones espaciales, la trayectoria que las partículas toman en el espacio-tiempo pueden ser siempre continuamente conectadas a la situación donde las partículas no se mueven en absoluto [11]. Esta es la razón por la que el estado resultante debe ser el mismo como el anterior al intercambio. Pero en d=2 dimensiones espaciales, este no es el caso: las lineas de mundo de las partículas ahora giran uno alrededor de otra [11]. Cuando las partículas son intercambiadas en una dirección contraria a las agujas del reloj las lineas de mundo se enredan [11]. Estas no pueden ser suavemente deformadas dentro de las lineas de mundo de partículas las cuales son intercambiadas en el sentido de las agujas del reloj.

Cada giro define un sector topológico diferente. La esencia de esta laguna es que, después de una rotación en dos dimensiones, la función de onda puede retener una memoria de la trayectoria que mira a través de la fase [11]. Quiere decir que puede tener cualquier fase  $\alpha$  en (2.26). Diremos que después de un intercambio en contra de las agujas del reloj, la función de onda es

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\pi\alpha} \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \tag{2.27}$$

Después de un intercambio en el sentido de las manecillas del reloj, la fase debe ser  $e^{-i\pi\alpha}$ . Las partículas con  $\alpha \neq 0, 1$  son llamadas aniones.

### 2.2.2.4. Estado fundamental degenerado

Una remarcable propiedad de los estados Hall cuántico fraccionarios, los cuales solo se vuelven aparentes cuando los colocamos en un mánifold compacto, es que el número de estados fundamentales depende de la topología del mánifold. Esto está íntimamente relacionado con la existencia de partículas aniónicas.

Creamos del vacío un par cuasi partícula-cuasi hueco. Entonces separamos este par, tomándolos alrededor de uno de los dos ciclos en el toro. Llamaremos al operador que implementa este proceso  $T_1$  para el primer ciclo y  $T_2$  para el segundo ciclo.

Ahora suponemos que tomamos las partículas alrededor de uno de los ciclos y luego alrededor del otro. Debido a que las partículas son aniones, el orden en el cual hagamos esto no importa: hay una diferencia topológica entre las trayectorias tomadas. En efecto, podemos convencernos que  $T_1T_2T_1^{-1}T_2^{-1}$  es equivalente a tomar un anión alrededor de otro: las lineas de mundo tienen vinculado un número. Significa

que  $T_i$  debe obedecer el álgebra

$$T_1 T_2 = e^{2\pi i/m} T_2 T_1, \tag{2.28}$$

pero tal álgebra de operadores no puede ser realizada en un único estado vacío [11]. Se infiere que el estado fundamental debe ser degenerado. La representación más pequeña de (2.28) tiene dimensión m, con la acción

$$T_1 |n\rangle = e^{2\pi i/m} |n\rangle$$
  
 $T_2 |n\rangle = |n+1\rangle$ .

La generalización de este argumento a una superficie de género g de Riemann [3] nos dice que el estado fundamental debe tener degeneración  $m^g$  [11]. Notemos que no tenemos que decir nada sobre la forma o tamaño de estos mánifolds. El número de estados fundamentales depende solo en la topología.

Ya discutimos un enfoque topológico para el efecto Hall cuántico entero el cual es válido cuando el espacio es un toro. Mostramos que la conductividad Hall es igual a un número de Chern y debe, por tanto, estar cuantizado. En particular, estos cálculos no hacen asunciones que los electrones no interactuaran: es igualmente cierto para sistemas de muchas partículas interactuando fuertemente [11]. Sin embargo, una de las aparentemente leves suposiciones era que el estado fundamental era no degenerado. Como acabamos de ver, esto no es cierto para los estados Hall cuánticos fraccionarios [11], lo cual explica como esos estados evitan tener conductividad Hall entera.

#### 2.2.2.5. Orden Topológico

Los estados de Laughlin tienen un número de propiedades muy especiales. Uno podría preguntar: ¿Como podemos caracterizar esos estados? En el marco de Landau, diferentes estados de la materia son caracterizados por sus simetrías, esos que son preservados por el estado fundamental y esos que son rotos.

Sin embargo, los fluidos Hall cuánticos caen fuera de este paradigma. No hay simetría o parámetro de orden local que distinga estados Hall cuánticos. Esto revela que hay un parámetro de orden no local, usualmente llamada "orden de largo alcance fuera de la diagonal" [10, 11] y este puede ser usado para motivar una descripción de tipo Ginzburg-Landau, veremos una introducción de esto en el capítulo final.

## 2.2.3. Jerarquía de las fracciones de llenado

Solo se han descrito los estados Hall cuánticos en fracciones de llenado  $\nu=1/m$ . De los resultados experimentales se sabe que hay muchos más estados que no son gobernados por la función de onda de Laughlin.

Antes de proceder, introducimos la siguiente notación. Todas las funciones de onda en el nivel más bajo de Landau vienen con un factor exponencial común, así definimos

$$\psi(z,\bar{z}) \sim \tilde{\psi}(z)e^{-\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2/4l_B^2}$$

donde  $\tilde{\psi}(z)$  es una función holomorfa.

Podemos inducir estados de cuasi hueco (o cuasi partícula) introduciendo un exceso (o déficit) local de campo magnético a través de un solenoide [11]. Podríamos también preguntar que pasa si cambiamos el campo magnético en una manera uniforme tal que el sistema como un todo se aleja del llenado  $\nu=1/m$ . Por definición, supongamos que incrementamos B tal que la fracción de llenado decrece. Parece plausible que para B cerca del estado inicial de Laughlin, el nuevo estado fundamental del sistema contendrá cierta densidad de cuasi huecos, dispuestos en algunas configuraciones, quizá complicadas.

Supongamos que el campo magnético desvía solo ligeramente del centro de la meseta, correspondiente a la fracción de llenado  $\nu=1/m$ . Se podría esperar un gas de cuasi huecos que forman un cristal de Wigner [8]. Pero el cristal de Wigner es un estado aislante, y no cambia la resistividad Hall la cual se mantiene fija en el valor de Laughlin  $\rho_{xy}=2\pi\hbar/e^2\nu$ 

Esto sugiere que el efecto Hall cuántico puede ocurrir en la ausencia de desorden. Recordemos que previamente el desorden parecía crucial para explicar las mesetas observadas en la conductividad Hall. Además, a medida que las muestras se vuelven más limpias, más y más mesetas emergen, sugiriendo ingenuamente que una muestra infinitamente limpia podría regresar nos al resultado clásico para la conductividad Hall. Sin embargo, la aparición del cristal de Wigner no se basa en el desorden: puede aparecer en muestras puras simples, donde espontáneamente se rompe la invarianza traslacional [8]. Quiere decir que incluso muestras puras pueden exhibir una meseta en la resistividad Hall sobre un rango de B para el cual el estado fundamental de aniones es un cristal de Wigner.

A medida que el campo magnético incrementa más allá de su valor central, la densidad de los cuasi huecos incrementa. En algún punto, es probable que prefieran forman un fluido Hall cuántico, en vez de un cristal de Wigner. ¿Que propiedades

podría tener?

Sabemos que los estados de Laughlin toman la forma

$$\tilde{\psi} \sim \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m.$$

donde m es impar para fermiones y par para bosones. ¿Como sería un estado de Laughlin para aniones con posiciones  $\eta_i$  y parámetro estadístico  $\alpha$ ? Para tener las estadísticas correctas, la función de onda debe tomar la forma

$$\tilde{\psi} \sim \prod_{i < j} (\eta_i - \eta_j)^{2p + \alpha}$$

donde p es un entero positivo. Arriba, el estado  $\nu=1/m$ , cuasi huecos y cuasi partículas tienen carga fraccionaria  $q=\pm e/m$  y la estadística fraccionaria  $\alpha=1/m$ . El máximo momento angular de una cuasi excitación es  $N(2p\pm\frac{1}{m})$  donde el signo  $\pm$  es inherente a la carga de la cuasi excitación [11]. Esto quiere decir que el área del droplete es  $A\approx 2\pi(2p\pm\frac{1}{m})N(ml_B^2)$  donde la longitud usual magnética  $l_B^2=\hbar/eB$  ahora es reemplazada por  $ml_B^2$  por que la carga de la cuasi excitación es |q|=e/m. El número de estados de electrón en el nivel de Landau lleno es  $AB/\Phi_0$  y cada uno se puede pensar como hecho de m cuasi objetos. Así el número total de estados de cuasi objetos en un nivel de Landau lleno es  $mAB/\Phi_0=(2p\pm\frac{1}{m})m^2N$ , este resultado se obtenido haciendo los mismos cálculos hechos para el efecto Hall cuántico entero en la sección anterior.

El resultado es que los cuasi huecos o cuasi partículas dan una contribución al llenado de estados de electrón

$$\nu_{cuasi} = \mp \frac{1}{2pm^2 \pm m}$$

donde el signo de arriba es negativo para cuasi huecos y positivo para cuasi partículas [11]. Añadiendo esto a la fracción de llenado del estado original  $\nu = 1/m$ , tenemos

$$\nu = \frac{1}{m} \mp \frac{1}{2pm^2 \pm m} = \frac{1}{m \pm \frac{1}{2p}}.$$
 (2.29)

Veamos algunos ejemplos. Empezamos con el estado  $\nu=1/3$ . El estado p=1 para cuasi partículas entonces da  $\nu=2/5$  que es una de las mesetas Hall más prominentes. El estado p=1 para cuasi huecos da  $\nu=2/7$  y también ha sido observado.

Ahora se puede ir más lejos. Los cuasi objetos en este nuevo estado también

pueden formar estados Hall cuánticos. Y así, las ocupaciones resultantes están dadas por las fracciones continuas

$$\nu = \frac{1}{m \pm \frac{1}{2p_1 \pm \frac{1}{2p_2 \pm \dots}}}.$$
 (2.30)

Por ejemplo, construyendo sobre el estado Hall  $\nu=1/3$  el conjunto de fracciones continuas para cuasi partículas con  $p_i=1$  conduce a la secuencia  $\nu=2/5$  (el cual es la fracción (2.29), seguida por  $\nu=3/7$ ,  $\nu=4/9$ , 5/11 y 6/13.

#### 2.2.3.1. Fermiones compuestos

Ahora pasamos a un punto de vista alternativo para entender la jerarquía conocida como *fermión compuesto*. Primero, es frecuente el caso que cuando sistemas
cuánticos se vuelven fuertemente acoplados, los grados de libertad adecuados para
describir la física no son esos con los que empezamos. En cambio, nuevos grados de
libertad débilmente acoplados pueden emerger [11].

La idea es tratar de encontrar nuevos grados de libertad, los fermiones compuestos. Usualmente es difícil identificar los grados de libertad emergentes, y en el caso del efecto Hall cuántico no es diferente.

Primero veamos la idea de *vórtice* [12]. La teoría básica de campo con vórtices se desarrollará en el siguiente capítulo, de momento entenderemos un vórtice como un giro en la propia función de onda. Nos interesan los vórtices en la función de onda de Laughlin, pero para comprender la física hay que revisar el cuasi hueco cuya función de onda incluye el factor

$$\prod_{i}(z_i-\eta).$$

Cláramente la función de onda ahora tiene un cero en la posición  $\eta$ . Lo cual provoca dos cosas. Primero, la carga desaparece ahí. Esto le da al cuasi hueco su carga fraccionaria e/m. Pero porque el nivel más bajo de Landau de la función de onda es holomorfa, hay también dependencia angular fija: la fase de la función de onda gira una vez cuando la posición de cualquier partícula se mueve alrededor de  $\eta$ , esto es el vórtice [12].

La fase de la función de onda cambia  $2\pi$  cuando una partícula se mueve alrededor del cuasi hueco. Lo cual significa que también debe cambiar por  $2\pi$  cuando el cuasi hueco se mueve alrededor de la partícula. Entonces, si movemos el quasi hueco entorno a  $N = \mu \Phi/\Phi_0$  partículas, la fase cambia por  $\gamma = 2\pi N = \nu e \Phi/\hbar$ . Mientras tanto, si movemos un cuasi hueco alrededor de una región en la cual hay otro cuasi

hueco, la carga dentro se reducirá en e/m, así el número efectivo de partículas ahora es  $N = \nu \Phi/\Phi_0 - 1/m$  [11]. Esto da una contribución extra a la fase  $\gamma = -2\pi/m$  que asociamos la estadística del cuasi hueco  $\gamma = 2\pi\alpha = 2\pi/m$ , así  $\alpha = 1/m$ .

Volviendo a la propia función de Laughlin

$$\tilde{\psi} \sim \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m.$$

Vamos a centrarnos en un m impar tal que la función de onda sea antisimétrica y a tratar con un estado Hall de fermiones. Una característica sorprendente es que la función de onda tiene un cero de orden m cuando dos electrones se aproximan. Quiere decir que cada partícula puede entenderse como m vórtices. Por supuesto, cada uno de esos ceros era necesario por el principio de exclusión de Pauli. Además, se necesitaban m ceros por partícula para tener la fracción de llenado adecuada. Motivados por esto se define un fermión compuesto como un electrón ligado a m-1 vórtices [11].

Si se coloca alguna densidad  $n = \nu B/\Phi_0$  de electrones en un campo magnético y subsecuentemente adjuntamos vórtices para hacer fermiones compuestos. Primero veamos como esos fermiones compuestos experimentan un campo magnético  $B^*$  diferente y una fracción de llenado  $\nu^*$  diferente que la de los electrones [11]. Para ello, movemos los fermiones compuestos a lo largo de una trayectoria encerrando un área A. La fase de Berry resultante tiene dos contribuciones

$$\gamma = 2\pi \left(\frac{AB}{\Phi_0} - (m-1)nA\right) \tag{2.31}$$

con n la densidad de electrones. El primer término es la fase usual de Aharonov-Bohm debida al flujo total dentro de la trayectoria del electrón. El segundo término es la contribución del electrón que rodea los vórtices: hay m-1 vórtices que se adjuntan a cada uno de los nA electrones.

Los fermiones compuestos experimentan un campo magnético el cual llamamos  $B^*$ . La fase de Aharonov-Bohm es

$$\gamma = \frac{2\pi AB^*}{\Phi_0} \Rightarrow B^* = B - (m-1)n\Phi_0.$$
 (2.32)

Como hay un electrón por fermión compuesto, la densidad es la misma. Pero debido a que los campos magnéticos experimentados por los electrones y fermiones compuestos difieren, las fracciones de llenado también deben diferir: se debe tener la relación  $\nu^* B^*/\Phi_0 = \nu B/\Phi_0$ . Eso nos da

$$\nu = \frac{\nu^*}{1 + (m-1)\nu^*}. (2.33)$$

Esta ecuación es importante. Si consideramos que los fermiones compuestos llenan completamente su nivel de Landau más bajo,  $\nu^* = 1$ . Entonces tendremos

$$\nu = \frac{1}{m}.$$

En otras palabras, el efecto Hall cuántico fraccionario puede entenderse como un efecto Hall cuántico entero para fermiones compuestos [11].

#### 3. Vórtices

## 3.1. Funciones de energía de Ginzburg-Landau

En este capítulo haremos una pausa en relación a lo que hemos visto en los dos capítulos anteriores y abordaremos la teoría sobre vórtices, para ver como aparecen los vórtices en el efecto Hall cuántico en los posteriores capítulos.

Los vórtices son solitones en dos dimensiones, con un núcleo de tamaño finito. Cuando se consideran en una teoría tridimensional, los vórtices se convierten en objetos extendidos cuyo núcleo es una línea recta o curva, pero veremos una teoría dos dimensional, en la cual los vórtices son tipo partículas [12]. Esta teoría también describe la situación tridimensional donde todos los campos son constantes en una dirección [12].

Suponemos que el espacio es el plano dos dimensional  $\mathbb{R}^2$ . Un punto en el espaciotiempo en general es denotado por  $\mathbf{x}$  o (t,x), y en coordenadas cartesianas  $\mathbf{x}=(x^1,x^2)$ . A veces, las coordenadas son combinadas como  $x^{\mu}$  ( $\mu=0,1,2$ ) donde  $x^0=t$ . Se va a identificar  $\mathbb{R}^2$  con el plano complejo  $\mathbb{C}$ , y denotaremos un punto espacial por z, donde  $z=x^1+ix^2$ . Donde hay posibilidad de campos con simetría, usaremos simetría circular  $\rho,\theta$ .

La teoría básica con vórtices tiene un campo escalar con dos componentes reales  $(\phi_1(x), \phi(x)_2)$ , y la simetría interna

$$\phi_a(x) \to R_{ab}\phi_b(x)$$
 (3.1)

donde  $R \in SO(2)$  [12]. Esta simetría asegura que un vórtice individual pueda tener simetría circular. Es frecuentemente conveniente combinar las dos componentes de campo en un único campo complejo

$$\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi(x). \tag{3.2}$$

La rotación SO(2)  $R_{ab}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ (3.3)

se reemplazada por la rotación de fase U(1)

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x).$$
 (3.4)

Heurísticamente, una configuración de campo contiene un vórtice centrado en un punto  $\mathbf{X}$ , si  $\mathbf{X}$  es un punto aislado donde  $\phi$  se anula, y si a lo largo un pequeño círculo encerrando  $\mathbf{X}$  con curva orientada en contra de las agujas del reloj, la fase de  $\phi$  incrementa por  $2\pi n$ , con n un entero distinto de cero. Se define n como multiplicidad del vórtice [12], n es generalmente  $\pm 1$  ya que vórtices de multiplicidad más alta se rompen bajo pequeñas perturbaciones del campo [12].

