

Guatemala, 07 de octubre de 2021

Ing. Rodolfo Samayoa  
Jefe del Departamento de Física  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de San Carlos de Guatemala  
Presente

Estimado Ingeniero Samayoa,

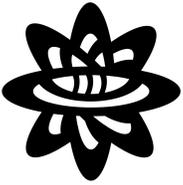
Por este medio me complace informarle que he encontrado satisfactorio el trabajo de graduación titulado **MAPEOS PROYECTIVOS EN SISTEMAS DE VARIOS QUBITS**, dirigido en co-tutoría por mi persona y el **M.SC. JUAN DIEGO CHANG**, elaborado por **JOSÉ ALFREDO DE LEÓN GARRIDO**, quien se identifica con el código único de identificación (CUI) 3001 97845 0101, registro académico 201604186, estudiante regular de la licenciatura en física aplicada de la Escuela de Ciencias Físicas de la Universidad de San Carlos de Guatemala.

Con lo anterior, informo que el estudiante de León Garrido ha finalizado el trabajo previo a realizar el Examen General Público. Adjunto a esta carta se encuentra el trabajo impreso que cuenta con mi aprobación.

Sin más que informar, me suscribo ante usted



Dr. Carlos Francisco Pineda Zorrilla  
Investigador Titular B T.C.  
Instituto de Física  
Universidad Nacional Autónoma de México



**Universidad de San Carlos de Guatemala**  
**Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas**



Guatemala, 07 de octubre de 2021

Ing. Rodolfo Samayoa  
Jefe del Departamento de Física  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de San Carlos de Guatemala  
Presente

Estimado Ingeniero Samayoa,

Por este medio me complace informarle que he encontrado satisfactorio el trabajo de graduación titulado **MAPEOS PROYECTOS EN SISTEMAS DE VARIOS QUBITS**, dirigido en co-tutoría por mi persona y el **DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA**, elaborado por **JOSÉ ALFREDO DE LEÓN GARRIDO**, quien se identifica con el código único de identificación (CUI) 3001 97845 0101, registro académico 201604186, estudiante regular de la licenciatura en física aplicada de la Escuela de Ciencias Físicas de la Universidad de San Carlos de Guatemala.

Con lo anterior, informo que el estudiante de León Garrido ha finalizado el trabajo previo a realizar el Examen General Público. Adjunto a esta carta se encuentra el trabajo impreso que cuenta con mi aprobación.

Sin más que informar, me suscribo ante usted

M.Sc. Juan Diego Chang  
Profesor Interino  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Universidad de San Carlos de Guatemala



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Física

## MAPEOS PROYECTIVOS EN SISTEMAS DE VARIOS QUBITS

**José Alfredo de León Garrido**

Asesorado por M.Sc. Juan Diego Chang  
y Dr. Carlos Francisco Pineda Zorrilla

Guatemala, octubre de 2021



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**MAPEOS PROYECTIVOS  
EN SISTEMAS DE VARIOS QUBITS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN  
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
POR

**JOSÉ ALFREDO DE LEÓN GARRIDO**  
ASESORADO POR M.SC. JUAN DIEGO CHANG  
Y DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
**LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

GUATEMALA, OCTUBRE DE 2021



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



**CONSEJO DIRECTIVO**

DIRECTOR M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera  
SECRETARIO ACADÉMICO M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

EXAMINADOR Dr. Ángel Giovanni Ramírez  
EXAMINADOR Dr. Juan Adolfo Ponciano  
EXAMINADOR Dr. José Rodrigo Sacahuí Reyes



Este archivo pdf es una muestra

Fecha

datos

cuerpo

despedida

firma

nombre



## AGRADECIMIENTOS

A mi mamá, la Ednita Moda, por ser mi mayor soporte durante toda mi vida, por su amor incondicional de madre que jamás me ha faltado, por todos los sacrificios que hizo para siempre proveerme de las mejores condiciones para vivir y estudiar, por enseñarme y motivarme a soñar en grande y por todas sus lecciones de vida que me han hecho crecer personalmente.

A mi papá, Luis Alfredo de León (Q.E.P.D), por haber sido un papá extraordinario que estuvo siempre pendiente de mi bienestar, aún en los momentos difíciles de enfermedad, y por haber sido y seguir siendo un ejemplo de vida para mí.

A Carlos Pineda le agradezco por las oportunidades que me ha abierto para involucrarme en investigación, por su paciencia, y por sus valiosos consejos en el plano académico y profesional, y por su confianza en mi capacidad durante estos años.

A Alejandro Fonseca y David Dávalos por sus contribuciones y roles fundamentales en el progreso de este trabajo de investigación, así como también por los consejos, desde su experiencia, para contribuir a mi formación académica.

A Juan Diego Chang por ser un fabuloso catedrático que se empeña por transmitir el gusto por sus cursos en cada clase, por no subestimar la capacidad de sus estudiantes y ofrecer un contenido más avanzado al estándar. Le doy gracias por su apoyo durante mi proceso de graduación y por las incontables conversaciones que tuvimos en el café afuera del T-1 para arreglar la física en Guatemala.

Al Ing. Rodolfo Samayoa, por su excelente labor docente y administrativa, por siempre anteponer el progreso académico de los estudiantes antes que la burocracia universitaria, y por su papel clave en la creación de la ECFM que, sin duda alguna, catapultó el desarrollo de la física y matemática en la USAC. Siempre tendrá mi mayor respeto y admiración.

A los profesores de la ECFM ,con quienes recibí clases, Rodrigo, Giovanni, Damián, Mapache, Ronald, Héctor y Maynor. Por su dedicación y paciencia para enseñar, especialmente por el esfuerzo extra que supone no tener formación docen-

te. De alguna u otra manera, marcaron positivamente mi formación académica de licenciatura.

A Claudia y Norma por siempre tener la mejor disposición para ayudarme con todos los trámites administrativos que alguna vez requerí.

A mi novia, Cindy, por haber sido mi motivación para retomar mis objetivos académicos en un momento turbulento de mi vida, por estar en los momentos de alegría y de frustración aún en la distancia, por sus palabras de aliento, por escucharme siempre que lo necesito y por su sincero amor.

A mis mejores amigos los H's: Benja, Gómez y Papaya. Por los cuchubales de los martes en Applebee's, por traerme a mi casa todas las veces que me quedé dormido en las reuniones sociales con bebidas que marean, pero lo más importante, por su amistad incondicional y desinteresada.

A mis compañeros y amigos de la U: Sub, Melissa, Pablo Escobar, Luz, Félix, Elser, Wendel, Luciano, Miguel, Ester, Alex y Sarceño. Por todos los momentos graciosos, roces, chismes, y sufridas académicas que vivimos, siempre los tendré en mi memoria como los recuerdos memorables y anécdotas de la licenciatura. A Félix, Elser, Wendel, Luciano, Miguel y Ester: por lo menos, las risas no faltaron. A Sub: échele ganas hija, ¡tú podés! A Pablo y Melissa: ¿tienen tramadol? A Luz: siempre chairros y cero miedo a los comunicados. A Alex y Sarceño: ¿quién vos?

## DEDICATORIA

A mis padres, Fabiola Garrido y Luis Alfredo de León Q.E.P.D,



# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	IV
ÍNDICE DE TABLAS	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
<b>1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Ensamblados de estados cuánticos . . . . .	2
1.3. Propiedades de la matriz densidad . . . . .	3
1.4. Canales cuánticos . . . . .	7
1.5. Representaciones de los canales cuánticos . . . . .	10
<b>2. OPERACIONES PCE</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción . . . . .	17
2.2. Operaciones PCE . . . . .	17
2.3. 1 qubit . . . . .	20
2.4. El problema de $n$ qubits . . . . .	23
2.5. Solución numérica . . . . .	24
<b>3. RESULTADOS DE 2 Y 3 QUBITS</b>	<b>29</b>
3.1. Introducción . . . . .	29
3.2. Resultados . . . . .	30
3.3. Una representación geométrica . . . . .	31
3.4. Discusión de resultados . . . . .	37

<b>4. CANALES DIAGONALES DE PAULI CONSTANTES SOBRE</b>	
<b>    LOS EJES</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción . . . . .	43
4.2. Canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes . . . . .	44
4.3. Relación con canales cuánticos PCE . . . . .	45
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>49</b>
<b>TRABAJO FUTURO</b>	<b>51</b>
<b>A. Listas de 1 y 0 de los elementos <math>\tau_{j_1, \dots, j_n}</math> de los canales cuánticos</b>	
<b>    PCE de 2 y 3 qubits encontrados numéricamente</b>	<b>55</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Deformación de la esfera de Bloch a un disco sobre el plano $XY$ . <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	8
2.1. Efecto del canal de <i>bit-flip</i> sobre la esfera de Bloch, para $p = 0.3$ . <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	18
2.2. Acción geométrica del canal <i>defasing</i> de 1 qubit sobre la esfera de Bloch, para $p = 0.3$ . <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	18
3.1. De izquierda a derecha se muestran las figuras PCE de la operación identidad de 1, 2 y 3 qubits. En esta representación los índices $j_1, \dots, j_n$ de los elementos $\tau_{j_1, \dots, j_n}$ de la operación PCE están asociados con una posición en la figura PCE respectiva. Si la posición $j_1, \dots, j_n$ en la figura PCE está pintada, entonces el elemento asociado $\tau_{j_1, \dots, j_n}$ es igual a 1, y si la posición no está pintada (en blanco), entonces el elemento asociado $\tau_{j_1, \dots, j_n}$ es igual a 0. <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	32
3.2. <b>(a)</b> Figuras PCE de todas las operaciones PCE de 1 qubit. <b>(b)</b> Figuras PCE de 2 operaciones PCE de 2 qubits aleatorias. La primera figura PCE representa a un canal PCE y la segunda representa una operación PCE que no satisface la condición de completa positividad. <b>(c)</b> Figuras PCE de dos operaciones PCE aleatorias de 3 qubits. <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	34
3.3. Figuras PCE de los canales cuánticos PCE de 2 qubits ordenados por clases de equivalencia etiquetadas como $C_k^l$ , donde $k$ es el número de componentes de Pauli invariantes y $l$ es para diferenciar entre clases de equivalencia con el mismo número de componentes de Pauli invariantes. Los elementos de una misma clase de equivalencia están conectados por intercambios de partículas y permutaciones locales de base. <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	35

3.4. Figuras PCE de los canales cuánticos PCE de 3 qubits. <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	36
3.5. Gráficas del número de canales PCE de 1, 2 y 3 qubits en función del exponente $k$ del número $2^k$ de componentes de Pauli invariantes que dejan invariantes los canales. <b>(a)</b> 1 qubit. <b>(b)</b> 2 qubits. <b>(c)</b> 3 qubits. Los puntos en azul representan los casos no explorados con nuestro método numérico, pero que suponemos por la regla de espejo que existen. <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	39

# ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Combinaciones de $\tau_i$ de todas las operaciones PCE de 1 qubit. <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	22
A.1. Todos los canales cuánticos PCE de 2 qubits (67 en total) encontrados con el método numérico descrito en la sección 2.5. Para reproducir estos resultados con nuestro método numérico descrito en la sección 2.5 revise el cuaderno de Mathematica “ <code>pce_operations.nb</code> ”, disponible en <a href="https://github.com/deleonja/projective_maps">https://github.com/deleonja/projective_maps</a> . Revise la sección 2.5 para la descripción de las rutinas implementadas. <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	56
A.2. 70 de los 716 canales cuánticos PCE encontrados entre las operaciones PCE de 3 qubits que preservan 1, 2, 3, 4, 61, 62, 63 y 64 componentes de Pauli. Para ver las 716 listas de 1 y 0 de los canales cuánticos PCE de 3 qubits, encontradas con nuestro método numérico, revise el cuaderno de Mathematica “ <code>pce_operations.nb</code> ”, disponible en <a href="https://github.com/deleonja/projective_maps">https://github.com/deleonja/projective_maps</a> . Revise la sección 2.5 para la descripción de las rutinas implementadas. <b>Fuente:</b> elaboración propia. . . . .	57



## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$ \psi\rangle$	<i>ket</i> , vector de estado en la notación de Dirac
$\langle\psi $	<i>bra</i> , funcional en la notación de Dirac
$\{p_i,  \psi_i\rangle\}$	ensamble de estados
$p_i$	$i$ -ésima probabilidad
$\langle\psi \phi\rangle$	<i>braket</i> , producto interno en la notación de Dirac
$\Lambda$	operador que actúa sobre el espacio de Hilbert
$\Lambda^\dagger$	operador adjunto de $\Lambda$
$\langle\Lambda\rangle$	valor esperado de $\Lambda$
$\langle\psi_i \Lambda \psi_j\rangle$	elemento de matriz $\Lambda_{ij}$
$ \psi\rangle\langle\phi $	producto externo entre $ \psi\rangle$ y $\langle\phi $ en la notación de Dirac
$\rho$	matriz densidad
$\rho^{AB}$	matriz densidad de un sistema compuesto $A$ y $B$
$\text{Tr } \Lambda$	traza de $\Lambda$
$\text{Tr}_A \rho^{AB}$	traza parcial sobre $A$ de $\rho^{AB}$
$\mathbb{1}$	operador identidad
$\mathcal{E}$	canal cuántico
$D_{\mathcal{E}}$	matriz de Choi de $\mathcal{E}$
$U$	operador unitario
$\sigma_i$	matrices de Pauli
$ \psi\rangle \phi\rangle$	producto tensorial $ \psi\rangle \otimes  \phi\rangle$
$\mapsto$	“se mapea a”
$\vec{\rho}$	matriz densidad vectorizada
$\mathcal{H}$	espacio de Hilbert
$\mathcal{M}_d$	espacio de las matrices de $d \times d$
$\mathcal{HS}$	espacio de Hilbert-Schmidt
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker

Símbolo	Significado
$r_{j_1, \dots, j_n}$	componentes de la matriz densidad de $n$ qubits en la base de matrices de Pauli
$\tau_{j_1, \dots, j_n}$	elementos diagonales del superoperador de una operación PCE en la base de Pauli
$\lambda_i$	eigenvalores

# OBJETIVOS

## General

Estudiar las operaciones que borran las componentes de Pauli (PCE por su nombre en inglés “*Pauli component erasing operations*”) de sistemas de 2 y 3 qubits.

## Específicos

1. Estudiar numéricamente la completa positividad de las operaciones PCE en sistemas de 2 y 3 qubits.
2. Estudiar las características que debe satisfacer una operación PCE para ser un canal cuántico.
3. Estudiar la existencia de subconjuntos de canales cuánticos PCE cuyos elementos sean equivalentes.
4. Desarrollar una herramienta geométrica para entender las operaciones PCE.
5. Comparar los canales cuánticos PCE con otros canales de Pauli que han sido previamente estudiados.



# INTRODUCCIÓN

Para hacer una descripción completa de los sistemas cuánticos con frecuencia se debe considerar la interacción del sistema con su entorno. Por un lado, en la naturaleza no existen los sistemas cuánticos ideales aislados completamente del resto del universo. Por el otro, en sistemas de muchos cuerpos es necesario un formalismo con el que se pueda describir la evolución de un subsistema, considerando que en general interactúa con la partición restante del sistema. Por ejemplo, para hacer una descripción más precisa de un átomo en el laboratorio se necesita considerar su interacción con la radiación de fondo, o para describir a un átomo atrapado en una red óptica se debe considerar, en una primera aproximación, la interacción con sus próximos vecinos. Los canales cuánticos y la ecuación maestra en la forma de Lindblad son algunas de las herramientas disponibles para describir la evolución de la matriz densidad de los sistemas abiertos [9].

La decoherencia es un fenómeno con mucho interés por entender. Este fenómeno ha sido discutido desde los inicios de la mecánica cuántica, en la década de 1930, por físicos como Von Neumann [13] y Heisenberg [2]. No obstante, los fundamentos modernos de los modelos de decoherencia fueron introducidos en las décadas de 1970 y 1980 por H. Dieter Zeh [15] y W. Zurek [16]. De manera muy general, la decoherencia es un proceso mediante el cual un sistema pierde su coherencia cuántica. Algunos ejemplos son el colapso de la función de onda, la disipación de energía de un sistema hasta llevarlo a su estado fundamental y la transformación de los estados puros a estados mixtos, entre otros. Desde un punto de vista teórico, ha habido un debate acerca de la afirmación que la decoherencia resuelve el problema de la medida en la mecánica cuántica [2]. Por otro lado, en un sentido práctico y de aplicación, el estudio y caracterización de la decoherencia ayuda a entender el impacto que tiene en los protocolos de información cuántica como teleportación cuántica y codificación superdensa [10].

