Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

# MODELO DE BLACK-SCHOLES Y EL ÁRBOL BINOMIAL APLICADO EN LAS FINANZAS

**Javier de San José Recinos Ortega**
Asesorado por Lic. William Gutierrez

Guatemala, noviembre de 2020

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

# MODELO DE BLACK-SCHOLES Y EL ÁRBOL BINOMIAL APLICADO EN LAS FINANZAS

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

**JAVIER DE SAN JOSÉ RECINOS ORTEGA**
ASESORADO POR LIC. WILLIAM GUTIERREZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
**LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA**

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 2020

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

## CONSEJO DIRECTIVO

| | |
|---|---|
| DIRECTOR | M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera |
| SECRETARIO ACADÉMICO | M.Sc. Edgar Cifuentes Anleu |

## TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

| | |
|---|---|
| EXAMINADOR | Hugo Allan Garcia Monterrosa |
| EXAMINADOR | Rafael Alejandro Martínez Márquez |
| EXAMINADOR | Frank Jorge Fritzsche Barrios |

**ECFM DM 14-2020**
Guatemala, 15 de octubre de 2020

El jefe del Departamento de Matemática de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen de protocolo del asesor Lic. William Roberto Gutiérrez Herrera, al Trabajo de graduación del Estudiante **Javier de San José Recinos Ortega,** quien se identifica el CUI: 2211811480101 y Registro Académico No. **2012-22515,** titulado **"Modelo de Black-Scholes y el Árbol binomial aplicado en las finanzas"**, procede a la Aprobación del mismo.

***"Id y Enseñad a Todos"***

***Lic. William Gutiérrez***
***Jefe Departamento de Matemática***
***Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas***

**Edificio T-1, Segundo nivel Laboratorio 2, Ciudad Universitaria Zona 12**
**Tel. 2418-8000 Ext. 82690**
**E-mail: math@ecfm.usac.edu.gt**
**http://ecfm.usac.edu.gt**

C.c Archivo
Cem

USAC
TRICENTENARIA
Universidad de San Carlos de Guatemala
ECFM
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ref. D.DTG. 005-2020
Guatemala 20 de noviembre de 2020

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Matemática Aplicada, al trabajo de graduación titulado: **"MODELO DE BLACK-SCHOLES Y EL ÁRBOL BINOMIAL APLICADO EN LAS FINANZAS"** presentado por el estudiante universitario **Javier de San José Recinos Ortega,** autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ECFM - USAC

201222515
JMIC/Paola

# AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer primero a Dios por darme la oportunidad de vivir y de haber hecho esta maravillosa carrera.

A mi mamá por ser el apoyo incondicional que me a dado en la carrera, su paciencia y sus sacrificios que a hecho por mí, por que gracias a ello he logrado cumplir uno de mis sueños que es convertirme en matemático.

Para Manola y a Bill, les agradezco su compañía y su apoyo en mi trayectoria como estudiante de mi carrera y cuando la terminé su apoyo incondicional ante mi.

Para mi prima linda Nina que me ayudo en un momento de necesidad para culminar me tesis, le agradezco de lo más profundo de mi corazón.

A mi familia por siempre preguntar por mi.

A Lic. William Gutiérrez por su paciencia y dedicación por este trayecto de tesis, dado que siempre me estuvo ayudando con el programa y las correcciones.

A mis amigos y compañeros de estudio que siempre han estado conmigo.

# DEDICATORIA

Le dedico a esta tesis a Dios de mi corazón y de mi compresión.

A mi mamá con todo mi corazón pues sin ella no lo hubiera logrado. Tus bendiciones y tu amor lograron este éxito tan ansiado, te amo mamá.

# ÍNDICE GENERAL

# ÍNDICE DE FIGURAS

# ÍNDICE DE TABLAS

# LISTA DE SÍMBOLOS

| Símbolo | Significado |
|---|---|
| $:=$ | Es definido por |
| $=$ | Igual que |
| $<, >$ | Menor que y mayor que |
| $\geq, \leq$ | Mayor igual que y menor igual que |
| $\varnothing$ | Conjunto vacío |
| $A \subseteq B$ | $A$ es subconjunto de $B$ |
| $A \subset B$ | $A$ está contenido en $B$ |
| $x \in A$ | $x$ pertenece $A$ |
| $A \cup B$ | $A$ unión $B$ |
| $A \cap B$ | $A$ intersección $B$ |
| $A^c$ | Complemento de $A$ |
| $\mathfrak{A}$ | Álgebra |
| $\mathfrak{F}$ | $\sigma$-álgebra |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto de los números reales |
| $\mathfrak{B}$ | Álgebra de Borel |
| $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ | Recta de Borel |
| $(S, \mathfrak{F})$ | Espacio medible |
| $P$ | Medida de probabilidad |
| $A_n\uparrow$ | $A_n$ es una sucesión creciente |
| $A_n\downarrow$ | $A_n$ es una sucesión decreciente |
| $X(S)$ | Conjunto de valores de una variable aleatoria |
| $(S, \mathfrak{S}, P)$ | Espacio de probabilidad |
| $E(X)$ | Valor esperado |
| $\overline{y}, \mu$ | La media |
| $S, \sigma$ | Desviación estándar |
| $V(X)$ | Varianza de una variable aleatoria |
| $n!$ | $n$ factorial |

| Símbolo | Significado |
|---|---|
| $\binom{n}{y}$ | $n$ combinación $y$ |
| $f_x$ | Función de $x$ |
| $F(Y)$ | Función distribución |
| $F'(y)$ | Función de densidad |
| Var | Varianza de una variable aleatoria continua |
| $N(\mu,\sigma^2)$ | Distribución normal |
| $N(0,1)$ | Distribución normal estándar |
| $\pi$ | Número phi |
| log | logaritmo |
| exp | Número de Euler |
| cos | Función coseno |
| sen | Función seno |
| $\phi$ | Función característica |
| $e$ | Número de Euler |
| $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ | $X_n$ converge a $X$ |
| $\lvert X_n(s)-X(s)\rvert$ | Convergencia fuerte |
| $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$ | Convergencia probabilidad |
| $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ | Convergencia débil |
| $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.c.} X$ | Convergencia media cuadrática |
| VF | Valor futuro |
| VP | Valor presente |
| $R$ | Tasa libre de riesgo |
| $\mathcal{S}$ | Valor de un bien o acción |
| $\mathcal{X}$, $K$ | Precio de ejercicio |
| $\mathcal{C}$ | Opción de compra (*Call*) |
| $\mathcal{P}$ | Opción de venta (*Put*) |
| Prima | Prima de una opción |
| $V.I$ | Valor intrínseco |
| $V.T$ | Valor tiempo |
| $\lambda$ | Valor entre $[0,1]$ |
| $d(\tau)$ | Función de tiempo a expirar |
| $\tau$ | Tiempo a expirar |
| $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ | Historia de un proceso estocástico |
| $W$ | Movimiento browniano |

| Símbolo | Significado |
|---|---|
| $\psi(dt)$ | El ruido |
| $\Pi$ | Una partición del tiempo |
| $G$ | Un número |
| $B$ | Retornos |
| log-normal | Distribución normal logarítmica |
| $S_u$ | Acción se mueve hacia arriba |
| $S_d$ | Acción se mueve hacia abajo |
| $C_u$ | Opción *call* se mueve hacia arriba |
| $C_d$ | Opción *call* se mueve hacia abajo |
| $P_u$ | Opción *put* se mueve hacia arriba |
| $P_d$ | Opción *put* se mueve hacia abajo |
| $h$ | Cobertura |
| $f$ | precio de la opción |
| $\Delta$ | Cambio o diferenciación |

# OBJETIVOS

## General

A partir del árbol binomial se obtendrá el modelo de Black-Scholes.

## Específicos

1. Dar las definiciones y teoremas fundamentales de la teoría de probabilidades y estadística.
2. Dar las definiciones y teoremas fundamentales de ingeniería financiera y teoría del portafolio.
3. Dar las definiciones y teoremas fundamentales del cálculo estocástico.
4. Describir el modelo continuo y discreto del árbol binomial.
5. Obtener y describir el modelo de Black-Scholes.

# INTRODUCCIÓN

En este trabajo se hace un estudio al modelo del árbol binomial y a la fórmula de Black Scholes, lo cual es muy importante en la economía moderna ya que dicha formula se utiliza, entre otras cosas, para evaluar determinados bienes o activos financieros y opciones a través del tiempo.

Si bien a principios del siglo XX existían modelos para evaluar activos y opciones dentro de ellos esta el modelo del árbol binomial, estos contaban con numerosos errores que provocaban importantes diferencias entre el valor calculado por el modelo y el real, durante ese tiempo surgieron muchas estafas debido que no había una ecuacion capaz de evaluar un precio teórico. Una de ellas se basaban en regalar contratos de compra venta a algunos agentes de opciones sobre acciones de ciertas empresas para incentivar la compra de esas acciones a sus clientes sin un respaldo verídico, debido a eso se creo la *Put and Call Brockers dealer association.* con el fin de frenar las estafas y la búsqueda de un modelo capaz de calcular opciones sobre acciones. (Hull y cols., 2002) (Mun, 2002)

En 1973 surge la fórmula de Black Scholes, fue todo un impacto a la economía debido a que la fórmula presentaba todo lo necesario que *Put and Call Brockers dealer association* se andaba buscando, debido a la innovación fue un crecimiento a la finanzas a partir de 1973, fecha que fue publicada la fórmula por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton; debido a su utilidad en el mercado bursátil les entregaron el premio Nobel en 1997 a Myron Scholes y Robert Merton pero a Fischer Black también se lo hubieran entregado pero falleció en 1995.(Hull y cols., 2002)(Black y Scholes, 1973)(Merton, 1973)

Este estudio es fundamentalmente matemático, pero enmarcado en la utilidad financiera; a lo largo de esta presente tesis veremos primero conceptos introductorios como probabilidad y estadística, mencionaremos definiciones y teoremas como álgebra, $\sigma$-álgebra, espacios de medida, variables aleatorias, distribuciones, función característica y por el ultimo de este capítulo mencionaremos el teorema mas esencial de este trabajo que es el límite central.

En el segundo capítulo mencionaremos conceptos de ingeniera financiera, tales definiciones cabe destacar que son valor en el tiempo, acciones, opciones, teoría de portafolio y paridad; con estas definiciones son fundamentales para entender los modelos dado que con ello podemos entender que hace cada variable.

En el tercer capítulo calculo estocástico, esta es la parte medular de la formula de Black Scholes dado que aquí se tocaran los temas de movimiento browniano y el lema de Ito con esto aclarado se puede construir el modelo.

En el cuarto capítulo mencionaremos el modelo árbol binomial y sus propiedades, lo mas fundamental de este capítulo mencionaremos las dos construcciones una de ellas es la que propuso Cox, Ross y Rubinstein y el otro modelo es el de variación de crecimiento, veremos sus propiedades y sus diferencias.

Por ultimo veremos de dónde se obtiene la fórmula de Black Scholes y de las variables que la componen, haremos un estudio de convergencia con el modelo árbol binomial.

# 1. Introducción a la teoría de probabilidades y estadística

## 1.1. Introducción

Para la construcción de los modelos financieros, necesitamos de estos conceptos como lo son teoría de probabilidades y la estadística, en este capítulo mencionaremos las definiciones y teoremas más importantes para nuestra causa. El concepto de probabilidad nace con el deseo del hombre de conocer el futuro, es por ello que el estudio de probabilidades surge como una herramienta utilizada con estos fines, a lo largo del tiempo ayudado a la economía y a las finanzas por ello es una de las ramas más importantes para este trabajo, si quieres profundizar en los temas puedes usar estos libros (Roussas, 1997), (Loukas, Mendenhall, Wackerly, y Scheaffer, 1992) y (Skarpness, Larsen, y Marx, 1983).

## 1.2. Álgebra y $\sigma$-álgebra

**Definición 1.1.** Una clase de conjuntos $\mathfrak{A}$ es un **álgebra** si cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathfrak{A}$ es una clase no vacía.
2. $A \in \mathfrak{A}$ implica que $A^c \in \mathfrak{A}$ (cerrado bajo complementos).
3. $A_1$, $A_2 \in \mathfrak{A}$ implica que $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$ (cerrado bajo uniones).

Otra forma de definir un álgebra

1. $A$, $\varnothing \in \mathfrak{A}$.
2. Si $A_i \in \mathfrak{A}$, $i$ =1, 2, $\ldots n$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}$ para cualquier numero finito $n$.

**Teorema 1.2.1.** *Sea $I$ un conjunto de índices arbitrario y asumamos que los $\mathfrak{A}_i$ son álgebras para cada $i \in I$ por lo que*

$$\mathfrak{A} = \{A \mid A \in \mathfrak{A}_i \text{ para cada } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i \tag{1.1}$$

*entonces $\mathfrak{A}$ es un álgebra.*

*Demostración.* Por incisos,

1. $\varnothing$, $A \in \mathfrak{A}_i$ para cada $i \in I$ por lo que $\varnothing$, $A \in \mathfrak{A}$ por lo tanto $\mathfrak{A}$ es no vació.

2. Si $A \in \mathfrak{A}$, entonces $A \in \mathfrak{A}_i$ para cada $i \in I$, por lo que $A^c \in \mathfrak{A}_i$ para cada $i \in I$ por lo tanto $A^c \in \mathfrak{A}$.

3. Si $A_1$, $A_2 \in \mathfrak{A}$, entonces $A_1$, $A_2 \in \mathfrak{A}_i$ para cada $i \in I$. Por lo que $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}_i$ para cada $i \in I$, por lo tanto $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$. □

**Teorema 1.2.2.** *Sea $C$ una clase arbitraria de un conjunto $S$. Entonces existe una única álgebra más pequeño $\mathfrak{A}$ que contiene a $C$, decimos que $\mathfrak{A}$ es generada por $C$ y escribimos $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(C)$.*

*Demostración.* Sea $\{\mathfrak{A}_i, i \in I\}$ la clase de todas las álgebras que contiene en $C$ y lo definimos de la siguiente manera

$$\mathfrak{A}(C) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i, \tag{1.2}$$

por el teorema anterior, $\mathfrak{A}(C)$ es un álgebra que contiene a $C$ y la más pequeña de las álgebras porque es la intersección de todas aquellas que contiene $C$, y es única por lo que $\mathfrak{A}(C) = \mathfrak{A}$. □

**Definición 1.2.** Una clase de conjuntos $\mathfrak{F}$ es un **$\sigma$-álgebra** si cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathfrak{F}$ es una clase no vacía.

2. $F \in \mathfrak{F}$ implica que $F^c \in \mathfrak{F}$ (cerrado bajo complementos).

3. Si $F_i \in \mathfrak{F}$, $i \in I$, entonces
$$\bigcup_{i \in I} F_i \in \mathfrak{F}. \tag{1.3}$$

**Teorema 1.2.3.** *Sea $I$ un conjunto de índices arbitrario y asumamos que los $\mathfrak{F}_i$ son $\sigma$-álgebras para cada $i \in I$ por lo que*

$$\mathfrak{F} = \{F \mid F \in \mathfrak{F}_i \text{ para cada } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \tag{1.4}$$

*entonces $\mathfrak{F}$ es un álgebra.*

*Demostración.* Por incisos,

1. $\varnothing,\ F \in \mathfrak{F}_i$ para cada $i \in I$ por lo que $\varnothing,\ A \in \mathfrak{F}$ por lo tanto $\mathfrak{F}$ es no vacío.