Las teorías de campo con vórtices son de dos tipos: globales y gauge. Sus soluciones son llamadas, correspondientemente, vórtices globales y vórtices gauge [12, 22]. En una teoría global está solo el campo escalar complejo  $\phi(x)$  [12, 22]. En una teoría gauge esta está acoplada a un campo electromagnético con un gauge de fondo U(1) [12, 22]. Los campos son ahora  $\phi(x)$  y el potencial electromagnético gauge  $a_{\mu}(x)$ , con las componentes espaciales  $a_0(x)$  y  $\mathbf{a}(x) = (a_1(x), a_2(x))$ .

Varios tipos de dinámica de vórtices pueden ser considerados, dependiendo en la aplicación física. Hay correspondientemente varios tipos de Lagrangianos y ecuaciones de campo, algunas Lorentz invariantes, y otras no [12].

Empezamos con campos estáticos. Las expresiones definiendo su energía son conocidas como funciones de energía de Ginzburg-Landau (GL) [12]. En una teoría global, la energía de GL es de la forma

$$V = \int \left(\frac{1}{2}\nabla\bar{\phi}\nabla\phi + U(\bar{\phi}\phi)\right)d^2x,\tag{3.5}$$

el cual es invariante bajo la simetría interna global (3.4). La ecuación de campo compleja singular, obtenida por variar V con respecto a  $\bar{\phi}$ , es

$$\nabla^2 \phi - 2U'(\bar{\phi}\phi)\phi = 0. \tag{3.6}$$

donde  $\nabla^2$  es el laplaciano en dos dimensiones. Sus partes real e imaginarias son obtenidas trabajando directamente con  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . La ecuación obtenida por variar V

con respecto a  $\phi$  es el conjugado complejo de (3.6)

$$\nabla^2 \bar{\phi} - 2U'(\bar{\phi}\phi)\bar{\phi} = 0. \tag{3.7}$$

El potencial U depende solo de  $|\phi|$ , la magnitud de  $\phi$ , y es usualmente asumido para ser un polinomio de al menos orden sexto o cuarto orden en  $|\phi|$ , que significa que este es cuadrático o cúbico en  $|\phi|^2 = \bar{\phi}\phi[12]$ . En el primer caso,

$$U = \mu + \nu \bar{\phi}\phi + \frac{\lambda}{8}(\bar{\phi}\phi)^2. \tag{3.8}$$

donde  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  son coeficientes constantes y reales. Para una teoría estable  $\lambda$  debe ser positivo y ajustamos  $\mu$  tal que  $U_{min}$ , el valor mínimo de U sea cero [12, 22]. Para  $\nu$  negativo podemos reescribir U de la forma

$$U = \frac{\lambda}{8} (m^2 - \bar{\phi}\phi)^2 \tag{3.9}$$

donde m es positivo. El mánifold vacío  $\mathcal{V}$  es el círculo  $|\phi| = m$ , con  $\pi_1(\mathcal{V}) = \mathbf{Z}$  [12, 16, 22]. Este es el caso interesante, con la posibilidad de vórtices. Si  $\nu$  es positivo o cero, entonces  $\mathcal{V}$  es un punto  $\phi = 0$ , con el primer grupo de Homotopía trivial [3, 22]. No hay posibilidad de solitones topológicos en el plano en este caso [12]. Para U de la forma anterior la energía global de GL es

$$V = \frac{1}{2} \int \left( \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \phi + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \bar{\phi}\phi)^2 \right) d^2 x \tag{3.10}$$

y la ecuación de campo se simplifica a

$$\nabla^2 \phi + \frac{\lambda}{2} (m^2 - \bar{\phi}\phi)\phi = 0, \tag{3.11}$$

el cual es la ecuación clásica de Ginzburg-Landau en dos dimensiones. Para el resto del capítulo vamos a considerar que en las teorías global y gauge U tiene rompimiento de simetría, que es notorio en la forma cuadrática (3.9). Las soluciones de vacío, las cuales minimizan V son de la forma  $\phi = me^{i\chi}$ , donde  $\chi$  es una fase arbitraria la cual debe ser constante para que el gradiente de energía se anule [22]. La elección de  $\chi$  rompe espontáneamente la simetría global U(1). Si tomamos  $\phi = me^{i\chi}$  y sustituimos en (3.11) encontramos que  $\nabla^2 \chi = 0$  y  $\nabla \chi \cdot \nabla \chi = 0$ . Por tanto  $\chi$  es constante, así  $\phi$ 

es una solución de vacío. La energía de Ginzburg-Landau en la teoría gauge es

$$V = \frac{1}{2} \int \left( B^2 + \overline{D_i \phi} D_i \phi + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \overline{\phi} \phi)^2 \right) d^2 x. \tag{3.12}$$

Este es invariante bajo una trasformación gauge

$$\phi(\mathbf{x}) \to e^{i\alpha(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x})$$
 (3.13)

$$a_i(\mathbf{x}) \to a_i + \partial_i \alpha(\mathbf{x})$$
 (3.14)

donde  $e^{i\alpha(\mathbf{x})}$  es una rotación de fase que varía espacialmente. Los ingredientes de V son la cantidad invariante gauge  $\bar{\phi}\phi$ , el gradiente covariante del campo escalar  $D_i\phi=\partial_i\phi-ia_i\phi$ , y el campo magnético

$$B = f_{12} = \partial_1 a_2 - \partial a_1. \tag{3.15}$$

En un espacio de dos dimensiones, el tensor de campo de Maxwell tiene solo tres componentes independientes. Hay una única componente magnética B, la cual de un punto de vista tridimensional es el campo magnético en la dirección  $-x^3$ . La parte espacial del tensor de campo puede ser expresada en términos de B como  $f_{ij} = \epsilon_{ij}B$ . Las dos componentes del campo eléctrico son  $e_1 = \partial_0 a_1 - \partial_1 a_0$  y  $e_2 = \partial_0 a_2 - \partial_2 a_0$ , pero estos no contribuyen a la energía estática de GL.

Las ecuaciones de campo asociadas con la energía son obtenidas variando con respecto a  $\phi$ ,  $a_1$  y  $a_2$  como los campos independientes. Estos son

$$D_i D_i \phi + \frac{\lambda}{2} (m^2 - \bar{\phi}\phi)\phi = 0, \qquad (3.16)$$

$$\epsilon_{ij}\partial_j B + \frac{i}{2}(\bar{\phi}D_i\phi - \phi\overline{D_i\phi}) = 0.$$
 (3.17)

La última ecuación (3.17) es la versión dos dimensional de la ecuación de Ampere  $\nabla \times b = J$  [13]. Por tanto

$$J_i = \frac{i}{2}(\bar{\phi}D_i\phi - \phi\overline{D_i\phi}) \tag{3.18}$$

puede ser interpretado como la corriente en el plano. El vacío es único en la teoría gauge GL. La energía es minimizada si  $|\phi| = m$ ,  $D_i \phi = 0$  y B = 0, en todas partes [12]. La primera condición requiere que  $\phi(\mathbf{x}) = me^{i\chi(\mathbf{x})}$ , y la última condición

requiere que  $a_i$  sea un gauge puro, es decir

$$a_i(\mathbf{x}) = \partial_i \alpha(\mathbf{x}). \tag{3.19}$$

 $D_i\phi$  entonces se anula si

$$im(\partial_i \chi - \partial_i \alpha)e^{i\chi} = 0,$$
 (3.20)

así  $\partial_i(\chi-\alpha)=0$  y por tanto  $\alpha=\chi+{\rm const.}$  Así un campo vacío es de la forma

$$\phi = me^{i\chi}, \quad a_i = \partial_i \chi. \tag{3.21}$$

Por la transformación gauge  $e^{-i\chi}$ , este se vuelve el vacío simple

$$\phi = m, \quad a_i = 0. \tag{3.22}$$

El campo  $\phi = me^{i\chi}$ ,  $a_i = 0$ , con  $\chi$  una constante, es un vacío también, pero este es un gauge equivalente a (3.22). Así el vacío es único. Sin embargo, el hecho que el mínimo de  $(m^2 - \bar{\phi}\phi)^2$  permanece en un círculo es significante, conduce a vórtices [12].

El argumento de escala justo muestra que para tales soluciones, las dos contribuciones a la energía.

$$E_4 = \frac{1}{2} \int B^2 d^2 x, \ E_0 = \frac{\lambda}{8} \int (m^2 - \bar{\phi}\phi)^2 d^2 x$$

son iguales. En efecto, la teoría gauge de GL con  $U = \frac{\lambda}{8}(m^2 - \bar{\phi}\phi)^2$  es el paradigma para una teoría que tiene solitones topológicos en dos dimensiones [12, 22].

La energía gauge de GL en polares es

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\rho^2} f_{\rho\theta}^2 + \overline{D_{\rho}\phi} D_{\rho}\phi + \frac{1}{\rho^2} \overline{D_{\theta}\phi} D_{\theta}\phi + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \bar{\phi}\phi)^2 \right) \rho d\rho d\theta \quad (3.23)$$

donde las derivadas covariantes son  $D_{\rho}\phi = \partial_{\rho}\phi - ia_{\rho}\phi$  y lo mismo para  $\theta$ . La expresión análoga en la teoría global es

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( \partial_\rho \bar{\phi} \partial\phi + \frac{1}{\rho^2} \partial_\theta \bar{\phi} \partial_\theta \phi + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \bar{\phi} \phi)^2 \right) \rho d\rho d\theta$$

## 3.2. Topología en la teoría global

Consideremos la configuración de campo  $\phi(\mathbf{x})$  en la teoría global de GL cuya densidad de energía se aproxima a cero rápidamente cuando  $|\mathbf{x}| \to \infty$ , la energía en polares, vemos que  $|\phi| \to m$  y  $\partial_{\rho} \phi \to 0$  como  $\rho \to \infty$ . Asumamos que  $\lim_{\rho \to \infty} \phi(\rho, \theta)$  existe. Denotamos la forma límite  $\phi^{\infty}(\theta) = me^{i\chi^{\infty}(\theta)}$ , y llamamos esto el valor de  $\phi$  en el círculo en el infinito [22]. Para tal campo,  $\phi^{\infty}$  es un mapeo del círculo en el infinito  $S^1_{\infty}$  al mánifold vacío  $\mathcal{V} = S^1$ 

$$\phi^{\infty}: S^1_{\infty} \to S^1. \tag{3.24}$$

 $\phi^{\infty}$  es univaluada, así  $\chi^{\infty}(\theta)$  debe tener la propiedad  $\chi^{\infty}(2\pi) = \chi^{\infty}(0) + 2\pi N$ , para algún entero N. N es el número de giro, o grado, del mapeo (3.24), y es la carga topológica de la configuración [12].

A pesar de la topología no trivial del mánifold de vacío, no hay configuraciones de campo de energía finita con carga topológica distinta de cero en la teoría global [12, 22]. Esto es por que la contribución del gradiente angular de  $\phi$  a la densidad de energía es  $O(1/r^2)$  probado que  $\chi^{\infty}(\theta)$  es diferenciable [12]. Su contribución a la energía total, fuera de un círculo de radio  $\rho_0$  suficientemente grande es

$$\frac{1}{2}m^2 \int_{\rho_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} (\partial_{\theta} \chi^{\infty})^2 d\rho d\theta. \tag{3.25}$$

Las integrales angulares y radiales se separan, y el radial divergente de forma logarítmica a menos que

$$\int_0^{2\pi} (\partial_\theta \chi^\infty)^2 d\rho d\theta$$

se anule. Así la energía finita requiere que lím $_{\mathbf{x}\to\infty} \phi = me^{i\chi^{\infty}}$  para alguna constante de fase  $\chi^{\infty}$ , y así N=0 [22]. El mánifold vacío por tanto no juega un rol significante para campos de energía finita en la teoría global [22].

## 3.3. Topología en la teoría gauge

Ahora consideremos que  $\{\phi(\mathbf{x}), a_i(\mathbf{x})\}$  es una configuración de campo de energía finita en la teoría gauge de GL. La energía finita impone las condiciones de frontera  $|\phi| \to m$  como  $\mathbf{x} \to \infty$  [12]. Nos gustaría deducir que  $\phi$  tiene una forma límite en el círculo en el infinito. Sin embargo, a partir de la expresión de energía en polares, (3.23), vemos que la derivada covariante radial  $D_{\rho}\phi$  tiende a cero cuando  $|\mathbf{x}| \to \infty$ .

Consideremos cualquier linea radial  $0 \le \rho \le \infty$ , con  $\theta$  fija. Para valores grandes de  $\rho$ ,  $\phi \sim me^{i\chi}$ , así asintóticamente

$$D_{\rho}\phi = im(\partial_{\rho} - a_{\rho})e^{i\chi} = 0. \tag{3.26}$$

y por tanto  $a_{\rho} = \partial_{\rho} \chi$ . Ahora transformamos el campo al gauge radial  $a_{\rho} = 0$ . Si  $a_{\rho} \neq 0$  entonces inicialmente la transformación gauge

$$g(\rho,\theta) = exp\left(-i\int_0^\rho a_\rho(\rho',\theta)d\rho'\right)$$
(3.27)

hace esto, g es una función suave en todas partes, y lím $_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} g(\mathbf{x}) = 1$  [12]. La transformación gauge también cambia  $\phi$  y  $a_{\theta}$ , pero estas siguen siendo funciones suaves en el plano si  $a_{\rho}$  fuera inicialmente suave. En el nuevo gauge,  $\partial_{\rho}\phi \to 0$  como  $\mathbf{x} \to \infty$ , así  $\phi$  tiene un valor límite a lo largo de cada linea radial

$$\lim_{\rho \to \infty} \phi(\rho, \theta) = \phi^{\infty}(\theta) = me^{i\chi^{\infty}(\theta)}, \tag{3.28}$$

y este define  $\phi$  en el círculo en el infinito. La única libertad gauge que queda es multiplicar  $\phi$  por un factor de fase constante  $e^{i\alpha}$  [12]. Se puede imaginar que las transformaciones gauge del tipo  $e^{i\alpha(\theta)}$  todavía son permitidas, pero esas están mal definidas en x = 0, si  $\alpha(\theta)$  es una función sin restricciones [12]. En el gauge radial  $f_{\rho\theta} = 0$  implica que  $\partial_{\rho}a_{\theta} = 0$ , así  $a_{\theta}$  tiene un límite

$$\lim_{\rho \to \infty} a_{\theta}(\rho, \theta) = a_{\theta}^{\infty}(\theta). \tag{3.29}$$

La anulación de  $D_{\theta}\phi$  ahora implica que

$$\partial_{\theta} \chi^{\infty} - a_{\theta}^{\infty} = 0, \tag{3.30}$$

así el potencial gauge es igual a la derivada de la fase de  $\phi$  en el círculo en el infinito. Notemos la diferencia importante de la teoría global, esta no necesariamente debe ser constante.

Aquí  $\phi^{\infty}$  es otra vez un mapeo del círculo en el infinito  $S^1_{\infty}$  al mánifold vacío  $\mathcal{V}=S^1,$ 

$$\phi^{\infty}: S^1 \to S^1_{\infty},\tag{3.31}$$

y tiene número de giro

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{\theta} \chi^{\infty}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left( \chi^{\infty}(2\pi) - \chi^{\infty}(0) \right).$$

N es la carga topológica de la configuración de campo  $\{\phi(\mathbf{x}), a_i(\mathbf{x})\}$ . El valor actual de  $\chi^{\infty}$  no está del todo fijado, incluso en el gauge radial, por que la constante de transformación  $e^{i\alpha}$  desplaza  $\chi^{\infty}(\theta)$  a  $\chi^{\infty}(\theta)$  + const [12]. Hay que notar que N no depende en la elección gauge que se haga. Para tanto, se considera una transformación gauge suave  $g(\mathbf{x})$ . Para cada  $\rho \geq 0$ , g es un mapa del círculo de radio  $\rho$  a U(1), con número de giro  $N_g(\rho)$  [12]. Esta transformación gauge podría cambiar N a  $N + N_g(\infty)$ . Sin embargo, por continuidad,  $N_g$  es independiente de  $\rho$  y la suavidad de g en el origen implican que  $N_g(0) = 0$  [12]. Así  $N_g(\infty) = 0$ , y así la carga topológica N es invariante gauge.

Se ha definido N en términos del número de giro del campo escalar  $\phi$  en el infinito. Sabemos que

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} B d^2 x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{\theta}^{\infty}(\theta) d\theta$$

Así el flujo magnético está cuantizado en la teoría de GL, en unidades de  $2\pi$ , y el flujo total  $\Phi$  es  $2\pi N$ .