En este trabajo introducimos a las operaciones que borran las componentes de Pauli (PCE por sus siglas en inglés, *Pauli Component Erasing*), que generalizan las

decoherencias de una partícula de dos niveles (qubits) para sistemas de  $n$  qubits. Para evaluar si una operación PCE es un canal cuántico, i.e. si modela una evolución física de un sistema abierto, la operación debe ser completamente positiva y preservar las propiedades de la matriz densidad [3], como lo discutiremos en el capítulo 1. El caso de 1 qubit es sencillo e ilustrativo para entender el punto de partida de nuestro problema. Las operaciones PCE de 1 qubit borran o preservan las componentes del vector de Bloch, y, de todas, son canales cuánticos sólo aquellas que mapean la esfera de Bloch al origen de coordenadas, a una línea sobre los ejes cartesianos y a sí misma (la operación identidad). Estos canales cuánticos modelan la decoherencia de un sistema de dos niveles cuando su estado se transforma al estado máximamente mixto, cuando colapsa a alguno de los eigenestados de las matrices de Pauli y cuando el estado no se modifica. Específicamente, en este trabajo buscamos numéricamente las operaciones PCE de 2 y, parcialmente, de 3 qubits que satisfacen la completa positividad y analizamos las características en común para buscar pistas de una caracterización general de este tipo de canales cuánticos. Además, estudiamos los canales de Pauli constantes sobre los ejes, de Nathanson y Ruskai [8], para investigar si los canales cuánticos PCE pudieran ser un subconjunto que pertenece a otros canales de Pauli que ya han sido estudiados.

# 1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

## 1.1. Introducción

El estudio de los sistemas cuánticos cerrados, es decir, sistemas que no interactúan con su entorno, nos ha permitido entender bastante bien muchos fenómenos cuánticos. No obstante, una descripción más precisa requiere de considerar que los sistemas cuánticos reales son sistemas abiertos que interactúan con su entorno. Para estudiar los sistemas cuánticos abiertos será útil revisar un formalismo distinto al del vector de estado para describir a los estados cuánticos. Este formalismo es el de la matriz densidad y tiene la ventaja de describir de manera más apropiada a los estados mixtos. La interpretación de la matriz densidad como la representación de los estados cuánticos es utilizada en información cuántica, computación cuántica, sistemas abiertos y otros campos en los que la preparación del estado es ruidoso y puede ocurrir decoherencia [6, 9, 14]. Nosotros adoptaremos esta interpretación de la matriz densidad a lo largo de este texto. Para la descripción de la evolución dinámica vamos a estudiar la teoría de los canales cuánticos, que es un marco teórico en el cual se considera que los estados cuánticos (matriz densidad) evolucionan de forma discreta.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la sección 1.2 revisaremos una motivación para introducir a la matriz densidad a partir de un ensamble de estados. Seguidamente, en la sección 1.3, estudiaremos las propiedades que debe cumplir una matriz de densidad para representar un estado cuántico y cómo se reformulan los postulados de la mecánica cuántica utilizando este nuevo formalismo. En la sección 1.4 vamos a revisar las condiciones para que un canal cuántico describa la evolución física de la matriz de densidad. Por último, en la sección 1.5, vamos a estudiar la representación de superoperador y de Kraus de un canal cuántico.

## 1.2. Ensamblados de estados cuánticos

Para introducir la definición de la matriz densidad presentamos la motivación que exponen Sakurai y Napolitano [12]. Consideremos un sistema cuántico que se encuentra en alguno de los estados  $|\psi_i\rangle$  con probabilidad  $p_i$ . Esto induce naturalmente el ensamble de estados del sistema  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ . Supongamos que realizamos la medición de algún observable  $\Lambda$  sobre el ensamble. El valor esperado al medir  $\Lambda$  sobre este sistema es

$$\langle \Lambda \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \Lambda | \psi_i \rangle = \sum_{i,j,k} p_i \langle \psi_i | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \Lambda | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \psi_i \rangle, \quad (1.1)$$

con  $|\phi_j\rangle$  es una base ortonormal del espacio de Hilbert del sistema. Si se reordena (1.1) de manera apropiada se obtiene una expresión que motiva claramente la definición de la matriz densidad  $\rho$ ,

$$\langle \Lambda \rangle = \sum_{j,k} \langle \phi_k | \left( \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) | \phi_j \rangle \langle \phi_j | \Lambda | \phi_k \rangle. \quad (1.2)$$

La matriz que se encuentra entre paréntesis se define como la matriz densidad  $\rho$  [9, 12]

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (1.3)$$

Notemos que un elemento de matriz de  $\rho$ , escrita en la base  $|\phi_j\rangle$ , es

$$\langle \phi_k | \rho | \phi_j \rangle = \sum_i p_i \langle \phi_k | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi_j \rangle, \quad (1.4)$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación (1.2) se tiene que el valor promedio del observable  $\Lambda$  es

$$\langle \Lambda \rangle = \sum_k \langle \phi_k | \rho \Lambda | \phi_k \rangle = \text{Tr}(\rho \Lambda). \quad (1.5)$$

Este resultado es interesante porque muestra que es posible calcular el valor promedio de un observable utilizando la matriz densidad del sistema. En virtud de este resultado vale la pena investigar a continuación cómo evoluciona la matriz densidad de un sistema.

Consideremos un sistema que se encuentra en el ensamble de estados inicial  $\{p_i, |\psi_i(0)\rangle\}$  y que evoluciona según algún operador unitario  $U(t)$ . Es decir, el en-

samblé de estados en cualquier tiempo  $t > 0$  está dado por  $\{p_i, U(t) |\psi_i(0)\rangle\}$ . Entonces, utilizando la definición (1.3) recién introducida, la matriz de densidad  $\rho(t)$  del sistema será

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| \\ &= \sum_i p_i U(t) |\psi_i(0)\rangle\langle\psi_i(0)| U^\dagger(t) \\ &= U(t)\rho(0)U^\dagger(t), \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde  $\rho(0)$  es la matriz densidad del ensamble de estados inicial  $\{p_i, |\psi_i(0)\rangle\}$ . Hemos probado así que la descripción dinámica de un sistema que evoluciona según un operador unitario puede hacerse utilizando su matriz densidad. En la sección que sigue estudiaremos las propiedades que deben satisfacer las matrices de densidad en general y revisaremos cómo formular los postulados de la mecánica cuántica con la matriz densidad.

### 1.3. Propiedades de la matriz densidad

A pesar de que contamos con la definición (1.3) de la matriz densidad dado un ensamble de estados, será útil estudiar cuáles son las condiciones que una matriz debe cumplir para ser una matriz densidad. Luego de esto, estamos listos para revisar la formulación de los postulados de la mecánica cuántica utilizando la matriz densidad. Por último, vamos a estudiar la matriz densidad reducida, la manera para describir a los subsistemas de sistemas compuestos con el formalismo de la matriz densidad.

Las propiedades que una matriz debe tener para que esta represente al estado físico de un sistema se establecen a continuación [9]:

**Teorema 1.3.1.** *Una matriz  $\rho$  que actúa sobre el espacio de Hilbert de un sistema es la matriz densidad asociada a algún ensamble  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  si y sólo si satisface las condiciones:*

1.  $\text{Tr } \rho = 1$ .
2.  $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ .

*Demostración.* Consultar [9, p. 101] □

La condición de traza unitaria de la matriz densidad es análoga a la condición de normalización de la función de onda, las probabilidades de medir al sistema en un

estado u otro deben sumar uno. Por otro lado, los eigenvalores  $\lambda_i$  y eigenvectores  $|\psi_i\rangle$  de la matriz densidad definen a uno de los posibles ensambles de estados  $\{\lambda_i, |\psi_i\rangle\}$  del sistema. Entonces, la condición de positividad de la matriz densidad asegura que las probabilidades  $\lambda_i$  de encontrar al sistema en el estado  $|\psi_i\rangle$  son cero o positivas, como esperaríamos que fuese.

Ahora que ya contamos con una definición de la matriz densidad que no parte de conocer *a priori* el ensamble de estados del sistema nos ocupamos de la formulación de los postulados de la mecánica cuántica utilizando este nuevo formalismo [9, p. 102].

**Postulado 1.** *Estado del sistema.* Un sistema físico tiene asociado un espacio vectorial complejo con producto interno conocido como el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  del sistema. Los estados del sistema están descritos por el conjunto de matrices de densidad que actúan sobre  $\mathcal{H}$ .

**Postulado 2.** *Evolución unitaria.* La evolución de un sistema cuántico cerrado, en un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$ , está descrita por una transformación unitaria  $U(t_1, t_2)$  de la siguiente manera

$$\rho(t_1) \longrightarrow U(t_1, t_2)\rho(t_1)U^\dagger(t_1, t_2) = \rho(t_2). \quad (1.7)$$

**Postulado 3.** *Medición.* Las mediciones sobre el estado  $\rho$  de un sistema están descritas por un conjunto de operadores  $\{M_m\}$ . Estos son operadores que actúan sobre  $\mathcal{H}$  y el índice  $m$  refiere a los posibles resultados de la medición. Si el estado del sistema es  $\rho$  inmediatamente antes de la medición, entonces la probabilidad  $p(m)$  de obtener el resultado  $m$  es

$$p(m) = \text{Tr} (M_m^\dagger M_m \rho), \quad (1.8)$$

y el estado del sistema inmediatamente después de la medición será

$$\rho' = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr} (M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (1.9)$$

Los operadores  $M_m$  deben satisfacer la ecuación de completitud

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}. \quad (1.10)$$

**Postulado 4.** *Sistemas de partículas.* El espacio de Hilbert de un sistema de varias partículas se compone del producto tensorial de los espacios de Hilbert individuales. Es decir, si el sistema total se compone de  $N$  partículas, entonces el espacio de Hilbert total es

$$\mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N. \quad (1.11)$$

Los estados del sistema total están descritos por las matrices de densidad que actúan sobre  $\mathcal{H}_{\text{total}}$ .

Debemos resaltar que aunque el espacio de Hilbert de muchas partículas es de la forma (1.11) no todas las matrices de densidad que actúan sobre son de la forma  $\rho_{\text{total}} = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_n$ , lo cual nos conduce a preguntarnos que dada una matriz densidad de un sistema compuesto  $\rho_{\text{total}}$ , ¿cuál es el estado en el que se encuentra cada uno de los subsistemas que lo componen? Por esta razón, para averiguar cómo describir a los subsistemas con el formalismo de la matriz densidad es que vamos a revisar a continuación cómo introducir la matriz densidad reducida utilizando una herramienta conocida como la traza parcial [9].

Supongamos dos subsistemas  $A$  y  $B$  cuyo estado total es  $\rho^{AB}$  (en general  $\rho^{AB} \neq \rho^A \otimes \rho^B$ ). Consideremos una base ortonormal  $|\psi_i\rangle$  de  $\mathcal{H}_A$  y una base ortonormal  $|\phi_j\rangle$  de  $\mathcal{H}_B$ . Una base ortonormal del sistema total  $\mathcal{H}_{\text{total}}$  está dado por  $|\psi_i\rangle \otimes |\phi_j\rangle$ . En esta base un elemento de matriz de  $\rho^{AB}$  está dado por

$$\langle \psi_i | \langle \phi_j | \rho^{AB} | \psi_k \rangle | \phi_l \rangle, \quad (1.12)$$

donde hemos utilizado la notación  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle |\phi\rangle$ . Supongamos que  $\Omega_A \otimes \mathbb{1}$  es un observable que actúa sobre  $A$  en  $\mathcal{H}_{\text{total}}$  y el valor esperado  $\langle \Omega_A \otimes \mathbb{1} \rangle$ , utilizando (1.5), es

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho^{AB}(\Omega_A \otimes \mathbb{1})) &= \sum_{i,j} \langle \psi_i | \langle \phi_j | \rho^{AB}(\Omega_A \otimes \mathbb{1}) | \psi_i \rangle | \phi_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \psi_i | \langle \phi_j | \rho^{AB} \left( \sum_{k,l} |\psi_k\rangle |\phi_l\rangle \langle \psi_k| \langle \phi_l| \right) (\Omega_A \otimes \mathbb{1}) | \psi_i \rangle | \phi_j \rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l} \langle \psi_i | \langle \phi_j | \rho^{AB} | \psi_k \rangle | \phi_l \rangle \langle \psi_k | \Omega_A | \psi_i \rangle \delta_{lj} \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\rho^{AB}(\Omega_A \otimes \mathbb{1})) = \sum_{i,k} \left( \sum_j \langle \psi_i | \langle \phi_j | \rho^{AB} | \psi_k \rangle | \phi_j \rangle \right) \langle \psi_k | \Omega_A | \psi_i \rangle. \quad (1.13)$$

La matriz entre paréntesis define a la matriz densidad reducida  $\rho^A$  del subsistema  $A$  como [4]

$$\sum_j \langle \psi_i | \langle \phi_j | \rho^{AB} | \psi_k \rangle | \phi_j \rangle = \langle \psi_i | \rho^A | \psi_k \rangle. \quad (1.14)$$

y retomando el cálculo de  $\langle \Omega_A \otimes \mathbb{1} \rangle$  en (1.13) se obtiene, en función de  $\rho^A$ ,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho^{AB}(\Omega_A \otimes \mathbb{1})) &= \sum_{i,k} \langle \psi_i | \rho^A | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \Omega_A | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi_i | \rho^A \Omega_A | \psi_i \rangle \\ &= \text{Tr}(\rho^A \Omega_A). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Notemos la similitud de este resultado con el que se obtuvo en la ecuación (1.5). El valor esperado de un observable que actúa sobre sólo uno de los subsistemas puede calcularse con su matriz de densidad reducida.

Una vez discutida la utilidad que puede tener la matriz densidad reducida, ahora vamos a discutir con detalle la operación que la define en (1.14). Esta operación se conoce como traza parcial. El adjetivo “parcial” es porque la operación de traza se realiza sólo sobre los grados de libertad de alguno de los subsistemas. En la ecuación (1.14) denotamos a la matriz densidad reducida  $\rho^A$  como la traza parcial sobre  $B$  de  $\rho^{AB}$ ,

$$\sum_j \langle \psi_i | \langle \phi_j | \rho^{AB} | \psi_k \rangle | \phi_j \rangle = \langle \psi_i | \text{Tr}_B(\rho^{AB}) | \psi_k \rangle = \langle \psi_i | \rho^A | \psi_k \rangle. \quad (1.16)$$

En general, la traza parcial es una operación lineal que se define mediante la relación [9]

$$\text{Tr}_B(|\alpha_i\rangle\langle\alpha_j| \otimes |\beta_k\rangle\langle\beta_l|) \equiv |\alpha_i\rangle\langle\alpha_j| \text{Tr}(|\beta_k\rangle\langle\beta_l|), \quad (1.17)$$

donde  $|\alpha_i\rangle$  son vectores ortonormales del subespacio  $\mathcal{H}_A$  y  $|\beta_j\rangle$  del resto del espacio de Hilbert total.

Ahora que contamos con las propiedades de la matriz densidad, los postulados reescritos con este formalismo y la aplicación de la matriz de densidad reducida para

describir subsistemas ya disponemos de las herramientas adecuadas para describir a los estados cuánticos utilizando a la matriz densidad. En la siguiente sección continuamos con la evolución de la matriz densidad utilizando la teoría de los canales cuánticos.

## 1.4. Canales cuánticos

La teoría de los canales cuánticos es un marco teórico con el cual se puede describir la evolución de los sistemas cuánticos abiertos. Un canal cuántico es una operación lineal que debe preservar las propiedades de la matriz densidad y que, cuando el sistema forma parte de un sistema más grande junto con un *ancilla*, la extensión del canal que actúa sobre el sistema total debe también de preservar la traza y positividad de la matriz densidad total.

Matemáticamente se escribe la acción de un canal cuántico  $\mathcal{E}$  sobre un estado  $\rho$  como

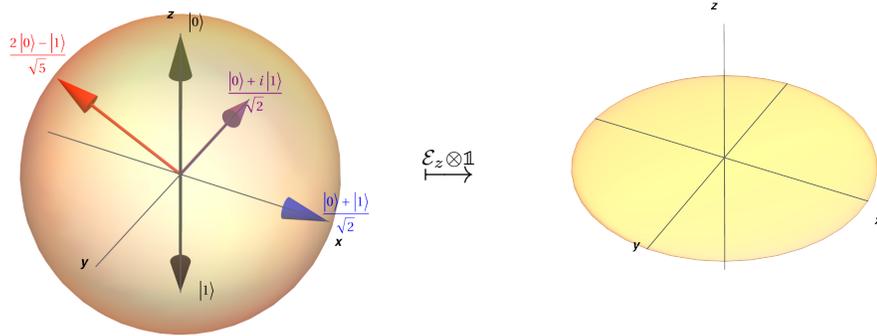
$$\rho' = \mathcal{E}(\rho), \quad (1.18)$$

donde  $\mathcal{E}$  es una operación lineal y  $\rho'$  es una matriz de traza unitaria y positiva. Para que  $\mathcal{E}$  sea un canal cuántico se requiere también que sea operación completamente positiva (CP). Antes de enunciar una de las definiciones de la completa positividad vamos a elaborar un ejemplo con el objetivo de exponer mejor la implicación física de esta condición.