2. Si $F \in \mathfrak{F}$, entonces $F \in \mathfrak{F}_i$ para cada $i \in I$, por lo que $F^c \in \mathfrak{F}_i$ para cada $i \in I$ por lo tanto $F^c \in \mathfrak{F}$.

3. Si $F_1,\ F_2, \cdots \in \mathfrak{F}$, entonces $F_1,\ F_2, \cdots, \in \mathfrak{F}_i$ para cada $i \in I$. Por lo que $\cup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathfrak{F}_i$ para cada $i \in I$, por lo tanto $\cup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathfrak{F}$. □

**Teorema 1.2.4.** *Sea $C$ una clase arbitraria de un conjunto $S$.Entonces, existe una única $\sigma$-álgebra más pequeño $\mathfrak{F}$ contiene a $C$, decimos que $\mathfrak{F}$ es un $\sigma$-álgebra generado por $C$ como $\mathfrak{F} = \sigma(C)$.*

*Demostración.*

$$\sigma(C) = \bigcap \{\sigma \text{ álgebra que contiene a } C\} \tag{1.5}$$

por el teorema anterior, $\sigma(C)$ es un $\sigma$-álgebra que contiene a $C$ y es la más pequeña y es único por la definición. □

### 1.2.1. Espacios de medida

Sea $S$ un conjunto no vacío, y $\mathfrak{F}$ una $\sigma$-álgebra en $S$, a la pareja $(S, \mathfrak{F})$ le llamaremos **espacio medible**.

**Definición 1.3.** Sea $S$ un $\mathbb{R}$ y definimos $C_0$ como:

$$C_0 = \{(-\infty, x), (-\infty, x], (x, \infty), [x, \infty), (x, y), (x, y], [x, y), [x, y]; x, y \in \mathbb{R}, x < y\} \tag{1.6}$$

Por el teorema 1.1.4, hay una $\sigma$- álgebra $\mathfrak{F} = \sigma(C_0) = \mathfrak{B}$; a esta $\sigma$- álgebra se le llama $\sigma$- álgebra de **Borel** y a la par ordenada $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ se le llama recta de Borel y a los elementos de $\mathfrak{B}$ **conjuntos de Borel** .

**Definición 1.4.** Consideremos a los espacios medibles $(S,\mathfrak{F})$ y $(S',\mathfrak{F}')$, decimos que un mapeo $\mathfrak{X} : S \to S'$ es medible si

$$\mathfrak{X}^{-1}(\mathfrak{F}') := \{\mathfrak{X}^{-1}(F') \mid F' \in \mathfrak{F}'\} \subset \mathfrak{F} \tag{1.7}$$

Si $\mathfrak{X}$ es medible podemos escribirlo como $\mathfrak{X} := (S,\mathfrak{F}) \to (S',\mathfrak{F}')$.

**Definición 1.5.** Si $S' = \mathbb{R}$ y $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$ la $\sigma$- álgebra de Borel entonces $(S,\mathfrak{F}) \to (\mathbb{R},\mathfrak{B})$ es llamado un **mapeo real**.

### 1.2.2. Conceptos de probabilidad

**Definición 1.6.** Una medida de probabilidad $P$ es una función que cumple

1. $P$ es **no negativa**, es decir $P(A) \geq 0$, $A \in \mathfrak{F}$.

2. $P$ esta **normada**, es decir $P(S) = 1$.

3. $P$ es $\sigma$**-aditiva**, es decir para toda colección de eventos disjuntos a pares $A_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene que

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) \tag{1.8}$$

definición axiomática de probabilidad de Kolmogorov. A la tripleta $(S,\mathfrak{S},P)$ se le llama **espacio de probabilidad**.

Consecuencias de la definición 1.6

1. $P(\varnothing) = 0$, sale del hecho de que

$$\begin{aligned} S &= S + \emptyset + \emptyset + \cdots \\ P(S) &= P(S) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots \\ 1 &= 1 + P(\emptyset) + \cdots \end{aligned}$$

entonces $P(\emptyset) = 0$, y como $P(\emptyset) \geq 0$.

2. $P$ es finitamente aditiva, para toda $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

de hecho para $A_i = 0$, $i \geq n+1$,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3. Para cada evento $A$, $P(A^c) = 1 - P(A)$ en efecto,

$$\begin{aligned} A + A^c &= S \\ P(A + A^c) &= P(S) \\ P(A) + P(A^c) &= 1 \end{aligned}$$

   por lo tanto, $P(A^c) = 1 - P(A)$

4. $P$ es una función no decreciente, es decir $A_1 \subseteq A_2$ entonces $P(A_1) \leq P(A_2)$ en efecto,

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + (A_2 - A_1) \\ P(A_2) &= P(A_1 + (A_2 - A_1)) \\ P(A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \end{aligned}$$

   Por lo tanto

$$P(A_1) \leq P(A_2).$$

5. $0 \leq P(A) \leq 1$ Para todo evento $A$, se cumple por la definición 1.6.1,1.6.2 y por la consecuencia 4.

6. Para cada evento $A_1$, $A_2$,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

   En efecto,

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= A_1 + (A_2 - A_1 \cap A_2) \\ P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P((A_2 - A_1 \cap A_2)) \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

7. $P$ es subaditiva, es decir

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

y

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

**Teorema 1.2.5.** *Para cualquier número finito de eventos, se tiene que*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leq j_1<j_2\leq n} P(A_{j_1}\cap A_{j_2}) +$$
$$+ \sum_{1\leq j_1<j_2<j_3\leq n} P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap A_{j_3}) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).$$

*Demostración.* En la página 17 en el capítulo 1 del libro (Roussas, 1997). □

**Definición 1.7.** La sucesión $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, se dice que es una **sucesión monotona** si:

1. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ ($A_n$ es **creciente**, y se denota como $A_n \uparrow$).
2. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ ($A_n$ es **decreciente**, y se denota como $A_n \downarrow$).

El límite de una sucesión monotona esta definida como:

1. Si $A \uparrow$, entonces el $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
2. Si $A \downarrow$, entonces el $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

**Teorema 1.2.6.** *Sea $\{A_n\}$ una sucesión de eventos tales que, para $n\to\infty$, $\{A_n\}\downarrow$ o $\{A_n\}\uparrow$, entonces*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \tag{1.9}$$

*Demostración.* Tomemos primero $\{A_n\}\uparrow$. Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Sabiendo que

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 + (A_1^c \cap A_2) + (A_1^c\cap A_2^c\cap A_3) + \cdots\\ &= A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \cdots,\end{aligned}$$

Como asumimos que $\{A_n\} \uparrow$. Entonces

$$\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \cdots + P(A_n - A_{n-1}) + \cdots \\
&= \lim_{n\to\infty} [P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \cdots + P(A_n - A_{n-1})] \\
&= \lim_{n\to\infty} [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + \cdots + P(A_n) - P(A_{n-1})] \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Ahora tomemos $\{A_n\} \downarrow$. Tenemos que $\{A_n^c\} \uparrow$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

por lo anterior tenemos

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n^c\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c),$$

esto equivale

$$P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right]^c\right) = \lim_{n\to\infty} [1 - P(A_n)],$$

$$1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Por lo tanto,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \qquad \square$$

**Definición 1.8.** Dos eventos $A, B$ se dice que son **independientes** si,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{1.10}$$

**Definición 1.9.** Dos eventos $A_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ se dice que son **independientes** si se cumple la siguiente relación,

$$P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_k}), \tag{1.11}$$

para cada $k = 2, 3, \ldots, n$ y $j_1, \cdots j_k = 1, 2, 3, \ldots, n$ con $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k$. Se dice que para un par de eventos independientes si $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ para toda $i \neq j$.

## 1.3. Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad

### 1.3.1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria $X$ es una función de valor real definida sobre un espacio muestral $S$, $X(S)$ sera el conjunto de valores de una variable aleatoria $X$.

**Definición 1.10.** Considere el espacio de probabilidad $(S, \mathfrak{F}, P)$ y sea $T$ un espacio y $X$ una función definida en $S$ que va a $T$, esto es $X\colon S \to T$. Para $O \subseteq T$, se define la **imagen inversa** de $O$ , a través de $X$, denotado como, $X^{-1}(T)$, por

$$X^{-1}(T) := \{s \in S \mid X(s) \in T\}. \tag{1.12}$$

Sea $B \in \mathfrak{S}$,

$$X^{-1}(B) = \{a \in S \mid X(s) \in B\} = (X \in B). \tag{1.13}$$

**Definición 1.11.** La **probabilidad** de que $X$ tome el valor de $x$, $P(X = x)$, se define como la suma[1] de las probabilidades de todos los puntos muestrales en $S$ a los que se asigna el valor $x$.

Como $P(X = x)$ es una función de probabilidad a cada valor $x$ de la variable aleatoria $X$, recibe como nombre de **función de probabilidad** para $X$.

**Definición 1.12.** La **distribución de probabilidad** para una variable discreta $X$ puede ser representada por una formula, tabla o gráfica que produzca $P(X = x)$.

Siempre tendremos en cuenta que $P(X = x) \geq 0$ para todo $x$, pero la distribución de probabilidad para una variable discreta asigna probabilidades diferentes de cero a sólo un número contable de valores.

**Definición 1.13.** Para una distribución de **probabilidad discreta** debe de cumplir

[1]También puede ser la integral sobre el conjunto de puntos con esta propiedad.

1. $0 \leq P(X = x) \leq 1$, para todo $x$.

2. $\sum_j P(x_j) = 1$.

**Definición 1.14.** Sea $X$ una variable aleatoria con la función de probabilidad $P(x)$. Entonces el **valor esperado** de $X$, $E(X)$, se define como

$$E(X) = \sum_x xP(x). \tag{1.14}$$

Si $P(x)$ es una caracterización precisa de la distribución de frecuencia poblacional, entonces $E(X) = \mu$, es la media poblacional, pero para una variable aleatoria discreta el valor esperado existe si la suma es absolutamente convergente, es decir

$$E(X) = \sum_x \mid x \mid P(x) < \infty.$$

**Teorema 1.3.1.** *Sea $X$ una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $P(x)$ y $f(X)$ una función de valor real de $X$. Entonces, el valor esperado de $f(X)$ está dado por*

$$E[f(X)] = \sum_x f(x)P(x).$$

*Demostración.* Podran encontrar la demostración en el capítulo 3 sección 3 en el libro (Loukas y cols., 1992). □

**Definición 1.15.** Si $X$ una variable aleatoria con media $E(X) = \mu$, la **varianza** de una variable aleatoria $X$ se define

$$V(X) = E[(X - \mu)^2]. \tag{1.15}$$

la **desviación estándar** de $X$ es la raíz cuadrada positiva de $V(X)$.

Si $P(x)$ es una caracterización precisa de la distribución de frecuencia poblacional, entonces $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, la varianza poblacional y $\sigma$ es la desviación estándar poblacional.

**Teorema 1.3.2.** *Sea $X$ una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $P(x)$ y sea $a$ una constante. Entonces $E(a) = a$.*

*Demostración.* Del teorema 1.2.1 sea $f(x) = a$, tenemos que

$$E(a) = \sum_x aP(x) = a\sum_x P(x).$$

y por definición 1.13 tenemos que $\sum_x P(x) = 1$ por lo tanto $E(a) = a$. $\square$

**Teorema 1.3.3.** *Sea $X$ una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $P(x)$, $f(X)$ una función de valor real de $X$ y sea $a$ una constante. Entonces*

$$E(af(X)) = aE(f(X)).$$

*Demostración.* Por teorema 1.2.1.

$$E(af(X)) = \sum_x af(x)P(x) = a\sum_x f(x)P(x) = aE(f(X)). \qquad \square$$

**Teorema 1.3.4.** *Sea $X$ una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $P(x)$ y sean $f_1(X)$, $f_2(X)$, $\ldots$,$f_k(X)$ funciones de $X$. Entonces*

$$E[f_1(X) + f_2(X) + \cdots + f_k(X)] = E[f_1(X)] + E[f_2(X)] + \cdots + E[f_k(X)]$$

*Demostración.* Sea $X$ una variable aleatoria discreta con $P(x)$ un función de probabilidad y sean $f_1(X)$, $f_2(X)$, $\ldots$,$f_k(X)$ funciones de $X$, usando el teorema 1.3.1 tenemos

$$\begin{aligned} E[f_1(X) + f_2(X) + \cdots + f_k(X)] &= \sum [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)]P(x) \\ &= \sum [f_1(x)P(x)] + \cdots + \sum [f_k(x)P(x)] \\ &= E[f_1(X)] + E[f_2(X)] + \cdots + E[f_k(X)]. \qquad \square \end{aligned}$$

**Teorema 1.3.5.** *Sea $X$ una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $P(x)$ y media $E(x) = \mu$; entonces*

$$V(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2.$$

*Demostración.* Expandiendo la definición 1.8 tenemos que

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2).$$

Utilizando el teorema 1.2.4

$$E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2).$$

Como $\mu$ es una constante y aplicando el teorema 1.2.2 y el 1.2.3 tenemos

$$\sigma^2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2,$$

por hipótesis $E(x) = \mu$, por tanto

$$\sigma^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2. \qquad \square$$

## 1.4. ¿Que es estadística?

Rama de la matemática que estudia la recolección, análisis e interpretación de datos; para así poder hacer predicciones en base de los datos, con esto podemos decir que la estadística se divide en:

- **Estadística descriptiva:** se dedica a la descripción, visualización y resumen de datos originarios a partir de un estudio. Los datos pueden ser representados de forma de gráfica o numérica.

- **Estadística inferencial**: Se dedica en construir modelos y predicciones asociadas al fenómeno que se estudia, teniendo en cuenta la aleatoriedad del fenómeno. A la recopilación total de datos se le denomina *población* y un subconjunto seleccionado de ella se le llama *muestra*.

### 1.4.1. Caracterización de un conjunto de mediciones

**Definición 1.16.** La **media** de una muestra de $n$ medidas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ está dado por:

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{1.16}$$

El valor $\overline{y}$ se refiere a la media muestral, la media es el promedio de la distribución de datos.

**Definición 1.17.** La **varianza** de una muestra de mediciones $y_1, y_2, \cdots, y_n$ es la suma del cuadrado de las diferencias entre las mediciones y su media, divida entre $n-1$, simbólicamente esta dado como:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2. \tag{1.17}$$

Cuanto mayor sea la varianza de un conjunto de mediciones, los datos estarán más dispersos respecto a su media.