Hay otra caracterización topológica del número de giro N. Este es el número total de vórtice, que es, el número de puntos en el plano, con multiplicidad tomada en cuenta, donde  $\phi = 0$  [12, 22]. Para esto, necesitamos asumir que los ceros de  $\phi$  son un conjunto infinitos de puntos aislados  $\{A, B, C, ...\}$  con multiplicidad  $\{n_A, n_B, n_C, ...\}$ . El número de giro de  $\phi$  a lo largo del círculo en el infinito, N, es justo la suma de esas multiplicidades.

$$N = n_A + n_B + n_C + \dots (3.32)$$

Para ver esto, consideramos la deformación del círculo  $C_A$  en la curva  $C'_A$ . Por continuidad, el incremento de la fase de  $\phi$  alrededor de  $C_A$ , el cual es  $2\pi n_A$ , es igual al que se hace alrededor de  $C'_A$ , ya que no se encierra un nuevo cero [12]. Entonces el incremento de fase alrededor de  $C_{AB}$  es la suma del incremento alrededor de  $C'_A$  y  $C_B$ , y así  $C_A$  y  $C_B$ . Extendiendo esta construcción para encerrar más ceros, y eventualmente todos estos, llegamos a la ecuación (3.32).

Aquí A es un cero simple de  $\phi$  si  $n_A = \pm 1$ . Si  $\phi$  tiene número de giro N > 0, y solo ceros simples, entonces hay al menos N de ellos [22]. Si hay N + N' ceros

de multiplicidad 1, debe haber N' ceros de multiplicidad -1. Una deformación lo suficientemente pequeña y suave de un campo con un cero simple aislado simplemente desplaza esos ceros [12]. Estos por tanto tienen una cierta estabilidad. Sin embargo, por una deformación continua del campo, es posible tener ceros simples de multiplicidad 1 que se juntan en ceros de multiplicidad más alta [12]. También ceros de multiplicidades opuestas pueden juntarse en un cero de multiplicidad cero, y entonces aniquilarse [12]. Ambos de estos procesos pueden también pueden ser revertidos.

Las soluciones estáticas y dependientes del tiempo de las ecuaciones de GL generalmente tienen su densidad de energía y campo magnético alcanzando su máximo alrededor de los ceros de  $\phi$ . Así los ceros de  $\phi$  no solo dan datos topológicos globales, sino también información de la dinámica local sobre el campo [12]. Identificamos los ceros de  $\phi$  con la locación de vórtices [12]. Notemos que la densidad de energía de  $\phi$  es al menos  $\frac{\lambda}{8}m^4$ .

### 3.4. Soluciones de Vórtices

En la teoría gauge GL, para todos los valores de la constante de acople  $\lambda$  excepto  $\lambda=1$ , todas las soluciones de energía finita estática conocidas de las ecuaciones de campo tienen simetría circular alrededor de algún punto, y una simetría de reflexión [12]. En la teoría global de GL también, hay soluciones de simetría circular, aunque con una energía que diverge logarítmicamente. La solución básica en cada caso, con número de giro N=1, lo llamamos vórtice. La transformación discreta  $\phi \to \bar{\phi}$ , junto con a  $\to -a$  en la teoría gauge, convierte un vórtice en un antivórtice, con la misma energía y N=-1. Las soluciones con número de giro |N|>1, son multivórtices.

Es natural discutir las soluciones de simetría circular en coordenadas polares. Así los campos son  $\phi(\rho, \theta)$  en la teoría global, complementada por  $a_{\rho}(\rho, \theta)$  y  $a_{\theta}(\rho, \theta)$  en la teoría gauge [12]. Debemos usar las simetrías circulares y de reflexión, para obtener una función de energía de GL reducida, una integral sobre la coordenada radial  $\rho$ . Sus ecuaciones variacionales son las ecuaciones de campo reducidas. Por el principio de criticidad simétrica [12], las soluciones de esas ecuaciones reducidas dan soluciones de las ecuaciones de campo completa en el plano.

La acción de un elemento  $R(\beta)$  del grupo de rotación espacial SO(2) es  $\{\rho \to \rho, \theta \to \theta + \beta\}$ , y el operador generador de rotaciones es  $\partial/\partial\theta$ . Una configuración de campo escalar  $\phi(\rho, \theta)$  es rotacionalmente invariante si  $\phi(\rho, \theta + \beta) = \phi(\rho, \theta)$  para todo  $\beta$ , esto es,  $\phi$  depende solo en  $\rho$ . Equivalentemente,  $\partial \phi/\partial\theta = 0$ . Tal  $\phi$  tiene un

número de giro cero. Si  $\phi$  es también asumido para tener la simetría de reflexión  $\phi(\rho,\theta) = \phi(\rho,-\theta)$ , entonces es real [12, 22]. La energía global de GL para un campo de este tipo es

$$V = \pi \int_0^\infty \left( \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \phi^2)^2 \right) \rho d\rho$$

y su ecuación variacional es

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} + \frac{\lambda}{2}(m^2 - \phi^2)\phi = 0$$
 (3.33)

La energía es minimizada por la solución de vacío  $\phi=m$  (y la solución equivalente  $\phi=-m$ ).

En una teoría gauge, invarianza rotacional significa que  $\phi$ ,  $a_{\rho}$  y  $a_{\theta}$  solo dependen en  $\rho$ , así N=0 [22]. Esto es aún posible para realizar una transformación gauge  $\rho$ -dependiente, sin introducir ninguna  $\theta$ -dependiente y transformar al gauge radial  $a_{\rho}=0$  [12]. La energía de GL se reduce a la expresión

$$V = \pi \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{da_\theta}{d\rho} \right)^2 + \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} a_\theta^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \phi^2)^2 \right) \rho d\rho.$$

cuyas ecuaciones variacionales son

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2}a_\theta^2\phi + \frac{\lambda}{2}(m^2 - \phi^2)\phi = 0$$
 (3.34)

$$\frac{d^2a_\theta}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{da_\theta}{d\rho} - a_\theta\phi^2 = 0. \tag{3.35}$$

Las soluciones de energía mínima en el vacío,  $\phi = m$ ,  $a_{\theta} = 0$ . No hay otras soluciones de energía finita, satisfaciendo las condiciones de frontera  $\phi(\infty) = m$ ,  $a_{\theta}(\infty) = 0$  y  $\phi(0)$  finito,  $a_{\theta}(0) = 0$  [12]. Esto es por que la ecuación (3.35) excluye la posibilidad que  $a_{\theta}$  tenga un máximo positivo o mínimo negativo. Así  $a_{\theta}$  tiene que anularse, y entonces la ecuación (3.34) se reduce a la ecuación (3.33) de la teoría de GL, con solo el vacío como una solución.

Ahora veamos la invarianza de  $\phi$  bajo la acción de SO(2)

$$\phi(\rho, \theta + \beta) = e^{i\kappa\beta}\phi(\rho, \theta). \tag{3.36}$$

Denotamos  $\phi(\rho)$  por  $\phi(\rho, 0)$ . Entonces (3.36) se satisface si y solo si

$$\phi(\rho,\theta) = e^{ik\theta}\phi(\rho). \tag{3.37}$$

Es claro que el número de giro de tal campo (en  $\phi = \infty$ ) es N = k.

Podemos asumir que  $N \neq 0$ , ya que N = 0 es el caso de simetría rotacional. Ya que el número de giro es importante, reescribimos la fórmula para  $\phi$  como

$$\phi(\rho, \theta) = e^{iN\theta}\phi(\rho). \tag{3.38}$$

Infinitesimalmente, el generador de la acción combinada es  $(\frac{\partial}{\partial \theta}, iN)$ , y  $\phi$  es invariante si este es aniquilado por el operador  $\frac{\partial}{\partial \theta} - iN$  [12]. Para un campo de la forma (3.36), con  $\phi(\rho)$  real, la energía global de GL es

$$V = \pi \int_0^\infty \left( \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + \frac{N^2}{\rho^2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} (m^2 - \phi^2)^2 \right) \rho d\rho$$

y la ecuación de campo se reduce a

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} - \frac{N^2}{\rho^2}\phi + (1 - \phi^2)\phi = 0.$$
 (3.39)

Las soluciones existen para cualquier  $N \neq 0$ . Cerca de  $\rho = 0$ ,  $\phi(\rho) \approx \rho^N$ , así  $\phi(\rho, \theta) \sim \rho^N e^{iN\theta}$ . La solución con número de giro es por tanto un vórtice de multiplicidad N.

Ahora multiplicando la ecuación (3.39) por  $2\rho^2 \frac{d\phi}{d\rho}$ , obtenemos la siguiente expresión

$$2\rho^2 \frac{d\phi}{d\rho} \frac{d^2\phi}{d\rho^2} + 2\rho \left(\frac{d\phi}{d\rho}\right)^2 - 2\frac{d\phi}{d\rho} N^2\phi + 2\rho^2 \frac{d\phi}{d\rho} (1 - \phi^2)\phi = 0,$$

usando la regla del producto y de la cadena tenemos las relaciones

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 \right) = 2\rho^2 \frac{d\phi}{d\rho} \frac{d^2\phi}{d\rho^2} + 2\rho \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2,$$
$$\frac{d}{d\rho} \left( -N^2 \phi^2 \right) = -2 \frac{d\phi}{d\rho} N^2 \phi$$

у

$$\frac{d}{d\rho}\left(-\frac{1}{2}\rho^2(1-\phi^2)^2\right) = -\rho(1-\phi^2)^2 + 2\rho^2\frac{d\phi}{d\rho}(1-\phi^2)\phi,$$

así la expresión final es

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 - N^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \phi^2)^2 \right) + \rho (1 - \phi^2)^2 = 0.$$
 (3.40)

Integrando, y usando las condiciones de frontera, concluimos que

$$\int_0^\infty (1 - \phi(\rho)^2)\rho d\rho = N^2 \tag{3.41}$$

o equivalentemente

$$E_0 = \frac{1}{4} \int (1 - \bar{\phi}\phi)^2 d^2x = \frac{1}{2}\pi N^2$$
 (3.42)

donde la integral es sobre todo del plano.

Regresando a la teoría de GL. Aquí también, debemos fijar m=1,  $\lambda$  es dejado como un parámetro libre ya que los vórtices dependen en este en una forma no trivial [12, 22]. La fase de rotación  $e^{iN\beta}$  que acompaña una rotación por  $\beta$  es global, independiente de  $\rho$  y  $\theta$  [12]. Este no tiene acción en el potencial gauge  $(a_{\rho}, a_{\theta})$  [12]. Por tanto, la acción combinada SO(2) deja los campos invariantes siempre

$$\phi(\rho, \theta) = e^{iN\theta}\phi(\rho)$$

$$a_{\rho}(\rho, \theta) = a_{\rho}(\rho)$$

$$a_{\theta}(\rho, \theta) = a_{\theta}(\rho).$$
(3.43)

La simetría de reflexión  $\phi(\rho,\theta) = \bar{\phi}(\rho,-\theta)$  otra vez hace  $\phi(\rho)$  real [12, 22]. Las condiciones de frontera son  $\phi(\infty) = 1$ ,  $a_{\theta}(\infty) = N$  y  $\phi(0) = 0$ ,  $a_{\theta}(0) = 0$  [12, 22]. Las condiciones en  $\rho = \infty$  asegura que

$$D_{\theta}\phi = \partial_{\theta}\phi - ia_{\theta}\phi = (iN - iN)e^{iN\theta} = 0.$$

Las condiciones en  $\rho=0$  aseguran que  $\phi$  es univaluada y el potencial gauge sea no singular ahí.

Así tenemos tres diferentes significados de N, número de giro de  $\phi$  en el infinito. Ya que

$$\int_{0}^{2\pi} a_{\theta}(\infty)d\theta = 2\pi N,$$

el flujo magnético total es  $2\pi N$  [22]. Ya que  $\phi$  se anula en  $\rho = 0$ , hay un vórtice o multivórtice centrado en el origen [22]. El incremento de la fase de  $\phi$  al rededor del origen es  $2\pi N$ , así la multiplicidad del vórtice es N [12, 22].

Para campos de la forma (3.43), con  $a_{\rho} = 0$  y  $\phi(\rho) = 0$  real, la energía gauge de GL es

$$V = \pi \int_0^\infty \left( \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{da_\theta}{d\rho} \right)^2 + \left( \frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} (N - a_\theta)^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - \phi^2)^2 \right) \rho d\rho,$$

y las ecuaciones de campo se reducen a

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2}(N - a_\theta)^2\phi + \frac{\lambda}{2}(1 - \phi^2)\phi = 0$$
 (3.44)

$$\frac{d^2 a_{\theta}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{da_{\theta}}{d\rho} + (N - a_{\theta})\phi^2 = 0.$$
 (3.45)

Para entender el comportamiento cuando  $\rho \to \infty$ , sea

$$\phi(\rho) = 1 - \sigma(\rho) \tag{3.46}$$

$$a_{\theta}(\rho) = N - \psi(\rho). \tag{3.47}$$

Las formas linealizadas de las ecuaciones (3.44) y (3.45) son las ecuaciones de Bessel modificadas [2, 22]

$$\frac{d^2\sigma}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{d\rho} - \lambda\sigma = 0, \tag{3.48}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\psi}{\rho} - \psi = 0, (3.49)$$

cuyas soluciones dan las expresiones asintóticas

$$\phi(\rho) \sim 1 - \frac{A_s}{2\pi} k_0(\sqrt{\lambda}\rho),$$
 (3.50)

$$a_{\theta}(\rho) \sim N - \frac{A_m}{2\pi} \rho K_1(\rho) \tag{3.51}$$

El término exponencial principal en las funciones de Bessel modificadas  $K_0(\rho)$  y  $K_1(\rho)$  para valores grandes de  $\rho$  es

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}e^{-\rho}$$
.

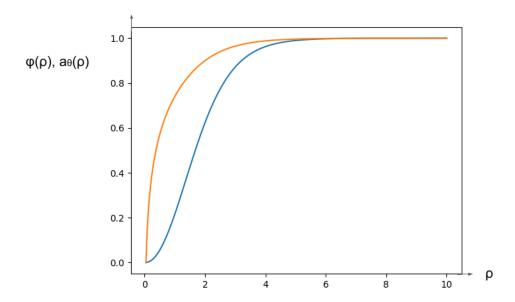
Los coeficientes  $A_s$  y  $A_m$  asociados con el decaimiento de los campos escalar y magnético, necesitan ser determinados numéricamente, resolviendo las ecuaciones no lineales con condiciones de frontera apropiadas en  $\rho = 0$ .

En efecto, las expresiones asintóticas (3.50) y (3.51) tienen validez algo limitada. Para  $\lambda \ll 1$  son validas solo para valores muy grandes de  $\rho$ , mucho más grandes que  $1/\sqrt{\lambda}$  [12]. Para  $\lambda > 4$  estos son válidos, debido a forzar los términos en la linealización que conduce a (3.48) y (3.49) [12]. En cambio, para  $\lambda \gg 1$ , las soluciones de las ecuaciones no lineales (3.44) y (3.45), excepto en una vecindad muy pequeña de  $\rho = 0$ , son aproximadamente

$$\phi(\rho) = 1 - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{A_m^{\infty}}{2\pi} K_1(\rho) \right)^2 \tag{3.52}$$

$$a_{\theta}(\rho) = N - \frac{A_m^{\infty}}{2\pi} \rho K_1(\rho), \qquad (3.53)$$

así  $\phi$  esta muy cercano a 1 para casi todo  $\rho$  [12]. La constante  $A_m^{\infty}$  es  $2\pi N$ . Las formas asintóticas del campo escalar y potencial gauge nos informan de las fuerzas esperadas entre vórtices bien separados. En el valor de punto crítico de la constante de acople,  $\lambda=1$ , hay más soluciones de ecuaciones estáticas que solo de simetría circular [12]. La figura (3.1) es la solución numérica del sistema (3.44) y (3.45). Se hizo uso del método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden haciendo las



**Figura 3.1.** Campos escalar y gauge contra coordenada radial. Las funciones de perfil  $\phi(\rho)$  (curva naranja) y  $a_{\theta}(\rho)$  (curva azul) para el vórtice N=1 con  $\lambda=1.0$ . Las curvas se mueven hacia la izquierda al aumentar  $\lambda$ . Elaboración propia.

siguientes sustituciones

$$\phi_1 = \frac{d\phi}{d\rho}$$
$$a_{1\theta} = \frac{a_{\theta}}{d\rho}$$

tenemos el sistema

$$\frac{d\phi_1}{d\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2} (N - a_\theta)^2 \phi - \frac{\lambda}{2} (1 - \phi^2) \phi$$
$$\frac{da_{1\theta}}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{da_\theta}{d\rho} - (N - a_\theta) \phi^2$$
$$\phi_1 = \frac{d\phi}{d\rho},$$
$$a_{1\theta} = \frac{a_\theta}{d\rho}$$

se hizo para 9950 iteraciones con un paso de -0.001 partiendo desde 10 hasta 0.05 con una condición inicial

$$\begin{pmatrix} \phi \\ a_{\theta} \\ \phi_{1} \\ a_{1\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -0.000034189 \\ -0.000038438 \end{pmatrix}$$

Las pruebas hechas en la construcción de ésta solución y la presentada en el capítulo final presentan dependencia sensible en las condiciones iniciales en una vecindad de centrada en cero con r < 1, significa que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro de las soluciones [9]. El código implementado en Python para la elaboración de las soluciones puede consultarse en [7]

# 4. Teoría de Chern-Simons

# 4.1. Introducción

El objetivo para construir una teoría de campo efectivo que capture la respuesta del estado fundamental Hall cuántico para perturbaciones de baja energía. Esas teorías efectivas son conocidas como teorías de Chern-Simons [11]. Trataremos el potencial gauge  $A_{\mu}$  del electromagnetismo como un campo gauge de fondo. Esto significa que  $A_{\mu}$  no es dinámico; solo es un parámetro de la teoría que nos dice cuales campos eléctricos y magnéticos que se han encendido [11]. Además, no se incluye en  $A_{\mu}$  el campo magnético original de fondo que da el efecto Hall para iniciar. En lugar,  $A_{\mu}$  describirá solo las perturbaciones alrededor de un estado Hall dado, ya sea por encender un campo eléctrico o por perturbar el campo magnético aplicado pero manteniendo el tipo de estado (el nivel de llenado) fijo.