El ejemplo que vamos a discutir es el de una operación que actúa sobre  $\rho$  como en (1.18) pero que no es CP. Por lo tanto, la extensión de la operación que actúa sobre un sistema que interactúa con un *ancilla* no transforma al estado máximamente entrelazado en un estado físico. La operación que consideraremos actúa sobre partículas de espín 1/2, i.e. sistemas cuánticos de dos niveles. En computación e información cuántica se conoce a estos sistemas como qubits. Una manera de escribir a la matriz densidad de 1 qubit es

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 r_i \sigma_i, \quad (1.19)$$

donde  $\sigma_0 = \mathbb{1}$  y el resto de  $\sigma_i$  las 3 matrices de Pauli. Imponemos que  $r_0 = 1$  para que  $\text{Tr}(\rho) = 1$ . Esta forma de escribir a la matriz densidad de 1 qubit es útil porque las componentes  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  especifican las coordenadas cartesianas de un punto en



**Figura 1.1.** Deformación de la esfera de Bloch a un disco sobre el plano  $XY$ . **Fuente:** elaboración propia.

la esfera de Bloch, esfera unitaria que se utiliza para representar a los estados de 1 qubit. Similarmente, la matriz densidad de 2 qubits se escribe como [9]

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (1.20)$$

con  $r_{00} = 1$ . Consideremos entonces la operación lineal  $\mathcal{E}_z$  de 1 qubit que mapea la esfera de Bloch a un disco sobre el plano  $x$ - $y$  como se muestra en la Fig. 1.1. En términos de las componentes  $r_i$ , la operación  $\mathcal{E}_z$  transforma a una matriz densidad  $\rho$  como en (1.19) de la siguiente manera

$$(1, r_1, r_2, r_3) \mapsto (1, r_1, r_2, 0). \quad (1.21)$$

Aunque podemos revisar explícitamente que las propiedades de traza unitaria y positividad de  $\rho$  en (1.19) se preservan, también podemos argumentar geoméricamente que, dado que el disco final se contiene en la esfera de Bloch, las propiedades de la matriz densidad de 1 qubit se preservan. Sin embargo, veremos que la acción de  $\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}$  sobre el estado máximamente entrelazado de 2 qubits se transforma en una matriz no positiva.

Para 2 qubits,  $|\phi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$  es el estado máximamente entrelazado [3]. Dado que conocemos cómo transforma  $\mathcal{E}_z$  a la matriz densidad escrita en la base de matrices de Pauli será necesario calcular la representación de  $|\phi\rangle\langle\phi|$  escrita como en (1.20) para luego calcular  $\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}(|\phi\rangle\langle\phi|)$ . Las componentes  $r_{ij}$  se calculan

usando el producto interno de Hilbert-Schmidt  $\text{Tr}(\sigma_i \otimes \sigma_j |\phi\rangle\langle\phi|)$  [3]. Así encontramos

$$|\phi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{4}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_1 \otimes \sigma_1 - \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \sigma_3 \otimes \sigma_3). \quad (1.22)$$

Recordemos que  $\mathcal{E}_z$  borra la componente  $r_3$  de la matriz densidad de 1 qubit en (1.19). Al calcular el superoperador  $\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}$ , la representación matricial de un canal cuántico que veremos en la próxima sección, se encuentra que  $\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}$  actuando sobre una matriz densidad de 2 qubits escrita como en (1.20) borra las componentes de la forma  $r_{3j}$ . Por consiguiente

$$\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}(|\phi\rangle\langle\phi|) = \frac{1}{4}(\sigma_0 \otimes \sigma_0 + \sigma_1 \otimes \sigma_1 - \sigma_2 \otimes \sigma_2), \quad (1.23)$$

que al calcular su representación matricial se tiene

$$\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}(|\phi\rangle\langle\phi|) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

La matriz  $\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}(|\phi\rangle\langle\phi|)$  tiene un eigenvalor igual a  $-1/4$  y, por lo tanto, no satisface la condición de positividad para ser una matriz densidad. En otras palabras,  $\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}(|\phi\rangle\langle\phi|)$  no representa a un estado físico de 2 qubits y se dice entonces que  $\mathcal{E}_z$  no es una operación completamente positiva porque existen estados en el espacio extendido de 2 qubits para el cual la extensión  $\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}$  no preserva la positividad de esos estados. De esta manera acabamos de mostrar que la condición de completa positividad surge de la posibilidad que un sistema tiene de encontrarse en un estado entrelazado con un *ancilla*.

Ya que elaboramos la implicación física de la completa positividad vamos a establecer una definición precisa de esta condición con la que debe de cumplir un canal cuántico. Se dice que una operación  $\mathcal{E}$  es CP si y sólo si, para cualquier extensión arbitraria de dimensión  $K$  del espacio de Hilbert ( $\mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_K$ ) el operador  $\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_K$  es positivo [3]. Con esta definición hemos terminado de revisar las dos condiciones que debe de satisfacer una operación lineal para ser un canal cuántico.

Un canal cuántico es un mapeo lineal que

1. Preserva las características de la matriz densidad.

2. Es completamente positivo.

En la literatura se suele utilizar el término operaciones completamente positivas que preservan la traza (CPTP por sus siglas en inglés, *Completely Positive and Trace-Preserving*) para referirse a los canales cuánticos [3]. En la siguiente y última sección de este capítulo estudiaremos algunas representaciones de canales cuánticos.

## 1.5. Representaciones de los canales cuánticos

En esta sección estudiaremos dos representaciones distintas de los canales cuánticos: los superoperadores y la representación de suma de operadores de Kraus. Para cada una de ellas, vamos a revisar cómo escribir las condiciones que hacen a una operación lineal un canal cuántico. La representación como superoperador será especialmente útil para investigar el problema que vamos a plantear en el siguiente capítulo. No obstante, los operadores de Kraus siguen siendo una parte importante dentro de la teoría de los canales cuánticos y por eso dedicamos brevemente la última parte de esta sección a estudiarlos.

Los canales cuánticos pueden entenderse como operadores que actúan sobre otros operadores. La matriz densidad actúa sobre el espacio de Hilbert y un canal cuántico actúa sobre las matrices de densidad, que forman parte del espacio de Hilbert-Schmidt. La diferencia es entonces que las matrices de densidad son operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert y los canales cuánticos actúan sobre el espacio de Hilbert-Schmidt. Para hacer una diferencia en la naturaleza de los dos tipos de operadores, los canales cuánticos pueden recibir el nombre de superoperadores [11].

Vamos a revisar primero un cambio de notación que *vectoriza* a la matriz densidad para después exponer cómo es la representación matricial de un canal cuántico como un superoperador. Consideremos una matriz densidad  $\rho$  de dimensión  $d \times d$ . Para vectorizar a  $\rho$ , los elementos de matriz  $\rho_{ij}$  se deben acomodar en un vector columna  $\vec{\rho}$ , con componentes  $\rho_k$ , siguiendo la ecuación [3]

$$\rho_k = \rho_{ij}; \quad k = (i-1)d + j, \quad (1.25)$$

donde  $i, j = 1, \dots, d$ . Por ejemplo, la matriz densidad

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

que actúa sobre un espacio de Hilbert de dimensión 2 se vectoriza como

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{00} \\ \rho_{01} \\ \rho_{10} \\ \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

En general, una matriz densidad  $\rho$  que actúa sobre un espacio de Hilbert de dimensión  $d$  es una matriz de dimensión  $d \times d$ . Si se vectoriza a  $\rho$ , la matriz de densidad se transforma en un vector  $\vec{\rho}$  de  $d^2$  componentes. Un canal cuántico  $\mathcal{E}$  que actúa sobre  $\rho$  se puede representar entonces como una matriz de dimensión  $d^2 \times d^2$  que actúa sobre el vector  $\vec{\rho}$ . Esta representación matricial de  $\mathcal{E}$  es la que se conoce como superoperador.

Antes de estudiar las condiciones que un superoperador  $\mathcal{E}$  debe satisfacer para ser un canal cuántico es necesario que revisemos dos herramientas algebraicas: (1) una notación de cuatro índices para los elementos de matriz de un operador, y (2) la transformación algebraica de *reshuffle*. Primero, para introducir la nueva notación consideremos a un superoperador  $\mathcal{E}$  que actúa sobre un espacio de Hilbert-Schmidt de la forma  $\mathcal{HS}_M \otimes \mathcal{HS}_N$ . Sea  $|m\rangle$  una base ortonormal de  $\mathcal{HS}_M$ ,  $|\mu\rangle$  una base ortonormal de  $\mathcal{HS}_N$  y, por lo tanto,  $|m\rangle \otimes |\mu\rangle$  una base ortonormal de  $\mathcal{HS}_M \otimes \mathcal{HS}_N$ . Nótese el uso de letras latinas para los índices del primer subsistema y letras griegas para los índices del segundo. Utilizando cuatro índices, un elemento de matriz de  $\mathcal{E}$  se calcula como

$$\mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} = \langle m \otimes \mu | \mathcal{E} | n \otimes \nu \rangle. \quad (1.28)$$

Por último, vamos a introducir la transformación algebraica de *reshuffle* de un superoperador  $\mathcal{E}$  utilizando la nueva notación de cuatro índices en (1.28). El *reshuffle*  $\mathcal{E}^R$  de un superoperador  $\mathcal{E}$  se define como [3]

$$\mathcal{E}_{n\nu}^R = \mathcal{E}_{\mu\nu}^{m\nu}. \quad (1.29)$$

El siguiente ejemplo ilustra cómo utilizar la notación de cuatro índices en (1.28) y cómo hacer la transformación de *reshuffle* en (1.29) de un superoperador que actúa

sobre un espacio de Hilbert-Schmidt de dimensión 4 de la forma  $\mathcal{HS}_2 \otimes \mathcal{HS}_2$ ,

$$\left( \begin{array}{cccc} \mathcal{E}_{00}^{00} & \mathcal{E}_{01}^{00} & \mathcal{E}_{10}^{00} & \mathcal{E}_{11}^{00} \\ \mathcal{E}_{00}^{01} & \mathcal{E}_{01}^{01} & \mathcal{E}_{10}^{01} & \mathcal{E}_{11}^{01} \\ \mathcal{E}_{00}^{10} & \mathcal{E}_{01}^{10} & \mathcal{E}_{10}^{10} & \mathcal{E}_{11}^{10} \\ \mathcal{E}_{00}^{11} & \mathcal{E}_{01}^{11} & \mathcal{E}_{10}^{11} & \mathcal{E}_{11}^{11} \end{array} \right)^R = \left( \begin{array}{cccc} \mathcal{E}_{00}^{00} & \mathcal{E}_{01}^{00} & \mathcal{E}_{00}^{01} & \mathcal{E}_{01}^{01} \\ \mathcal{E}_{10}^{00} & \mathcal{E}_{11}^{00} & \mathcal{E}_{10}^{01} & \mathcal{E}_{11}^{01} \\ \mathcal{E}_{00}^{10} & \mathcal{E}_{01}^{10} & \mathcal{E}_{00}^{11} & \mathcal{E}_{01}^{11} \\ \mathcal{E}_{10}^{10} & \mathcal{E}_{11}^{10} & \mathcal{E}_{10}^{11} & \mathcal{E}_{11}^{11} \end{array} \right). \quad (1.30)$$

La transformación de *reshuffle* nos será útil específicamente para entender la condición de completa positividad que un superoperador  $\mathcal{E}$  de cumplir para ser un canal cuántico.

Ahora que ya contamos con las herramientas algebraicas necesarias estamos listos para enunciar las condiciones que debe cumplir un superoperador  $\mathcal{E}$  para ser un canal cuántico. Recordemos de la sección anterior que un canal cuántico es una operación lineal que actúa sobre una matriz densidad como en (1.18), donde  $\rho'$  es una matriz densidad y  $\mathcal{E}$  es una operación completamente positiva. La condición de positividad con la que debe cumplir la matriz densidad implica que además es una matriz Hermítica. Por lo tanto, que un canal cuántico preserve la Hermiticidad, traza unitaria y positividad de la matriz densidad impone tres condiciones sobre el superoperador  $\mathcal{E}$  [3]:

$$(i) \quad \rho' = (\rho')^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} = \mathcal{E}_{\nu n}^{*\mu m}, \quad (1.31)$$

$$(ii) \quad \text{Tr}(\rho') = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_m \mathcal{E}_{n\nu}^{mm} = \delta_{n\nu}, \quad (1.32)$$

$$(iii) \quad \langle \psi | \rho' | \psi \rangle \geq 0, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} \rho_{n\nu} \geq 0, \quad \rho > 0. \quad (1.33)$$

De esta manera, solo nos hace falta revisar la condición que debe cumplir un superoperador  $\mathcal{E}$  para ser una operación completamente positiva. Para eso, se introduce a la matriz de Choi  $D_{\mathcal{E}}$  de  $\mathcal{E}$ , que se define como [3]

$$D_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^R, \quad (1.34)$$

con  $\mathcal{E}^R$  la transformación de *reshuffle* definida en (1.29). El siguiente teorema establece cuándo  $\mathcal{E}$  es una operación completamente positiva:

**Teorema 1.5.1.** *Teorema de Choi.* Un superoperador lineal  $\mathcal{E}$  es completamente positivo si y sólo si su matriz de Choi asociada  $D_{\mathcal{E}}$  es positiva semidefinida.

*Demostración.* Vamos a presentar la demostración expuesta por Bengtsson en [3,

p. 281]. La matriz de Choi  $D_{\mathcal{E}}$  de un canal cuántico  $\mathcal{E}$  es una matriz hermítica que actúa sobre el espacio de Hilbert-Schmidt  $\mathcal{H}_{N^2}$  (espacio de las matrices de dimensión  $N^2 \times N^2$ ). Por el teorema de descomposición espectral, la matriz  $D_{\mathcal{E}}$  se puede escribir [9]

$$D_{\mathcal{E}} = \sum_i \lambda_i |\chi_i\rangle\langle\chi_i|, \quad (1.35)$$

con  $\lambda_i$  sus eigenvalores. Dado que la matriz de Choi es una matriz Hermítica,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . En la notación de cuatro índices introducida en (1.28), (1.35) se escribe

$$D_{\mu\nu}^{mn} = \sum_i \lambda_i \chi_{mn}^i (\chi_{\mu\nu}^i)^*. \quad (1.36)$$

Consideremos la acción de  $\mathcal{E} \otimes \mathbb{1}_N$  sobre un estado puro  $z_{nn'} z_{\nu\nu'}^*$  de  $\mathcal{H}_{N^2}$ ,

$$\rho'_{mm'\mu\mu'} = \sum_{n,n',\nu,\nu'} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} \delta_{m'\mu'}^{n'\nu'} z_{nn'} z_{\nu\nu'}^* = \sum_{n,\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} z_{nm'} z_{\nu\mu'}^*, \quad (1.37)$$

donde  $\delta_{m'\mu'}^{n'\nu'} = \delta_{m'n'} \delta_{\mu'\nu'}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n,\nu} \mathcal{E}_{n\nu}^{m\mu} z_{nm'} z_{\nu\mu'}^* &= \sum_{n,\nu} D_{\mu\nu}^{mn} z_{nm'} z_{\nu\mu'}^* \\ \rho'_{mm'\mu\mu'} &= \sum_{n,\nu,i} \lambda_i \chi_{mn}^i z_{nm'} (\chi_{\mu\nu}^i z_{\nu\mu'}^*)^*. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Por último, utilizamos el hecho de que  $\rho'$  debe ser una matriz de densidad y, por ende, una matriz positiva semidefinida,

$$\sum_{m,m',\mu,\mu'} y_{mm'} \rho'_{mm'\mu\mu'} y_{\mu\mu'}^* \geq 0, \quad (1.39)$$

con  $y_{mm'}$  un vector arbitrario de  $\mathcal{H}_{N^2}$ . Utilizamos (1.38) para sustituir  $\rho'$ ,

$$\sum_{m,m',n,n'} \lambda_i |y_{mn'} \chi_{mn}^i z_{nm'}|^2 \geq 0. \quad (1.40)$$

Para que esto sea cierto para cualesquiera vectores  $z_{mm'}$  y  $y_{mm'}$ , se debe de cumplir que  $\lambda_i \geq 0$ . Recordemos que  $\lambda_i$  son los eigenvalores de  $D_{\mathcal{E}}$ . En conclusión, para que  $\rho'$  sea una matriz positiva, la matriz de Choi  $D_{\mathcal{E}}$  también debe ser una matriz positiva.  $\square$

En resumen, un superoperador  $\mathcal{E}$  es un canal cuántico si cumple con las tres condiciones establecidas en las ecuaciones (1.31), (1.32) y (1.33), además de lo que establece el teorema 1.5.1, que su matriz de Choi sea positiva semidefinida.