**Definición 1.18.** La **desviación estándar** de una muestra de mediciones es la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$S = \sqrt{S^2}. \tag{1.18}$$

La correspondiente desviación estándar poblacional esta denotada como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

### 1.4.2. Distribución de probabilidad Bernoulli

La distribución de Bernoulli o distribución dicotómica, es una distribución de probabilidad discreta, que toma el valor 1 para la probabilidad de éxito es $p$, $0 \leq p \leq 1$ y el valor 0 para la probabilidad de fracaso es $q$, $q := 1 - p$.

Si $X$ es una variable aleatoria que mide un número de éxitos, y se realiza un único experimento con dos posibles resultados, se dice que la variable aleatoria $X$ se distribuye como una Bernoulli de parámetro $p$ y su fórmula es

$$p(y) = p^y q^{1-y}, \tag{1.19}$$

con $y = \{0, 1\}$.

### 1.4.3. Distribución de probabilidad binomial

Consiste en un número fijo $n$, de pruebas idénticas, cada prueba resulta en uno de dos resultados, éxito y fracaso. La probabilidad de éxito en una sola prueba es igual a algún valor $p$ y es el mismo de una prueba a la otra. La probabilidad de fracaso es igual a $q = 1 - p$. Todas las pruebas son independientes.

Sea $Y$ una variable aleatoria tiene una *distribución binomial* basada en $n$ pruebas con probabilidad $p$ de éxito si y sólo si

$$p(y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}, \tag{1.20}$$

con $y = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $0 \leq p \leq 1$. La expansión binomial produce

$$(p+q)^n = \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} p^n.$$

Con esto podemos observar que $p(0) = \binom{n}{0}q^n$ , $p(1) = \binom{n}{1}p^1q^{n-1}$ y así sucesivamente hasta tener $p(y) = \binom{n}{y}p^yq^{n-y}$, y como de $p(y)$ cumple las propiedades necesarias para una función de probabilidad y esto se debe porque $p(y)$ es positiva para $y = 0, 1, 2, \ldots, n$, concluimos que

$$\sum_{y=o}^{n} p(y) = \sum_{y=o}^{n} \binom{n}{y} p^y q^{n-y} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

La media y la varianza asociadas con una variable aleatoria binomial se deducen en el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.1.** *Sea $Y$ una variable aleatoria binomial basada en $n$ pruebas y probabilidad $p$ de éxito. Entonces.*

$$\mu = E(Y) = np \text{ } y \text{ } \sigma^2 = V(Y) = npq.$$

*Demostración.* Por la definición 1.14 tenemos que

$$E(Y) = \sum_{y} yP(Y) = \sum_{y=0}^{n} y \binom{n}{y} p^y q^{n-y}.$$

Como el primer término es 0 hacemos un corrimiento a la sumatoria de esta forma

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{n} y \frac{n!}{(n-y)!y!} p^y q^{n-y} = \sum_{y=1}^{n} \frac{n!}{(n-y)!(y-1)!} p^y q^{n-y}.$$

Ahora factorizemos $np$ en cada término de la suma y hacemos $z = y - 1$

$$\begin{aligned} E(Y) &= np \sum_{y=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-y)!(y-1)!} p^{y-1} q^{n-y} \\ &= np \sum_{z=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-z-1)!z!} p^z q^{n-z-1} \\ &= np \sum_{z=0}^{n-1} \binom{n-1}{z} p^z q^{n-z-1}. \end{aligned}$$

$p(z) = \binom{n-1}{z}p^zq^{n-z-1}$ es la función de probabilidad binomial basado en $(n-1)$ pruebas, Así que

$$\sum_{z=0}^{n-1} p(z) = 1.$$

Por lo tanto

$$\mu = np.$$

Del teorema 1.2.5. sabemos que $\sigma^2 = V(Y) = E(Y^2) - \mu^2$.

$$E[Y(Y-1)] = E(Y^2 - Y) = E(Y^2) - E(Y).$$

Por tanto,

$$E(Y^2) = E[Y(Y-1)] + E(Y) = E(Y^2 - Y) = E[Y(Y-1)] + \mu.$$

Para este caso tenemos,

$$E[Y(Y-1)] = \sum_{y=0}^{n} y(y-1)\frac{n!}{(n-y)!(y)!}p^y q^{n-y}.$$

Cuando $y = 0$ y $y = 1$ es igual a cero por lo que tenemos que correr dos terminos.

$$E[Y(Y-1)] = \sum_{y=2}^{n} y(y-1)\frac{n!}{(n-y)!(y-2)!}p^y q^{n-y}.$$

Ahora factorizemos $n(n-1)p^2$ en cada término de la suma y hacemos $z = y - 2$ obtenemos

$$\begin{aligned} E[Y(Y-1)] &= n(n-1)p^2 \sum_{y=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-y)!(y-2)!}p^{y-2}q^{n-y} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{z=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-z-2)!z!}p^z q^{n-z-2} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{z=0}^{n-2} \binom{n-2}{z} p^z q^{n-z-2}, \end{aligned}$$

$p(z) = \binom{n-2}{z}p^z q^{n-z-2}$ es la función de probabilidad binomial basado en $(n-2)$ pruebas, Así que

$$\sum_{z=0}^{n-2} p(z) = 1,$$

por lo tanto

$$E[Y(Y-1)] = n(n-1)p^2,$$

por lo que

$$E(Y^2) = E[Y(Y-1)] + \mu = n(n-1)p^2 + np.$$

$$E(Y^2) - \mu^2 = \sigma^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq. \qquad \square$$

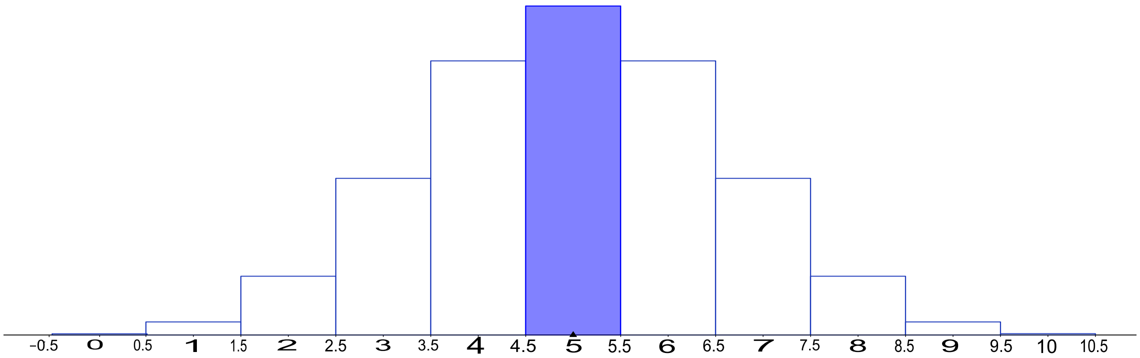



**Figura 1.1.** Distribución binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0.5$ elaborado en GeoGebra. Fuente: elaboración propia.

## 1.5. Variables continuas y sus distribuciones de probabilidad

### 1.5.1. Variables aleatorias

Sea el espacio de probabilidad $(S, \mathfrak{S}, P)$, para un subconjunto $B \in \mathbb{R}$ lo denotamos como $(X \in B) = \{s \in S \mid X(s) \in B\}$ y de forma particular decimos que una función de probabilidad de distribución $(X = x) := \{s \in S \mid X(s) = x\}$ que se puede denotar también como $P_x(B) = P(X \in B)$, y para una función $f_x$ definida en los $\mathbb{R}$ expresada como

$$f_x(x_j) = P_x(\{x_j\}). \tag{1.21}$$

y decimos que es continua si $f_x \geq 0$ para toda $x \in I$, $(I \in \mathbb{R})$ y tenemos que

$$P(X \in J) = \int_J f_x(x)dx. \tag{1.22}$$

para cualquier subintervalo $J$ de $I$.

**Definición 1.19.** Para una distribución de probabilidad,entonces $F(y)$ es una **función de distribución** si cumple:

1. F(-$\infty$)= $\lim\limits_{y \to -\infty} F(y) = 0$.
2. F($\infty$)= $\lim\limits_{y \to \infty} F(y) = 1$.
3. $F(y)$ es una función no decreciente de $y$.

**Definición 1.20.** Una variable aleatoria $Y$ con función de distribución $F(y)$ se dice que es *continua* si $F(y)$ es continua, para $-\infty \leq y \leq \infty$.

**Definición 1.21.** Sea $F(y)$ la función de distribución para una variable aleatoria continua $Y$. Entonces $f(y)$, dada por

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = F'(y) \tag{1.23}$$

siempre que exista la derivada, se denomina *función de densidad de probabilidad* para la variable aleatoria $Y$.

Podemos rescribir a $F(y)$ de la siguiente manera

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt \tag{1.24}$$

donde $f(t)$ es la función de densidad de probabilidad y $t$ se usa como la variable de integración.

**Definición 1.22.** El valor esperado de una variable continua $Y$ es

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy. \tag{1.25}$$

**Definición 1.23.** La varianza de una variable continua $Y$ es

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2. \tag{1.26}$$

### 1.5.2. Distribución normal

**Definición 1.24.** Se dice que una variable aleatoria $Y$ tiene una **distribución normal de probabilidad** si para $\sigma > 0$, $-\infty < \mu < \infty$ y $y \in \mathbb{R}$ la función de densidad de $Y$ es

$$X(S) = \mathbb{R}, f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.27}$$

Decimos que $X$ es una distribución normal $(\mu, \sigma^2)$ que se denota como $N(\mu, \sigma^2)$ donde $\mu$, $\sigma$ son los parámetros de la distribución de $X$ o como se diga la media y su varianza respectivamente.

**Definición 1.25.** Para $\mu = 0$, $\sigma = 1$ se le conoce como la **distribución normal estándar** que se denota como $N(0, 1)$.

**Definición 1.26.** La **densidad estándar** es

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < y < \infty. \tag{1.28}$$

**Definición 1.27.** La **función distribución** es

$$N(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(t)dt, \quad -\infty < y < \infty. \tag{1.29}$$

**Definición 1.28.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1. \tag{1.30}$$

**Lema 1.1.** $N(-y) = 1 - N(y)$

*Demostración.* Para la integral $N(-y)$, sea $w = -u$,

$$N(-y) = \int_{-\infty}^{-y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{u^2}{2}} (-du) = \int_{y}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du - \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du = 1 - N(y).$$

□

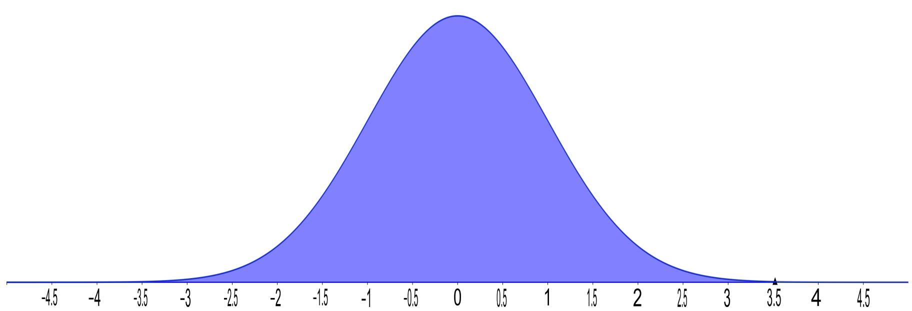



**Figura 1.2.** Distribución normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ elaborado en GeoGebra. Fuente: elaboración propia.

### 1.5.3. Distribución lognormal

**Definición 1.29.** Se dice que una variable aleatoria $Y$ tiene una distribución lognormal de probabilidad si el logaritmo tiene una distribución normal, la función de densidad de $Y$ es

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.31}$$

para $y > 0$.

**Definición 1.30.** El valor esperado es

$$E[Y] = \exp^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \tag{1.32}$$

la varianza es

$$\mathrm{Var}[Y] = (\exp^{\sigma^2} - 1) \exp^{2\mu + \sigma^2}. \tag{1.33}$$

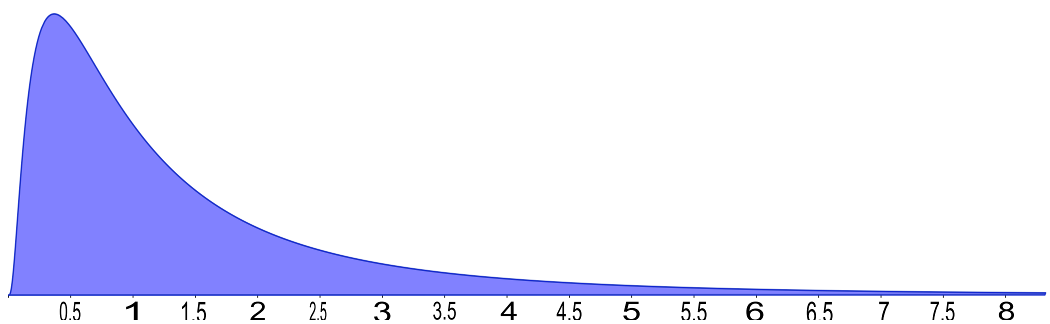



**Figura 1.3.** Distribución lognormal con parámetros $\mu = 1.6487$ y $\sigma = 2.1612$ elaborado en GeoGebra. Fuente: elaboración propia.

## 1.6. Función característica

**Definición 1.31.** Sea $X$ una variable aleatoria con una función de densidad de probabilidad $f$. Entonces la **función característica** de $X$, denotada como $\phi$ es una función definida en $\mathbb{R}$, tomando valores complejos, en general esta definida como

$$\phi(t) = E[e^{itx} f(x)] = \sum_x \left[ e^{itx} f(x) \right] = \sum_x \left[ \cos(tx) f(x) + i \sin(tx) f(x) \right]$$

Por lo tanto

$$= \sum_x \big[\cos(tx)f(x)] + i\sum_x \big[\sin(tx)f(x)]. \tag{1.34}$$

Y además para variable aleatorias continuas tenemos

$$\begin{aligned}\phi(t) = E[e^{itx}f(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\big[\cos(tx)f(x) + i\sin(tx)f(x)\big]\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\big[\cos(tx)f(x)] + i\int_{-\infty}^{\infty}\big[\sin(tx)f(x)].\end{aligned} \tag{1.35}$$

La función característica de una distribución binomial definido anteriormente. Aplicando (1.34) y (1.20) tenemos

$$\phi(t) = \sum_{y=0}^{n} e^{ixy}\binom{n}{y}p^y q^{n-y} = \sum_{y=0}^{n}\binom{n}{y}(pe^{ix})^y q^{n-y} = (pe^{ix}+q)^n.$$

Donde $q = 1 - p$.