En la teoría de campo de contexto,  $A_{\mu}$  siempre se acopla a los grados dinámicos de libertad a través de la corriente apropiada  $J_{\mu}$  así que la acción induce el término

$$S_{\mathcal{A}} = \int d^3x J^{\mu} A_{\mu}; \tag{4.1}$$

la medida  $\int d^3x$  significa que hemos asumido que la corriente vive en d=2+1 dimensiones. La acción  $S_{\rm A}$  es invariante bajo la transformación gauge  $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu} \omega$  debido a de la conservación de la corriente

$$\partial_{\mu}J^{\mu}=0.$$

Esas dos ecuaciones serán el punto de partida para la teorías de campo efectivo que dicen como el sistema responde cuando es perturbado al encender un campo eléctrico o magnético de fondo.

### 4.2. El efecto Hall cuántico entero

Empezaremos haciendo una asunción: en bajas energías no hay grados de libertad que puedan afectar la física cuando el sistema es perturbado. Pensemos sobre lo que esta asunción significa. El primer requerimiento es que hay una banda prohibida de energía para el primer estado excitado [11]. En otras palabras, el sistema es un aislante en vez de un conductor. Nos interesa la física en energías debajo de esta banda prohibida. Hay un requerimiento más sutil en la suposición. Este está relacionado a la existencia de los llamdos "grados de libertad topológicos". La intención es calcular la función de partición. Esto no es una función de los grados dinámicos de libertad. En cambio, es una función de la fuente la cual es el potencial electromagnético  $A_{\mu}$  [11]. La forma esquemática de la función de partición es

$$Z[A_{\mu}] = \int D(\text{campos})e^{iS[\text{campos};A]/\hbar}$$
 (4.2)

donde los "campos" se refieren a todos los grados de libertad dinámicos. Al integrar todos los grados de libertad, la teoría se queda solo con el estado fundamental

$$Z[A_{\mu}] = e^{iS_{\text{eff}}[A_{\mu}]/\hbar}.$$

Donde  $S_{\text{eff}}$  representa la acción efectiva y depende en los parámetros del problema más que los campos dinámicos [11]. Así no utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange ya que no es dinámico en  $A_{\mu}$ . Sin embargo, contiene información importante ya que, del acople (4.1), tenemos

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}[A]}{\delta A_{\mu}(x)} = \langle J^{\mu}(x) \rangle. \tag{4.3}$$

Esto nos dice que la acción efectiva almacena la respuesta de la corriente a los campos eléctrico y magnético.

Ya que no sabemos como es el lagrangiano microscópico, no es posible hacer una integral de caminos explícitamente en (4.2) [11]. En vez de eso escribimos todos los términos posibles que pueden aparecer y escogemos los más importantes. La primera restricción es que la acción efectiva  $S_{\rm eff}[{\rm A}]$  debe ser invariante gauge [11]. Una forma de lograr esto es construirlo de campos eléctricos y magnéticos.

$$E = -\frac{1}{c}\nabla A_0 - \frac{\partial A}{t} y B = \nabla \times A.$$

El tipo de términos que podemos escribir están más restringidos por otras simetrías que el sistema puede tener, tal como invarianza rotacional y traslacional. Finalmente, la acción efectiva debe ser un funcional local, esto significa que podemos escribirlo como

$$S_{\text{eff}}[A] = \int d^d x x \dots$$

Ahora solo tenemos que escribir todos los términos en la acción efectiva que satisface los requerimientos. Como nos interesan campos eléctricos y magnéticos pequeños, que varían solo sobre largas distancias, los términos más importantes serán esos con las potencias más pequeñas y derivadas más pequeñas.

Si tenemos invarianza rotacional el primer término que se obtiene es

$$S_{\text{eff}}[A] = \int d^4x \ \epsilon E \cdots E - \frac{1}{\mu} B \cdots B.$$

La respuesta (4.3) que sigue de esta acción efectiva es esencialmente de las corrientes libres. En efecto, este solo difiere de la acción de Maxwell por las susceptibilidades  $\epsilon$  y  $\mu$  los cuales son parámetros libres caracterizando la respuesta del sistema.

Entonces podemos escribir un nuevo término consistente con la invarianza rotacional. La acción efectiva resultante es  $S_{\text{eff}}[A] = S_{\text{CS}}[A]$  donde

$$S_{\rm CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \ e^{\mu\nu\rho} A_{\mu} \partial_{\nu} A_{\rho} \tag{4.4}$$

El coeficiente k a veces es llamado el nivel del término de Chern-Simons [11]. A primera vista, no es obvio que el término de Chern-Simons sea invariante gauge ya que depende explícitamente de  $A_{\mu}$ . Sin embargo, bajo una transformación gauge,  $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\omega$ , tenemos

$$S_{\rm CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \; \partial_{\mu} (\omega e^{\mu\nu\rho} \partial_{\nu} A_{\rho})$$

El cambio es una derivada total. En muchas situaciones podemos simplemente despreciar esta derivada total y el término de Chern-Simons es invariante gauge [11]. Sin embargo, hay algunas situaciones donde la derivada total no se anula.

El término de Chern-Simons (4.4) respeta la invarianza rotacional, pero rompe la paridad y la inversión temporal [11]. Aquí nos centramos en paridades las cuales en d = 2 + 1 dimensiones, se definen como

$$x^0 \to x^0$$
,  $x^1 \to -x^1$ ,  $x^2 \to x^2$ .

y, correspondientemente,  $A_0 \to A_0$ ,  $A_1 \to -A_1$  y  $A_2 \to A_2$ . La medida  $\int d^3x$  es invariante bajo paridad. Sin embargo, el integrando no es invariante:

$$e^{\mu\nu\rho}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\rho} \to -e^{\mu\nu\rho}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\rho}.$$

Esto significa que la acción efectiva de Chern-Simons con  $k \neq 0$  puede solo aparecer en sistemas donde la paridad se rompe.

Usando (4.3) calculamos la corriente que aparece del término de Chern-Simons, esta es

$$J_i = \frac{\delta S_{\rm CS}[A]}{\delta A_i} = -\frac{k}{2\pi} \epsilon_{ij} E_i.$$

En otras palabras, la acción de Chern-Simons describe la conductividad Hall con

$$\sigma_{xy} = \frac{k}{2\pi}$$

Este coincide con la conductividad Hall de llenado  $\nu$  de los niveles de Landau si identificamos el nivel de Chern-Simons con  $k = e^2 \nu / \hbar$ . La densidad de carga  $J^0$  es

$$J_0 = \frac{\delta S_{\rm CS}[A]}{\delta A_0} = \frac{k}{2\pi} B.$$

Vemos que el término de Chern-Simons captura la física básica del efecto Hall cuántico entero, pero solo si identificamos el nivel  $k = e^2 \nu / \hbar$ . No tenemos que asumir que k esta cuantizado en esta manera, en vez, este está obligado para tomar valores que son múltiples enteros de  $e^2/\hbar$  [11].

Para entender la cuantización del nivel de Chern-Simons k en la ecuación (4.4). Tener un factor periódico en la geometría nos permite hacer algo nuevo con la transformación gauge,  $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\omega$ . Usualmente, se trabaja con funciones  $\omega(l, \mathbf{x})$  las cuales son univaluadas [11]. Pero es demasiado restrictivo: debemos ver que campos físicos son univaluados. La función de onda del electrón transforma como  $e^{ie\omega/\hbar}$  [18]. Así que el requerimiento no es que  $\omega$  sea univaluada, sino que  $e^{ie\omega/\hbar}$  sea univaluada [11]. Y, cuando la geometría de fondo tenga un factor  $S^1$ , esto nos permite hacer algo nuevo donde la transformación gauge gira alrededor del círculo,

con

$$\omega = \frac{2\pi\hbar r}{e\beta}.\tag{4.5}$$

A veces es llamado una transformación gauge grande, el nombre supone significativamente que no pueden ser conectados continuamente con la identidad [11]. Bajo tal transformación gauge grande, la componente temporal del campo gauge es simplemente desplazado por una constante

$$A_0 \to A_0 + \frac{2\pi\hbar}{e\beta}.\tag{4.6}$$

Los campos gauge que están relacionados por una transformación gauge deben ser considerados físicamente equivalentes [11]. Quiere decir que podemos entender  $A_0$  como una variable periódica, con periodicidad  $2\pi\hbar/e\beta$ , inversamente proporcional al radio  $\beta$  de  $S^1$ .

Pensemos sobre las direcciones espaciales como formando una esfera  $\mathbb{S}^2$ , en vez de un plano  $\mathbb{R}^2$ . Haciendo uso de esta geometría se puede adherir un flujo magnético de fondo mediante el espacio  $\mathbb{S}^2$ , dado por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{S}^1} F_{12} = \frac{\hbar}{e} \tag{4.7}$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ . Este flujo es la cantidad mínima permitida por la condición de cuantización de Dirac [11].

Ahora evaluamos el término de Chern-Simons (4.4) en una configuración con constante  $A_0 = a$  y fuerza de campo espacial (4.7), tenemos

$$S_{\rm CS} = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \ A_0 F_{12} + A_1 F_{20} + A_2 F_{01}.$$

Podemos anular todos los términos con  $\partial_0$ , pero integrando por partes en las derivadas espaciales aparece un factor extra de 2

$$S_{\rm CS} = \frac{k}{2\pi} \int d^3x \ A_0 F_{12}.$$

Evaluando en el flujo (4.7) y constante  $A_0 = a$ , se tiene

$$S_{\rm CS} = \beta a \frac{\hbar k}{e}.$$

Ahora que hemos evaluado la acción de Chern-Simons en esta configuración parti-

cular. Veamos que pasa bajo transformaciones gauge como (4.6) que desplaza  $A_0$ . Después de todo, el término de Chern-Simons no es del todo invariante gauge, ya que debe permanecer sin cambios luego de la transformación. En cambio, este transforma como

$$S_{\rm CS} \to S_{\rm CS} + \frac{2\pi\hbar^2 k}{e^2}.$$

Así, el término de Chern-Simons debe ser interpretado como una acción cuántica efectiva

$$Z[A_{\mu}] = e^{iS_{\text{eff}}[A_{\mu}]/\hbar}.$$

Con lo cual está bien si el término de Chern-Simons por si mismo no es un invariante gauge, mientras la función de partición  $e^{iS_{CS}[A_{\mu}]/\hbar}$  lo sea [11]. De esto

$$\frac{\hbar k}{e^2} \in \mathbf{Z}.$$

Ahora  $k = e^2 \nu / \hbar$  con  $\nu \in \mathbf{Z}$ , entonces la conductividad Hall es

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\nu.$$

Se ha reproducido la cuantización observada del efecto Hall cuántico ahorrándonos mucho trabajo. No se mencionaron los niveles de Landau, no se mencionó si los portadores de carga fueran fermiones o bosones, o si estuvieran libres o interaccionando fuertemente. En cambio, en motivos generales se mostró que la conductividad Hall está cuantizada.

## 4.2.1. Compacidad

Volviendo a la derivación, esta parece depender en dos resultados. El primero es la naturaleza periódica de la transformación gauge,  $e^{ie\omega/\hbar}$ , lo cual significa que las transformaciones gauge topológicamente no triviales (4.5) están permitidas [11]. Por que la carga aparece en el exponente, una asunción implícita es que todos los campos transforman con la misma carga. Podemos, en efecto, ablandar ligeramente esto y podemos repetir el argumento cuando las cargas son múltiplos racionales uno del otro [11]. Las simetrías gauge abelianas con esta propiedad son conocidas como compactas [11]. Como la simetría gauge del electromagnetismo, es compacta.

Segundo, la derivación requerida para hacer un flujo cuántico mínimo (4.7), establecido por la condición de cuantización de Dirac [11]. Sin embargo, una inspección minuciosa de la condición de Dirac muestra que esto también depende de

la compacidad del grupo gauge [11]. En otras palabras, la naturaleza compacta del electromagnetismo es todo lo que se necesita para asegurar la cuantización de la conductividad Hall.

En contraste, las simetrías gauge abelianas que no son compactas por ejemplo, debido a que tienen cargas las cuales son múltiplos irracionales una de la otra, no pueden tener monopolos magnéticos, o flujos de la forma (4.7) [11]. A veces se denota su grupo gauge como  $\mathbf{R}$  en vez de U(1) para resaltar esta no compacidad.

## 4.3. Efecto Hall cuántico fraccionario

Si queremos evitar la conclusión que la conductividad Hall toma valores enteros, entonces no solo esperamos violar una de las asunciones que se hicieron en la argumentación previa. Aun la única cosa asumida es que no hay grados de libertad dinámicos con efecto de bajas energías cuando el sistema es perturbado. Además el líquido de Hall cuántico fraccionario tiene una banda prohibida. Sin embargo, resulta que pueden haber grados de libertad los cuales están sin brecha de energía, sin embargo afecta la física en escalas de energía arbitrariamente pequeñas, esos grados de libertad son llamados topológicos [11]. El objetivo es describir los grados topológicos de libertad relevantes para el efecto Hall cuántico fraccionario. Queremos calcular

$$Z[A_{\mu}] = \int D(campos)e^{iS[campos;A]/\hbar}$$

donde  $A_{\mu}$  otra vez se acopla al campo a través de la corriente, aquí debemos conservar los grados de libertad topológicos. La parte complicada es que esos grados topológicos pueden ser combinaciones complicadas del campo original y es usualmente muy difícil para identificar de antemano que tipo de campo emergente será en un sistema dado [11]. Así, en vez de trabajar de los primeros principios, primero debe considerarse el tipo de grado topológico de libertad puede aparecer.

Consideremos  $a_{\mu}$  un campo gauge emergente, apareciendo del comportamiento colectivo de muchos electrones subyacentes. En efecto su dinámica es descrita por la acción de Maxwell

$$S_{\text{Maxwell}}[a] = -\frac{1}{4g^2} \int d^3x \ f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

donde  $f_{\mu\nu} = \partial_{\mu}a_{\nu} - \partial_{\nu}a_{\mu}$  y  $g^2$  es una constante de acople. Las ecuaciones de movimiento resultantes son  $\partial_{\mu}f^{\mu\nu} = 0$ . La teoría U(1) de Maxwell en d = 2+1 dimensio-

nes describe un único grado de libertad sin masa. Sin embargo, hay un nuevo tipo de acción que podemos escribir para campos gauge en d=2+1 dimensiones. Esta es la acción de Chern-Simons

$$S_{\rm cs}[a] = \frac{k}{2\pi} \int d^3x \ e^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho \tag{4.8}$$

Los argumentos que se han visto significan que k debe ser entero si la simetría emergente U(1) es compacta [11]. Ahora veamos como el término de Chern-Simons cambia la dinámica cuántica y clásica. Supongamos que tomamos como nuestra acción la suma de dos términos

$$S = S_{\text{Maxwell}} + S_{\text{CS}}$$

La ecuación de movimiento para  $a_\mu$ ahora se vuelve

$$\partial_{\mu}f^{\mu\nu} + \frac{kg^2}{4\pi}e^{\nu\rho\sigma}f_{\rho\sigma} = 0$$

Esto ya no describe un fotón sin masa. En vez, cualquier excitación decae exponencialmente.

Antes de seguir, consideremos una propiedad más interesante e importante de la ecuación (4.8) que depende solo en la topología del mánifold. Primero miremos que en la acción de Maxwell, si acoplamos esto a la métrica del mánifold  $g_{\mu\nu}$ , la acción se vuelve

$$S_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4q^2} \int d^3x \sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}.$$

Como se ve claramente esta métrica juega dos roles: es necesaria para subir los índices y segundo provee una métrica  $\sqrt{-g}$ .

En contraste, ninguno de esos son requeridos cuando generalizamos (4.8) a espacio-tiempo curvo. Como  $a \wedge da$  es una 3-forma, y podemos integrar

$$S_{\rm CS} = \frac{k}{4\pi} \int a \wedge da.$$

Así la acción es independiente de la métrica.

Ahora podemos considerar la teoría efectiva para los estados de Laughlin  $\nu = 1/m$ . Esos estados Hall tienen un único campo gauge  $a_{\mu}$  emergente y compacto U(1).