Vamos a terminar este primer capítulo presentando brevemente la representación en operadores de Kraus de un canal cuántico. Los operadores de Kraus fueron introducidos por Karl Kraus en 1971 como una consecuencia deducida por él del teorema de Stinespring para las operaciones completamente positivas [3]. Aunque la representación en operadores de Kraus y los superoperadores puedan parecer fundamentalmente distintos, ambas representaciones guardan conexión mediante la matriz de Choi de un canal cuántico.

A diferencia de un superoperador, los operadores de Kraus representan a un canal cuántico con operadores que actúan sobre el espacio de Hilbert, igual que las matrices de densidad. En la representación de Kraus, un canal cuántico  $\mathcal{E}$  actúa sobre la matriz de densidad como

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger, \quad (1.41)$$

para algún conjunto de operadores  $\{E_k\}$  que satisfacen la condición [9]

$$\sum_k E_k^\dagger E_k \leq \mathbb{1}, \quad (1.42)$$

donde los operadores  $E_k$  reciben el nombre de operadores de Kraus. La libertad de la representación de Kraus permite que varios conjuntos distintos de operadores  $\{E_k\}$  sean la representación de un mismo canal cuántico. Por ello, es de interés determinar un conjunto canónico de operadores de Kraus.

El conjunto canónico se puede determinar para todas las operaciones completamente positivas a partir de su matriz de Choi. Un mapeo completamente positivo  $\mathcal{E} : \mathcal{M}_d^* \rightarrow \mathcal{M}_d$  se puede escribir como [3]

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{k=1}^{r \leq d^2} \lambda_k \chi_k \rho \chi_k^\dagger \quad (1.43)$$

con  $\lambda_k$  y  $\chi_k$  los eigenvalores y eigenvectores normalizados de la matriz de Choi  $D_{\mathcal{E}}$ , así como  $r$  el rango de  $D_{\mathcal{E}}$ . Estrictamente hablando,  $\chi_k$  son los eigenvectores reordenados como matrices según (1.25). Comparando las ecuaciones (1.41) y (1.43),

---

\*Espacio de las matrices de dimensión  $d \times d$ .

los operadores de Kraus canónicos se definen como  $E_k = \sqrt{\lambda_k} \chi_k$  y deben satisfacer la condición

$$\text{Tr} \left( E_i^\dagger E_j \right) = d_i \delta_{ij}. \quad (1.44)$$

Por último, ya que  $\mathcal{E}$  es una operación que preserva la traza de la matriz densidad, debe imponerse la ecuación de completitud sobre los operadores canónicos de Kraus,

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{1}. \quad (1.45)$$

En pocas palabras, un canal cuántico en la representación canónica de Kraus se escribe en la forma de (1.43) siempre que los operadores canónicos de Kraus cumplan con las condiciones en (1.44) y (1.45).

Resumiendo, introdujimos brevemente el formalismo de la matriz densidad y la teoría de los canales cuánticos. Por un lado, la matriz densidad es una matriz positiva de traza unitaria que sirve de herramienta para representar a los estados cuánticos. Por otro lado, la teoría de los canales cuánticos es un marco teórico para describir la evolución discreta de los sistemas cuánticos abiertos. Un canal cuántico es una operación completamente positiva que preserva la traza de la matriz densidad y se puede representar como superoperador o en la representación de suma de operadores de Kraus. La matriz densidad y los canales cuánticos son el marco teórico dentro del cual estudiaremos, en el resto de este trabajo, un tipo de operaciones muy particulares que actúan sobre sistemas de qubits, operaciones que hemos bautizado con el nombre de operaciones que borran las componentes de Pauli.



## 2. OPERACIONES PCE

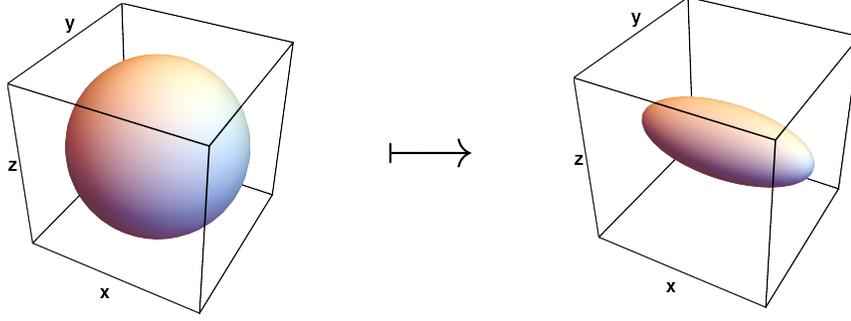
### 2.1. Introducción

En este capítulo vamos a discutir una motivación para definir y estudiar las operaciones PCE de  $n$  qubits en la sección 2.2. Vamos a comenzar discutiendo algunos canales cuánticos de 1 qubit como *bit-flip* y *defasing* [3, 9]. Específicamente, vamos a centrar nuestra atención en un caso particular de estos canales para motivar la generalización de este tipo de operaciones para sistemas de  $n$  qubits que hemos bautizado con el nombre de *Pauli component erasing* (PCE). Luego, en la sección 2.3 resolveremos analíticamente el problema de encontrar los canales cuánticos PCE de 1 qubit, y en la sección 2.4 vamos a discutir el algoritmo para resolver el problema de  $n$  qubits y la complejidad analítica, en contraste con el problema de 1 qubit, que hace que el problema sea difícil de resolver de manera exacta. Finalmente, en la sección 2.5 vamos a presentar las herramientas computacionales para implementar un método numérico para encontrar canales cuánticos PCE de dos y tres qubits.

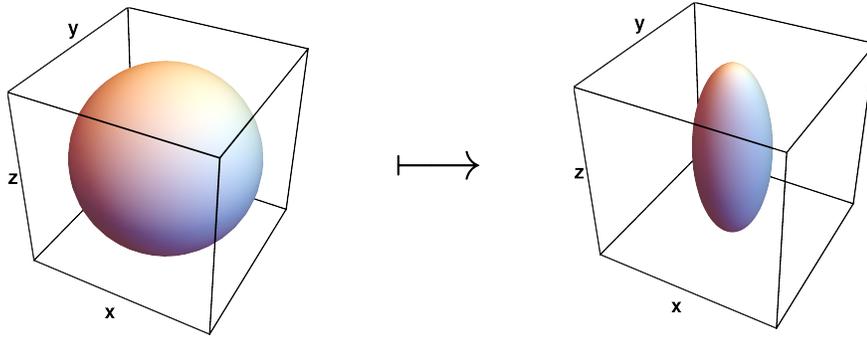
### 2.2. Operaciones PCE

En esta sección vamos a elaborar una discusión que conducirá a la definición de una operación PCE y al planteamiento del problema a tratar en esta tesis. Comenzaremos por introducir a los canales cuánticos *bit-flip* y *defasing* de 1 qubit. Ambos canales cuánticos son operaciones que mapean la esfera de Bloch a un elipsoide con eje mayor sobre los ejes  $x$  y  $z$ , como se muestra en las Figs. 2.1 y 2.2, respectivamente. Para entender algebraicamente cómo actúan estos canales cuánticos recordemos que la matriz densidad de 1 qubit se escribe en la base de matrices de Pauli como

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 r_i \sigma_i, \quad r_0 = 1, \quad (2.1)$$



**Figura 2.1.** Efecto del canal de *bit-flip* sobre la esfera de Bloch, para  $p = 0.3$ . **Fuente:** elaboración propia.



**Figura 2.2.** Acción geométrica del canal *defasing* de 1 qubit sobre la esfera de Bloch, para  $p = 0.3$ . **Fuente:** elaboración propia.

donde  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  especifican las coordenadas  $(x, y, z)$  del vector de Bloch. El canal *bit-flip* transforma a las componentes de (2.1) como [9]

$$(1, r_1, r_2, r_3) \mapsto (1, r_1, (1 - 2p)r_2, (1 - 2p)r_3), \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (2.2)$$

Similarmente, el canal *defasing* actúa sobre las mismas componentes  $r_i$  de (2.1) como [9]

$$(1, r_1, r_2, r_3) \mapsto (1, (1 - 2p)r_1, (1 - 2p)r_2, r_3), \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (2.3)$$

Vamos a detenernos a analizar qué ocurre cuando  $p = 1/2$ . Las expresiones (2.2) y (2.3) se escriben

$$(1, r_1, r_2, r_3) \mapsto (1, r_1, 0, 0), \quad (2.4)$$

$$(1, r_1, r_2, r_3) \mapsto (1, 0, 0, r_3). \quad (2.5)$$

Es decir que, los canales *bit-flip* y *defasing* cuando  $p = 1/2$  son operaciones que mapean la esfera de Bloch a una línea sobre el eje mayor de los elipsoides en las Figs. 2.1 y 2.2. Va a ser práctico referirnos a estos canales cuánticos como operaciones que *borran* dos de las proyecciones  $r_i$  de la matriz densidad de 1 qubit sobre las matrices de Pauli, y que *preservan* al resto de las  $r_j$ .

Operaciones como las descritas en las expresiones (2.4) y (2.5) son interesantes porque modelan un tipo de decoherencia en un sistema de dos niveles. La decoherencia es el proceso mediante el cual un sistema pasa de encontrarse en una superposición de estados a solo uno de los estados de la superposición [15]. En consecuencia, vale la pena preguntarse si son canales cuánticos todas las operaciones que borran cualquier subconjunto  $\{r_i\}$  de la matriz densidad (2.1) de 1 qubit. Sin embargo, en el capítulo anterior discutimos una operación de este tipo que no satisface la completa positividad. En la sección 1.4 elaboramos el ejemplo de la operación  $\mathcal{E}_z$ , que borra la componente  $r_3$ , y mostramos que no es un canal cuántico porque  $\mathcal{E}_z \otimes \mathbb{1}_2$ , que actúa sobre una matriz densidad de 2 qubits, no transforma a la matriz densidad del estado máximamente entrelazado en una matriz positiva. En resumen,  $\mathcal{E}_z$  es un ejemplo de que no todas las operaciones que borran las componentes  $r_i$  de la matriz densidad de 1 qubit son canales cuánticos.

La extensión de este tipo de canales cuánticos para sistemas de más qubits no es trivial de inferir a partir del caso de 1 qubit. Vamos a elaborar esta idea discutiendo el problema de 2 qubits. La matriz densidad para un sistema de 2 qubits se puede escribir, utilizando la base de productos tensoriales de las matrices de Pauli, como

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad r_{0,0} = 1. \quad (2.6)$$

Recordemos de la expresión (2.5) que la operación de 1 qubit que preserva  $r_3$  es un canal cuántico. Seguidamente, uno podría preguntarse si existe una operación de 2 qubits que preserve  $r_{30}$  y  $r_{03}$ , o sea, la componente  $r_3$  local de cada qubit. Lo único que podemos contestar es que debe existir una o varias operaciones de 2 qubits que, del subconjunto de componentes de la forma  $r_{i0}$  y  $r_{0j}$ , preserven únicamente a  $r_{30}$  y  $r_{03}$ , pero nada podemos inferir sobre cómo se transforman las componentes  $r_{ij}$  ( $i, j \neq 0$ ), las correlaciones cuánticas entre los dos qubits. En general, para un sistema de  $n$  qubits, si conociéramos todos los canales cuánticos de  $n - 1$  qubits de este tipo, sólo podríamos inferir cómo se transforman las componentes de todas las posibles particiones de  $n - 1$  qubits, pero seguiríamos sin poder inferir cómo se

transforman las correlaciones cuánticas  $r_{j_1, \dots, j_n}$  que comparten los  $n$  qubits.

Vamos a introducir ahora la definición de una operación PCE de  $n$  qubits. La matriz densidad de un sistema de  $n$  qubits, en la base de productos tensoriales de las matrices de Pauli, se escribe como

$$\rho = \frac{1}{2^n} \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^3 r_{j_1, \dots, j_n} \sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_n}, \quad r_{0, \dots, 0} = 1. \quad (2.7)$$

Vamos a llamar “componentes de Pauli” a los coeficientes  $r_{j_1, \dots, j_n}$  de (2.7). Las componentes de Pauli son las proyecciones de la matriz densidad de un sistema de  $n$  qubits sobre los elementos de la base de productos tensoriales de las matrices de Pauli. Llamamos una operación que borra las componentes de Pauli, operación PCE por sus siglas en inglés (*Pauli component erasing*), a una operación lineal que actúa sobre una matriz densidad de la forma (2.7) y que transforma a las componentes de Pauli como

$$r_{j_1, \dots, j_n} \mapsto \tau_{j_1, \dots, j_n} r_{j_1, \dots, j_n}, \quad \tau_{j_1, \dots, j_n} = 0, 1, \quad \tau_{0, \dots, 0} = 1. \quad (2.8)$$

En otras palabras, una operación PCE es una operación lineal que actúa sobre la matriz densidad de  $n$  qubits y que borra a algunas de las componentes de Pauli y deja invariantes al resto. A las operaciones PCE que satisfacen la condición de completa positividad y son, por ende, canales cuánticos, les llamaremos “canales cuánticos PCE” o sólomente “canales PCE”.

De manera muy puntual, podemos formular el problema para este trabajo con la siguiente pregunta: ¿qué características tienen en común y qué condiciones satisfacen todos los canales PCE de sistemas de 2 y 3 qubits? Dicho de otro modo, nuestro objetivo es investigar qué hace de diferente la condición de completa positividad a los canales PCE del conjunto de todas las operaciones PCE de 2 y 3 qubits. En las siguientes secciones presentaremos el estudio analítico del caso de 1 qubit y el método numérico que diseñamos para estudiar sistemas de 2 y 3 qubits.

## 2.3. 1 qubit

El problema de los canales PCE de 1 qubit puede ser resuelto analíticamente y vamos a discutir cómo en esta sección. Vamos a describir nuestro procedimiento para evaluar analíticamente la completa positividad de las operaciones PCE de 1 qubit. De acuerdo con el teorema 1.5.1, podemos determinar si una operación es

completamente positiva evaluando que su matriz de Choi sea una matriz positiva semidefinida. Por lo tanto, vamos a buscar diagonalizar la matriz de Choi en función de los elementos  $\tau_i$  de la operación PCE. Así, evaluar que todos los eigenvalores sean no negativos para cada uno de los arreglos de 1 y 0 de las  $\tau_i$  que caracteriza a las operaciones PCE de 1 qubit

Enunciamos ahora nuestro algoritmo para evaluar la completa positividad de una operación PCE de 1 qubit.

1. Escribir al superoperador de una operación PCE en la base de matrices de Pauli  $\sigma_i$  (con  $\sigma_0 = \mathbb{1}$ ), base en la cual es diagonal. En general, en la base de Pauli el superoperador de una operación PCE de 1 qubit se escribe

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

2. Hacer un cambio de base al superoperador (2.9), de la base de matrices de Pauli a la base computacional, vía  $P\Phi P^{-1}$ , con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Notemos que la matriz de cambio de base  $P$  es una matriz que se construye yuxtaponiendo las matrices de Pauli vectorizadas  $\vec{\sigma}_i$ , siguiendo la vectorización de una matriz como se definió en (1.25).

3. Aplicar la transformación de *reshuffle* a  $P\Phi P^{-1}$ , según (1.34), para determinar la matriz de Choi de la operación PCE,

$$(P\Phi P^{-1})^R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_3 + 1 & 0 & 0 & \tau_1 + \tau_2 \\ 0 & 1 - \tau_3 & \tau_1 - \tau_2 & 0 \\ 0 & \tau_1 - \tau_2 & 1 - \tau_3 & 0 \\ \tau_1 + \tau_2 & 0 & 0 & \tau_3 + 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

4. Por último, para evaluar si la matriz de Choi es positiva semidefinida, calcular los eigenvalores  $\lambda_i$  de (2.11) y revisar que todos sean iguales o mayores a cero,

No.	$\tau_0$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	Canal cuántico	Componentes de Pauli $r_i$ invariantes
1	1	1	1	1	✓	4
2	1	1	1	0		3
3	1	1	0	1		3
4	1	0	1	1		3
5	1	1	0	0	✓	2
6	1	0	1	0	✓	2
7	1	0	0	1	✓	2
8	1	0	0	0	✓	1

**Tabla 2.1.** Combinaciones de  $\tau_i$  de todas las operaciones PCE de 1 qubit. **Fuente:** elaboración propia.

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} (1 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \geq 0, \quad (2.12a)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (1 + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3) \geq 0, \quad (2.12b)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (1 - \tau_1 + \tau_2 - \tau_3) \geq 0, \quad (2.12c)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} (1 - \tau_1 - \tau_2 + \tau_3) \geq 0. \quad (2.12d)$$

Debemos remarcar que en ninguno de los pasos hemos utilizado el hecho de que para una operación PCE las componentes  $\tau_i$  sean iguales a cero o uno, como está definido en (2.8). Por lo tanto, las desigualdades en (2.12) caracterizan la completa positividad de una operación lineal de 1 qubit que actúa sobre las componentes de Pauli como  $r_i \mapsto \tau_i r_i$ , donde  $\tau_i$  puede tomar cualquier valor. Considerando eso, las desigualdades en (2.12) coinciden con las que presentan Bengtsson y Życzkoski [3, pág. 292].