**Lema 1.2.** *Sea $Y, X$ una variable aleatoria que satisface $Y = aX + b$, donde $a, b$ son constantes. Entonces la función característica $g(t)$ de la variable aleatoria de $Y$ tenemos $g(t) = e^{ibt}\phi(at)$, donde $\phi(t)$ es la función característica de la variable aleatoria de $X$.*

*Demostración.* Teniendo en cuenta que $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha + i\beta}$ y aplicando la definición de función característica tenemos

$$\begin{aligned} g(t) &= Ee^{ity} = Ee^{it(aX+b)} = E(e^{itaX}e^{itb})\\ &= e^{itb}(Ee^{itaX}) = e^{itb}(\phi(at)). \end{aligned}$$ □

La función característica de una distribución normal definido anteriormente. Aplicando (1.28) tenemos

$$\begin{aligned}\phi(t) = E(e^{itx}f(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2}}e^{\frac{-t^2}{2}}e^{itx}e^{\frac{-x^2}{2}}dx\\ &= \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-it)^2}{2}}dx,\end{aligned}$$

a esta integral la resolveremos por el método por partes

$$h = x - it, \quad dh = dx.$$

Sustituyendo valores tenemos

$$\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-h^2}{2}}dh.$$

Evaluando la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-h^2}{2}}dh = \sqrt{2\pi}.$$

En conclusión tenemos

$$\phi(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}.$$

Pero esta es la función característica de una distribución normal estándar o sea $N(0,1)$, para tener la función característica de $N(\mu,\sigma)$ tenemos que usar el lema anterior para un $g(t)$ de una variable aleatoria $Y$ con una distribución normal $N(\mu,\sigma)$. Esta claro que la variable aleatoria $X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ tiene distribución normal estándar, y por lo tanto con una función característica $\phi(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$, aplicando el lema anterior tenemos que

$$g(t) = e^{it\mu}\phi(\sigma t) = e^{it\mu}e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

## 1.7. Límite de una distribución

Sea la tripleta $(S, \mathfrak{S}, P)$ con $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias y $X$ una variable aleatoria la convergencia esta dado como

**Definición 1.32.** 1. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias converge a una probabilidad uno a $X$ una variable aleatoria si $n \to \infty$, podemos escribir esto como $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ con probabilidad 1, o $P[X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X] = 1$, si $X_n(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(s)$ para todo $s \in S$ excepto la posibilidad para un subconjunto $N$ de $S$ tal que $P(N) = 0$.

Para $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$significa que para cada $\epsilon > 0$ y para cada $s \in N^c$ entonces existe una vecindad $N(\epsilon, s) > 0$ tal que

$$|X_n(s) - X(s)| < \epsilon, \tag{1.36}$$

para todo $n \geq N(\epsilon, s)$, a esta convergencia se le conoce como **convergencia fuerte**.

2. Sea $\{X_n\}$ converge en probabilidad de $X$ si $n \to \infty$, a esto se puede escribir como $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$, si para cada $\epsilon > 0$, $P[|X_n - X| > \epsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Para $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$ significa que para cada $\epsilon, \delta > 0$ existe una vecindad $N(\epsilon, \delta) > 0$ tal que $P[|X_n - X| > \epsilon] < \delta$ para todo $n \geq N(\epsilon, \delta)$.

3. Sea $\{X_n\}$ converge en una distribución de $X$ para $n \to \infty$, esto es $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, si $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ para un $F$ continua.

   $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ esto significa que para cada $\epsilon > 0$ y para cada $x$ con una $F$ continua existe una vecindad $N(\epsilon, x)$ tal que $|F_n(x) - F(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq N(\epsilon, x)$. a esta convergencia se le conoce como **convergencia débil**.

4. Sea $\{X_n\}$ converge a una **media cuadrática** $X$ si $n \to \infty$, esto es $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.c.} X$, si $E[X_n - X]^2 \to 0$. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m.c.} X$, a esto significa para cada $\epsilon > 0$, existe una vecindad $N(\epsilon) > 0$ tal que $E[X_n - X]^2 < \epsilon$ para todo $n \geq N(\epsilon)$.

**Teorema 1.7.1.** *(P.Levys ) Sea $F_n$ una sucesión de funciones distribución y sea $F$ una función de distribución. Sea $\phi_n$ una sucesión de funciones característica que corresponde a un $F_n$ y $\phi$ una función característica corresponde a $F$. Entonces,*

1. *Si $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ para todo los puntos continuos $x$ de $F$ con $n \to \infty$, entonces$\phi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

2. *Si $\phi_n(t)$ converge, con $n \to \infty$, y $t \in \mathbb{R}$, a una función $g(t)$ que es continua en $t = 0$, entonces $g$ es una función característica y $F$ es una función de distribución, entonces $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$, para todos los puntos $x$ de $F$.*

*Demostración.* En la página 186 en el capítulo 8 del libro (Roussas, 1997). □

**Teorema 1.7.2.** *(límite central) Sea $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Sea*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \quad G_n(x) = P\left[\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq x\right], \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

*Entonces $G_n(x) \to \phi(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.*

*Demostración.* En la página 188 en el capítulo 8 del libro (Roussas, 1997) o (Loukas y cols., 1992) en el capítulo 7 solo que el usa momentos para demostrarlo. □

# 2. Introducción a la ingeniería financiera

## 2.1. Introducción

Para comprender el entorno del que surge y en el que se aplica los modelos, debemos conocer primero ciertos conceptos financieros para sus aplicaciones; aquí serán desarrollados varios conceptos básicos como lo es valor del dinero en el tiempo, haremos un estudio del portafolio, veremos algunas propiedades de las opciones sobre acciones y uno de las definiciones más importantes la paridad de opciones.

Si quieres profundizar en esta área estos son los libros que use (Joshi, 2010), (Mun, 2002) y (LYUU, s.f.).

## 2.2. Valor del dinero en el tiempo

El **interés** es el costo de pedir prestado dinero, entonces sea $r$ el interés anual, si el interés es compuesto una vez por año, entonces el valor del futuro (VF) de una cantidad inicial VP después de $n$ años es.

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP}(1+r)^n \tag{2.1}$$

el valor presente (VP) que es el valor del día de hoy se puede escribir como:

$$\mathrm{VP} := \mathrm{VF}(1+r)^{-n}. \tag{2.2}$$

Ahora si el interés es compuesto $m$ veces en el año, el valor final de la inversión será

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}. \tag{2.3}$$

Si hablamos de una capitalización continua tenemos que $(1+\frac{r}{n})^n \to e^r$, cuando $n \to \infty$; hay que resaltar que una tasa de interés libre de riesgo como su nombre lo define, es la tasa de rendimiento que se obtiene al invertir en un activo financiero que no tiene riesgo de incumplir su pago.

### 2.2.1. Valor presente

Sea (VP) y sea $C_n$ un fluido de dinero a través del tiempo $1, 2, \ldots, n$ y $r$ el interés anual es:

$$\mathrm{VP} = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r)^n}. \tag{2.4}$$

## 2.3. Acciones, opciones, *calls* y *puts*

Una **acción** es un título emitido por una sociedad privada que representa el valor de las fracciones iguales en que se divide su capital social. Que además la empresa puede decidir ponerlas en venta a los inversores, en el cual tiene clasificaciones:

- Acciones de clase A.
- Acciones de clase B.

**Acciones de clase A:** Son aquellas acciones en las cuales, uno puede ejercer dividendos[1] y toma de decisiones de la empresa.

**Acciones de clase B:** Son aquellas que no ejercen derechos de la empresa ni cobrar dividendos, solo son acciones con cierto valor, por lo general están cotizadas en una **bolsa de valores**.[2]

Para las acciones de clase B las empresas utilizan esas inversiones para proyectos, ampliaciones, u otros que necesiten la empresa; pero las empresas están obligadas a dar sus estados financieros, eso quiere decir que están obligados a presentar su contabilidad y sus ventas.

Con la siguiente gráfica podemos apreciar como se comporta una acción de clase B, esta gráfica fue sacada de *Yahoo finance* en donde esta abierta para todo publico para cotizar acciones.

[1]Es la parte del beneficio de una empresa que se reparte entre los accionistas de una sociedad.

[2]Es una organización privada que brinda las facilidades necesarias para que sus miembros, atendiendo los mandatos de sus clientes, como realizar venta y compra de valores, tales como bonos, acciones de sociedades.


**Figura 2.1.** Acciones de Google en la fecha 11/09/2018. Fuente: imagen tomada de (Yahoo, s.f.).

Como se puede apreciar en la gráfica (el lado derecho) es el valor del precio de una acción en dólares, en la parte inferior tenemos el **volumen**[3] de la acción.

En un día de mercado las acciones se comportan de forma estocástica, dado que tienen un cierre y una apertura, por lo general una acción vista en forma diaria se aprecia como en la gráfica 2.1.

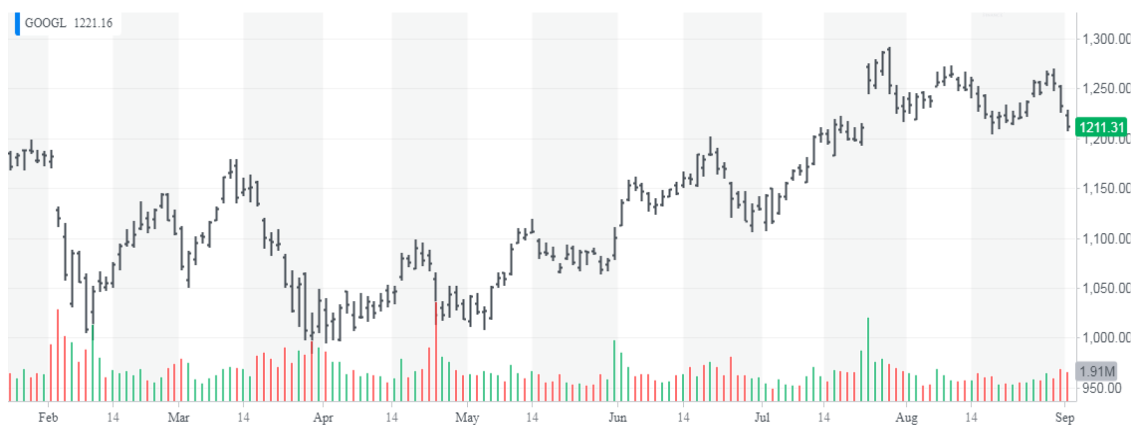



**Figura 2.2.** Acciones de Google en la fecha 5/09/2018 vista de forma diaria. Fuente: imagen tomada de (Yahoo, s.f.).

Ampliando la gráfica 2.2 tenemos en días de mercado está acción que se comporta de la siguiente forma:

[3]El volumen de una acción es el numero de transacciones.

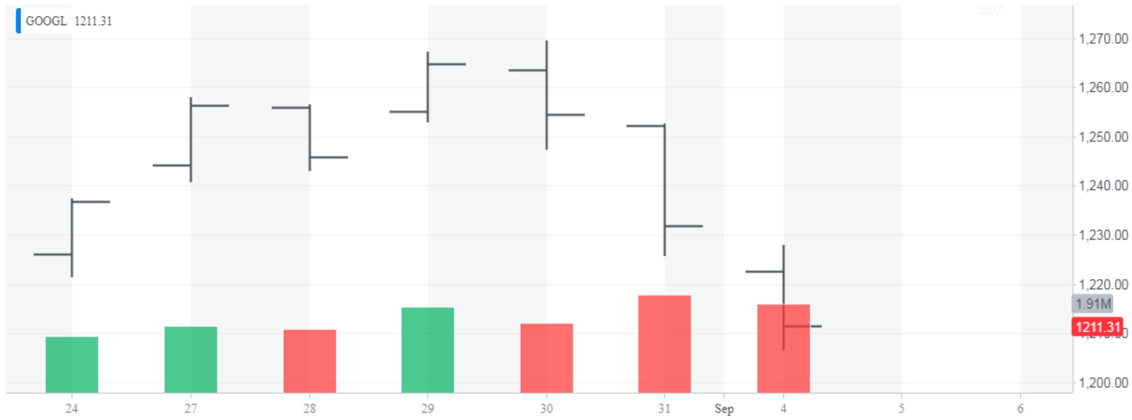



**Figura 2.3.** Acciones de Google vista en la fecha 5/09/2018. Fuente: imagen tomada de (Yahoo, s.f.).

Significado de las tendencias diarias:

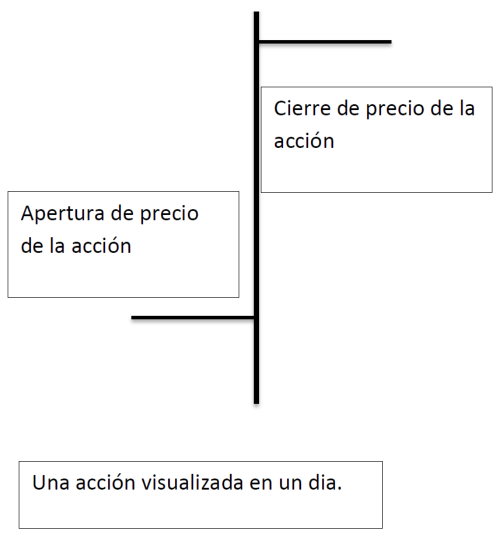



**Figura 2.4.** Acciones vista en un día de mercado Fuente: elaboración propia.

**Definición 2.1.** El tenedor del activo se le llama **comprador** y al emisor del activo es el **vendedor**.

### 2.3.1. Posiciones de una acción

- Una posición a lo largo para una acción es cuando la acción sube de precio y ganamos dinero cuando sube, pero perdemos cuando baja.
- Una posición a lo corto para una acción es cuando la acción baja de precio se ganará dinero si cae y se perderá si sube.

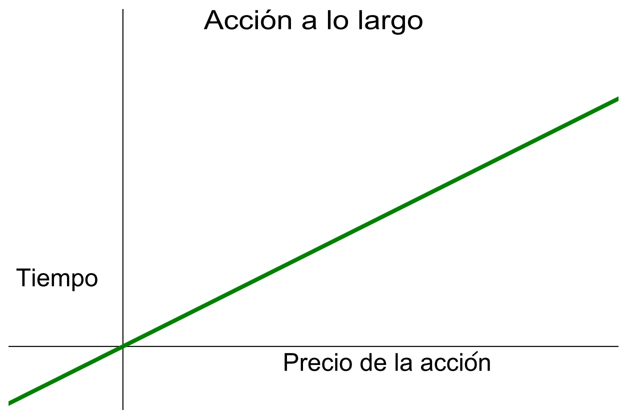



**Figura 2.5.** Acción a lo largo elaborado en GeoGebra. Fuente: elaboración propia.

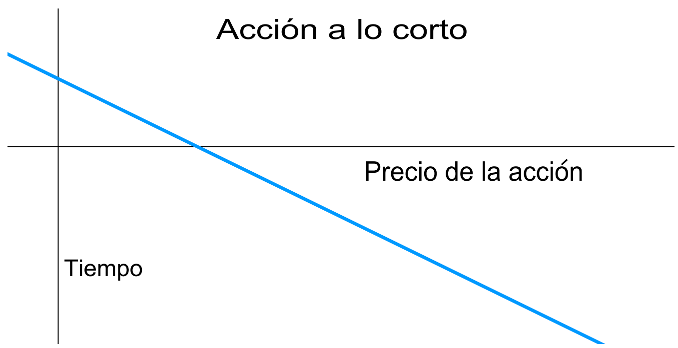



**Figura 2.6.** Acción a lo corto elaborado en GeoGebra. Fuente: elaboración propia

**Definición 2.2.** Un **activo financiero** es un titulo que otorga el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor.