La función de partición se puede escribir como

$$Z[A_{\mu}] = \int \mathcal{D}a_{\mu}e^{iS_{\text{eff}}[a;A]/\hbar}.$$

La corriente esta dada por

$$J^{\mu} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_{\nu} a_{\rho} \tag{4.9}$$

La conservación de la corriente es  $\partial_{\mu}J^{\mu}=0$ . Esta relación significa que el flujo magnético de  $a_{\mu}$  es interpretado como la carga eléctrica que se acopla a  $A_{\mu}$  [11]. El flujo mínimo permitido esta dado por la condición de cuantización de Dirac

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f_{12} = \frac{\hbar}{e}.\tag{4.10}$$

Podríamos también agregar un término de Chern-Simons  $e^{\mu\nu\rho}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\rho}$ , para A misma, pero ya hemos visto que este da una contribución entera para la conductividad Hall.

Si se calcula la conductividad Hall. Ingenuamente podríamos reemplazar un campo con su ecuación de movimiento, el cual en este caso es

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{m} F_{\mu\nu}.$$
 (4.11)

La solución para esta ecuación es  $a_{\mu} = A_{\mu}/m$ . Sustituyendo esta relación entre los campo en la siguiente acción efectiva postulada

$$S_{\text{eff}}[a,A] = \frac{e^2}{\hbar} \int d^3x \frac{1}{2\pi} e^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho - \frac{m}{4\pi} e^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + \dots$$
 (4.12)

donde el primer término es una mezcla del término de Chern-Simons que se convierte en el acoplamiento de  $A_{\mu}J^{\mu}$ ; el segundo término es el nuevo término más simple que se puede escribir, tenemos

$$S_{\text{eff}}[A] = \frac{e^2}{2\pi} \int d^3x \frac{1}{4\pi m} e^{\mu\nu\rho} A_{\mu\partial_{\nu}A_{\rho}}.$$

Que es el mismo tipo de acción (4.4) que hemos trabajado antes y podemos ver directamente que la conductancia Hall es

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{1}{m},$$

que es lo esperado para el estado de Laughlin. El campo gauge  $a_{\rho}$  esta restringido por la condición de cuantización de Dirac, pero este es incompatible con la ecuación de movimiento (4.11) cuando F también tiene solo una unidad de flujo [11].

La acción (4.12) describe el estado Hall cuántico en el llenado  $\nu = 1/m$ . Ahora agregamos algo a esto. Acoplaremos el campo gauge emergente  $a_{\mu}$  a su propia corriente, la cual llamamos  $j^{\mu}$ , el término adicional

$$\Delta S = \int d^3x a_\mu j^\mu.$$

Para asegurar la invarianza gauge,  $j^{\mu}$  debe conservarse  $\partial_{\mu}j^{\mu}=0$ . Luego la corriente  $j^{\mu}$  describe cuasi huecos y cuasi partículas en el sistema. Primero se pone el campo gauge de fondo  $A_{\mu}$  a cero. La ecuación de movimiento para  $a_{\mu}$  es

$$\frac{e^2}{2\pi\hbar}f_{\mu\nu} = \frac{1}{m}\epsilon_{\mu\nu\rho}j^{\rho}.$$
(4.13)

El tipo más simple de corriente que se puede observar es una carga estática la cual colocamos en el origen. Está descrita por  $j^1 = j^2 = 0$  y  $j^0 = e\delta^2(x)$ . El hecho que esas partículas tengan carga e bajo el campo gauge  $a_{\mu}$  esta relacionado a la elección de cuantización de Dirac (4.10). La ecuación de movimiento de arriba se convierte en

$$\frac{1}{2\pi}f_{12} = \frac{\hbar}{em}\delta^2(x).$$

Vemos que el efecto del término de Chern-Simons es para adjuntar el flujo  $\hbar/em$  a cada partícula de carga e. La corriente del electrón  $J^{\mu}$  en (4.9) es

$$J^{0} = \frac{e^{2}}{2\pi\hbar} f_{12} = \frac{e}{m} \delta^{2}(x)$$

es la corriente apropiada para una partícula estacionaria de carga eléctrica e/m. Recordemos que una partícula de carga q moviéndose alrededor de un flujo  $\Phi$  tiene una fase  $e^{iq\Phi/\hbar}$ . Debido al apego al flujo (4.13), las cuasi partículas necesariamente portan ambas q=e y flujo  $\Phi=2\pi\hbar/em$ . Si movemos una partícula alrededor de otra, obtendremos una fase  $e^{iq\Phi/\hbar}$ . Pero la fase estadística es definida por el intercambio de partículas, que consta de solo la mitad de una órbita, como vimos en 2.2.2.3. Así la fase estadística esperada  $e^{i\pi\alpha}=e^{iq\Phi/2\hbar}$ . Para nuestros cuasi huecos, con q=e y  $\Phi=2\pi\hbar/em$ , tenemos

$$\alpha = \frac{1}{m}$$

la cual es la estadística esperada de cuasi huecos en el estado de Laughlin.

#### 4.3.1. Estadística fraccionaria

Los cálculos de arriba son buenos y rápidos y dieron el resultado correcto. Pero hay un factor aniónico famoso de 2 que se ha pasado por alto. Aquí está el problema. Como la carga q en la primera partícula se mueve alrededor del flujo  $\Phi$  en el segundo, escogemos una fase  $e^{iq\Phi/\hbar}$ . Pero podemos pensar que el flujo de la primera partícula también se mueve alrededor de la carga de la segunda. Así seguramente este debe dar otro factor de  $e^{iq\Phi/\hbar}$ . Para ser precisos, no. Para ver la razón de por que esto no es así, lo mejor es considerar los cálculos.

Por generalidad, tomamos N partículas colocadas en las posiciones  $x_a(t)$  las cuales, con la notación mostradas, dejamos cambiar con el tiempo. La densidad de carga y corrientes son

$$j^{0}(\mathbf{x},t) = e \sum_{a=1}^{N} \delta^{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{a}(t)) \qquad j(\mathbf{x},t) = e \sum_{a=1}^{N} \dot{\mathbf{x}}_{a} \delta^{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{a}(t)).$$

La ecuación de movimiento (4.13) puede ser resuelta incluso en este caso general. En el gauge de Coulomb  $a_0 = 0$  con  $\partial_i a_i = 0$  (sumando solo sobre los índices espaciales) la solución está dada por

$$a_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{em} \sum_{a=1}^{N} \epsilon^{ij} \frac{x^i - x_a^j(t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)|^2}.$$
 (4.14)

Esto sigue de los métodos estándar usando la función de Green para el laplaciano en dos dimensiones:  $\nabla^2 log|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = 2\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$  [2]. Esta solución es otra vez el enunciado que cada partícula porta un flujo  $\hbar/em$  [11]. Sin embargo, podemos también usar esta solución directamente para calcular el cambio de fase cuando una partícula -digamos, la primera - es transportada a lo largo de una curva C [11]. Este sería

$$\exp\left(ie\oint\mathbf{a}\cdot d\mathbf{x}_1\right)$$

Si la curva C encierra a la otra partícula, el cambio de fase resultante se puede calcular para ser  $e^{2\pi i/m}$ . Como antes, si intercambiamos dos partículas, obtenemos la mitad de esta fase, o  $e^{i\pi\alpha}=e^{i\pi/m}$ . Esto, por supuesto, es el mismo resultado de arriba. Vale la pena señalar que este cálculo de Chern-Simons terminó buscando exactamente lo mismo como el cálculo original de la fase de Berry para las funciones

de onda de Laughlin en el capítulo 2.

En los cálculos hemos tomado  $j^{\mu}$  para ser la corriente de fondo fijada describiendo las cuasi-partículas. Pero el marco de referencia de la teoría de campo efectiva también nos permite hacer la dinámica de cuasi-partículas. Lo que necesitamos es introducir un nuevo campo bosónico  $\phi$  y lo incluimos en la acción efectiva, acoplada mínimamente a  $a_{\mu}$  [11]. Entonces dotamos a  $\phi$  con su propia dinámica. La dinámica depende de la elección que hagamos. Por ejemplo, si queremos que lo cuasi huecos tengan una relación de dispersión relativista, podríamos introducir la acción

$$S_{\text{eff}}[a,\phi] = \int d^3x \; \frac{e^2 m}{4\pi\hbar} e^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + |\mathcal{D}_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

donde la forma relativista de la acción también implica que  $\phi$  describirá tanto excitaciones de partículas como antipartículas (es decir, huecos) [11]. Aquí  $V(\phi)$  es un potencial que gobierna la masa y autointeracciones de interacciones de las cuasi partículas. Más importante, la derivada covariante  $\mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - iea_{\mu}$  incluye el acople para el campo de Chern-Simons. Por los cálculos de arriba, esto asegura que las excitaciones de  $\phi$  tendrán la estadística aniónica correcta para describir cuasi partículas, aunque el campo  $\phi$  sea bosónico.

#### 4.3.2. Teoría de Chern-Simons en un toro

Si colocamos un estado Hall cuántico fraccionario en un mánifold compacto, entonces el número de estados fundamentales dependen en la topología de ese mánifold. En particular, la existencia de aniones era suficiente para asegurar m estados fundamentales en un todo y  $m^g$  estados fundamentales en una superficie de genero g. Esta es la esencia de lo que conocemos como orden topológico.

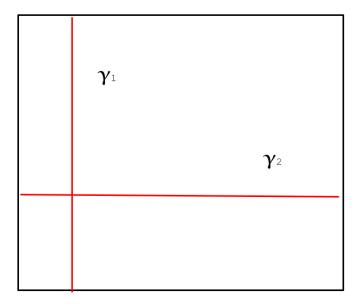
Si estamos en el plano  $\mathbb{R}^2$  o la esfera  $\mathbb{S}^2$ , entonces la teoría de Chern-Simons tiene solo un estado, pero si cambiamos el mánifold para ser otro más complicado, como un toro entonces hay una degeneración de estados fundamentales [11]. La dinámica de la teoría efectiva es

$$S_{\rm CS} = \frac{e^2}{\hbar} \int d^3x \, \frac{m}{4\pi} e^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho,$$

la ecuación de movimiento para  $a_0$  es

$$f_{12} = 0.$$

Es fácil ver que tales soluciones existen en el toro  $\mathbf{T}^2$ , donde un ejemplo es simplemente configurar cada  $a_i$  para ser constante. La primera tarea es encontrar un gauge invariante para parametrizar este espacio de soluciones. Denotamos los radios de los



**Figura 4.1.** Ciclos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  definidos sobre el toro  $\mathbf{T}^2$ . Elaboración propia.

círculos del toro  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  como  $R_1$  y  $R_2$ . También denotemos dos correspondientes curvas no contraibles como  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , que están ilustradas en la figura (4.1). La forma más simple para construir un campo gauge invariante de una conexión gauge es integrar

$$\omega_i = \oint_{\gamma_i} dx^j a_j.$$

Este es invariante bajo transformaciones gauge, pero no de esas que giran alrededor del círculo. El invariante gauge correcto para parametrizar las soluciones son por tanto los ciclos de Wilson

$$W_i = \exp\left(i\frac{e}{\hbar}\oint_{\gamma_i}a_jdx^i\right) = e^{ie\omega_i/\hbar}.$$

Como la teoría de Chern-Simons es de primer orden en derivadas temporales, estos ciclos de Wilson están realmente parametrizando el espacio de fase de soluciones, en lugar del espacio de configuración. Además, por que las lineas de Wilson son números complejos de módulo unitario, el espacio de fase es compacto. En motivos generales, podríamos esperar que cuando cuantizamos un espacio de fase compacto, tenemos un espacio de Hilbert finito dimensional [11]. Una interpretación del ciclo de Wilson es que una partícula con carga e se propaga alrededor del ciclo del toro.

La teoría de campo efectivo para los estados de Laughlin pueden ser resumidos como sigue: escribimos la corriente del electrón como

$$J^{\mu} = \frac{1}{2\pi} e^{\mu\nu\rho} \partial_{\nu} a_{\rho} \tag{4.15}$$

donde  $a_{\rho}$  es un campo emergente. Entonces dotamos a  $a_{\mu}$  con un término de Chern-Simons, entonces la corriente de cuasi partícula  $j^{\mu}$  es

$$j^{\mu} = \frac{1}{2\pi} e^{\mu\nu\rho} \partial_{\nu} \bar{a}_{\rho}$$

donde  $\bar{a}_{\mu}$  es un campo gauge emergente cuya dinámica es gobernada por un segundo término de Chern-Simons. La acción final es

$$S_{\text{eff}}[a,\bar{a};A] = \int d^3x \, \frac{1}{2\pi} e^{\mu\nu\rho} A_{\mu} \partial_{\nu} a_{\rho} - \frac{m}{4\pi} e^{\mu\nu\rho} a_{\mu} \partial_{\nu} a_{\rho} + \frac{1}{2\pi} e^{\mu\nu\rho} a_{\mu} \partial_{\nu} \bar{a}_{\rho} - \frac{\bar{m}}{4\pi} e^{\mu\nu\rho} \bar{a}_{\mu} \partial_{\nu} \bar{a}_{\rho}.$$

Para calcular la conductividad Hall, primero integramos  $\bar{a}$  y luego integramos a. Encontramos que esta teoría describe un estado Hall con fracción de llenado

$$\nu = \frac{1}{m - \frac{1}{\bar{m}}},$$

donde  $\bar{m}$  es un entero. Hay dos cuasi huecos cuyas corrientes se acoplan a a y  $\bar{a}$  respectivamente [11]. Para un cuasi hueco estático el cual se acopla a a, las ecuaciones de movimiento se leen

$$mf_{12} - \bar{f}_{12} = 2\pi\delta^2(x) \text{ y } \bar{m}\bar{f}_{12} - f_{12} = 0 \Rightarrow f_{12} = \frac{2\pi}{m - \frac{1}{m}}\delta^2(x)$$

mientras, si el cuasi hueco se acopla a  $\bar{a}$ , las ecuaciones de movimiento son

$$mf_{12} - \bar{f}_{12} = 0 \text{ y } \bar{m}\bar{f}_{12} - f_{12} = 2\pi\delta^2(x) \Rightarrow f_{12} = \frac{2\pi}{m\bar{m} - 1}\delta^2(x).$$

Los coeficientes del lado derecho de las ecuaciones finales nos devuelven la carga eléctrica. Por ejemplo, el estado  $\nu = 5/2$  tiene m = 3 y  $\bar{m} = 2$ . Las cargas resultantes de los cuasi huecos son  $e^* = 2/5$  y  $e^* = 1/5$ . Ahora podemos continuar, las cuasi partículas del nuevo estado son descritas por una corriente  $j_2(x)$  la cual se acopla a  $\bar{a}_{\mu}$ . Escribimos en la forma (4.15) e introducimos el nuevo campo gauge emergente con un tercer término de Chern-Simons. Y así sucesivamente. Los estados resultantes

tiene fracción de llenado

$$\nu = \frac{1}{m \pm \frac{1}{\bar{m}_1 \pm \frac{1}{\bar{m}_2 \pm \dots}}}$$

.

# 4.4. Dualidad partícula-vórtice

El primer intento es obtener parámetros de orden local para estados Hall cuánticos en teorías efectivas de baja energía modeladas en el enfoque habitual de Ginzburg-Landau. Los aspectos más sutiles de los estados Hall cuánticos no son capturados por una teoría de GL. Sin embargo, el enfoque provee un marco de referencia en el cual muchas propiedades talladas de los estados Hall cuánticos pueden ser calculados.

En d=2+1 teorías de campo, hay dos tipos de excitación de partículas que pueden aparecer. El primer tipo es la excitación familiar que obtenemos cuando cuantizamos un campo local [20]. El segundo tipo de partículas es un *vórtice*, cuya teoría se desarrollo en el capítulo 3, definido por el giro de algún parámetro local.

Frecuentemente en dimensiones d=2+1, es posible escribir dos teorías muy diferentes las cuales describen la misma física. Esto es posible por que las partículas de una teoría están relacionada a los vórtices del otro, y vice versa.

#### 4.4.1. El modelo XY

La primera teoría consiste solo de un campo escalar complejo  $\phi$  con acción

$$S_A = \int d^3x \ |\partial_\mu \phi|^2 - a|\phi|^2 - b|\phi|^4 + \dots \tag{4.16}$$

La teoría tiene una simetría global U(1) la cual actúa por rotaciones de la forma  $\phi \to e^{i\theta}\phi$ . Las fases diferentes de esta teoría, y las excitaciones físicas correspondientes, pueden ser caracterizadas por el rompimiento de simetría de U(1) [6]. Hay tres diferentes posibilidades que se pueden caracterizar por el signo de a, tomando b > 0.

- a > 0: En este fase, la simetría U(1) no se rompe y las excitaciones de  $\phi$  son masivas.
- a < 0:  $\phi$  obtiene un valor esperado de vacío y la simetría global U(1) se rompe. Podemos escribir  $\phi = \rho e^{i\sigma}$ . Las fluctuaciones de  $\rho$  son masivas, mientras el campo  $\sigma$  es sin masa. Esta fase es a veces llamada el "modelo XY" [6]. En esta fase, la teoría también tiene excitaciones de vórtices. Estos aparecen

de la fase de  $\phi$  girando asintóticamente. El giro asumido es medido por

$$\oint dx^i \ \partial_i \sigma = 2\pi n$$

con  $n \in \mathbf{Z}$  cuenta el número de giro de vórtices. Como se explica en el capítulo 3, n está cuantizada por razones topológicas. Esos vórtices tienen una banda prohibida.

 a = 0 : permaneciendo entre las dos fases es un punto crítico. Aquí, la dinámica de bajas energías es descrita por una teoría de campo conforme.