Previo a determinar los canales PCE de 1 qubit enunciamos en la Tabla 2.1 todos los arreglos de 1 y 0 de las componentes  $\tau_i$  de cada una de las 8 operaciones PCE de 1 qubit. Es útil que discutamos la acción geométrica sobre la esfera de Bloch de cada una de las operaciones PCE de 1 qubit en la Tabla 2.1. El arreglo 1 es la operación identidad. Los arreglos 2-4 son operaciones que mapean la esfera de Bloch a un disco que es perpendicular a cada uno de los ejes cartesianos. Los arreglos 5-7 son operaciones que mapean la esfera de Bloch a una línea sobre cada uno de los ejes cartesianos. Y, por último, el arreglo 8 es la operación que mapea la esfera de

Bloch a un punto sobre el origen de coordenadas.

Al evaluar la completa positividad de cada operación PCE en la Tabla 2.1, comprobando que cada arreglo  $\tau_i$  satisfaga las desigualdades en (2.12), encontramos que 5 de las 8 operaciones PCE de 1 qubit son canales cuánticos. Las matrices de Choi de las operaciones PCE 2, 3 y 4 de la Tabla 2.1 tienen un eigenvalor que es negativo. Por ejemplo, el eigenvalor  $\lambda_3$  de la operación PCE 2 es igual  $-1/2$ . Es decir que, entonces, son canales PCE de 1 qubit sólo la operación identidad, las operaciones que mapean la esfera de Bloch a una línea sobre los ejes cartesianos y la operación que mapea la esfera de Bloch al origen de coordenadas.

## 2.4. El problema de $n$ qubits

El algoritmo para evaluar la completa positividad de las operaciones PCE de 1 qubit, que discutimos en la sección anterior, se puede generalizar para  $n$  qubits y es el tema que discutiremos en esta sección. A diferencia del problema de 1 qubit, en el problema de las operaciones PCE de  $n$  qubits la diagonalización exacta de la matriz de Choi es un problema no trivial. Por esa razón, decidimos explorar una alternativa para buscar los canales PCE de 2 y 3 qubits.

A continuación, discutimos la generalización de nuestro algoritmo para evaluar la completa positividad de una operación PCE de  $n$  qubits.

1. Se escribe al superoperador  $\Phi$  de una operación PCE, en la base de productos tensoriales de las matrices de Pauli,

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_{0,\dots,0,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{0,\dots,0,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{1,\dots,1,1} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

con  $\tau_{j_1,\dots,j_n}$  las componentes de la operación PCE como se definió en (2.8).

2. Se hace el cambio de base  $P\Phi P^{-1}$  para escribir al superoperador  $\Phi$  en la base computacional.  $P$  es la matriz de cambio de base y se construye yuxtaponiendo

las matrices vectorizadas de los productos tensoriales de las matrices de Pauli,

$$P = \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^3 |\sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_n}\rangle \langle \sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_n}|, \quad (2.14)$$

con  $|\sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_n}\rangle$  el vector que se construye vectorizando a la matriz resultante del producto tensorial  $\sigma_{j_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{j_n}$ .

3. Se determina la matriz de Choi según  $D_\Phi = (P\Phi P^{-1})^R$ , aplicando el *reshuffle* a la matriz  $P\Phi P^{-1}$ .
4. Por último, se calculan los eigenvalores de  $D_\Phi$  y si todos son positivos o cero, entonces  $\Phi$  es un canal cuántico.

Es el último paso el que supone una dificultad en la generalización de nuestro algoritmo. La ecuación  $\det(D_\Phi - \lambda \mathbb{1}) = 0$ , que hay que resolver para determinar los eigenvalores  $\lambda_{j_1, \dots, j_n}$ , es una ecuación de grado  $4^n$ . Esto hace que la diagonalización exacta de la matriz de Choi  $D_\Phi$ , de una operación PCE de  $n$  qubits, sea un problema algebraicamente complicado. En vista de esta dificultad, decidimos utilizar herramientas computacionales para evaluar numéricamente la positividad de la matriz de Choi  $D_\Phi$  de las operaciones PCE de 2 y 3 qubits y así determinar los canales cuánticos.

## 2.5. Solución numérica

Propusimos evaluar numéricamente la completa positividad de las operaciones PCE de 2 y 3 qubits para encontrar los canales cuánticos, y en esta sección vamos a describir las herramientas computacionales que desarrollamos y la implementación del método numérico. Para esto, diseñamos rutinas que implementan el algoritmo descrito en la sección anterior. El método numérico consiste en generar todas las operaciones PCE de 2 y las operaciones PCE de 3 qubits que dejan invariantes 1, 2, 3, 4, 61, 62, 63 y 64 componentes de Pauli, evaluar si son completamente positivas y, dependiendo de ello, agrupar a los canales cuánticos PCE para luego analizar sus características en el próximo capítulo.

Las rutinas se programaron en Wolfram Mathematica. Con estas rutinas, se pueden generar todos los diferentes arreglos de 1 y 0, de los elementos de transformación  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$ , que definen a cada operación PCE y evaluar, una por una, si es

completamente positiva. A continuación, describimos brevemente cada una de las rutinas que diseñamos.

1. `Pauli[Indices]`: calcula el producto tensorial de las matrices de Pauli  $\sigma_i$  con índices  $i$  en el arreglo 1-D `Indices`.
2. `PCEsTauConfigurations[n]`: devuelve todos los arreglos de 1 y 0 de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de todas las operaciones PCE de  $n$  qubits.
3. `PCEsTauConfigurations[n,k]`: devuelve todos los arreglos de 1 y 0 de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de todas las operaciones PCE de  $n$  qubits que dejan  $k$  componentes de Pauli invariantes.
4. `PCESuperoperator[ $\tau$ ]`: calcula el superoperador en la base computacional de una operación PCE, dados los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  en el arreglo 1-D  $\tau$ .
5. `Reshuffle[m]`: aplica la transformación de *reshuffle* a la matriz  $m$  de dimensión  $d^2 \times d^2$ . Esta función implementa la definición (1.29).
6. `PositivityTest[m]`: revisa si la matriz  $m$  es positiva semidefinida. Devuelve el valor *True* si lo es y *False* en caso contrario.
7. `PCEFigures[ $\tau$ ]`: grafica la representación geométrica de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  en el arreglo 1-D  $\tau$  de una operación PCE de 1, 2 o 3 qubits. Hablaremos de la representación de las figuras PCE en la siguiente sección.
8. `TausOfPCEQuantumChannels[n]`: devuelve todos los arreglos de 1 y 0 de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de los canales cuánticos PCE de  $n$  qubits.
9. `TausOfPCEQuantumChannels[n,k]`: devuelve todos los arreglos de 1 y 0 de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de los canales cuánticos PCE de  $n$  qubits que dejan  $k$  componentes de Pauli invariantes.
10. `TausOfPCEQuantumChannels[n,  $k_{min}$ ,  $k_{max}$ ]`: devuelve todos los arreglos de 1 y 0 de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de los canales cuánticos PCE de  $n$  qubits que dejan desde  $k_{min}$  hasta  $k_{max}$  componentes de Pauli invariantes.
11. `NumberOfPCEOperations[n]`: calcula el número total de operaciones PCE de  $n$  qubits.
12. `NumberOfPCEOperations[n,k]`: calcula el número total de operaciones PCE de  $n$  qubits que dejan  $k$  componentes de Pauli invariantes.

Todas estas rutinas las agrupamos en un paquete de Mathematica que se puede encontrar en un repositorio de libre acceso en GitHub\*. Específicamente, las rutinas `Pauli`, `PCESuperoperator`, `Reshuffle` y `PositivityTest` fueron diseñadas para reproducir los pasos del algoritmo para evaluar la completa positividad de una operación PCE de  $n$  qubits de la sección 2.4. El algoritmo completo fue implementado en la rutina `TausOfPCEQuantumChannels`. Debe notarse en la definición (2.8), de una operación PCE, que la lista de 1 y 0 de los elementos de transformación  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  caracteriza por completo a la operación. Por ejemplo, la operación PCE de 1 qubit que mapea la esfera de Bloch a un punto en el origen está completamente determinada por los elementos  $\tau_i \{1, 0, 0, 0\}$ ; esta lista de 1 y 0 es suficiente para encontrar al correspondiente superoperador. Dicho esto, describimos con detalle la rutina `TausOfPCEQuantumChannels` a continuación.

---

`TausOfPCEQuantumChannels`. Rutina para determinar los canales PCE de  $n$  qubits que dejan  $k$  componentes de Pauli invariantes.

**Entrada:** Número  $n$  de qubits y número  $k$  de componentes de Pauli invariantes (opcional).

**Salida:** Arreglos 1-D con los arreglos de 1 y 0 de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de los canales PCE de  $n$  qubits que dejan  $k$  componentes de Pauli invariantes.

**Utiliza:** `PCETausConfigurations`, `PCESuperoperator`, `Reshuffle` y `PositivityTest`.

Para cada arreglo  $\tau$  generado por `PCETausConfigurations[n,k]`:

1. Calcular el superoperador  $\Phi$  en la base computacional de la operación PCE con `PCESuperoperator[\tau]`.
2. Calcular la matriz de Choi  $D_\Phi$  de la operación PCE aplicando la función `Reshuffle[]` a la matriz del paso 1.
3. Evaluar si la matriz de Choi del paso 2 es positiva semidefinida con `PositivityTest[]` (evaluación de la completa positividad de  $\Phi$ ).
4. Si el resultado del paso 3 es verdadero, entonces guardar el arreglo  $\tau$ . De lo contrario, pasar al siguiente arreglo  $\tau$  y repetir este procedimiento con todas los arreglos generados por `PCETausConfigurations[n,k]`.

---

\*Se puede encontrar en [https://github.com/deleonja/projective\\_maps](https://github.com/deleonja/projective_maps) bajo el nombre "pce.m".

Por último, vamos a describir la rutina `NumberOfPCEOperations` ya que, dependiendo de cómo se use, se utilizan dos expresiones diferentes.

---

`NumberOfPCEOperations`. Rutina para calcular el número de operaciones PCE por número  $n$  de qubits y cantidad  $k$  de componentes de Pauli invariantes.

**Entrada:** Número de qubits  $n$  y número  $k$  de componentes de Pauli invariantes (opcional).

**Salida:** Número total de operaciones PCE de  $n$  qubits que dejan  $k$  componentes de Pauli invariantes.

- Si el usuario solicita `NumberOfPCEOperations[n]`, entonces calcular  $2^{4^n-1}$ .
- Si el usuario solicita `NumberOfPCEOperations[n,k]`, entonces calcular el coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$ .

---

No vamos a describir de igual manera a las rutinas `PCEstauConfigurations` y `PCEfigures` porque los detalles del algoritmo que reproducen no contribuyen a la intuición sobre la física del problema de las operaciones PCE. Las descripciones de las rutinas en la lista es suficiente y si el lector deseara conocer los detalles de programación puede referirse al repositorio antes mencionado. Por otro lado, en el próximo capítulo, en el que presentamos los resultados, vamos a discutir la función que cumplen las figuras que grafica `PCEfigures` en la interpretación de las operaciones PCE.

Para ilustrar el uso de nuestras herramientas computacionales para resolver numéricamente el problema de las operaciones PCE de 2 y 3 qubits diseñamos un cuaderno de Wolfram Mathematica. El cuaderno contiene las definiciones de todas las rutinas, mostramos cómo usarlas y elaboramos el procedimiento para encontrar los canales PCE de 2 qubits y algunos de los canales PCE de 3 qubits. Invitamos al lector a revisar el cuaderno y jugar con nuestras rutinas<sup>\*\*</sup>. En el próximo capítulo vamos a discutir los resultados obtenidos con el método numérico que hemos discutido en esta sección.

---

<sup>\*\*</sup>el archivo del cuaderno se encuentra en [https://github.com/deleonja/projective\\_maps](https://github.com/deleonja/projective_maps) bajo el nombre “pce\_operations.nb”.



## 3. RESULTADOS DE 2 Y 3 QUBITS

### 3.1. Introducción

Los canales cuánticos PCE de 1 qubit obedecen dos reglas: el número de componentes de Pauli invariantes debe ser una potencia de dos, y debe existir la misma cantidad de canales que preservan  $2^0$  y  $2^2$  componentes de Pauli. No es obvio que los canales cuánticos PCE de  $n$  qubits deben cumplir estas reglas. Sin embargo, nuestros resultados numéricos de 2 y 3 qubits muestran que este es el caso y que, además, los canales cuánticos PCE se pueden ordenar.

En este capítulo presentaremos los resultados anteriores. Recordemos que los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n} = 0, 1$  caracterizan por completo a una operación PCE. De esa manera, en la sección 3.2 vamos a presentar las listas de 1 y 0 de los canales PCE de 2 y 3 qubits. En principio, las listas con los valores de los  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  son todo lo que necesitamos para investigar las características de los canales cuánticos PCE. Sin embargo, aportan nula intuición para entender a los canales cuánticos PCE. Por lo tanto, vamos a introducir a las figuras PCE en la sección 3.3, y veremos cómo las listas de 1 y 0, poco claras para el análisis, se vuelven más claras con esta nueva herramienta, especialmente las figuras PCE de los canales PCE de 2 qubits. Vamos a ver que la representación geométrica de las figuras PCE de los canales cuánticos PCE de 2 qubits en la Fig. 3.3 proporcionan intuición de que una estructura matemática subyacente de los canales PCE es evidente. Finalmente, en la sección 3.4 vamos a discutir todas las observaciones que se pueden deducir de los canales cuánticos PCE de nuestros resultados. Vamos a discutir cómo ordenarlos, dos reglas que obedecen las operaciones PCE para ser canales cuánticos y unas reglas, basadas en observaciones empíricas de las figuras PCE, para construir a casi todos los canales cuánticos de 2 qubits de este tipo.

## 3.2. Resultados

En esta sección vamos a presentar los canales cuánticos PCE de 2 y, parcialmente, los de 3 qubits, encontrados con el método numérico descrito en la sección 2.5. También vamos a discutir la complejidad computacional del problema de 3 qubits y justificar porqué no lo estudiamos completo.

Se encontraron las siguientes proporciones de canales cuánticos PCE a operaciones PCE: 67 : 32,768 para 2 qubits, y 716 : 83,456 para 3 qubits. Recordemos que la diferencia entre una operación y un canal cuántico PCE es que el último satisface la condición de completa positividad y, por tanto, es una operación que representa la evolución física de un sistema. Las proporciones de canales cuánticos PCE a operaciones PCE son un indicio de lo restrictiva que resulta la condición de completa positividad para que una operación que borra las componentes de Pauli sea un canal cuántico.

Para decidir qué subconjunto de las operaciones PCE de 3 qubits puede analizar nuestro método numérico también es necesario conocer el número de operaciones PCE en función del número de componentes de Pauli invariantes. Las operaciones PCE están caracterizadas por los  $4^n$  elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$ . No obstante, por definición, para preservar la traza de la matriz densidad,  $\tau_{0, \dots, 0} = 1$ . Entonces hay sólo  $4^n - 1$  elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  que pueden tomar los valores de 1 o 0. La cantidad de operaciones PCE de  $n$  qubits que dejan invariantes  $k$  componentes de Pauli es igual al número de formas distintas de asignar el valor 1 a  $k - 1$ , de los  $4^n - 1$ , elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$ , y 0 al resto de ellos; es decir, el coeficiente binomial  $\binom{4^n - 1}{k - 1}$ . Por las propiedades del coeficiente binomial, el número de operaciones PCE que dejan invariantes  $k$  componentes de Pauli es igual al número de operaciones que dejan  $4^n - k$  componentes de Pauli.

El tiempo de cómputo es el obstáculo que le impide a nuestro método numérico poder analizar todas las operaciones PCE de 3 qubits. El número total de operaciones PCE para el caso de 3 qubits es de alrededor de  $9 \times 10^{18}$ . Supongamos por un momento que tenemos acceso a la supercomputadora Fugaku<sup>\*</sup>, que puede analizar la completa positividad a una tasa de aproximadamente  $10^9$  operaciones PCE de 3 qubits por segundo. Si además asumimos que la complejidad algorítmica del problema es lineal, a la supercomputadora le tomaría aproximadamente 300 años analizar todas las operaciones PCE de 3 qubits. Sin embargo, ni tenemos acceso a una su-

---

<sup>\*</sup> Al 2021, Fugaku se encuentra en la posición 1 del ranking TOP500 de las supercomputadoras más potentes del mundo.