**Definición 2.3.** Un **activo subyacente** es aquel activo financiero sobre el que caen contratos financieros, es decir el valor de referencia de determinados derivados financieros.

**Definición 2.4.** Un **arbitraje** es la compra y venta de productos en distintos mercados mediante la combinación de ofertas, aprovechando la diferencia de precios; a las personas que se dedican al arbitraje se le denominan **arbitrajista**.

**Definición 2.5.** Sea un contrato a plazo sobre una acción o activo con precio $\mathcal{S}$ que no proporciona ninguna rentabilidad, $t$ es el tiempo hasta el vencimiento, $r$ el interés libre de riesgo, y $R$ es el **precio a plazo** por lo tanto

$$R = Se^{rt}. \tag{2.5}$$

Si $R > Se^{rt}$, los arbitrajistas pueden comprar el activo y tomar posiciones cortas en contratos a plazos sobre el mismo. Si $R < Se^{rt}$, los arbitrajistas pueden vender el activo y comprar contratos a plazos sobre él.

### 2.3.2. Rendimiento conocido

Consideremos ahora el activo subyacente en un contrato a plazo genera un rendimiento conocido en lugar de un ingreso liquido conocido. Esto quiere decir que el ingreso, expresado como un porcentaje del precio del activo es conocido.

**Definición 2.6.** Definamos $q$ como el **rendimiento medio anual** de un activo durante la expiración del contrato.

$$R = Se^{(r-q)t}. \tag{2.6}$$

### 2.3.3. Opciones

Una **opción** es un contrato que se da a su comprador el derecho pero no la obligación a comprar o vender el activo, hasta una fecha concreta. Existen dos tipos de opciones:

- Opción de compra (*calls*).
- Opción de venta (*puts*).

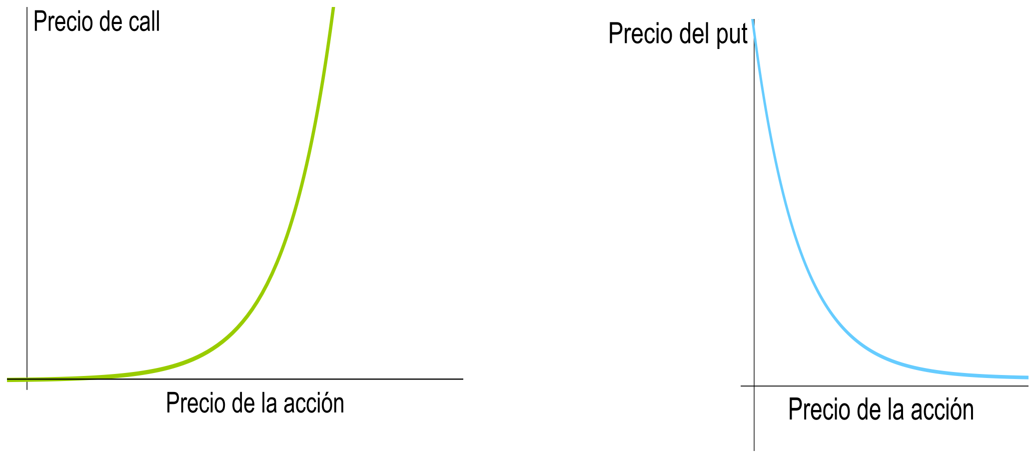
Un *call* es una opción de compra, en el que uno tiene el derecho pero no la obligación de comprar el activo financiero asociadas; si se emite un *call* tiene la obligación de entregar las acciones asociadas al precio de ejecución.

Un *put* es una opción de venta, en el que uno tiene el derecho pero no la obligación de vender las acciones asociadas; si se emite un *put* tiene la obligación de entregar las acciones asociadas al precio de ejecución.

Hay dos clases de opciones *europeas* y las *americanas*; las opciones *europeas* son aquellas que solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento; a esto le podemos decir que tienen un tiempo discreto.

En cambio las opciones *americanas*, pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de su fecha de vencimiento, a esto le podemos decir que tienen un tiempo continuo.

**Definición 2.7.** Un *call* es $\mathcal{C} = \max(0, \mathcal{S} - \mathcal{X})$; sea $\mathcal{X}$ es el precio de ejercicio y $\mathcal{S}$ es el precio de un activo financiero. Mientras un *put* es $\mathcal{P} = \max(0, \mathcal{X} - \mathcal{S})$.



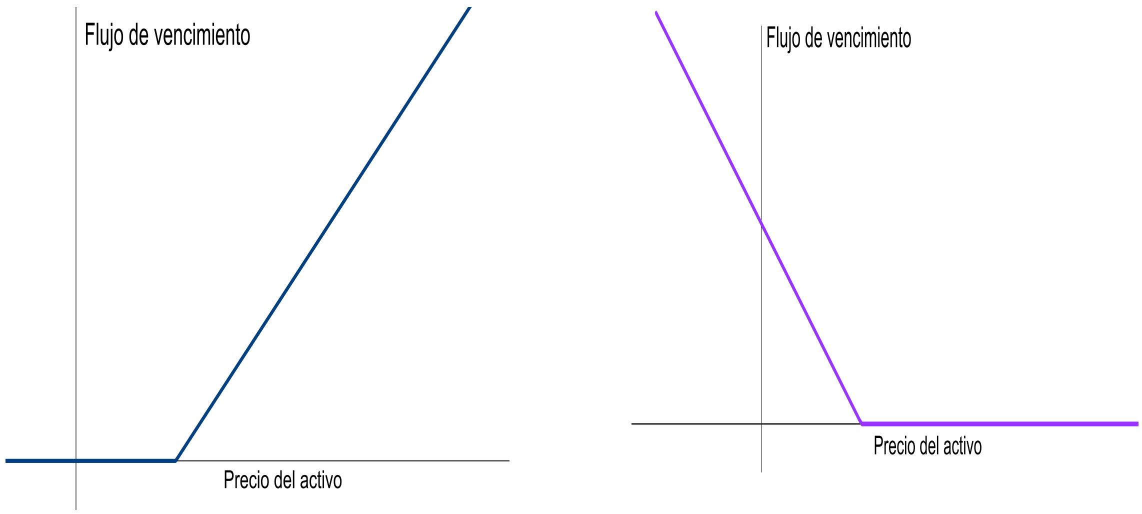

**(a)** Valor de un *call*. **(b)** Valor de un *put*.

**Figura 2.7.** Valores de las opciones a través del tiempo elaborado en GeoGebra. Fuente: elaboración propia.

### 2.3.4. Posiciones de una opción

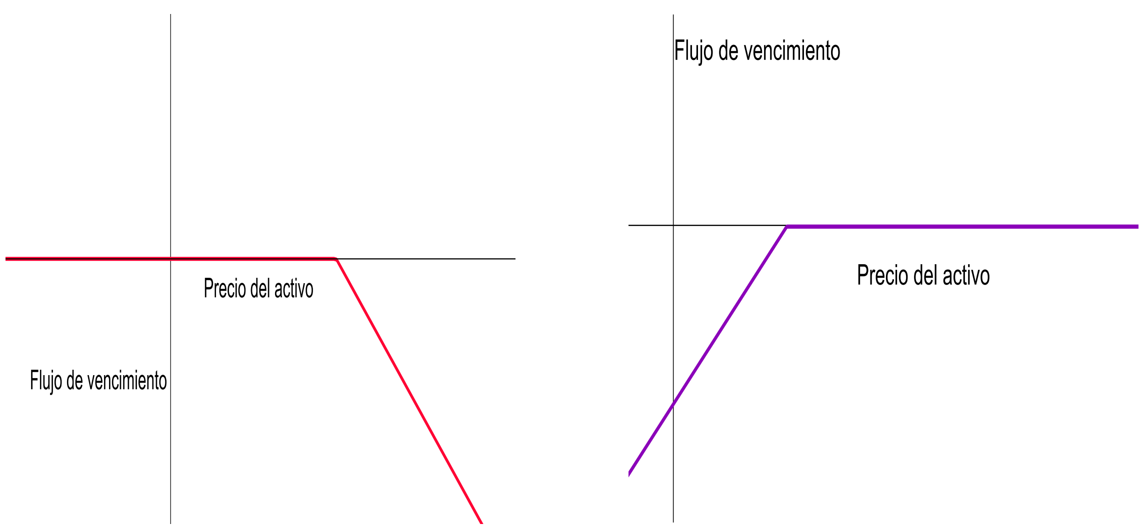
- Una posición larga para un *call* es cuando la acción sube de precio entonces, el precio de la opción sube.
- Una posición larga para un *put* es cuando la acción baja de precio entonces, el precio de la opción sube.
- Una posición en corto para un *call* es cuando la acción baja de precio entonces, el precio de la opción baja.
- Una posición en corto para un *put* es cuando la acción sube de precio entonces, el precio de la opción baja.

Ver las gráficas con las características explicadas anteriormente




**(a)** Valor de un *call*. **(b)** Valor de un *put*.

**Figura 2.8.** Posición a lo largo de las opciones a través del tiempo elaborado en GeoGebra. Fuente: elaboración propia.




**(a)** Valor de un *call*. **(b)** Valor de un *put*.

**Figura 2.9.** Posición a lo corto de las opciones a través del tiempo elaborado en GeoGebra. Fuente: elaboración propia.

## 2.4. Valor intrínseco

El valor intrínseco de un bien es el derecho que vale, sus tres formas que se pueden dar son:

- Dentro (*in the money*).
- Hacia el dinero (*at the money*).

- Fuera de dinero (*out of the money*).

Si es *in the money* para un *call* es si el precio de ejecución de un *call* es mayor que el precio de la acción en pocas palabras $\mathcal{S} > \mathcal{X}$.

Si es **in the money** para un *put* es si el precio de ejecución de un *put* es menor que el precio de la acción en pocas palabras $\mathcal{S} > \mathcal{X}$.

Si es **at the money** para un *Call* es si el precio de ejecución de un *call* es igual que el precio de la acción en pocas palabras $\mathcal{S} = \mathcal{X}$.

Si es **at the money** para un *put* es si el precio de ejecución de un *put* es igual que el precio de la acción en pocas palabras $\mathcal{S} = \mathcal{X}$.

Si es **out of the money** para un *call* es si el precio de ejecución de un *call* es menor que el precio de la acción en pocas palabras $\mathcal{S} < \mathcal{X}$.

Si es **out of the money** para un *put* es si el precio de ejecución de un *put* es mayor que el precio de la acción en pocas palabras $\mathcal{X} < \mathcal{S}$.

**Definición 2.8.** Una **prima de una opción** es el precio del contrato o de la opción en pocas palabras es:

$$\text{Prima} = V.I + V.T \tag{2.7}$$

Donde $V.I$ es el valor intrínseco y $V.T$ es el valor del tiempo.

El **valor del tiempo** de una opción se desvanece con mayor rapidez a partir de sus últimos días de expiración, ahora la **volatilidad** del precio de las acciones es una medida de la incertidumbre, sobre los movimientos del precio de las acciones en el futuro. cuando la volatilidad aumenta, las posibilidades de que la acción vaya bien o pueda que vaya mal aumenten en pocas palabras es la desviación estándar del activo. Para el propietario de las acciones, tienen a compensarse el uno con el otro, por ejemplo el propietario de una opción de compra se beneficia de los incrementos de precio pero se ha limitado el riesgo a la baja en el caso de que disminuyera el precio.

**Definición 2.9.** La **volatilidad** mide la variabilidad de las trayectorias o fluctuaciones de los precios, de las rentabilidades de un activo financiero, de los tipos de interés y en general, de cualquier activo financiero en el mercado, definido como la desviación estándar en un modelo financiero.

## 2.5. Propiedades de las opciones sobre acciones

En está sección veremos los factores que determinan los precios de las opciones sobre acciones; Una oportunidad de arbitraje sin riesgo es aquella que, sin ninguna inversión inicial, genera una rentabilidad no negativa en todas las circunstancias y rendimientos positivos. En un mercado eficiente. **El principio dominante del portafolio** dice que él portafolio A debería ser más valioso que el portafolio B si la rentabilidad de A es al menos tan buena bajo todas las circunstancia. Derivando las relaciones libres de arbitraje que los valores de las opciones deben de satisfacer. Estas relaciones son independientes del modelo probabilístico del precio de acciones, solo asumimos que no hay costo de transacción y los prestamos están disponibles a la tasa de interés sin riesgo, las tasas de interés son no negativas y no hay oportunidad de arbitraje, simplificando esto tenemos que el tiempo sea cero. $\mathrm{VP}(x)$ donde $x$ son los dólares a expirar.

$$\mathrm{VP}(x) = xd(\tau) \tag{2.8}$$

Donde $\tau$ es el tiempo a expirar.

**Definición 2.10.** Un portafolio es un **portafolio arbitrario**, si hoy el valor de una inversión es un valor no positivo. y en el futuro tiene una probabilidad cero de ser un valor negativo y una probabilidad no cero de ser un valor positivo.

**Teorema 2.5.1.** *Si el portafolio A y B son tales que en todos los posibles estados del mundo en un tiempo $T$, el portafolio A vale menos que el portafolio B, en cualquier tiempo $t < T$.*

*Demostración.* En la página 27, capítulo 2 del libro (Joshi, 2010). □

### 2.5.1. Límites de las opciones sobre acciones

Una opción de compra americana o europea, le da el derecho a su propietario de comprar una acción a un cierto precio. No importa lo que suceda, la opción nunca puede valer más que las acciones, de ahí que el precio de las acciones sea un límite superior para la opción:

$$\mathcal{C} \leqslant \mathcal{S}, \tag{2.9}$$

si esta relación no cumpliera, un arbitrajista puede fácilmente obtener beneficio sin riesgo comprando la acción y vendiendo la opción de compra.