#### 4.4.2. EL modelo abeliano de Higgs

Esta vez el campo escalar está acoplado a una dinámica de campo gauge  $\alpha_{\mu}$ . Esta acción es

$$S_B = \int d^3x - \frac{1}{4q^2} \tilde{f}_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} + |\mathcal{D}_{\mu} \tilde{\phi}|^2 - a' |\tilde{\phi}|^2 - b' |\tilde{\phi}|^4 + \dots$$
 (4.17)

con  $\tilde{f}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\alpha_{\nu} - \partial_{\nu}\alpha_{\mu}$ . Este no tiene contra parte en la teoría anterior pero las simetrías gauge no son simetrías reales: sencillamente son redundancias en la descripción del sistema [24]. Es más importante igualar las simetrías globales. Hemos visto que el modelo XY tiene una simetría global U(1). Pero también hay una simetría global menos obvia en el modelo de Higgs, con la corriente dada por

$$j^{\mu} = \frac{1}{2\pi} e^{\mu\nu\rho} \partial_{\nu} \alpha_{\rho}. \tag{4.18}$$

Este es el tipo de corriente que aparecen en las teorías del efecto Hall cuántico. La carga conservada es el flujo magnético asociado a la simetría gauge U(1) [24]. Esta debe ser identificada con la simetría global U(1) del modelo XY. Nuevamente asumiendo que b'>0

• a'>0: en esta fase, los campos  $\tilde{\phi}$  son masivos y la simetría gauge U(1) no se rompe [24]. Correspondientemente, hay fotones sin masa en el espectro. Este es usualmente referido como la fase de Coulomb. Sin embargo, en d=2+1 dimensiones, el fotón porta solo una único estado de polarización y puede ser alternativamente descrito por un campo escalar, usualmente entendido como el fotón dual,  $\sigma$ .

El fotón dual está relacionado al campo de fuerza por la ecuación de movi-

miento

$$\tilde{f}^{\mu\nu} = \frac{g^2}{\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial \sigma$$

Note que la corriente (4.18) puede expresarse fácilmente en términos del fotón dual: este es

 $j_{\mu} = \frac{g^2}{\pi} \partial_{\mu} \sigma.$ 

Otra forma de decir esto es que la simetría global U(1) es espontáneamente rota por desplazar el valor del fotón dual  $\sigma \to \sigma + \text{const.}$ 

El resultado de esto es que la simetría global se rompe espontáneamente en esta fase. Esto significa que debemos identificar la fase de Coulomb de esta teoría con el a < 0 del modelo XY. El fotón dual  $\sigma$  puede ser visto como el modo de Goldstone de este rompimiento de simetría.

Los campos cargados  $\tilde{\phi}$  son masivos en esta fase. Deben ser identificados con los vórtices de la fase a < 0 del modelo XY [11]. Notemos que las excitaciones  $\phi$  interactúan a través de la fuerza de Coulomb la cual, en d = 2+1 dimensiones, resulta en una fuerza de confinamiento logarítmica entre las cargas de signos opuestos, justo como los vórtices del modelo XY.

• a' < 0: aquí  $\tilde{\phi}$  tiene un valor esperado y la simetría gauge U(1) es rota. Ahora el fotón tiene una masa por el mecanismo de Higgs y todas las excitaciones tienen una banda prohibida. Esta es la fase de Higgs de la teoría.

La simetría global U(1) no se rompe en esta fase, significa que debemos identificar la fase de Higgs de este modelo con la fase con banda de energía de a > 0 del modelo XY[11].

El rompimiento de la simetría gauge U(1) significa que hay soluciones de tipo vórtices en la fase de Higgs [24]. Esto es definido por el giro asintótico del valor esperado de  $\tilde{\phi}$ . Las soluciones resultantes exhiben algunas buenas propiedades. Primero, a diferencia de los vórtices globales del modelo XY, vórtices asociados a una simetría gauge tienen masa finita. Segundo, también portan flujo magnético cuantizado

$$\oint dx^j \ \partial_i \arg(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \ \tilde{f}_{12} = n'$$

donde  $n' \in \mathbf{Z}$  es el número de vórtices, que esos vórtices porten flujo magnético significa que pueden ser cargados bajo la corriente (4.18) [24]. Estos vórtices son identificados con las excitaciones del modelo XY en la fase a > 0.

• a'=0: Permaneciendo entre las fase, hay otra vez un punto cuántico crítico.

Simulaciones numéricas muestran que este es el mismo punto cuántico crítico que existe en el modelo XY.

## 4.4.3. Teoría de Chern-Simons Ginzburg-Landau

Empezamos por el modelo XY dado en (4.16). Este es un campo escalar complejo con una simetría global  $U(1) \phi \to e^{i\theta} \phi$ . Deformamos esta teoría de la siguiente forma: volvemos gauge la simetría global y agregamos un término de Chern-Simons en el nivel m. Terminamos con

$$S_A[a,\phi] = \int d^3x \ |\partial_\mu \phi - ia_\mu \phi|^2 - V(\phi) - \frac{m}{4\pi} e^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho, \tag{4.19}$$

esta acción efectiva es la acción para el estado de Laughlin en la fracción de llenado  $\nu=1/m$ . En este contexto, las excitaciones del campo  $\phi$  describe los cuasi huecos y cuasi partículas en la teoría, con carga y estadística fraccionaria [11]. El campo gauge de fondo del electromagnetismo  $A_{\mu}$  se acopla a la corriente del electrón

$$j^{\mu} = \frac{1}{2\pi} e^{\mu\nu\rho} \partial_{\nu} a_{\rho}.$$

Ahora podemos repetir este procedimiento para el modelo de Higgs definido en (4.17). Otra vez acoplamos  $a_{\mu}$  el campo gauge U(1) a la corriente la cual está dada por (4.18). Encontramos

$$S_B[a,\alpha,\phi] = \int d^3x \ |\partial_\mu \bar{\phi} - i\alpha_\mu \bar{\phi}|^2 - V(\bar{\phi}) + \frac{1}{2\pi} e^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu \alpha_\rho - \frac{m}{4\pi} e^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + \dots$$

Debido a que  $a_{\rho}$  aparece cuadráticamente en la acción, se puede reemplazar por su ecuación de movimiento

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{m} \bar{f}_{\mu\nu}.$$

Notemos que se tiene el mismo problema de la sección anterior. Esta ecuación de movimiento no es consistente con la cuantización de flujo  $f_{\mu\nu}$  y  $\bar{f}_{\mu\nu}$ , significa que este captura la física local correcta [11]. Se tiene

$$S_B[\alpha, \phi] = \int d^3x \ |\partial_\mu \bar{\phi} - i\alpha_\mu \bar{\phi}|^2 - V(\bar{\phi}) - \frac{1}{4\pi m} e^{\mu\nu\rho} \alpha_\mu \partial_\nu \alpha_\rho \dots$$
 (4.20)

Esta es la teoría dual a (4.19). En el modelo original (4.19), los cuantos elementales  $\phi$  son las cuasi partículas mientras los vórtices son los electrones. En la nueva descripción (4.20), los cuantos elementales de  $\phi$  son los electrones mientras los vórtices

son las cuasi partículas.

En contraste, el enfoque de Ginzburg-Landau para este problema es más común. Este es ligeramente impar por que la física resultante requiere un número grande de electrones presentes, pero podemos insistir en esto incluyendo un potencial químico apropiado. Llamaremos al campo bosónico que da origen a electrones  $\Phi$ . El lagrangiano es

$$S = \int d^3x \ i\Phi^{\dagger}(\partial_0 - i\alpha_0 - i\mu)\Phi - \frac{1}{2m^*}|\partial_i\Phi - i\alpha_i\Phi|^2 - V(\Phi) + \frac{1}{4\pi m}e^{\mu\nu\rho}\alpha_{\mu}\partial_{\nu}\alpha_{\rho}$$

con  $\mu$  el potencial químico y  $m^*$  es la masa efectiva del electrón, esta es la descripción del modelo de Chern-Simons Ginzburg-Landau (CSGL) del efecto Hall cuántico fraccionario [25]. El lagrangiano fue propuesto por Zhang, Hansson y Kivelson y también se conoce como la teoría ZHK [25].

Las excitaciones de  $\bar{\phi}$  en (4.20) se supone describen vórtices de la teoría (4.19). Recordemos que el campo  $\bar{\phi}$  (o  $\Phi$ ) es bosónico: obedece las relaciones de conmutación. Pero, por el mismo argumento de la sección anterior, la presencia del término de Chern-Simons cambiará la estadística de esas excitaciones. En particular, en una teoría no relativista, la ecuación de movimiento para  $\alpha_0$  se lee

$$\frac{1}{2\pi}\bar{f}_{12} = -m\Phi^{\dagger}\Phi. \tag{4.21}$$

Aquí  $\Phi^{\dagger}\Phi$  es simplemente la densidad de la partícula  $n(\mathbf{x})$ . Esto nos dice que cada partícula en el fluido Hall cuántico tiene -m unidades de flujo. Esas partículas son bosónicas si m es par y fermiónicas si m es impar. Restringiendo al caso de m impar, tal que los "electrones" son electrones, se pueden entender como bosones  $\Phi$  unidos a -m unidades de flujo [11]. Alternativamente, los bosones  $\Phi$  pueden ser entendidos como electrones unidos a +m unidades de flujo, se conoce como bosón compuesto [11].

# 5. Soluciones tipo vórtices

# 5.1. El modelo de Zhang-Hansson-Kivelson (ZHK)

Vamos a empezar con un pequeño repaso histórico. Feynman, en sus Lectures on Statistical Mechanics, propuso su "otro punto de vista" para describir la superconductividad. Él argumentó que los estados fundamentales del superconductor deben ser descritos por una función de onda no relativista  $\psi$  [10], la cual podría resolver una ecuación de Schrödinger no lineal gauge,

$$i\partial_t \psi = \left(-\frac{D^2}{2m} + qV - \alpha(1 - \varrho)\right)\psi. \tag{5.1}$$

La derivada covariante D = V - iqA, q = 2e la carga de los pares de Cooper [19],  $\varrho = \psi^*\psi$  es la densidad la partícula. En el enfoque de Feynman el campo gauge es externo, sin embargo: este no tiene dinámica propia todavía. ¿Puede el sistema de materia más el campo gauge volverse uno autoconsistente? Lo primero es suponer que el campo electromagnético satisface las ecuaciones de Maxwell, pero la invarianza galileana de la ecuación de Schrödinger (5.1) es inconsistente con la invarianza de Lorentz de las ecuaciones de Maxwell: el sistema acoplado podría no tener clara la simetría [10]. El problema no pudo ser resuelto en tiempos de Feynman, ya que la forma de Chern-Simons no había sido encontrada aún [10]. El carácter topológico de este último permite acoplar el electromagnetismo de Chern-Simons ya sea materia relativista o no relativista [10].

Las ideas de Feynman no llamaron mucho la atención en aquel tiempo: la superconductividad se pensaba era entendida satisfactoriamente por las teorías de London, Ginzburg-Landau y BCS [10]. En 1980, con los descubrimientos inesperados del efecto Hall cuántico y de superconductividad de altas temperaturas se daba, sin embargo, un aumento repentino el interés por teorías alternativas [10].

Motivados por las analogías entre el efecto Hall y supefluidez, Girvin y Mac-Donald (GM) llamados, en particular, por una teoría de Ginzburg-Landau para el efecto Hall cuántico. Sobre bases fenomenológicas, se sugirió representar el orden de largo alcance fuera de la diagonal [10] por un campo escalar  $\psi(x)$  en el plano, y "las frustraciones debidas a las desviaciones lejos de la densidad de Laughlin cuantizada" por un potencial gauge efectivo a(x). Ellos propusieron describir este sistema planar estático por la densidad de Lagrange

$$\mathcal{L}_{GM} = -i\phi(|\psi|^2 - 1) + \frac{1}{2}|(\nabla - ia)\psi|^2 + i\frac{\kappa}{2}(\phi\nabla \times a + a \times \nabla\phi)$$
 (5.2)

donde  $\phi$  es un campo escalar. Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{1}{2}D^2\psi = -i\phi\psi,\tag{5.3}$$

$$\kappa b = -1 + |\psi|^2 \tag{5.4}$$

$$\kappa D^2 \times (i\phi) = j, \qquad j = \frac{1}{2i} (\psi^* D\psi - \psi D\psi^*), \tag{5.5}$$

donde  $b = \nabla \times a$  es un campo magnético efectivo.

Hacemos las siguientes observaciones

- 1. La primera de esas ecuaciones es una ecuación de onda gauge estático tipo Schrödinger para el campo de materia.
- 2. La segunda ecuación relaciona el campo magnético efectivo a la densidad de la partícula. El campo gauge físico es

$$A = a - \mathcal{A} \qquad \nabla \times \mathcal{A} = -\frac{1}{\kappa}.$$
 (5.6)

Entonces la ecuación (5.4) puede ser representada como

$$\kappa B = |\psi|^2 \tag{5.7}$$

donde  $B = \nabla \times A = b - \mathcal{B}$ . Aquí

$$\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A} \tag{5.8}$$

puede ser visto como un campo magnético de fondo, y el campo magnético físico, B, es determinado por la densidad  $\varrho = |\psi|^2$  y por  $\mathcal{B}$  [10]. Esto corresponde al valor determinado por los estados fundamentales de Laughlin del efecto Hall cuántico fraccionario.

Integrando (5.7) sobre todo el plano muestra que flujo total y la carga eléctrica,

$$\Phi = \int d^2x B \ y \ Q = \int d^2x \varrho,$$

son proporcionales

$$\kappa \Phi = Q. \tag{5.9}$$

Anticipando la existencia de soluciones tipo vórtices, la última puede ser identificada con las cuasi partículas de Laughlin. Tomando  $\kappa = 1/m$  donde m es un entero muestra que el "anión" portará flujo magnético  $\Phi$  y 1/m unidades de carga fraccionaria [10].

3. Introduciendo el "campo eléctrico efectivo"

$$e = i\nabla\phi \tag{5.10}$$

reconocemos, en la última ecuación, (5.5), el efecto Hall

$$j_i = \kappa \epsilon_{ij} e_j,$$

con  $\kappa$  identificado como la conductancia Hall  $\sigma_H$ .

El hecho remarcable, aparentemente desconocido para Girvin y MacDonald, es que configurando

$$a_0 = i\phi, \qquad f_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}a_{\beta} - \partial_{\beta}a_{\alpha}, \qquad (5.11)$$

el último término en el lagrangiano (5.2) es precisamente la forma estática de Chern-Simons

$$i\frac{\kappa}{2} \left( \phi \nabla \times a + a \times \nabla \phi \right) = -\frac{\kappa}{4} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} f_{\beta\gamma}. \tag{5.12}$$

Pronto, luego del propósito del modelo de Girvin-MacDonald, Zhang et al. (ZHK) [10, 25], argumentaron que el modelo de Girvin-MacDonald era se un primer paso en la dirección correcta, e improvisaron un modelo de Ginzburg-Landau para el EHQ. Ellos derivaron su teoría directamente de la teoría macroscópica [10]. Su punto de partida es el Hamiltoniano de un sistema planar de electrones polarizados, tomando un Hamiltoniano  $H_{pe}$ . La función de onda de muchos cuerpos satisface la ecuación de Schrödinger,

$$H_{pe}\Psi(x_1,...,x_N) = E\Psi(x_1,...,x_N). \tag{5.13}$$

y es asumido, consistentemente con el principio de Pauli, para ser totalmente anti-

simétrico con el intercambio de dos electrones [10, 25].

Como complemento útil de las descripciones microscópicas existentes, Zhang, Hansson y Kivelson en 1988 propusieron un modelo de Chen-Simons Ginzburg-Landau para el efecto Hall cuántico fraccionario. Este modelo se basa en la idea de una cambio de estadística de la partícula, es decir, el hecho de que en dos dimensiones los fermiones pueden describirse como bosones que llevan un número entero impar de cuantos de flujo (estadístico). En el nivel lagrangiano, esto se hace al agregar campos de Chern-Simons acoplados a los bosones. De esta forma, electrones en un campo externo. A valores especiales de la fracción de archivo, el campo estadístico cancela el campo externo (en el sentido de un campo) y el sistema se describe como un gas de bosones que no siente un campo magnético neto. Estos bosones se condensan en un estado fundamental homogéneo. De hecho, esta teoría efectiva bastante simple reproduce varias de las características clave del EHCF, como la cuantificación de la conductancia Hall y la existencia de excitaciones (anti)vórtices, considerando las fluctuaciones cuánticas sobre el estado de fundamental del bosón.