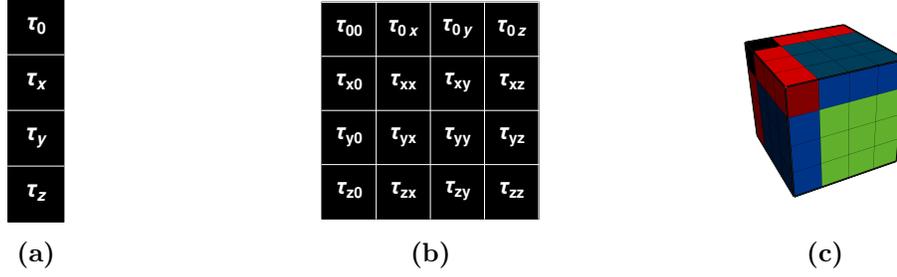
percomputadora ni nos alcanzaría la vida para esperar los resultados completos. Por esta razón, se decidió que estudiaríamos numéricamente las operaciones PCE de 3 qubits que dejan invariantes 1, 2, 3, 4, 61, 62, 63 y 64 componentes de Pauli.

En la Tabla A.1 (ir al apéndice A) mostramos todos los canales cuánticos PCE de 2 qubits y en la tabla Tabla A.2 mostramos sólo 70 de los 716 canales cuánticos PCE de 3 qubits que dejan invariantes 1, 2, 4 y 64 componentes de Pauli. Poner todos los canales PCE de 3 qubits que se encontraron ocuparía demasiadas páginas y no aportan información extra para fines de la discusión de resultados. Igualmente, al lector que interesado en los resultados completos, lo invitamos a revisar el archivo de Mathematica mencionado al final de la sección 2.5. En las tablas del apéndice A se muestran (a) los valores de los elementos  $\tau_{ij}$  o  $\tau_{ijk}$  (1 o 0) que caracterizan a una operación PCE, según la definición en (2.8), y (b) el número de componentes de Pauli que el canal PCE deja invariantes. Las listas de 1 y 0 hacen difícil de escudriñar las características que comparten todos los canales PCE. Además, hasta ahorita no contamos con una representación geométrica, como la de la esfera de Bloch para 1 qubit, con la cual puedan visualizarse las operaciones PCE y desarrollar intuición sobre ellas. Por lo tanto, es necesario introducir una herramienta que permita visualizar los resultados de la Tabla A.1 de una forma más sencilla e intuitiva. Hablaremos de una herramienta geométrica en la próxima sección.

### 3.3. Una representación geométrica

En la sección anterior vimos que los resultados de los canales PCE, presentados como listas de 1 y 0 de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  en las tablas A.1 y A.2, no hacen sencilla la tarea de analizar las propiedades que comparten los canales cuánticos PCE. Por eso, buscamos una representación de las operaciones PCE que haga más fácil e intuitiva la identificación de las características de un canal PCE. Lo que buscamos es una herramienta como la esfera de Bloch, una representación geométrica con la cual es posible asimilar las listas de 1 y 0 de los canales PCE de 1 qubit en la Tabla 2.1. En esta sección vamos introducir la representación de las figuras PCE y a presentar de nuevo los resultados de la sección anterior utilizando esta nueva representación de las operaciones PCE.

En la Fig. 3.1 introducimos las figuras PCE para representar a las operaciones PCE. Mostramos la figura PCE de la operación identidad de 1, 2 y 3 qubits, una operación PCE con todos los elementos  $\tau_i$ ,  $\tau_{ij}$  y  $\tau_{ijk}$ , respectivamente, iguales a 1.



**Figura 3.1.** De izquierda a derecha se muestran las figuras PCE de la operación identidad de 1, 2 y 3 qubits. En esta representación los índices  $j_1, \dots, j_n$  de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de la operación PCE están asociados con una posición en la figura PCE respectiva. Si la posición  $j_1, \dots, j_n$  en la figura PCE está pintada, entonces el elemento asociado  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  es igual a 1, y si la posición no está pintada (en blanco), entonces el elemento asociado  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  es igual a 0. **Fuente:** elaboración propia.

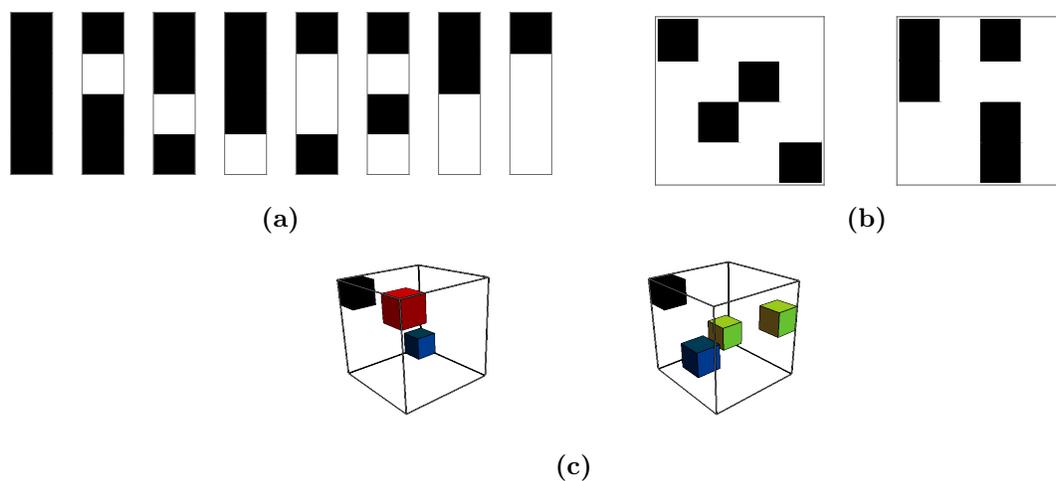
En una figura PCE, la posición de cada cuadro o cubo está asociada con los índices  $j_1, \dots, j_n$  de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de una operación PCE. Los cuadros pintados de negro, en figuras PCE de 1 y 2 qubits, o cubos pintados de rojo, azul o verde, en una figura PCE de 3 qubits, están asociados con los elementos  $\tau_{k_1, \dots, k_n}$  iguales a 1; y los cuadros o cubos no pintados están asociados con los  $\tau_{l_1, \dots, l_n}$  iguales a 0 de una operación PCE. La razón por la que las figuras PCE de 3 qubits tienen colores y las de 1 y 2 qubits no, es únicamente para servir de ayuda visual. Los cubos con posiciones  $(i, 0, 0)$ ,  $(0, j, 0)$  y  $(0, 0, k)$  se pintan de rojo; los cubos con posiciones  $(i, j, 0)$ ,  $(0, j, k)$  y  $(i, 0, k)$  se pintan de azul; y los cubos con posición  $(i, j, k)$  se pintan de verde.

En la Fig. 3.2 mostramos algunos ejemplos de figuras PCE. En la Fig. 3.2a están las figuras PCE de todas las operaciones PCE de 1 qubit: de izquierda a derecha, la operación identidad, las 3 operaciones que mapean la esfera de Bloch a un disco perpendicular a cada eje rectangular, las 3 operaciones que mapean la esfera de Bloch a una línea sobre cada eje rectangular y la operación que mapea la esfera de Bloch al origen de coordenadas. En la Fig. 3.2b se muestran dos figuras PCE de operaciones que dejan invariantes los conjuntos de componentes de Pauli  $\{r_{00}, r_{12}, r_{21}, r_{33}\}$  y  $\{r_{00}, r_{02}, r_{10}, r_{22}, r_{32}\}$ . Y en la Fig. 3.2c se muestran dos operaciones PCE de 3 qubits que dejan invariantes los conjuntos de componentes de Pauli  $\{r_{000}, r_{300}, r_{033}\}$  y  $\{r_{000}, r_{202}, r_{122}, r_{331}\}$ . Nótese que todas las figuras PCE que acabamos de discutir tienen pintado el cuadro o cubo con la posición  $(0)$ ,  $(0, 0)$  o  $(0, 0, 0)$ . Esto es así para todas las figuras PCE porque, de acuerdo con la definición (2.8), una operación PCE preserva la traza de la matriz densidad (*i.e.*  $\tau_{0, \dots, 0} = 1$ ).

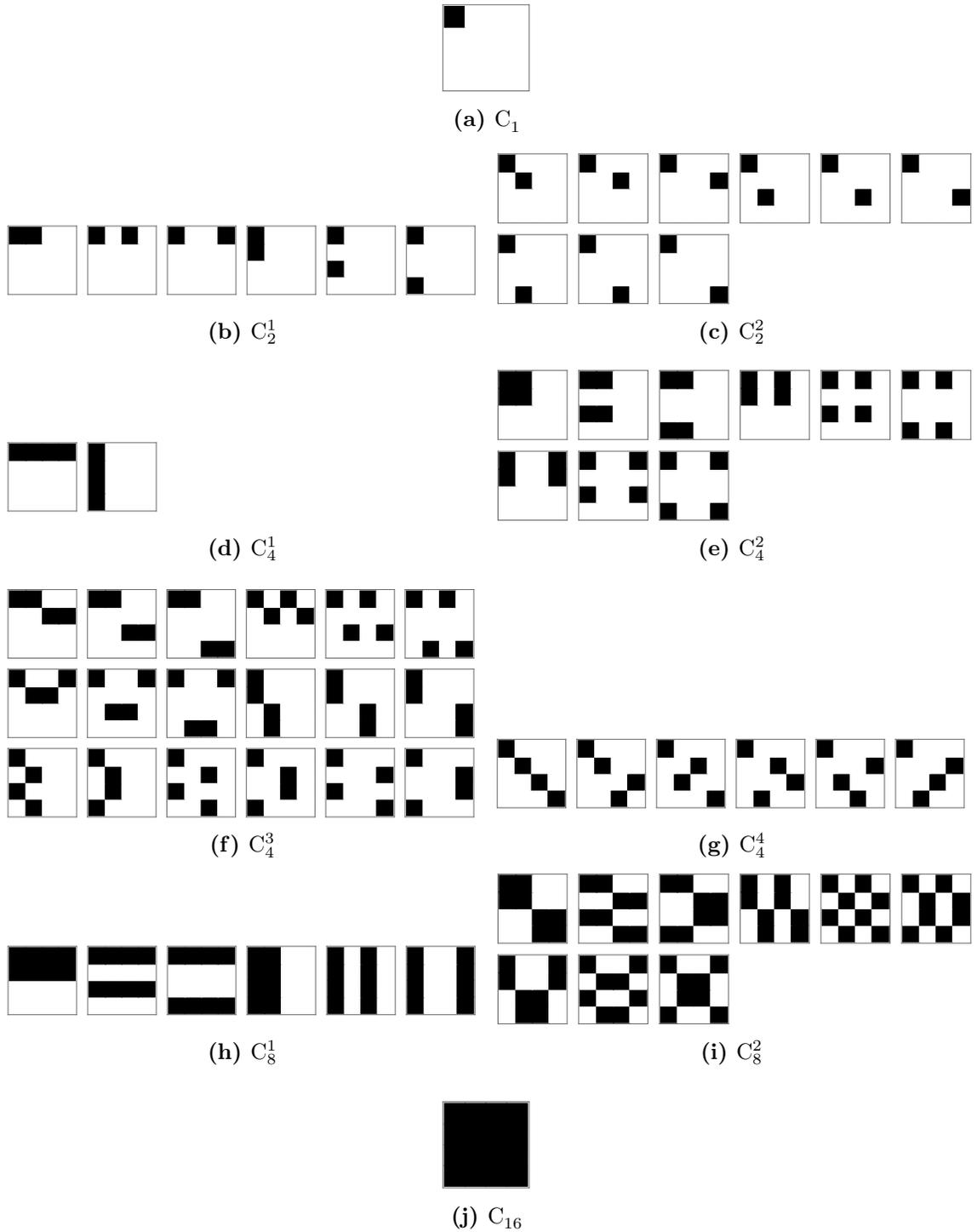
La representación de las figuras PCE puede utilizarse para visualizar geométri-

camente operaciones PCE hasta de 3 qubits. En este punto, esta afirmación puede ser más o menos obvia, pero es importante dejar claro las limitaciones de la representación de las figuras PCE. Ya que los índices  $j_1, \dots, j_n$  están asociados a las posiciones en las figuras PCE, entonces se necesita una figura  $n$  dimensional para representar a una operación PCE de  $n$  qubits. Por lo tanto, las figuras PCE pueden utilizarse sólo para representar operaciones PCE de 1, 2 y 3 qubits.

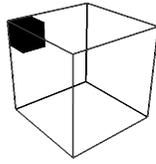
Ahora que ya introdujimos y discutimos la representación de las figuras PCE, vamos a utilizar esta nueva representación para presentar otra vez los resultados de las Tablas A.1 y A.2 de los canales PCE de 2 y parcialmente de 3 qubit. En la Fig. 3.3 se muestran los canales cuánticos PCE de 2 qubits. En la Fig. 3.4 mostramos sólo canales cuánticos PCE de 3 qubits representativos. En la siguiente sección vamos a discutir detenidamente a qué nos referimos por representativos. No colocamos todas las figuras PCE de los canales PCE de 3 qubits que encontramos porque ocuparían demasiadas páginas. En contraste con las listas de 1 y 0, las figuras PCE proporcionan mucha más intuición de que sí existen características en común de los canales cuánticos PCE, como los patrones tan particulares que se observan en la Fig. 3.3. En la siguiente y última sección de este capítulo, vamos a discutir en profundidad la caracterización de los canales cuánticos PCE que se evidencian en nuestros resultados de 2 y 3 qubits.



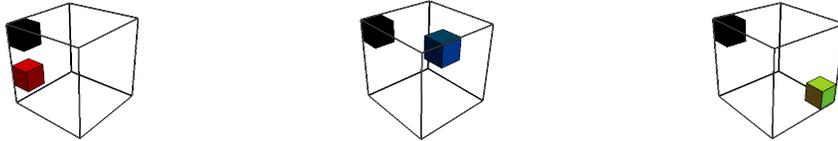
**Figura 3.2.** (a) Figuras PCE de todas las operaciones PCE de 1 qubit. (b) Figuras PCE de 2 operaciones PCE de 2 qubits aleatorias. La primera figura PCE representa a un canal PCE y la segunda representa una operación PCE que no satisface la condición de completa positividad. (c) Figuras PCE de dos operaciones PCE aleatorias de 3 qubits. **Fuente:** elaboración propia.



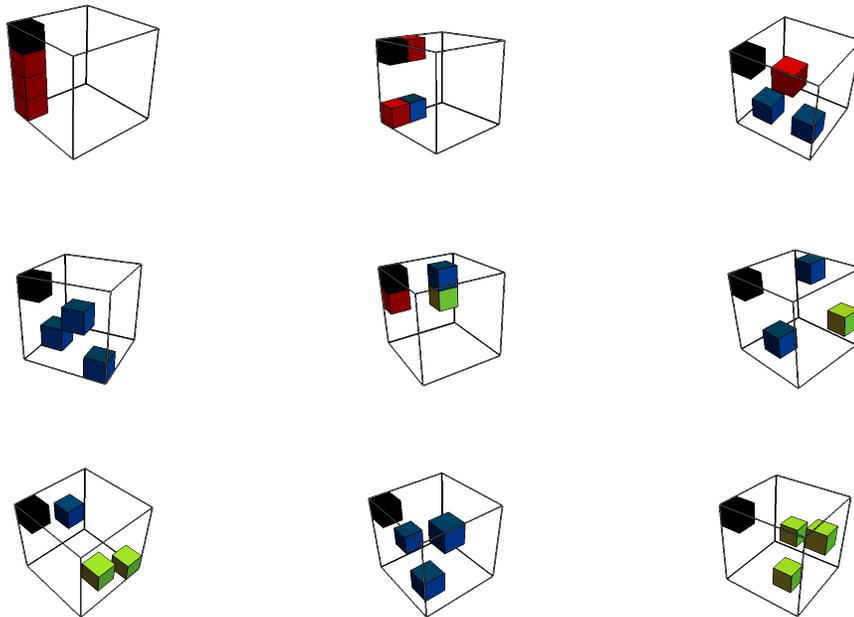
**Figura 3.3.** Figuras PCE de los canales cuánticos PCE de 2 qubits ordenados por clases de equivalencia etiquetadas como  $C_k^l$ , donde  $k$  es el número de componentes de Pauli invariantes y  $l$  es para diferenciar entre clases de equivalencia con el mismo número de componentes de Pauli invariantes. Los elementos de una misma clase de equivalencia están conectados por intercambios de partículas y permutaciones locales de base. **Fuente:** elaboración propia.



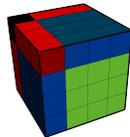
(a) Figura PCE del único canal cuántico PCE de 3 qubits que deja invariante sólo 1 componente de Pauli.