Una opción de venta americana o europea le da el derecho a su propietario de vender una acción a un cierto precio. Independiente de lo bajo que este el precio de la acción, la opción de venta jamás puede tener un valor superior a la acción de ahí tenemos:

$$\mathcal{P} \leqslant \mathcal{S}. \tag{2.10}$$

Para las opciones europeas, sabemos que en el momento $\tau$, la opción no puede valer más de $\mathcal{X}$, por tanto ahora debe tener un precio menor que el valor actual de $\mathcal{S}$

$$\mathcal{P} \leqslant \mathcal{X} e^{-r\tau}. \tag{2.11}$$

**Lema 2.1.** *Sea una opción americana call con un tiempo de expiración más largo no puede valer menos que la opción con un tiempo corto de expiración*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{C}_{t1} > \mathcal{C}_{t2}$, donde $t1 < t2$, compramos $\mathcal{C}_{t2}$ y vendemos $C_{t1}$ lo cual generamos una diferencia de dinero de $\mathcal{C}_{t1} - \mathcal{C}_{t2}$ a un tiempo cero. Al momento que el tiempo $t2$ sea $\tau$ y un *call* en corto dejamos que expiré o ejercemos el derecho, si dejamos que expire tenemos que la posición vale $\mathcal{C}_\tau - \text{máx}(\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}, 0)$. Si el valor es positivo, cerramos la posición con un beneficio vendiendo la opción. De otra manera, $\text{máx}(\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}, 0) > \mathcal{C}_\tau \geqslant 0$, y para una posición en corto de una *call* es ejercida, en este caso si es ejercido la opción tendrá un diferencia de dinero neto de cero, en ambos casos, el total de pagos es positivo sin ninguna inversión inicial. □

**Lema 2.2.** *La opción call con un precio de ejercicio más alto no puede valer más que un call con un precio de ejercicio más bajo.*

*Demostración.* Esta proposición ciertamente se mantiene al vencimiento; por lo tanto es válido para una opción europea, con dos precios de ejercicio que son $\mathcal{X}_1 < \mathcal{X}_2$. Supongamos que $\mathcal{C}_{X1} < \mathcal{C}_{X2}$ compramos el de precio más bajo y vendemos el de precio más alto $\mathcal{C}_{X2}$, generando un retorno positivo. Si el propietario de $\mathcal{C}_{X2}$, ejerce antes de su vencimiento entonces la posición a lo largo genera una diferencia de dinero positivo de $\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1$. □

**Lema 2.3.** *La diferencia en los valores de dos opciones idénticas no puede ser mayor que la diferencia en sus precios de ejercicio.*

*Demostración.* Sean dos precios de ejercicio tal que $\mathcal{X}_1 < \mathcal{X}_2$. Asumamos que $\mathcal{C}_{X1} - \mathcal{C}_{X2} > \mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1$ en lugar. Compramos el precio más bajo $\mathcal{C}_{X2}$ y escribimos a $\mathcal{C}_{X1}$ como el precio más alto, generando retornos positivos y depositando $\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1$ en una cuenta sin riesgo en un banco (cuenta monetaria).

Supongamos que se ejecuta $\mathcal{C}_{X1}$ antes del tiempo de expiración, tendríamos dos casos. Si $\mathcal{C}_{X2} > \mathcal{S} - \mathcal{X}_1$, entonces vendemos $\mathcal{C}_{X2}$, la rentabilidad de la venta seria

$\mathcal{C}_{X2} - (\mathcal{S} - \mathcal{X}_1) > 0$ de lo contrario, si ejercemos $\mathcal{C}_{X2}$ realizaría un flujo de caja de $\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2 < 0$ , en ambos casos cerramos la transacción con el dinero en el banco y tendríamos un flujo de efectivo no negativo. Supongamos ahora que no se ejecuta antes de la fecha de vencimiento $\mathcal{C}_{X1}$, entonces el flujo de efectivo es 0, $\mathcal{X}_1 < \mathcal{S}$, y $\mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2 < 0$, respectivamente si $\mathcal{S} \leq \mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_1 < \mathcal{S} < \mathcal{X}_2$ y $\mathcal{S} \leq \mathcal{X}_2$, el flujo sigue siendo no negativo después de que el dinero se agrega en la cuenta bancaria. □

**Lema 2.4.** *Una opción call jamás va valer más que el precio de su acción, y una opción americana put nunca va a valer más que su precio de ejercicio y una opción europea put jamás va a valer más que su valor presente de su precio de ejercicio.*

*Demostración.* Si la opción *call* vale más que el precio de su acción, hay una opción *call* cubierta que ganaría beneficios arbitrarios. Si la opción *put* vale más que su precio de ejercicio, tendría un seguro en efectivo que haría que ganara beneficios arbitrarios. El límite más estricto se mantiene para las opciones de venta europeas porque el efectivo puede generar intereses sin riesgo hasta el vencimiento. □

### 2.5.2. La paridad de una opción

Supongamos que la acción no paga dividendos en efectivo, o que las opciones están protegidas, para que los valores de las opciones sean insensibles a los dividendos en efectivo. Por lo tanto, los resultados de las opciones protegidas no se enumeran por separado. El principio del no arbitraje implica que la inversión inicial, establece que el portafolio también debe de ser nula. Con esto tenemos la paridad para las opciones europeas:

$$\mathcal{C} = \mathcal{P} + \mathcal{S} - \mathrm{VP}(x). \tag{2.12}$$

Consideremos $\mathcal{C} - \mathcal{P} = \mathcal{S} - \mathrm{VP}(x)$ lo que implica que un *call* a lo largo y un *put* a lo corto, una parte en acciones y un préstamo de $VP(X)$, además se supone que todas las opciones tienen el mismo precio de ejercicio y el mismo tiempo de vencimiento $\tau$ . Tenemos una inversión inicial de $\mathcal{C} - \mathcal{P} - \mathcal{S} + \mathrm{VP}(X)$, si el precio de la acción $\mathcal{S}_\tau$ esta cerca a $\mathcal{X}$, la opción *put* va valer $\mathcal{X} - \mathcal{S}_\tau$, mientras que el *call* llega expirar por que su valor se pierde, ahora si $\mathcal{S}_\tau > \mathcal{X}$ entonces la opción *call* va valer $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}$, y la opción *put* llega expirar por que su valor se pierde.

El principio de no arbitraje implica que una inversión inicial con un portafolio nulo, con esto tenemos la paridad call y put de opciones europeas:

$$\mathcal{C} = (\mathcal{S} - \mathcal{X}) + [\mathcal{X} - \mathrm{VP}(x)] + \mathcal{P} \geq \mathcal{S} - \mathcal{X}. \tag{2.13}$$

Por que $\mathcal{C} \geq 0$ dado que $\mathcal{C} \geq \text{máx}(\mathcal{S} - \mathcal{X})$, el valor intrínseco; un *call* americano no puede valer menos que su valor intrínseco. En forma general al momento de evaluar un *call*, existe una correspondencia entre el precio de una *call* y un *put*, ambas sobre el mismo activo, con el mismo precio de ejecución y tiempo de expiración.

**Definición 2.11.** Una **Paridad call y put** en forma general partiendo de 2.12 tenemos

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} - \mathcal{S} + \mathcal{X}e^{-rT}. \tag{2.14}$$

Con esto tenemos los siguientes lemas.

**Lema 2.5.** *Las opciones call y put de una acción que no paga dividendos nunca vale menos que su valor intrínseco*

*Demostración.* Sea $\mathcal{C}$ una opción *call* que no paga dividendos con un precio de ejercicio $\mathcal{X}$ y de acciones $\mathcal{S}$, por definición de un opción *call* sabemos que $\mathcal{C} > \mathcal{S} - \mathcal{X}$, por ende una opción *call* siempre va valer más que su valor intrinsico, para la demostración de *put* vease el (LYUU, s.f.) en el capítulo 8. □

**Lema 2.6.** *Para los put europeos,* $\mathcal{P} \geq \text{máx}(\text{VP}(X) - \mathcal{S}, 0)$

*Demostración.* Supongamos que el $\text{VP}(X)$ de los dividendos cuyos ex dividendos ocurren antes de la fecha de vencimiento $D$. Usando paridad tenemos

$$\mathcal{C} = \mathcal{P} + \mathcal{S} - D - \text{VP}(X).$$

Usando la ecuacion 2.13

$$\mathcal{C} = \mathcal{P} + \mathcal{S} - D - \text{VP}(X) \geq \text{VP}(X) - S,$$

por lo tanto

$$\mathcal{P} \geq \text{máx}(\text{VP}(X) - \mathcal{S}, 0).$$

□

**Teorema 2.5.2.** *Un call americano se ejercerá solo al momento del vencimiento o justo antes de que se venza los dividendos.*

*Demostración.* En la página 88 del capítulo 8 sección 4 del libro (LYUU, s.f.). □

### 2.5.3. Convexidad de los precios de la opciones

**Teorema 2.5.3.** *La convexidad de los precios de las opciones, tenemos que para tres calls idénticas con precio de ejercicio* $\mathcal{X}_1 < \mathcal{X}_2 < \mathcal{X}_3$*, tenemos el:*

$\mathcal{C}_{X_2} \leq \lambda\mathcal{C}_{X_1} + (1-\lambda)\mathcal{C}_{X_3}$ , $\mathcal{P}_{X_2} \leq \lambda\mathcal{P}_{X_1} + (1-\lambda)\mathcal{P}_{X_3}$
*Donde* $\lambda = (\mathcal{X}_3 - \mathcal{X}_2/(\mathcal{X}_3 - \mathcal{X}_1))$.

*Demostración.* Supongamos que no es convexa, primero anotamos en nuestro portafolio a $\mathcal{C}_{X_2}$ entonces compramos $\lambda\mathcal{C}_{X_1}$, y compramos $(1-\lambda)\mathcal{C}_{X_3}$, estamos generando un flujo efectivo positivo. si *call* a lo corto no es ejecutado antes del día de expiración manteniendo los *calls* hasta la expiración el flujo de caja es descrito como:

| | $\mathcal{S} \leq \mathcal{X}_1$ | $\mathcal{X}_1 < \mathcal{S} \leq \mathcal{X}_2$ | $\mathcal{X}_2 < \mathcal{S} < \mathcal{X}_3$ | $\mathcal{X}_3 \leq \mathcal{S}$ |
|---|---|---|---|---|
| *Call* descrito en $\mathcal{X}_2$ | 0 | 0 | $\mathcal{X}_2 - \mathcal{S}$ | $\mathcal{X}_2 - \mathcal{S}$ |
| $\lambda$ *calls* compradas en $\mathcal{X}_1$ | 0 | $\lambda(\mathcal{S} - \mathcal{X}_1)$ | $\lambda(\mathcal{S} - \mathcal{X}_1)$ | $\lambda(\mathcal{S} - \mathcal{X}_1)$ |
| $1-\lambda$ *calls* compradas en $\mathcal{X}_3$ | 0 | 0 | 0 | $(1-\lambda)(\mathcal{S} - \mathcal{X}_3)$ |
| | 0 | $\lambda(\mathcal{S} - \mathcal{X}_1)$ | $\lambda(\mathcal{S} - \mathcal{X}_1) + (\mathcal{X}_2 - \mathcal{S})$ | 0 |

**Tabla 2.1.** Convexidad de las opciones.

Tenemos que el flujo de dinero es 0 o positivo, esto es una propiedad de arbitraje. Supongamos que el *call* a lo corto se ejerce anticipadamente cuando el precio de la acción $\mathcal{S}$. Si $\lambda\mathcal{C}_{X_1} + (1-\lambda)\mathcal{C}_{X_3} > \mathcal{S} - \mathcal{X}_2$, vendemos *calls* a lo largo para generar un flujo de dinero de $\lambda\mathcal{C}_{X_1} + (1-\lambda)\mathcal{C}_{X_3} - (\mathcal{S} - \mathcal{X}_2) > 0$. De lo contrario, ejecute los *Calls* a lo largo y entregue las acciones, entonces el flujo neto de dinero es $-\lambda\mathcal{X}_1 - (1-\lambda)\mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_2 = 0$. De nuevo tenemos que es una propiedad arbitraria. Por el lema 2.3, sabemos que la pendiente del valor de un *call* (*put*), cuando se traza con el precio de ejercicio, es a lo más uno (menos uno, respectivamente). esto prueba que se forma la convexidad. □

## 2.6. Estrategias sobre opciones

Las estrategias sobre opciones implican tomar posiciones en opciones, los activos subyacentes, y los prestamos otorgados, las 4 posiciones que tienen son: **call a lo largo, call a lo corto, put a lo largo y un put a lo corto**. Las estrategias pueden ser de tres tipos:

- Diferenciales de precios (*spreads*).

- Combinaciones (*straddle*).

- Neutral.

### 2.6.1. Diferenciales de precios

Una estrategia *spread* consiste en tomar una posición en dos o más opciones del mismo tipo es decir, dos o más opciones de compra o opciones de venta. Los *spreads* están divididos de la siguiente manera:

- Diferencial alcista.

- Diferencial bajista.

- Mariposas.

Para el **diferencial alcista** consiste en comprar una opción de compra sobre acciones con cierto precio de ejercicio y vendiendo una opción de compra sobre las misma acciones con un precio de ejercicio más alto, ambas opciones tienen la misma fecha de vencimiento. Supongamos que $\mathcal{X}_1$ es el precio ejercicio de la opción de compra adquirida, $\mathcal{X}_2$, es el precio de ejercicio de la opción de compra vendida, $\mathcal{S}_\tau$ es el precio de las acciones en la fecha de vencimiento de las opciones, ahora se mostrara la tabla de beneficios según lo que vaya a ocurrir.

| Beneficio tipo diferencial alcista | | | |
|---|---|---|---|
| Rango del precio de las acciones | Beneficio bruto de la compra de la opción de compra | Beneficio bruto de la venta de la opción de compra | Beneficio total |
| $\mathcal{S}_\tau \geqslant \mathcal{X}_2$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_1$ | $\mathcal{X}_2 - \mathcal{S}_\tau$ | $\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1$ |
| $\mathcal{X}_1 < \mathcal{S}_\tau < \mathcal{X}_2$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_1$ | 0 | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_1$ |
| $\mathcal{S}_\tau \leqslant \mathcal{X}_1$ | 0 | 0 | 0 |

**Tabla 2.2.** Beneficio tipo diferencial alcista.

Un inversionista que firma un diferencial alcista espera que la acción suba, mientras que por el contrario firma un **diferencial bajista** espera que la acción baje, consiste comprar una opción de compra con un precio de ejercicio y vendiendo una opción de compra con otro precio de ejercicio. Supongamos que los precios de ejercicio son $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ con $\mathcal{X}_1 < \mathcal{X}_2$, ahora se mostrara la tabla de beneficios según lo que vaya a ocurrir.

| Beneficio tipo diferencial bajista | | | |
|---|---|---|---|
| Rango del de precio las acciones | Beneficio bruto de la compra de la opción de compra | Beneficio bruto de la venta de la opción de compra | Beneficio total |
| $\mathcal{S}_\tau \geqslant \mathcal{X}_2$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_2$ | $\mathcal{X}_1 - \mathcal{S}_\tau$ | $-(\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_1)$ |
| $\mathcal{X}_1 < \mathcal{S}_\tau < \mathcal{X}_2$ | 0 | $\mathcal{X}_1 - \mathcal{S}_\tau$ | $-(\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_1)$ |
| $\mathcal{S}_\tau \leqslant \mathcal{X}_1$ | 0 | 0 | 0 |

**Tabla 2.3.** Beneficio tipo diferencial bajista.

Un **diferencial mariposa** incluye posiciones en opciones con tres precios de ejercicio distintos. Puede crearse comprando una opción de compra con un precio de ejercicio bajo $\mathcal{X}_1$, comprando una opción de compra con un precio de ejercicio alto $\mathcal{X}_3$, y vendiendo dos opciones de compra con un precio de ejercicio $\mathcal{X}_2$, ahora se mostrara el esquema de beneficios de la estrategia.

| Beneficio tipo mariposa | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Rango del precio de las acciones | Beneficio bruto de la opción | | | |
| | Primera compra | Segunda compra | Venta | Total |
| $\mathcal{S}_\tau < \mathcal{X}_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathcal{X}_1 < \mathcal{S}_\tau < \mathcal{X}_2$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_1$ | 0 | 0 | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_1$ |
| $\mathcal{X}_2 < \mathcal{S}_\tau < \mathcal{X}_3$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_1$ | 0 | $-2(\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_2)$ | $\mathcal{X}_3 - \mathcal{S}_\tau$ |
| $\mathcal{S}_\tau > \mathcal{X}_3$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_1$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_3$ | $-2(\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_2)$ | 0 |

**Tabla 2.4.** Beneficio tipo mariposa.

### 2.6.2. Combinación

Una combinación es una estrategia especulativa utilizando opciones que consiste en tomar una posición tanto en opciones de compra como opciones de venta sobre la misma nn, las más conocidas son

- Cono (*straddle*).
- Cuna (*stangles*).