Un bosquejo de la idea de Zhang et al [25], es mapear el problema dentro de uno bosónico. En efecto, consideremos el sistema bosónico con Hamiltoniano  $H_{bos}$ . La función de onda bosónica de N-cuerpos  $\phi$  requiere ser simétrica y satisfacer

$$H_{bos}\phi(x_1,...,x_N) = E\phi(x_1,...,x_N). \tag{5.14}$$

Consideremos ahora la transformación gauge singular

$$\Psi(x_1, ..., x_N) = U\phi(x_1, ..., x_N), \qquad U = \exp\left[-i\sum_{a \le b} \frac{\theta}{\pi} \gamma_{ab}\right].$$
 (5.15)

donde  $\theta$  es un parámetro real y  $\gamma_{ab} = \gamma_a - \gamma_b$  es la diferencia del ángulo polar de electrones a y b, las etiquetas de las posiciones tal que

$$UH_{bos}U^{-1} = H_{pe}. (5.16)$$

De esto se sigue que  $\phi$  satisface la ecuación bosónica de Schrödinger (5.14) precisamente cuando  $\Psi$  satisface el problema de autovalor de electrón polarizado (5.13) con el mismo autovalor.  $\Psi$  es antisimétrica precisamente cuando el parámetro  $\theta$  es un múltiplo impar de  $\pi$ ,  $\theta = (2k+1)\pi$ , los detalles de tal demostración se pueden ver en [10, 25].

Habiendo reemplazado el problema fermiónico con uno bosónico la interacción,

Zhang et al, procedieron a derivar una teoría de campo medio.

Su modelo también involucra un campo escalar  $\phi$  acoplado a un campo electromagnético externo  $\mathcal{A}_{\mu}$  y a un campo gauge "estadístico",  $a_{\mu}$  [25]. También satisface un término potencial, y es dependiente del tiempo. Su lagrangiano es

$$\mathcal{L}_{ZHK} = -i\psi^* D_t \psi + \frac{1}{2} |D\psi|^2 + U(\psi) - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma} a_\mu \partial_\nu a_\sigma, \tag{5.17}$$

donde

$$D_{\alpha}\psi = (\partial_{\alpha} - ieA_{\alpha})\psi, \qquad A_{\alpha} = a_{\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha}$$
 (5.18)

es la derivada covariante. Notemos que mientras  $D_{\alpha}$  tiene los potenciales vectoriales de fondo y estadístico combinados en el vector potencial  $A_{\alpha}$ , el potencial de Chern-Simons solo involucra el campo estadístico  $a_{\alpha}$ .

Las ecuaciones de campo del modelo de ZHK son

$$iD_t \psi = -\frac{1}{2}D^2 \psi + \frac{\delta U}{\delta \psi^*},\tag{5.19}$$

$$\kappa \epsilon_{ik} e_k = e j_i, \qquad j = \frac{1}{2i} (\psi^* D \psi - \psi (D \psi)^*), \tag{5.20}$$

$$\kappa b = e\varrho, \qquad \varrho = |\psi|^2,$$
(5.21)

donde  $e_k = \partial_k a_0 - \partial_t a_k$  y  $b = 1/2\epsilon_{ij}(\partial_i a_j - \partial_j a_i)$ , significa que el campo de materia satisface una ecuación de Schrödinger no lineal que se complementa con las identidades de corriente de campo de la teoría pura de Chern-Simons [10].

Estas ecuaciones describen un campo escalar en un campo de fondo y estadístico acoplados y un potencial no lineal, apropiado para el EHCF.

Notemos que el lagrangiano de ZHK es de primer orden en la derivada temporal del campo escalar. El potencial de Zhang es el potencial de auto interacción

$$U(\psi) = -\mu |\psi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\psi|^4 + \text{const.},$$
 (5.22)

donde la constante es escogida tal que el mínimo de U es 0. El término  $\mu |\psi|^2 (\mu \ge 0)$  aquí es un potencial químico, mientras el término cuadrático es una interacción efectiva [10].

Para un sistema estático en un fondo puramente magnético y para  $U(\psi) \equiv 0$ , los modelos ZHK y GM son matemáticamente equivalentes (pero no físicamente) [10].

Ahora si se asume que todos los campos son estáticos  $\partial_t(\cdot) = 0$ . Haciendo

$$A_0 = 0, \quad \mathcal{B} = -\frac{1}{\kappa}, \quad A_0 = a_0 = i\phi \quad a = A + \mathcal{A},$$
 (5.23)

el lagrangiano de GM (5.2) se convierte,

$$\mathcal{L}_{GM} = -A_0 |\psi|^2 + A_0 + \frac{1}{2} |(\nabla - i(A + \mathcal{A}))\psi|^2 + \frac{\kappa}{2} (A_0 \nabla \times A + A_0 \nabla \times \mathcal{A} + A \times \nabla A_0 + \mathcal{A} \times \nabla A_0).$$

Sin embargo, integrando por partes el tercer término y usando  $\nabla \times \mathcal{A} = \mathcal{B}$ ,

$$A_0 + \frac{\kappa}{2} (A_0 \nabla \times \mathcal{A} + \mathcal{A} \times \nabla A_0) = A_0 \left( 1 + \frac{\kappa}{2} (\nabla \times \mathcal{A} + \nabla \times \mathcal{A}) \right) + \text{términos de superficie}$$

El primer término en el segundo miembro de la ecuación se anula, luego eliminando los términos de superficie tenemos

$$\mathcal{L}_{GM} = -i\psi^*(-iA_0)\psi + \frac{1}{2}|\left(\nabla - i(A + \mathcal{A})\right)\psi|^2 + \frac{\kappa}{2}\left(A_0\nabla \times A + A \times \nabla A_0\right).$$

Para e=1 y configurando  $\kappa=e^2/4\theta$ , esto es precisamente el lagrangiano estático de ZHK (5.17), para la sustitución

$$A_{\alpha} \leftrightarrow a_{\alpha}.$$
 (5.24)

Una prueba más simple de esto se puede obtener usando las ecuaciones de campo. La sustitución (5.23) lleva las ecuaciones de campo de GM (5.3), (5.4) y (5.5) a las ecuaciones de ZHK (5.19), (5.21) y (5.20).

# 5.2. Vórtices de Chern-Simons

En las siguientes dos subsecciones se repetirá el procedimiento desarrollado en la sección 3.4 para obtener soluciones tipo vórtice planteando otra véz las respectivas funciones de GL para los lagrangianos del modelo de Higgs con un término de Chern-Simons y de este mismo eliminando el término de Maxwell mediante una aproximación cuando  $r \to \infty$ .

## 5.2.1. Modelo abeliano de Higgs con término de Chern-Simons

El primer modelo de Chern-Simons es obtenido por sumar el término de Chern-Simons al modelo Abeliano de Higgs, definido en un espacio de Minkowski (2+1)-dimensional, con la métrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ ,

$$\mathcal{L}_{PK} = \mathcal{L}_{H} + \mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} D_{\alpha} \Psi (D^{\alpha} \Psi)^{*} + U(\Psi) - \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha} F_{\beta\gamma}, \quad (5.25)$$

$$U(\Psi) = \frac{\lambda}{4} (1 - |\Psi|^2)^2 \tag{5.26}$$

donde  $D_{\alpha}\Psi = \partial_{\alpha}\Psi - ieA_{\alpha}\Psi$  es la derivada covariante, con e la carga eléctrica del campo  $\Psi$ . El término de Chern-Simons está acoplado a través de la constante de acople  $\kappa$ . Se conoce a esto como el modelo de Paul-Khare (PK) [10]. Las ecuaciones del modelo abeliano de Higgs y del sistema Chern-Simons-Maxwell puro

$$\partial_{\alpha}F^{\alpha\gamma} + \frac{\kappa}{2}e^{\gamma\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0,$$

respectivamente, son ordenados en

$$\frac{1}{\sqrt{g}}D_{\alpha}(\sqrt{g}D^{\alpha}\Psi) = -\lambda(1-|\psi|^2)\psi, \qquad (5.27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\nu}(\sqrt{g}F^{\nu\alpha}) + \frac{\kappa}{2}\sqrt{q}e^{\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{e}{2i}(\Psi^*D^{\alpha}\Psi - \Psi(D^{\alpha}\Psi)^*). \tag{5.28}$$

Las soluciones pueden ser buscadas a lo largo de las mismas lineas en el modelo Abeliano de Higgs. Consideremos el ansatz radial estático, el mismo del capítulo 3,

$$A_0 = nA_0(r), \qquad A_r = 0, \qquad A_\theta = nrA(r), \qquad \Psi(r) = f(r)e^{in\theta}.$$
 (5.29)

Al hacer las sustituciones obtenemos las siguientes relaciones

$$(g_{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(-1, 1, r^{2}), \ (g^{\mu\nu}) = (-1, 1, \frac{1}{r^{2}}) \sqrt{g} = r,$$

$$D_{0}\Psi = -ienA_{0}\Psi, \ D_{r}\Psi = D^{r}\Psi = f'e^{in\theta},$$

$$D_{\theta}\Psi = in(1 - erA)\Psi, \ D^{\theta} = \frac{1}{r^{2}}D_{\theta}, \ F_{0r} = -f^{0r} = -nA'_{0},$$

$$F_{0\theta} = 0, \ F_{r\theta} = n(A + rA'), \ F^{r\theta} = \frac{1}{r^{2}}F_{r\theta},$$

$$j^{0} = ne^{2}f^{2}A_{0},$$

$$j^{r} = 0, j^{\theta} = -\frac{n}{r}e^{2}\left(A - \frac{1}{er}\right)f^{2}.$$

$$(5.30)$$

Las ecuaciones estáticas de segundo orden se vuelven

$$f'' + \frac{f'}{r} - e^2 n^2 (A - \frac{1}{er})^2 f + n^2 e^2 A_0^2 f + \lambda (1 - f^2) f = 0,$$
 (5.31)

$$A'' + \frac{A'}{r} - \frac{A}{r^2} - e^2 f^2 (A - \frac{1}{er}) + \kappa A'_0 = 0,$$
 (5.32)

$$A_0'' + \frac{A_0'}{r} - e^2 f^2 A_0 + \kappa (\kappa + \frac{A}{r}) = 0.$$
 (5.33)

Esas ecuaciones, como esas en el modelo abeliano de Higgs usual para los cuales se reducen para  $\kappa = 0$  y  $A_0 = 0$ , aún no han sido resueltos analíticamente, pero Paul y Khare argumentaron que una solución de energía finita existe para cada entero n [10, 12].

#### 5.2.1.1. Energía de una configuración estática

Consideremos una configuración estática  $(A_{\mu}, \Psi)$ .

• Los términos convencionales de materia y de Maxwell en (5.25) contribuyen, después de la mejora

$$\frac{1}{2}F_{00}^2 + \frac{1}{2}F_{ij}^2 - \frac{1}{2}e^2A_0^2|\Psi|^2 + \frac{1}{2}|D\Psi|^2 + U(\Psi).$$

• La contribución del término de Chern-Simons es

$$-\frac{\kappa}{4}(e^{0ij}A_0F_{ij} + 2\epsilon^{0ij}A_iF_{j0}).$$

Pero  $F_{j0}=\partial_j A_0$  ya que la configuración es estática, así que el segundo término

en los paréntesis es

$$2(\partial(e^{j0i}A_iA_0) + e^{0ij}(\partial_iA_j)A_0) = \partial_j(2e^{j0i}A_iA_0) + \epsilon^{0ij}F_{ij}A_0$$

Eliminando el término de superficie, la contribución de Chern-Simons es, por tanto,

$$-\frac{\kappa}{2}\epsilon^{0ij}A_0F_{ij} = \kappa A_0B, \qquad (5.34)$$

donde

$$B = \frac{1}{2} \epsilon^{0ij} F_{ij} = -F_{12}$$

es el campo magnético. Así, la energía total es,

$$\mathcal{E} = \int \left\{ \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}|D\Psi|^2 - \frac{1}{2}e^2A_0^2|\Psi|^2 + U(\Psi) + \kappa A_0B \right\} d^2x.$$
 (5.35)

La energía de la configuración radial estática (5.29) es, en particular,

$$\mathcal{E} = \pi \int_0^\infty r dr \left\{ \left( n^2 (A' + \frac{A}{r})^2 + (f')^2 + e^2 n^2 (A - \frac{1}{er})^2 f^2 + \frac{\lambda}{2} (f^2 - 1) \right) + n^2 \left( (A'_0)^2 - e^2 A_0^2 f^2 + 2\kappa A_0 (A' + \frac{A}{r}) \right) \right\}$$
(5.36)

El sistema (5.31)-(5.32)-(5.33) debe ser suplantado con las condiciones asintóticas de energía finita

$$A_0(r) \to 0$$
,  $A(r) - \frac{1}{er} \to 0$ ,  $f(r) \to 0$ , cuando  $r \to \infty$ . (5.37)

Insertando los valores de (5.37) dentro del sistema radial produce soluciones aproximadas para valores grandes de r.

Primero, tomando  $A_0 \approx 0$ ,  $A-1/er \approx 0$  y eliminando términos de alto orden en (5.31) produce, para  $\varphi = 1 - f$ , la misma ecuación que en el modelo usual con ningún término de Chern-Simons, llamémosle ecuación modificada de Bessel [2] de orden 0

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - 2\lambda\varphi \approx 0.$$

Aquí, una vez más, el campo escalar enfoca sus valores asintóticos exponencialmente

con longitud característica la masa de Higgs

$$\varphi \approx \frac{c}{\sqrt{r}}e^{-m_{\psi}r}, \quad m_{\psi} = \sqrt{2\lambda}.$$
(5.38)

Luego configuramos,  $f \approx 1$  en (5.32)-(5.33) que conduce a

$$a = -(A - \frac{1}{er})r^{1/2} \text{ y } a_0 = A_0 r^{1/2},$$
 (5.39)

el sistema acoplado

$$\begin{cases} a'' - (e^2 + \frac{3}{4r^2})a = \kappa(a'_0 - \frac{1}{2r}a_0), \\ a''_0 - (e^2 - \frac{1}{4r^2})a_0 = \kappa(a' + \frac{1}{2r}a). \end{cases}$$
 (5.40)

Para cada r grande, todos los términos que tengan potencias inversas de r pueden ser eliminadas,

$$\begin{cases} a'' - e^2 a = \kappa a_0' \\ a_0'' - e^2 a_0 = \kappa a'. \end{cases}$$

Sumando y restando obtenemos,

$$\begin{cases} (a+a_0)'' - \kappa(a+a_0)' - e^2(a+a_0) = 0, \\ (a-a_0)'' - \kappa(a-a_0)' - e^2(a-a_0) = 0. \end{cases}$$

Ambos a y  $a_0$  son pequeños para valores grandes de r. Buscando la solución en la forma exponencial, encontramos que los que permanecen limitados son,

$$A(r) \sim \frac{1}{er} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + 4e^2r}}}{\sqrt{r}} (c_1 e^{\frac{1}{2}\kappa r} + c_2 e^{-\frac{1}{2}\kappa r})$$
 (5.41)

$$A_0(r) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + 4e^2}r}}{\sqrt{r}} (c_1 e^{\frac{1}{2}\kappa r} - c_2 e^{-\frac{1}{2}\kappa r})$$
 (5.42)

Así el decaimiento es dos veces exponencial, con masas

$$(m_A)_{\pm} = e(\sqrt{1 + \frac{\kappa}{4e^2}} \mp \frac{\kappa}{2e}).$$
 (5.43)

El largo alcance del campo de Chern-Simons separa, por tanto, el valor abeliano de Higgs  $m_A = e$  de la masa; el último es recuperado cuando  $\kappa \to 0$  [10]. Notemos que ambos valores de la masa son positivos, así que los campos decaen exponencialmente para ambas elecciones.

Es mostrado por un sutil análisis que el único valor permitido para una solución de energía finita y regular es

$$m_A = (m_A)_- = \frac{|\kappa|}{2} (\sqrt{1 + \frac{4e^2}{\kappa^2}} - 1).$$
 (5.44)

## 5.2.2. Vórtices puros de Chern-Simons

Mientras el modelo abeliano de Higgs con término de Chern-Simons tiene propiedades interesantes, en particular, las soluciones de vórtices, el modelo sufre de dificultad matemática teniendo que resolver ecuaciones de campo de segundo orden [10]. A parte de este punto técnico, para grandes distancias el término de Chern-Simons, el cual es de bajo orden en las derivadas, domina el término de Maxwell [10]. Puede, por tanto, tener sentido hacer a un lado el término de Maxwell totalmente.

Para mayor conveniencia, la auto interacción del campo escalar de cuarto orden (5.26) lo reemplazaremos por el potencial de sexto orden considerado por Christ y Lee en su modelo unidimensional [10]. Así el langrangiano propuesto por Hong y por Jackiw [10] es,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_{\mu} \psi)^* D^{\mu} \psi + U(\psi) - \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\alpha \beta \gamma} A_{\alpha} F_{\beta \gamma}. \tag{5.45}$$

$$U(\psi) = \frac{\lambda}{4} |\psi|^2 (|\psi|^2 - 1)^2$$
 (5.46)

Este es el modelo HKP-JLW. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$D_{\mu}D^{\mu}\psi = \frac{\lambda}{2}(|\psi|^4 - 1)(3|\psi|^2 - 1)\psi, \tag{5.47}$$

$$\frac{1}{2}\kappa\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = -j^{\mu} \tag{5.48}$$

donde

$$j^{\mu} \equiv (\varrho, j)$$

es la corriente conservada.