(b) Figuras PCE de un canal cuántico PCE de cada una de las 3 clases de equivalencia de los canales cuánticos PCE de 3 qubits que dejan invariantes 2 componentes de Pauli.



(c) Figuras PCE de un canal cuántico PCE de cada una de las 9 clases de equivalencia de los canales cuánticos PCE de 3 qubits que dejan invariantes 4 componentes de Pauli.



(d) Figura PCE de la operación identidad, un canal cuántico PCE que deja invariantes 64 componentes de Pauli.

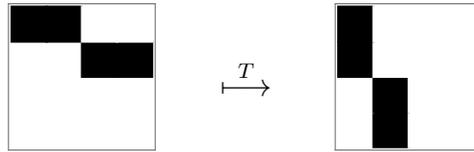
**Figura 3.4.** Figuras PCE de los canales cuánticos PCE de 3 qubits. **Fuente:** elaboración propia.

### 3.4. Discusión de resultados

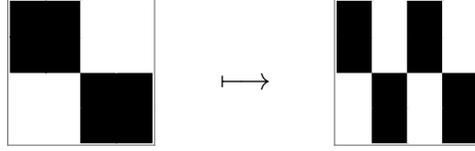
En esta sección vamos a discutir sobre la clasificación y propiedades en común de los canales PCE que obtuvimos numéricamente para 1, 2 y 3 qubits. En particular, veremos que los canales PCE pueden ordenarse en subconjuntos cuyos elementos están conectados vía dos operaciones. En la Fig. 3.3 estas dos operaciones se pueden visualizar en las figuras PCE de 2 qubits como permutaciones de las filas y columnas, y transposiciones. Por otro lado, notaremos que los canales PCE dejan invariantes sólo cantidades de componentes de Pauli que son potencias de 2, y que el número de canales cuánticos que dejan invariantes  $2^k$  y  $2^{2n-k}$  componentes de Pauli es el mismo.

Los canales PCE pueden clasificarse en clases de equivalencia (como mostramos en las Figs. 3.3 y 3.4). Nuestros resultados muestran que los canales PCE pueden clasificarse en subconjuntos dentro los cuales todos los elementos son equivalentes vía las siguientes dos operaciones:

1. Intercambios de partículas. Los etiquetas de las partículas en un sistema pueden intercambiarse. Por lo tanto, si una operación PCE es un canal cuántico para alguna configuración de los qubits en el sistema, entonces existen canales PCE equivalentes que actúan sobre todas las posibles configuraciones de qubits de un sistema. En las figuras PCE de 2 qubits en la Fig. 3.3 esta operación se representa como transposiciones. Por ejemplo, abajo mostramos cuál es el canal PCE equivalente mediante intercambio de partículas de primer elemento de  $C_4^3$  en la Fig. 3.3f.



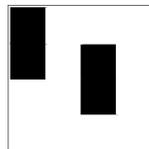
2. Permutaciones de elementos de una base local. La permutación de los elementos  $\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}$  y  $\sigma_3^{(i)}$  de la base local de la  $i$ -ésima partícula del sistema resulta en rotaciones de la esfera de Bloch de la  $i$ -ésima partícula. En las figuras PCE de 2 qubits en Fig. 3.3 las permutaciones de los elementos de la base local se visualizan como permutaciones de filas y/o columnas. Abajo mostramos un ejemplo de un canal PCE equivalente al primer elemento de  $C_8^2$  en la Fig. 3.3i cuando se hace la transformación  $\{\sigma_0^{(2)}, \sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)}, \sigma_3^{(2)}\} \mapsto \{\sigma_0^{(2)}, \sigma_3^{(2)}, \sigma_1^{(2)}, \sigma_2^{(2)}\}$  a la base local del qubit 2.



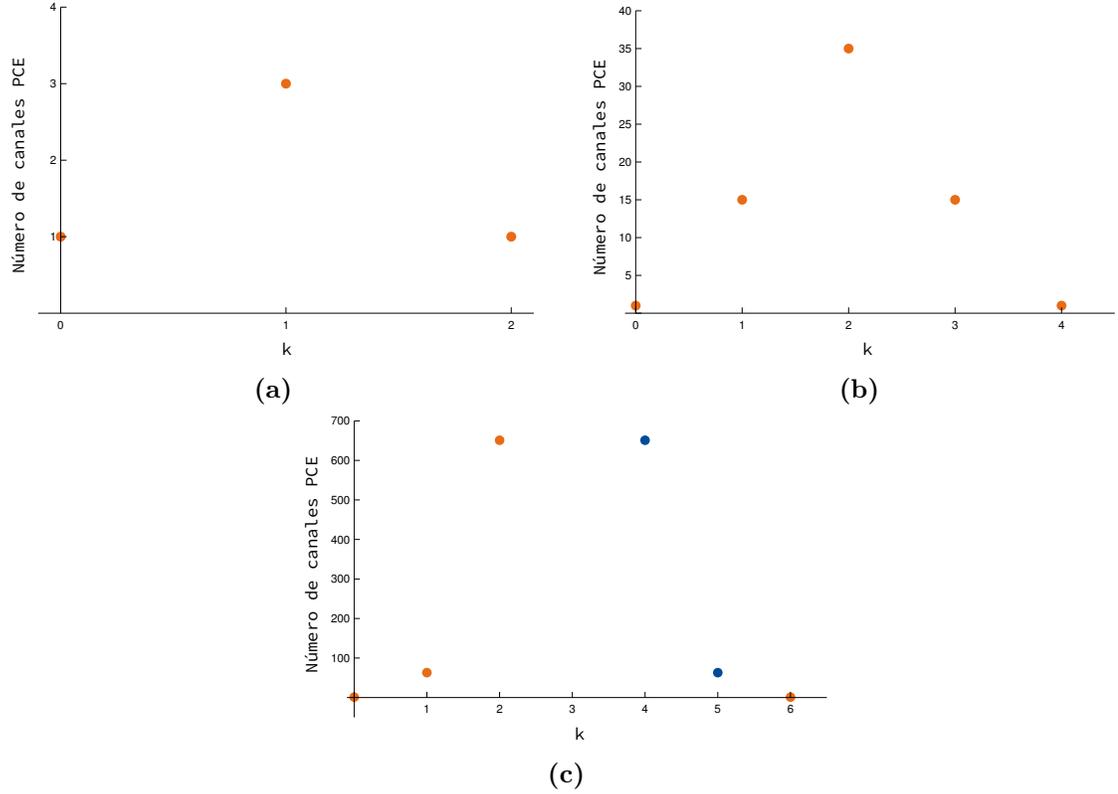
Con esta clasificación es posible identificar un subconjunto maximal de canales cuánticos PCE no equivalentes. Por ejemplo, para 1 qubit existen hasta tres canales PCE no equivalentes: la identidad, una de las tres operaciones que mapea la esfera de Bloch a uno de los ejes cartesianos y la operación que mapea la esfera de Bloch al origen de coordenadas. En este caso, es fácil ver que las operaciones que mapean la esfera de Bloch a los ejes cartesianos están conectadas mediante rotaciones (permutaciones de los elementos de la base). En el caso de 2 qubits existen hasta 10 canales no equivalentes de los 67 en total (uno por clase de equivalencia en la Fig. 3.3). Por un lado, esta clasificación hace más fácil la tarea de inferir las propiedades de los canales cuánticos PCE, ya que el estudio se reduce a sólo un subconjunto de todos los canales. Por otro lado, si se encuentran reglas para construir canales PCE, sería necesario construir sólo a los elementos de uno de los subconjuntos maximales y el resto de canales se generarían mediante intercambios de partículas y permutaciones locales de los elementos de la base.

Nuestros resultados de 2 y 3 qubits muestran que, en general, los canales PCE siguen dos reglas:

1. (*Regla  $2^k$* ) Los canales PCE dejan invariantes una cantidad que es potencia de 2 de componentes de Pauli. No obstante, la regla  $2^k$  no es la única que determina que una operación PCE sea completamente positiva. Es decir, existen operaciones PCE que dejan invariantes  $2^k$  componentes de Pauli y que no son canales cuánticos, como es el caso de la operación PCE representada por la figura PCE que mostramos abajo. Esta operación PCE deja invariantes 4 ( $2^2$ ) componentes de Pauli, pero no satisface la completa positividad y, por consiguiente, no es un canal cuántico.



2. (*Regla espejo*) El número de canales PCE de  $n$  qubits en función del exponente  $k$ , de las  $2^k$  componentes de Pauli invariantes por el canal, es simétrico respecto a  $k = n$ . En la Fig. 3.5 mostramos las gráficas del número de canales PCE

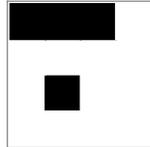


**Figura 3.5.** Gráficas del número de canales PCE de 1, 2 y 3 qubits en función del exponente  $k$  del número  $2^k$  de componentes de Pauli invariantes que dejan invariantes los canales. **(a)** 1 qubit. **(b)** 2 qubits. **(c)** 3 qubits. Los puntos en azul representan los casos no explorados con nuestro método numérico, pero que suponemos por la regla de espejo que existen. **Fuente:** elaboración propia.

de 1, 2 y 3 qubits en función de  $k$ , según el número de componente de Pauli invariantes. Nótese la simetría respecto a  $k = n$  en las gráficas de las Figs. 3.5a y 3.5b. A partir de la regla *espejo* inferimos que los puntos en azul de la gráfica de la Fig. 3.5c, que no son parte de nuestros resultados, deben ser el número de canales PCE de 3 qubits que dejan invariantes 16 ( $2^4$ ) y 32 ( $2^5$ ) componentes de Pauli. De este modo la gráfica sería simétrica respecto a  $k = 3$ , como la regla lo establece.

Los canales PCE tienen otra propiedad que es consecuencia de satisfacer las condiciones para ser canales cuánticos que actúan sobre sistemas multipartitos. La acción de un canal PCE sobre cualquier partición del sistema debe ser otro canal PCE. Un canal cuántico también debe preservar las propiedades de la matriz densidad de la matriz densidad reducida de cualquier partición del sistema. Esta propiedad puede visualizarse en las figuras PCE de 2 y 3 qubits. En todas las figuras PCE de la Fig. 3.3 deben identificarse canales PCE de 1 qubit sobre la primera

fila y primera columna, partes que representan la acción de la operación sobre cada qubit localmente. Por ejemplo, la operación PCE representada en la figura PCE de abajo, aunque cumple la regla  $2^k$ , no puede ser un canal cuántico porque la acción sobre el qubit 1 (primera fila) no es un canal cuántico. Recordemos que una operación PCE de 1 qubit que deja invariantes 3 componentes de Pauli no satisface la completa positividad (ver Tabla 2.1 y Fig. 3.2).

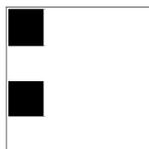


De manera similar, en las figuras PCE de 3 qubits, las 3 columnas con cubos rojos y las 3 de 6 caras del cubo con planos con cubos rojos y azules (ver Fig. 3.1) deben representar canales PCE de 1 y 2 qubits, respectivamente.

Vamos ahora a discutir, a partir de observaciones empíricas de las figuras PCE de 2 qubits (Fig. 3.3) y de las propiedades que hemos mencionado antes, cómo construir canales PCE de 2 qubits utilizando sólo la representación de las figuras PCE.

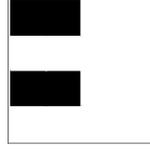
1. Consideremos el canal PCE con  $\tau_{00} = 1$  y el resto de elementos  $\tau_{ij}$  iguales a cero. Podemos construir cualquiera de los canales PCE de 2 componentes de Pauli invariantes escogiendo un elemento cualquiera, del resto de  $\tau_{ij}$ , igual a 1. Según la clasificación de las clases de equivalencia, podemos hacer la distinción entres dos opciones:

- 1.1 Escoger un elemento de la forma  $\tau_{k0} = 1$ . Supongamos, para ejemplificar, que escogemos  $k = 2$ . Tenemos entonces al canal PCE:

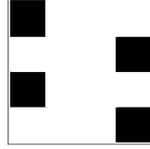


Luego, para construir otro canal PCE, pero ahora de 4 componentes de Pauli invariantes, hay dos bifurcaciones más, según la selección de  $\tau_{ij}$  iguales a 1:

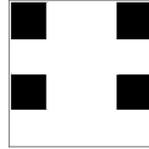
- 1.1.1 Escoger  $\tau_{km} = \tau_{0m} = 1$ , con  $m \in \{1, 2, 3\}$ . Siguiendo nuestro ejemplo ( $k = 2$ ) y escogiendo  $m = 1$ , tendríamos el canal PCE:



- 1.1.2 Escoger  $\tau_{m_1 l} = \tau_{m_2 l} = 1$ , con  $\{m_1, m_2\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}$  y  $l \in \{1, 2, 3\}$ .  
 Siguiendo nuestro ejemplo ( $k = 2$ ) y si escogemos  $l = 3$ :



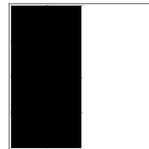
- 1.2 Escoger  $\tau_{km} = \tau_{k0} = \tau_{0m} = 1$  con  $k, m \in \{1, 2, 3\}$ . Si partimos una vez más del ejemplo propuesto en 1.1 ( $k = 2$ ), y escogemos  $m = 3$ :



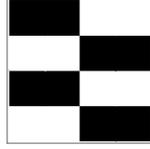
Nótese que, en general, los canales PCE que se construyen en 1.1.1 y 1.2 son canales que pertenecen a la misma clase de equivalencia.

2. Para construir un canal PCE de 8 componentes de Pauli invariantes, supongamos que partimos de un canal PCE construido con las reglas del ítem 1.1.1, es decir un canal PCE con  $\tau_{00} = \tau_{km} = \tau_{k0} = \tau_{0m} = 1$ . De nuevo, tenemos dos opciones para construir canales PCE de 8 componentes de Pauli invariantes, para cada opción elementos de cada una de las dos clases de equivalencia de  $C_8$  (ver Fig. 3.3);

- 2.1 Escoger  $\tau_{l_1,0} = \tau_{l_2,0} = \tau_{l_1,m} = \tau_{l_2,m} = 1$  con  $\{l_1, l_2\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}$ . Si retomamos el ejemplo en 1.1.1 ( $k = 2, m = 1$ ), esto nos lleva al siguiente canal PCE:



- 2.2 Escoger  $\tau_{l_1,0} = \tau_{l_2,0} = \tau_{k,l_1} = \tau_{k,l_2} = 1$  con  $\{l_1, l_2\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{m\}$ . Una última vez, del ejemplo del canal PCE en 1.1.1 ( $k = 2, m = 1$ ), esta regla nos conduce a:



Se pueden discutir cuáles son las reglas para construir un canal PCE de 8 componentes de Pauli invariantes a partir de un canal generado en el ítem 1.1.2, pero no es necesario. Los canales PCE construidos con las reglas en 2.1 y 2.2 son suficientes para encontrar todos los canales PCE de 8 componentes de Pauli invariantes mediante intercambios de partículas y de permutaciones de los elementos de base local.

Con este conjunto de reglas empíricas es posible construir todos los canales PCE de 2 qubits excepto los canales que pertenecen a la clase de equivalencia  $C_4^4$ . Reglas empíricas similares pueden derivarse para los canales PCE de 3 qubits, pero no vale la pena hacerlo. El objetivo de discutir estas reglas empíricas para construir canales PCE de 2 qubits es proporcionar intuición, a partir de las figuras PCE, de que los canales PCE tienen propiedades bien definidas que los caracterizan.

En resumen, en este capítulo presentamos los canales PCE de 2 y, parcialmente, de 3 qubits encontrados con el método numérico descrito en la sección 2.5. Introdujimos la herramienta geométrica de las figuras PCE para visualizar las operaciones PCE y, en particular, para analizar las características en común de los canales cuánticos PCE. Vimos que los canales PCE pueden clasificarse en clases de equivalencia, cuyos elementos están conectados vía intercambios de partículas y permutaciones de elementos de una base local. Con esta clasificación es posible encontrar un subconjunto maximal de canales PCE no equivalentes. Nuestros resultados numéricos muestran que los canales PCE obedecen dos reglas. Por un lado, la regla  $2^k$  para el número de componentes de Pauli que dejan invariantes. Por otro lado, la regla *espejo* establece que existe simetría respecto a  $k = n$  del número de canales PCE en función del exponente  $k$ , del número  $2^k$  de componentes de Pauli invariantes. Estas propiedades, junto con la discusión de las reglas empíricas para construir canales PCE de 2 qubits en esta última sección, son evidencia de que los canales PCE tienen alguna estructura matemática.