Una **combinación cono** consiste en comprar una opción de compra y una de venta con igual precio de ejercicio y vencimiento. El esquema de beneficios de las posibles acontecimientos.

| Beneficio tipo cono | | | |
|---|---|---|---|
| Rango del precio de las acciones | Beneficio bruto de la opción de compra | Beneficio bruto de la opción de venta | Beneficio bruto total |
| $\mathcal{S}_\tau \leqslant \mathcal{X}$ | 0 | $\mathcal{X} - \mathcal{S}_\tau$ | $\mathcal{X} - \mathcal{S}_\tau$ |
| $\mathcal{S}_\tau > \mathcal{X}$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}$ | 0 | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}$ |

**Tabla 2.5.** Beneficio tipo cono.

En una **cuna**, un inversionista compra una opción de compra $\mathcal{X}_2$ y una opción de venta $\mathcal{X}_1$ con iguales vencimientos y diferentes precios de ejercicio teniendo en cuenta que $\mathcal{X}_2 > \mathcal{X}_1$. El esquema de beneficios de las posibles acontecimientos.

| Beneficio tipo cuna | | | |
|---|---|---|---|
| Rango del precio de las acciones | Beneficio bruto de la opción de compra | Beneficio bruto de la opción de venta | Beneficio bruto total |
| $\mathcal{S}_\tau \leqslant \mathcal{X}_1$ | 0 | $\mathcal{X}_1 - \mathcal{S}_\tau$ | $\mathcal{X}_1 - \mathcal{S}_\tau$ |
| $\mathcal{X}_1 < \mathcal{S}_\tau < \mathcal{X}_2$ | 0 | 0 | 0 |
| $\mathcal{S}_\tau \geqslant \mathcal{X}_2$ | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_2$ | 0 | $\mathcal{S}_\tau - \mathcal{X}_2$ |

**Tabla 2.6.** Beneficio tipo cuna.

# 3. Teoría de calculo estocástico

## 3.1. Introducción

Los precios tienen un componente de incertidumbre o indeterminación, por esa razón se dice que cumplen un modelo estocástico, esto es un factor probabilístico que representa la incertidumbre en el valor del mismo a futuro, podría ser que suba o baje, si este factor no existiera los precios variarían unicamente por el interés, y sabríamos cuando puede subir o bajar en cualquier momento, con esto no existiría el riesgo de perder dinero,sin embargo ha llegado el momento en el que debemos empezar a desarrollar las herramientas más complicadas para manipular las fórmulas.

Hay un enfoque bastante importante para la fijación de precios de derivados, como es el calculo estocástico para desarrollar una ecuación diferencial parcial, uno de los más importantes es el lema de Itto que es fundamental para la construcción del modelo de Black Scholes.

## 3.2. Proceso estocástico

Sea una colección $\{X(t) \mid t > 0\}$ de variables aleatorias se llama un proceso estocástico.

**Definición 3.1.** Si $\{X(t) \mid t > 0\}$ es un proceso estocástico, la $\sigma$- álgebra

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{s}) := \{\mathfrak{U}(\mathfrak{r}) \mid 0 \leq r \leq s\}.$$

Se llama la historia del proceso hasta el tiempo $s$. La historia retiene la información de $X$ hasta el tiempo $s$.

**Definición 3.2.** Un proceso de Markov se define como un proceso estocástico con la propiedad de que para cualquier conjunto sucesivo de $n$ tiempos $t_1 < \cdots < t_n$, se tiene que

$$P_{1|n-1}(y_n, t_n \mid y_1, t_1; \ldots; y_{n-1}, t_{n-1}) = P_{1|1}(y_n, t_n \mid y_{n-1}, t_{n-1}) \tag{3.1}$$

otra forma de verlo, Sea $B \in \mathfrak{B}$

$$P(X(t) \in B \mid U(s)) = P(X(t) \in B \mid X(s)).$$

Para $0 \leq s \leq t$.

### 3.2.1. Movimiento Browniano

El movimiento browniano o proceso de Wiener es un proceso estocástico que utiliza el camino aleatorio y el teorema *Donsker* podran revisar esto en (Dudley, 1999) ; que esta estrechamente relacionado con la distribución normal.

**Definición 3.3.** Sea $W_t$ una sucesión de variables aleatorias, para $t \geq 0$ es un movimiento browiano si

1. $W_0 = 0$.
2. Para cada $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ es una distribuido de la distribución normal con media 0 y varianza $t - s$.
3. $W_t - W_s$ es independiente de $W_r$, para $r \leq s$.
4. Para todo $b$ en un conjunto de probabilidad uno, $W_t(b)$ es una función continua de $t$.

Propiedades del movimiento browniano

1. $W$ esta bien definido.
2. $W$ es continuo con probabilidad 1.
3. $W$ no es diferenciable en $[s, t+s]$, para todo $t > 0$ y $s > 0$ con probabilidad 1.
4. Es auto similar si se cambia de escala el proceso, sigue siendo un movimiento browniano: Si $W$ es un movimiento browniano en $[0, T]$ entonces

$$Z(t) = W(\lambda t)\frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

es un movimiento browniano en $[0, \frac{T}{\lambda}]$.

**Definición 3.4.** Sea $W_t$ un movimiento browniano, y $X_t$ una familia de variables aleatorias que satisface la ecuación diferencial estocástica,

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \tag{3.2}$$

Al final de este capitulo se puede apreciar las figuras 3.1 y 3.2, que es una simulación del movimiento browniano y una de varios pasos respectivamente elaborado en r.

### 3.2.2. Estudio de $dW_t$

Lo que sabemos de $dW_t$ es que es una caminata aleatoria, supongamos que tiene esta forma

$$X_{n+1} = X_n \pm \psi(dt), \quad X_0 = 0.$$

Por lo cual, para alguna $\psi(dt)$,

$$dX_n = \pm\psi(dt).$$

Calculemos su esperanza y su varianza,

$$E(dX_n) = 0, \quad \text{Var}(dX_n) = \psi(dt)^2.$$

Además sabemos que $E(X(T)) = 0$ y la varianza

$$\text{Var}(X(T)) = \sum_{j=0}^{k-1} \text{Var}(dX_n) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi(dt)^2 = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\psi(dt)^2}{dt} dt.$$

Analicemos lo siguiente

- Si $\dfrac{\psi(dt)^2}{dt} \to 0$, entonces $\text{Var}(X(T)) = 0$, no seria estocástico es determinístico
- Si $\dfrac{\psi(dt)^2}{dt} \to \infty$ es irrelevante.
- Si $\dfrac{\psi(dt)^2}{dt} \to G > 0$, es algo que no va ser útil, por lo que

$$\frac{\psi(dt)}{\sqrt{dt}} \to \sqrt{G}. \tag{3.3}$$

Con esto tenemos que $\psi(dt)$ es del orden de $\sqrt{dt}$, por lo cual va ser esencial el análisis en ahora en adelante; por lo que otra forma de escribir a $dW = \phi\sqrt{dt}$, donde $\phi$ es una variable aleatoria cuya distribución es la de una normal estándar, es decir

$$P(\phi \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp^{\frac{-t^2}{2}} dt.$$

Con $E(\phi) = 0$ y $\mathrm{Var}(\phi) = 1$.

## 3.3. Integrales estocásticas

Sean $f(t, W)$ una función en $t$, $W(t)$ un movimiento browniano y $\Pi = \{t_1, \cdots t_n\}$ una partición del [0,T], si la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, W(t_k))\Delta W_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, W(t_k))(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

converge al refinar la partición y esto ocurre para todas las particiones, ahora con esto podemos definir

**Definición 3.5.** Sean $f(t, W)$ una función en $t$, $W(t)$ un movimiento browniano y $\Pi = \{t_1, \cdots t_n\}$ una partición del $[0, T]$, la integral estocástica o de Ito es

$$\int_0^T f(t, W(t))dW = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, W(t_k))\Delta W_k \tag{3.4}$$

con $\Delta W_k = (W_{k+1} - W(t_k))$.

**Definición 3.6.** Sea un proceso de Ito o un proceso estocástico en $(S, \mathfrak{S}, P)$, tenemos

$$X_t = X_0 + \int_0^s U_t dt + \int_0^s V_t dW_t \tag{3.5}$$

donde $U$, $V$ variables aleatorias, otra forma de verlo es

$$dX_t = U_t dt + V_t dW_t$$

Ahora podemos enunciar el lema de Ito

**Teorema 3.3.1.** *(Lema de Ito) Sea $X_t$ un proceso de Ito que satisface*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \tag{3.6}$$

*Sea $f(x, t)$ una función diferenciable dos; entonces tenemos que $f(X_t, t)$ es un pro-*

*ceso de Ito,*

$$d(f(X_t,t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t)dX + f'(X_t,t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t,t)dX_t^2. \tag{3.7}$$

*Donde $dX_t^2$ esta definido como*

$$\begin{aligned} dt^2 &= 0 \\ dtdW_t &= 0 \\ dW_t^2 &= dt \end{aligned} \tag{3.8}$$

*o bien se puede expresar de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} df((X_t,t)) = \sigma(X_t,t)\frac{\partial f}{\partial X}(X_t,t)dW_t + \Bigg(\frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t) + \cdots \\ + (X_t,t)\mu(X_t,t)\frac{\partial f}{\partial X}(X_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t,t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X_t,t)\Bigg)dt, \end{aligned} \tag{3.9}$$

únicamente daremos una idea de la demostración.

*Demostración.* (bosquejo) Tomemos el siguiente diferencial

$$dV = V(X + dX, t + dt) - V(X,t),$$

donde $V = f(X_t,t)$ una función suave, desarrollando por Taylor se tiene que:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial X}dX + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(dX)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial X}dXdt + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2\right) + R \tag{3.10}$$

En donde $R$ es el resto de Taylor de ordenes $(dX)^3$, $(dX)^2dt$, $dX(dt)^2$ y $(dt)^3$; usando el hecho que $(dW)^2$ es del orden de $dt$, por lo visto en 1.10.2 y que $dX = \mu X dt + \sigma X dW$ tenemos que:

$$(dX)^2 = \mu^2X^2 + 2\sigma\mu X^2 dtdW + \sigma^2X^2(dW)^2,$$

resulta que $dX = O(dX) = \sqrt{dt}$. Por lo cual, en (1.52), los términos en los que aparecen $dXdt$ y $(dt)^2$ los podemos añadir a $R_1$ un nuevo resto con esto tenemos:

$$V(X + dX, t + dt) - V(X,t) = \frac{\partial V}{\partial X}dX + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(dX)^2 + R_1$$

Reemplazando $dX$ en $dW$ y haciendo tender $dt \to 0$, llegamos al resultado:

$$dV = \sigma\frac{\partial V}{\partial X}dW + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu X\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right)dt. \qquad \square$$

Si uno quiere ver en detalle la demostración puede ver en el libro de (Øksendal, 2003) capítulo 4 o en el libro (Steele, 2012); este teorema es el más fundamental en finanzas y es conocido como el lema de Ito.

### 3.3.1. Aplicación de Lema de Ito

Un modelo estándar de como van evolucionando los precios de las acciones es por medio del movimiento browniano.

**Definición 3.7.** Sean $\mathcal{S}_t$ Una acción a través del tiempo y tomando la ecuación 1.45 tenemos que la acción se comportara de la siguiente forma

$$d\mathcal{S}_t = \mu\mathcal{S}_t dt + \sigma\mathcal{S}_t dW_t \tag{3.11}$$

con $\mu$ y $\sigma$ constantes, a esto lo podemos reescribir de la siguiente forma

$$\frac{d\mathcal{S}_t}{\mathcal{S}_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{3.12}$$

donde $\dfrac{d\mathcal{S}_t}{\mathcal{S}_t}$ es el retorno del activo, $\mu$ es una medida del cambio de crecimiento promedio del precio del activo, también llamado *drift*. En modelos sencillos se toma $\mu$ constante, pero en otros $\mu$ puede ser una función de $\mathcal{S}_t$ y de $t$.

La otra parte modela la aleatoriedad en el cambio del precio $\mathcal{S}_t$ en respuesta a los efectos externos, se representa como un muestreo aleatorio sacando de una distribución normal con media 0 y agrega el retorno, el término

$$\sigma dW_t.$$

Donde $\sigma$ es la volatilidad, que mide la desviación estándar de los retornos. Sea un mercado libre de riesgo y que cuenta con el siguiente proceso

$$dB_t = rB_t dt,$$

es equivalente decir que $B_t = B_0 e^{rt}$, la diferencia $\mu - r$ expresa la el tamaño del riesgo. Si esta cantidad de inversión crece adicionalmente la demanda debe compensarse con un riesgo extra introducido por el movimiento browniano. Con esto el valor de incremento esperado con un radio de volatilidad de:

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{3.13}$$

a esto le llamamos *precio de mercado de riesgo* donde $\lambda$ es el único precio de mercado de un pedazo de riesgo.

**Lema 3.1.** *Si un modelo de la forma* log *−normal de precio de acciones evoluciona a log de precio de acciones sigue una distribución normal.*

*Demostración.* Tomemos el lema de Ito y un poco de calculo estocástico. Sea $\mathcal{S}_t, \mathcal{Y}_t$ el precio de la acciones, supongamos que $\mathcal{S}_t = e^{\mathcal{Y}_t}$, o $\mathcal{Y}_t = \log \mathcal{S}_t$ aplicando el lema de Ito tenemos

$$d\mathcal{Y}_t = d(\log \mathcal{S}_t) = (\log \mathcal{S}_t)' \mu \mathcal{S}_t dt + (\log \mathcal{S}_t)' \sigma \mathcal{S}_t dW_t + \frac{1}{2}(\log \mathcal{S}_t)'' \sigma^2 \mathcal{S}_t^2 dt.$$

Como sabemos $\log \mathcal{S}_t' = \mathcal{S}_t^{-1}$ y $\log \mathcal{S}_t'' = -\mathcal{S}_t^{-2}$, con esto obtenemos

$$d\mathcal{Y}_t = d(\log \mathcal{S}_t) = \frac{1}{\mathcal{S}_t} \mu \mathcal{S}_t dt + \frac{1}{\mathcal{S}_t} \sigma \mathcal{S}_t dW_t + -\frac{1}{2\mathcal{S}_t^2} \sigma^2 \mathcal{S}_t^2 dt.$$

Ahora agrupamos términos y tenemos,

$$d\mathcal{Y}_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t$$

Concluyendo con esto tenemos que $\log \mathcal{S}$, es un movimiento browniano simple con un *drift* tenemos

$$\mathcal{Y}_t - \mathcal{Y}_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \sqrt{t} N(0,1).$$

Con esto concluimos que

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}N(0,1)}. \tag{3.14}$$

□

Este es el modelo log *−normal* de precios de acciones con la distribución normal.