La primera ecuación en (5.47) es la ecuación no lineal de Klein-Gordon sin linealidad derivada del potencial de sexto orden (5.46); las *identidades de Campo-corriente* (ICC), en (5.48) reemplazan a las ecuaciones de Maxwell [10]. Las componentes espaciales del ICC reproducen precisamente la ley Hall. Tal teoría debería, por tanto, describir una física tipo Hall de largo alcance. Notemos que, a diferencia de el caso de Maxwell, estas ecuaciones son de primer orden en el vector potencial.

#### 5.2.2.1. Configuraciones de energía finita.

La energía de una configuración estática es ahora

$$\mathcal{E} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} D_i \psi (D^i \psi)^* - \frac{1}{2} e^2 A_0^2 |\psi|^2 + \kappa A_0 B + U(\psi) \right\}. \tag{5.49}$$

Aunque esta expresión no es una solución estática definida positiva de las ecuaciones de movimiento de (5.47)-(5.48) son, sin embargo, puntos estacionarios de la energía. variando (5.49) con respecto a  $A_0$  conduce a una de las ecuaciones de movimiento

$$-e^2 A_0 |\psi|^2 + \kappa B = 0. (5.50)$$

Eliminando  $A_0$  de (5.49) usando esta restricción, un funcional de energía definida positiva,

$$\mathcal{E} = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} D_i \psi (D^i \psi)^* + \frac{\kappa^2}{2e^2} \frac{B^2}{|\psi|^2} + U(\psi) \right\}$$
 (5.51)

es obtenido.

Para las configuraciones estáticas de energía finita, el requerimiento usual de rompimiento de energía  $U(\psi) \to 0$  a medida que  $r \to \infty$  se puede cumplir de dos formas diferentes.

$$\begin{cases} (a) |\psi| \to 1 \\ (b) \psi \to 0 \end{cases}$$
 cuando  $r \to \infty$ . (5.52)

En el primer caso, el campo escalar toma su valor de vació, 1, en una forma no trivial y obtenemos vórtices topológicos, el caso (b) son los solitones no topológicos [10, 22].

### 5.2.3. Vórtices radialmente simétricos

Para el ansatz estático y radialmente simétrico (5.29) las ecuaciones de movimiento (5.47)-(5.48), usando (5.30), son

$$f'' + \frac{f'}{r} - e^2 n^2 \left( A - \frac{1}{er} \right)^2 f + e^2 n^2 A_0^2 + \frac{\lambda}{2} f (1 - f^2) (3f^2 - 1) = 0,$$
 (5.53)

$$-e^{2}f^{2}\left(A - \frac{1}{er}\right) + \kappa A_{0}' = 0 \tag{5.54}$$

$$-e^{2}f^{2}A_{0} + \kappa \left(A' + \frac{A}{r}\right) = 0, \tag{5.55}$$

complementando con las condiciones de frontera para r grande

$$f(r) \to 1,$$
  $A(r) - \frac{1}{er} \to 0,$   $A_0(r) \to 0$ , cuando  $r \to \infty$ . (5.56)

Las ecuaciones radiales estáticas (5.53)-(5.54)-(5.55) también pueden ser derivadas usando la forma radial de la energía. En el caso radial, tenemos

$$\pi \int_0^\infty r dr \left\{ 2U(f) + (f')^2 + e^2 n^2 \left( A - \frac{1}{er} \right)^2 f^2 + n^2 (2\kappa A_0 (A' + \frac{A}{r}) - e^2 A_0^2 f^2) \right\}. \tag{5.57}$$

Entonces (5.57) es obtenido de (5.49) usando la fórmula (5.30). Variando con respecto a f, A y  $A_0$  obtenemos las ecuaciones (5.53)-(5.54)-(5.55).

Eliminando  $A_0$  de la energía usando ICC (5.50), es decir,

$$\kappa B = e^2 f^2 A_0$$

conduce a la forma radial de la expresión positiva (5.51),

$$\mathcal{E} = \pi \int_0^\infty \left\{ 2U(f) + (f')^2 + n^2 e^2 \left( A - \frac{1}{er} \right)^2 f^2 + \frac{\kappa^2 n^2}{e^2 f^2} \left( A' + \frac{A}{r} \right)^2 \right\}$$
 (5.58)

Si variamos (5.58) con respecto a f y A obtendremos dos ecuaciones de movimiento nuevas.

Ninguna solución analítica ha sido encontrada aún. Las soluciones numéricas aproximan soluciones para r grande pueden ser obtenidas insertando las formas asintóticas del campo.

• La desviación de f de su valor asintótico,  $\varphi = 1 - f$ , se encuentra insertando  $\varphi$ dentro de (5.53) y expandiendo a primer orden en  $\varphi$ 

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' - 2\lambda\varphi \approx 0 \implies \varphi \approx GK_0(\sqrt{2\lambda}r).$$

Así, el comportamiento asintótico es exponencial, y decae con la longitud característica  $(m_{\psi})^{-1}$ .

$$\varphi \approx \frac{G}{\sqrt{r}} e^{-m_{\psi}r}.$$
 (5.59)

• Haciendo 
$$f \approx 1$$
 dentro de las últimas dos ecuaciones conduce a  $A' + \frac{A}{r} - \frac{e^2}{\kappa} A_0 \approx 0, \qquad A'_0 - \frac{e^2}{\kappa} \left( A - \frac{1}{er} \right) \approx 0,$  (5.60)

de esto podemos inferir que

$$\frac{d^2 A_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA_0}{d\rho} - A_0 \approx 0, \ \rho \equiv (e^2/|\kappa|)r.$$
 (5.61)

De donde se reconoce la ecuación modificada de Bessel de orden cero [2]. Así,

$$A_0 \approx CK_0 \left(\frac{e^2}{|\kappa|}r\right). \tag{5.62}$$

Similarmente, haciendo

$$a = A - \frac{1}{er},\tag{5.63}$$

encontramos

$$a'' + \frac{a'}{\rho} - \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)a \approx 0,$$
 (5.64)

el cual es la ecuación modificada de Bessel de orden 1 [2]. Así  $a \approx CK_1(\rho)$  y

$$A \approx \frac{1}{er} - CK_1 \left( \frac{e^2}{|\kappa|} r \right). \tag{5.65}$$

Notemos que no hay división de masa en el sistema actual ya que la diferencia en el caso de Chern-Simons-Maxwell, (5.40), las ecuaciones asintóticas de A y  $A_0$  (5.61) y (5.64) están desacopladas.

Es posible conseguir una aproximación aún más burda, como se sugiere en [10], eliminando los términos con primera derivada en (5.64) (y en (5.61), haciendo  $a = u\rho^{-1/2}$  ( y  $A_0 = u\rho^{-1/2}$ ) y anulando los términos con potencias inversas de r. Entonces ambas ecuaciones se reducen a

$$u'' = \left(\frac{e^2}{\kappa}\right)^2 u,$$

así que

$$A_0 \sim \frac{D}{\sqrt{r}} e^{-m_A r}, \qquad A \sim \frac{1}{er} + \frac{D}{\sqrt{r}} e^{-m_A r} \qquad r \to \infty$$

Para alguna constante D. Los campos  $A_0$  y A aproximan sus valores asintóticos también exponencialmente, con longitud característica determinada por la masa del campo gauge  $m_A = e^2/|\kappa|$ .

La profundidades de penetración de los campos gauge y escalar son, por tanto,

$$\eta = \frac{1}{m_A} = \frac{|\kappa|}{e^2} \qquad \qquad \xi = \frac{1}{m_\psi} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}},$$

respectivamente. En la figura 5.1 se muestra la solución numérica del sistema 5.53-5.55. La implementación se realizó en Python usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden haciendo la sustitución f' = g. El sistema se reescribe como

$$f' = g,$$

$$A' = \frac{e^2 f^2 A_0}{\kappa} - \frac{A}{r},$$

$$A'_0 = \frac{1}{\kappa} e^2 f^2 \left( A - \frac{1}{er} \right)$$

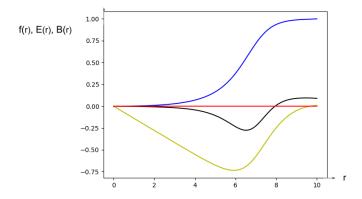
У

$$g' = e^2 n^2 \left( A - \frac{1}{er} \right)^2 f - e^2 n^2 A_0^2 - \frac{\lambda}{2} f (1 - f^2) (3f^2 - 1) - \frac{g}{r}.$$

Las condiciones iniciales de la solución son

$$\begin{pmatrix} f \\ A \\ A_0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.009 \\ -0.009 \\ -0.01037585 \end{pmatrix}.$$

El campo eléctrico como  $nA'_0$  y el campo magnético  $n\left(A' + \frac{A}{r}\right)$  con n = 1. El script con la implementación se puede consultar en [7].



**Figura 5.1.** Campos escalar, eléctrico y magnético contra coordenada radial. Vórtice topológico con simetría radial. Funciones f(r) (curva azul), E(r)(curva amarilla) y B(r) (curva negra) para el vórtice N=1 y  $\lambda=1.0$ . Elaboración propia.

## CONCLUSIONES

1. Las características principales del EHCE y EHCF, como la cuantización de la resistividad, se explican por la presencia del desorden, éste puede ser modelado por un potencial aleatorio. La perturbación del desorden rompe la degeneración del sistema. Sin embargo, esta debe ser tal que  $|V| \ll \hbar \omega_B$ . Lo que el desorden hace es convertir los estados extendidos, estados que abarcan todo el sistema, en estados localizados, estados confinados en una región del sistema. Al no contribuir a la corriente los estados localizados, únicamente son los estados extendidos los portadores de corriente y la conductividad no cambia ya que para compensar la ausencia de corriente ausente en los estados localizados esta aumenta en los estados extendidos.

Ante la disminución del campo magnético, esto provoca que el nivel de llenado aumente, nuevos estados empiezan a ser ocupados. Cuando los estados extendidos ya están ocupados estados localizados comienzan a llenarse y esto sucede en un rango de flujo magnético, así se explican las mesetas del EHCE y la cuantización de la resistividad (conductividad) se justifica por tomar el promedio sobre el espacio de flujos  $T_{\Phi}^2$  de la expresión para la conductividad, que es proporcional a la integral de la curvatura de Berry.

Por otra parte, los valores fraccionarios de  $\mu$  se deben a la existencia de las excitaciones conocidas como cuasi partículas y cuasi huecos que actúan como partículas independientes. Sus funciones de onda pueden ser derivadas directamente de la función de Laughlin, ésto permite entender el efecto Hall cuántico fraccionario para  $\nu=1/m$ , con m impar. Cuando aumentamos el flujo espectral una unidad de  $\Phi_0$  el radio de una cuasi partícula con carga -e/m hace que su momento angular aumente y así su radio, por tanto una carga equivalente a la del electrón es transferida fuera de ese mismo radio aumentando el flujo m unidades de  $\Phi_0$ , de ahí que  $\sigma_{xy}$  sea  $e^2/(2\pi\hbar m)$ . Los estados fundamentales Hall cuánticos fraccionarios son degenerados, eso explica por que evitan tener conductividad Hall entera y dicha degeneración depende de la topología del

mánifold.

- 2. Las teorías de campo estáticos con vórtices deben su explicación a la carga topológica. A pesar de la topología no trivial del mánifold de vacío no hay configuraciones de campo de energía finita con carga topológica distinta de cero en la teoría global, mientras en la teoría gauge la carga topológica es un invariante. Las soluciones estáticas de las ecuaciones de GL generalmente tienen densidad de energía y campo magnético alcanzando su máximo alrededor de los ceros del campo φ. Así los ceros del campo no solo dan datos topológicos globales, si no también información de la dinámica local sobre el campo. En la teoría gauge de GL, para todos los valores de la constante de acople λ, excepto λ = 1, todas las soluciones de energía finita estática conocidas de las ecuaciones de campo tienen simetría circular en torno a un punto, y una simetría de reflexión. Esto permitió construir una solución numérica para φ y
- λ, excepto λ = 1, todas las soluciones de energia finita estatica conocidas de las ecuaciones de campo tienen simetría circular en torno a un punto, y una simetría de reflexión. Esto permitió construir una solución numérica para φ y aθ, una teoría de campo gauge. En la teoría global también hay soluciones de simetría circular, aunque con una energía que diverge logarítmicamente.
  3. La solución numérica para las ecuaciones de vórtice topológico, en el efecto
- Hall cuántico se debió a la condición  $|\psi| \to 1$  cuando  $r \to \infty$  y la simetría angular, es decir, vórtices radialmente simétrico. En este caso con  $\psi = e^{i\theta} f(r)$  tenemos que f(r) puede diverger tanto a  $+\infty$  como a  $-\infty$  cuando  $r \to 0$  según las condiciones iniciales, en base a las pruebas realizadas, es decir, es sensible a condiciones iniciales en una pequeña vecindad de r centrada en cero, debido a esto resulta prácticamente imposible construir una solución partiendo desde r=0 y hacer que se cumpla la condición de frontera del campo escalar.

Por lo tanto, el análisis para obtener una solución numérica fue el siguiente:  $|f| \to 1$  a medida que r aumenta, con lo cual para algún valor de  $r < \infty$  se tiene que  $1 - |f| \approx 0$ . Como esto sucede para algún r, para términos prácticos y de cómputo es posible hacer que tal r sea un número pequeño. De ésta forma resulta más factible construir una solución gráfica para el campo escalar debido a que r no es cercano a 0 y los cambios en las condiciones iniciales son menos abruptos. La misma idea se aplica a los campos eléctrico y magnético que están presentes en el sistema de ecuaciones.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. Arav and G. Novik. Quantum Hall effect: pumping electrons in Landau levels. https://topocondmat.org/w3\_pump\_QHE/Laughlinargument.html.
- [2] G. B. Arfken, J. Weber and E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists* 7<sup>a</sup> ed. Elsevier. New York. 2013.
- [3] M. A. Armstrong. Basic Topology. Englad. McGraw-Hill Book Company. 1979.
- [4] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Harcourt, Inc. USA, Orlando. 1976.
- [5] E. Burstein, A. H. MacDonald and P.J. Stiles. Contemporary Concepts of Condensed Matter Science. Topological Insulators, volume 6. Elsevier B.V. New York. 2013.
- [6] P.M. Chaikin, T.C. Lubensky. Principles of condensed matter physics. Cambridge University Press. New York. 1995.
- [7] L. M. Delgado C. Soluciones-de-vortices. https://github.com/lmdcma27/ Soluciones-de-vortices. Consultado: 2021-10-20.
- [8] F. Duan, J. Guojun. *Introduction to Condensed Matter Physics, Volume 1*. World Scientific Publishing. 2005.
- [9] B. Hasselblatt, A. Katok. A first course in Dynamics with a panorama of recent developments. Cambridge University Press. New York. 2003.
- [10] P. A. Horvathy, Pengming Zhang. Vortices in (abelian) Chern-Simons gauge theory. Physics Reports 481 83 (2009). https://arxiv.org/abs/0811.2094v4.
- [11] D. Tong. Lectures on the Quantum Hall Effect. https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe.html. 2016.
- [12] N. Manton y P. Sutcliffe. Topology in field theory. Topological Solitons. Cambridge University Press. New York. 2004
- [13] M. P. Marder. Condensed Matter Physics. 2<sup>a</sup> ed. John Wiley & Sons. 2010.
- [14] B. Meza González. Estructura de la materia. https://www.scribd.com/document/477375381/determinantes-slater-pdf. Consultado: 2021-08-29.
- [15] R. Mong. Classification and characterization of topological insulators and su-

- perconductors. University of California, Berkeley. 2012.
- [16] C. Ros. Topology in Physics: Some recent applications. https://cdross1.github.io/notes/topology\_in\_physics\_lecture\_notes.pdf. Consultado: 2020-08-21.
- [17] R. A. Serway, J. W. Jewett, Jr. Física para ciencias e ingeniería con física moderna vol. 2. Tr. Sergio R. Cervantes González. Cengage Learning. México D.F.
- [18] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum Press, New York and London, 2<sup>a</sup> ed. 1994.
- [19] C. Kittel Introduction to solid state physics 8a ed. John Wiley & Sons. 2005.
- [20] D. Tong. Lectures on Quantum Field Theory. 2007. https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/qft.pdf
- [21] E. Walton. Vortex counting and the quantum Hall effect. 2021. Consultado en https://arxiv.org/abs/2107.14190
- [22] E. J. Weinberg. Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics. Cambridge University Press. New York. 2012.
- [23] D. Xiao, M. Chang, and Q. Niu. Berry phase effects on electronic properties. Rev. Mod. Phys. 82, 1959. 2010.
- [24] Y. Yang. Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis. Springer-Verlag New York. 2001.
- [25] S. C. Zhang, T. H. Hansson and S. Kivelson, Effective-field-theory model for the Fractional Quantum Hall Effect. Phys. Rev. Lett.62, 82 (1989).