## 4. CANALES DIAGONALES DE PAULI CONSTANTES SOBRE LOS EJES

### 4.1. Introducción

Todos los canales PCE de 1 qubit y algunos de 2 qubits pueden identificarse como casos particulares de un tipo de canales cuánticos que han sido estudiados antes, llamados canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes [8]. Por esta razón, es de nuestro interés, mirando en dirección al estudio analítico de los canales PCE, investigar antes si, en general, los canales PCE son subconjunto un contenido dentro de los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes, o si, por el contrario, la relación de contención es a la inversa.

La extensión de este capítulo es corta para dirigirnos rápidamente hacia la conclusión. En la sección 4.2 vamos a introducir la definición de bases *mutuamente imparciales*, su relación con un conjunto de operadores que forman una base del espacio vectorial  $\mathcal{M}_d$  de las matrices de dimensión  $d \times d$  y, en función de la acción sobre las componentes de la matriz densidad en esta base particular, la definición de un canal diagonal de Pauli constante sobre los ejes. Por último, en la sección 4.3 vamos a elaborar un argumento para mostrar que no existe una relación de contención entre los canales PCE y los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes.

## 4.2. Canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes

Dos bases ortonormales  $\{|\psi_m^J\rangle\}_{m=0}^{d-1}$  y  $\{|\psi_n^K\rangle\}_{m=0}^{d-1}$  de un espacio de Hilbert de dimensión  $d$  se dice que son *mutuamente imparciales* si se satisface la condición [3, 8]

$$|\langle\psi_m^J|\psi_n^K\rangle|^2 = \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{si } J \neq K \\ \delta_{mn} & \text{si } J = K, \end{cases} \quad (4.1)$$

para todo  $m$  y  $n$ . Cuando  $d$  es una potencia de un número primo, el espacio de Hilbert cuenta hasta con  $d + 1$  bases mutuamente imparciales [5]. Dado que los sistemas cuánticos de nuestro interés en este trabajo son qubits (sistemas de  $2^n$  niveles) no vamos a considerar los casos de sistemas que no posean  $d + 1$  bases mutuamente imparciales.

La matriz densidad de un sistema de qubits puede escribirse en términos de operadores que generan a un conjunto de bases mutuamente imparciales. Es posible definir, a partir de un conjunto de bases mutuamente imparciales,  $d + 1$  operadores unitarios  $W_J$  como [8]

$$W_J = \sum_{k=1}^d e^{2\pi ki/d} |\psi_k^J\rangle\langle\psi_k^J|, \quad (4.2)$$

para cada  $J$ -ésima base  $|\psi_k^J\rangle$ . Se dice que los operadores  $W^J$  son generadores del conjunto de bases  $|\psi_k^J\rangle$  mutuamente imparciales. El conjunto de las  $d^2 - 1$  potencias  $\{W_J^m\}_{m=1,\dots,d-1, J=1,\dots,d+1}$  más la identidad forman una base ortogonal de unitarias del espacio vectorial  $\mathcal{M}_d$  de matrices de dimensión  $d \times d$  con norma  $\sqrt{d}$  (en el sentido de Hilbert-Schmidt). Por lo tanto, la matriz densidad de un sistema de  $d$  niveles puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{d} \left( \mathbb{1} + \sum_{J=1}^{d+1} \sum_{j=1}^{d-1} v_{Jj} W_J^j \right), \quad (4.3)$$

con  $v_{Jj}$  las proyecciones de  $\rho$  sobre cada uno de los operadores  $W_J^j$ .

Dado un conjunto de bases ortonormales mutuamente imparciales del espacio de estados de un sistema de  $d$  niveles se puede definir a un canal diagonal de Pauli constante sobre los ejes  $\mathcal{E}$  según la acción sobre una matriz densidad como

en (4.3) [8],

$$\mathcal{E} : \frac{1}{d} \left( \mathbb{1} + \sum_{J=1}^{d+1} \sum_{j=1}^{d-1} v_{Jj} W_J^j \right) \mapsto \frac{1}{d} \left( \mathbb{1} + \sum_{J=1}^{d+1} \lambda_J \sum_{j=1}^{d-1} v_{Jj} W_J^j \right). \quad (4.4)$$

Es decir que las componentes  $v_{Jj}$  de  $\rho$  se transforman como  $v_{Jj} \mapsto \lambda_J v_{Jj}$ , donde  $\lambda_0 = 1$  más  $\lambda_J := s + t_J$  son los eigenvalores de  $\mathcal{E}$ . Las condiciones para que un canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes sea una operación completamente positiva que preserva la traza (CPTP), *i.e.* un canal cuántico, son

$$s + \sum_J t_J = 1, \quad t_J \geq 0 \quad \text{y} \quad s \geq \frac{-1}{d-1}. \quad (4.5)$$

La primera condición asegura que la operación preserva la traza de la matriz de densidad y las últimas dos que la operación sea completamente positiva [8].

Nótese la similitud entre la definición en (4.4) de un canal diagonal de Pauli constante sobre los ejes y la definición de una operación PCE, (2.8). Los dos tipos de operaciones transforman de un modo similar a las componentes de la matriz densidad en una base dada del espacio  $\mathcal{M}_d$ . No obstante, los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes son más generales, en el sentido que son operaciones que actúan sobre sistemas de  $d$  niveles (las operaciones PCE actúan sobre sistemas de  $2^n$  niveles) y porque las  $\lambda_J$ , para los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes, puede tomar cualquier valor real que satisfaga las condiciones en (4.5), a diferencia de las operaciones PCE en las que los  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  restringido a los valores 0 o 1. De hecho, es esta definición más general de los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes la que motiva a investigar si los canales cuánticos PCE están contenidos dentro de ellos.

### 4.3. Relación con canales cuánticos PCE

En el caso de 1 qubit, los canales PCE sí son un subconjunto de los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes. Para  $d = 2$ , los eigenvectores de las matrices de Pauli  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  satisfacen (4.1) y, por ende, son un conjunto de bases mutuamente imparciales. Por lo tanto, siguiendo (4.3) e identificando  $W_J = \sigma_J$ , la

matriz densidad de 1 qubit se escribe como

$$\rho = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \sum_{J=1}^3 v_J \sigma_J \right), \quad (4.6)$$

donde  $v_J$  son lo que hemos llamado a lo largo de este trabajo las componentes de Pauli. De acuerdo con (4.4), un canal diagonal de Pauli constante sobre los ejes de 1 qubit transforma a la matriz densidad  $\rho$  en (4.6) como

$$\mathcal{E} : \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \sum_{J=1}^3 v_J \sigma_J \right) \mapsto \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \sum_{J=1}^3 \lambda_J v_J \sigma_J \right). \quad (4.7)$$

Si  $\lambda_J$  se restringe a los valores de 0 o 1, entonces se recupera la definición de un operación PCE de 1 qubit. Por lo tanto, los canales PCE de 1 qubit son un caso particular de los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes cuando  $d = 2$ .

Sin embargo, en general, no existe relación de contención entre los canales cuánticos PCE y los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes. Para demostrar esta proposición vamos a utilizar como argumento la incompatibilidad entre los rangos de los canales PCE y de los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes. De las definiciones y teoremas elementales de álgebra lineal será útil recordar que el rango de una matriz es igual al número de eigenvalores distintos de cero, y los eigenvalores son invariantes ante cambios de base [1, 7].

Por un lado, de la definición en (4.4) es claro que un canal diagonal de Pauli constante sobre los ejes tiene hasta  $d + 1$  eigenvalores  $\lambda_J$  distintos de cero con degeneración  $d - 1$ . Por lo tanto, el rango de un canal diagonal de Pauli constante sobre los ejes es  $1 + l(d - 1)$ . Por otro lado, de la regla  $2^k$  discutida en la sección 3.4, los canales cuánticos PCE son matrices de rango  $2^k$ . Para que los canales PCE y los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes tengan el mismo rango se debe cumplir

$$2^k = 1 + l(2^n - 1), \quad \forall k = 0, 1, \dots, 2n; l = 0, 1, 2, \dots, 2^n + 1. \quad (4.8)$$

Sin embargo, es fácil encontrar un contraejemplo para mostrar que esta ecuación no siempre se satisface. Veamos por ejemplo, para  $n = 2$  y  $k = 3$  (2 qubits y 8 componentes de Pauli invariantes),

$$l = \frac{2^3 - 1}{2^2 - 1} = \frac{7}{3}, \quad (4.9)$$

lo que contradice los posibles valores que puede tomar  $l$  en (4.8). De hecho, la ecuación sólo se cumple para  $k = 0, n, 2n$ . En conclusión, la intersección de los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes y los canales PCE contiene al canal depolatizante, la identidad y canales que dejan invariantes  $2^n$  componentes de Pauli. En particular, para 2 qubits los canales que son intersección entre los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes y los canales PCE son los elementos de las clases de equivalencia  $C_4^2$  y  $C_4^4$  (ver Fig. 3.3).

Ya que probamos que los rangos de los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes y de los canales cuánticos PCE son incompatibles, se sigue que los canales PCE no son un subconjunto dentro de los canales diagonales de Pauli constantes sobre los ejes, ni viceversa.



## CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis propusimos estudiar un nuevo tipo de operaciones, dentro del marco teórico de los canales cuánticos, que pueden modelar el proceso de decoherencia cuántica para sistemas de  $n$  qubits (sistemas de dos niveles). En este manuscrito aportamos pruebas que evidencian una caracterización propia de este tipo de canales cuánticos y, con esto, se abre la posibilidad a preguntas más fundamentales acerca de estas operaciones. Para 1 qubit, el proceso de decoherencia puede describirse por medio de canales cuánticos bien conocidos como el *bit-flip* (inversor de bit), operación que proyecta el estado del sistema a alguno de los eigenestados de  $\sigma_z$  [3, 8, 9]. Para  $n$  qubits, introdujimos la definición de una operación que borra las componentes de Pauli (PCE por sus siglas en ingles, *Pauli Component Erasing*) como una operación diagonal de Pauli que preserva o borra por completo las proyecciones de la matriz densidad sobre los elementos de la base de productos tensoriales de las matrices de Pauli (componentes de Pauli). Diseñamos un método numérico para implementar la búsqueda de los *canales cuánticos PCE*, *i.e.* operaciones PCE que son completamente positivas, y nuestros resultados muestran evidencia que estos canales cuánticos podrían tener una estructura matemática propia. Por un lado, los canales cuánticos PCE pueden clasificarse en clases de equivalencia, es decir, subconjuntos dentro de los cuales todos los elementos están conectados vía operaciones unitarias. Además, identificamos que las operaciones PCE que satisfacen la completa positividad obedecen dos reglas, (1) *regla  $2^k$* : preservan una cantidad de componentes de Pauli que es una potencia de dos, y (2) *regla espejo*: existe la misma cantidad de canales cuánticos PCE que preservan  $2^k$  y  $2^{2^n-k}$  componentes de Pauli. Por último, probamos que los canales cuánticos PCE no son un subconjunto de otro tipo de canales cuánticos de Pauli que se han estudiado antes [8].



## TRABAJO FUTURO

La evidencia que muestran nuestros resultados sobre una estructura matemática de los canales cuánticos PCE apunta hacia una dirección muy clara para el trabajo futuro inmediato: estudiar analíticamente la caracterización general de los canales cuánticos PCE de  $n$  qubits. Específicamente, hay algunas tareas que proponemos realizar:

- Estudiar la diagonalización exacta de la matriz de Choi de las operaciones PCE de  $n$  qubits. Los eigenvectores de la matriz de Choi  $D_{\mathcal{E}}$  son un conjunto de operadores de Kraus del canal cuántico  $\mathcal{E}$  [3]. Por lo tanto, estudiar la representación de Kraus de los canales cuánticos PCE de 1, 2 y 3 qubits, que encontramos en este trabajo, podría proporcionar intuición sobre los operadores de Kraus en el caso general y, por consiguiente, sobre los eigenvectores de la matriz de Choi  $D_{\mathcal{E}}$ .
- Estudiar la relación entre los conjuntos de índices  $j_1, \dots, j_n$  de los  $\tau_{j_1, \dots, j_n} = 1$  de los canales cuánticos PCE. Esto fue lo que comenzamos a hacer al elaborar las *reglas empíricas* para construir canales PCE de 2 qubits al final de la sección 3.4. Dado que un canal cuántico PCE está completamente caracterizado por los valores 1's y 0's del conjunto  $\{\tau_{j_1, \dots, j_n}\}$ , entonces vale la pena explorar si existe alguna conexión entre los índices  $j_1, \dots, j_n$  de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n} = 1$ , y las características de los canales cuánticos PCE discutidas en la sección 3.4.
- Investigar la existencia de un conjunto generador de canales cuánticos PCE. En la Fig. 3.3 es sencillo ver que la superposición de las dos primeras figuras PCE de la clase  $C_3^1$  dan como resultado la primera figura PCE de la clase  $C_4^1$ . Esto se traduce a que la concatenación de dos canales PCE da como resultado otro canal PCE. Por lo tanto, sería interesante explorar más a fondo esta idea para investigar la existencia de algún conjunto cuyos elementos generen al resto de canales cuánticos PCE mediante alguna operación como la concatenación.

Por otro lado, a más largo plazo, otra línea futura de investigación puede ser la de

estudiar una generalización de los canales cuánticos PCE para sistemas de  $d$  niveles. Existen otras bases del espacio  $\mathcal{M}_d$  de las matrices de  $d \times d$ , como las matrices de GellMann o de Weyl, que podrían utilizarse para estudiar operaciones proyectivas, es decir del tipo *component erasing*, que actúan sobre sistemas de  $d$  niveles.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. J. Axler. *Linear algebra done right*, volume 2. Springer, 1997.
- [2] G. Bacciagaluppi. The role of decoherence in quantum mechanics. 2003.
- [3] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2017.
- [4] N. Chandra and R. Ghosh. Quantum entanglement in electron optics. *Quantum Entanglement in Electron Optics: Generation, Characterization, and Applications*, page 1, 2013.
- [5] T. Durt, B.-G. Englert, I. Bengtsson, and K. Życzkowski. On mutually unbiased bases. *International journal of quantum information*, 8(04):535–640, 2010.
- [6] U. Fano. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. *Reviews of modern physics*, 29(1):74, 1957.
- [7] S. Lang. *Introduction to linear algebra*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] M. Nathanson and M. B. Ruskai. Pauli diagonal channels constant on axes. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(28):8171, 2007.
- [9] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, USA, 10th edition, 2011.
- [10] R. A. Pepino. *Open quantum system studies of optical lattices and nonlinear optical cavities: a comprehensive development of atomtronics*. PhD thesis, University of Colorado at Boulder, 2011.
- [11] J. Preskill. Lecture notes for a course on quantum computation. *Unpublished*. Available at <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229>, 1999, 1998.

- [12] J. J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2nd. edition, 2017.
- [13] J. Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton university press, 2018.
- [14] M. M. Wilde. *Quantum information theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [15] H. D. Zeh. On the interpretation of measurement in quantum theory. *Foundations of Physics*, 1(1):69–76, 1970.
- [16] W. H. Zurek. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? *Physical review D*, 24(6):1516, 1981.

A. Listas de 1 y 0 de los elementos  $\tau_{j_1, \dots, j_n}$  de los canales cuánticos PCE de 2 y 3 qubits encontrados numéricamente

No.	$\tau_{00}$	$\tau_{01}$	$\tau_{02}$	$\tau_{03}$	$\tau_{10}$	$\tau_{11}$	$\tau_{12}$	$\tau_{13}$	$\tau_{20}$	$\tau_{21}$	$\tau_{22}$	$\tau_{23}$	$\tau_{30}$	$\tau_{31}$	$\tau_{32}$	$\tau_{33}$	Cantidad de $r_{ij}$ invariantes
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
6	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
8	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2
14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
17	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
18	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
19	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
20	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	4
21	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	4
22	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	4
23	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4
24	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
25	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
26	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	4
27	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	4
28	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	4
29	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	4
30	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4
31	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
32	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	4
33	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	4
34	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	4
35	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	4
36	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	4
37	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4
38	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	4
39	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	4
40	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
41	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	4
42	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	4
43	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	4
44	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	4
45	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	4
46	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	4
47	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	4

48	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	4
49	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	4
50	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	4
51	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	4
52	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	8
53	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	8
54	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	8
55	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	8
56	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	8
57	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	8
58	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	8
59	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	8
60	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	8
61	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	8
62	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	8
63	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	8
64	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	8
65	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	8
66	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	8
67	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16

**Tabla A.1.** Todos los canales cuánticos PCE de 2 qubits (67 en total) encontrados con el método numérico descrito en la sección 2.5. Para reproducir estos resultados con nuestro método numérico descrito en la sección 2.5 revise el cuaderno de Mathematica “`pce_operations.nb`”, disponible en [https://github.com/deleonja/projective\\_maps](https://github.com/deleonja/projective_maps). Revise la sección 2.5 para la descripción de las rutinas implementadas. **Fuente:** elaboración propia.