Supongamos que nuestras acciones no son proporcionales y que tenga la siguiente forma

$$d\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t^{\alpha} \mu dt + \mathcal{S}_t^{\beta} \sigma dW_t, \tag{3.15}$$

con $\beta \neq 0.1$. A este proceso se le conoce como elasticidad constante de la varianza o CEV; Si tomamos $df(\mathcal{S})$ para alguna función suave $f$ entonces la volatilidad de nuestro proceso es implementando el lema de Ito. Para que la volatilidad sea un coeficiente constante, tiene que ser

$$f'(S) = \mathcal{S}^{-\beta}.$$

Ahora tomemos

$$f(\mathcal{S}) = \frac{\mathcal{S}^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Con esto sabemos que

$$f''(\mathcal{S}) = -\beta\mathcal{S}^{-\beta-1}.$$

Usando el lema de Ito, tenemos

$$df(\mathcal{S}) = \left(\mathcal{S}^{\alpha-\beta}\mu - \frac{\beta}{2}\mathcal{S}^{\beta-1}\sigma^2\right)dt + \sigma dW. \tag{3.16}$$

Con esto tenemos que la volatilidad es una constante, ahora si $\alpha$ y $\beta$ son iguales a 1 entonces, esto se vuelve el modelo de log -normal.

**Lema 3.2.** *Sumpogamos que las acciones $\mathcal{X}_t$ y $\mathcal{Y}_t$ siguen un movimiento browniano,*

$$\begin{aligned} d\mathcal{X}_t &= \alpha\mathcal{X}_t dt + \sigma\mathcal{X}_t dW_t \\ d\mathcal{Y}_t &= \beta\mathcal{Y}_t dt + \upsilon\mathcal{Y}_t dW_t, \end{aligned} \tag{3.17}$$

*Entonces su drift va ser de $\alpha + \beta + \sigma\upsilon$ y su volatilidad es $\sigma + \upsilon$*

*Demostración.* Tomemos el producto

$$\begin{aligned} d(\mathcal{X}_t\mathcal{Y}_t) &= \mathcal{X}_t d\mathcal{Y}_t + \mathcal{Y}_t d\mathcal{X}_t + d\mathcal{X}_t d\mathcal{Y}_t, \\ &= \mathcal{X}_t\mathcal{Y}_t(\beta dt + \upsilon dW_t + \alpha dt + \sigma dW_t + \sigma\upsilon dt), \\ &= \mathcal{X}_t\mathcal{Y}_t((\alpha + \beta + \sigma\upsilon)dt + (\upsilon + \sigma)dW_t). \end{aligned}$$

Con esto tenemos un *drift* de $\alpha + \beta + \sigma\upsilon$ y su volatilidad de $\sigma + \upsilon$. □

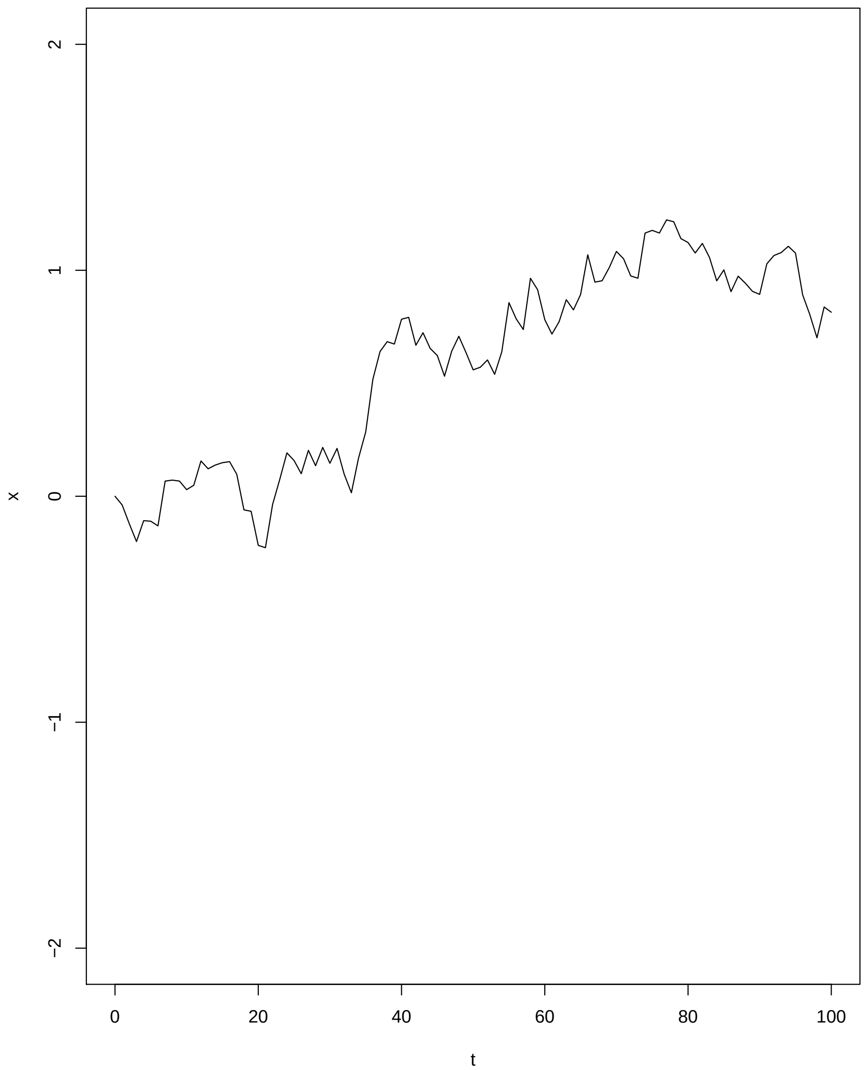



**Figura 3.1.** Simulación del movimiento browniano.Fuente elaboración propia en R

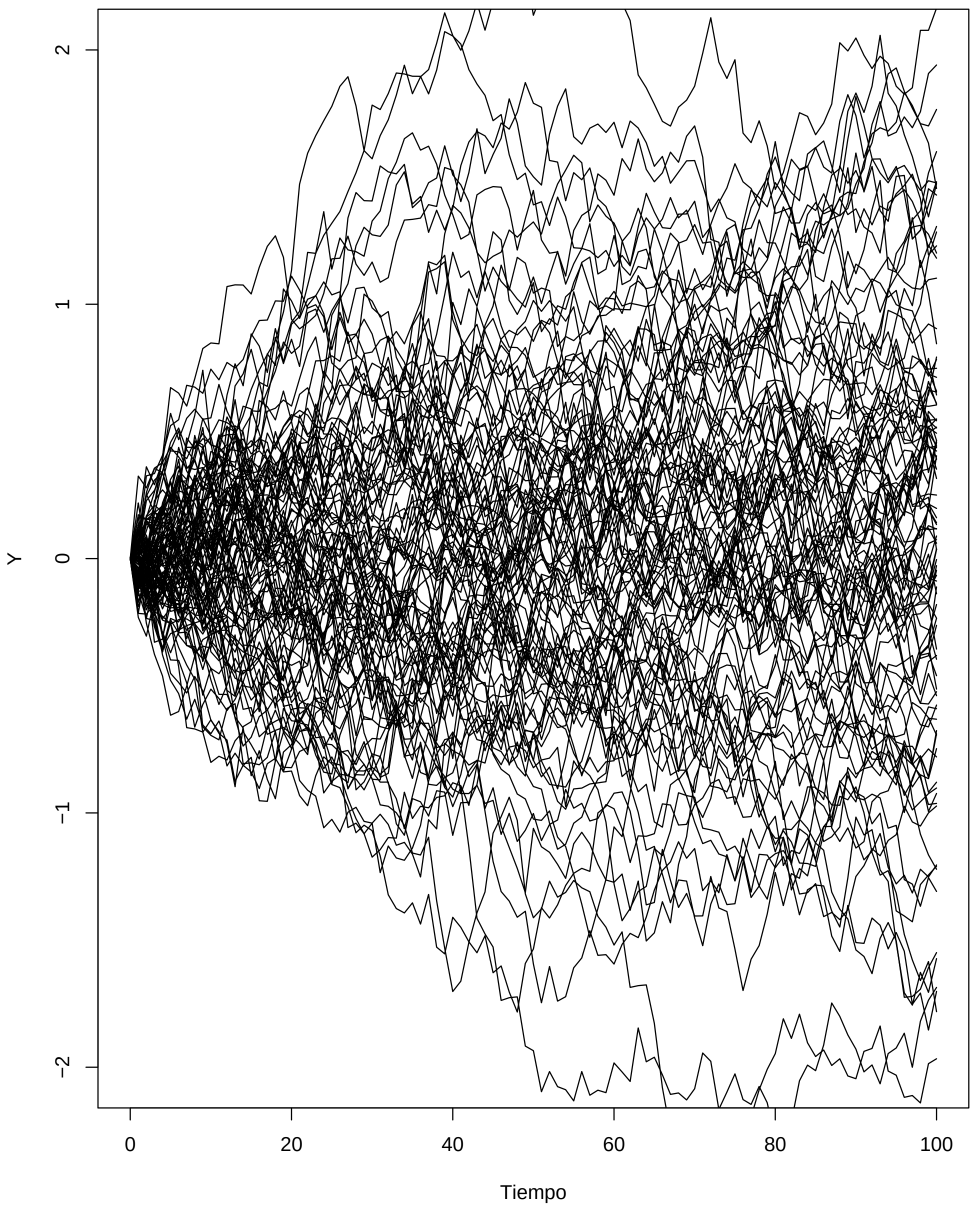



**Figura 3.2.** Simulación de varios pasos del movimiento browniano. Fuente elaboración propia en R

# 4. Modelo de árbol binomial

## 4.1. Introducción

Es un modelo para valorar precios de opciones sobre acciones, se basa en construir lo que se conoce como árbol binomial. Este esquema se basa en la representación de diferentes trayectorias posibles, que puede seguir el precio de las acciones subyacentes al igual que las opción durante la vida del contrato de la opción; esto fue elaborado por un famoso articulo publicado por Cox, Ross y Rubinstein en 1979 (Cox, Ross, y Rubinstein, 1979) y (Cox, Ross, y Rubinstein, 2003).

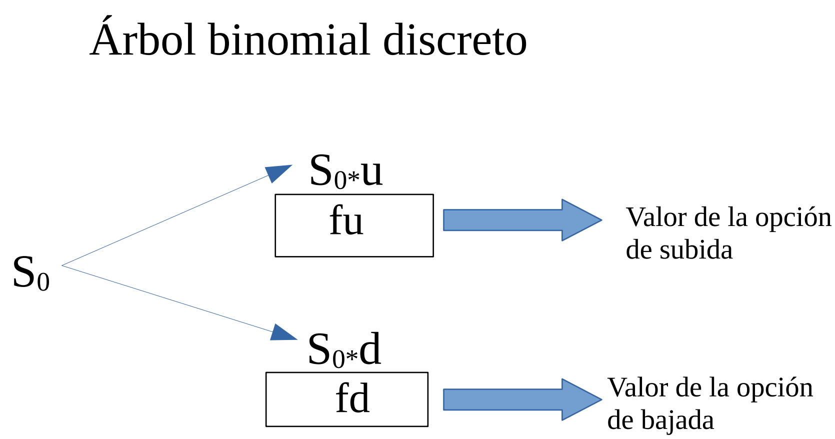



**Figura 4.1.** Árbol binomial discreto. Fuente: elaboración propia.

## 4.2. Árbol binomial discreto

Sea $S$ el precio de una acción, $\mathcal{C}$ el de una opción *call* europea sobre esta con un precio de ejercicio $K$, un tiempo de expiración $T$ y la tasa de libre de riesgo que es $R$. Supongamos que $S$ puede bien subir $Su$ con probabilidad de $p$ o pueda que baje $Sd$ con una probabilidad $1-p$, donde $0 < q < 1$ y $d < u$.

Supongamos que la fecha de expiración es de un solo periodo. Sea $C_u$ va ser el precio del tiempo en que el precio de la acción se mueva para arriba $Su$ y $C_d$ va ser el precio del tiempo en que el precio de la acción se mueva para abajo $Sd$. Por definición tenemos que

$$C_u = \text{máx}(0, Su - K), \quad C_d = \text{máx}(0, Sd - K). \tag{4.1}$$

Ahora construyamos nuestro portafolio $h$ donde estará nuestra acción y $B$ sera los dólares en riesgo en bonos. Este costo es $hS + B$, también podemos llamar a $h$ una cobertura o *heddging* en lo cual consiste en tener una opción a lo corto y una acción a lo largo con esto nos cubrimos ante un cambio en el precio de la acción. Con esto tenemos ahora un portafolio de la siguiente manera $hSu + RB$ y $hSd + RB$, ahora podemos decir que nuestro beneficio bruto es

$$\begin{aligned} hSu + RB &= C_u, \\ hSd + RB &= C_d. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$h = \frac{C_u - C_d}{Su - Sd} \geq 0, \tag{4.2}$$

$$B = \frac{uC_u - dC_d}{(u - d)R}. \tag{4.3}$$

Un portafolio equivalente ha o también llamado portafolio con cobertura, por el principio de no arbitraje, los *call* europeos debe costar lo mismo que un portafolio equivalente con esto $\mathcal{C} = hS + B$ y

$$uC_d - dC_u = \text{máx}(0, Sud - Ku) - \text{máx}(0, Sud - Kd) < 0. \tag{4.4}$$

En efecto recordemos que una opción *call* aumenta su precio cuando suba la acción, por lo que tenemos que el comportamiento de la opción seria$C_d < C_u$ y por definición sabemos que $d < u$ entonces al efectuar la multiplicación $(d - u)(C_d - C_u) < 0$ esto es, $dC_d + uC_u - dC_u - uC_d < 0$ por lo tanto $dC_u > uC_d$.

Para las opciones *puts* se hace de manera análoga por lo que tenemos

$$h = \frac{P_u - P_d}{Su - Sd} \leq 0, \tag{4.5}$$

$$B = \frac{uP_u - dP_d}{(u-d)R}. \tag{4.6}$$

Donde $P_u = \text{máx}(0, K - Su)$ y $P_d = \text{máx}(0, K - Sd)$.

### 4.2.1. Valuación del riesgo neutro

La probabilidad de que suba de precio es $p$ de lo contrario sera $1-p$, nuestra expectativa de retorno es $pSu+(1-p)Sd$, recordemos que los valores de las opciones dependen del tamaño del cambio de precio, $u$ y $d$, magnitudes que los inversores deben de tener en cuenta con esto tenemos

$$\begin{aligned} hS + B &= \frac{C_u - C_d}{Su - Sd}S + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)R} \\ &= \frac{R(C_u - C_d) + (uC_d - dC_u)}{(u-d)R} \\ &= \frac{\left(\frac{R-d}{u-d}\right)C_u + \left(\frac{u-R}{u-d}\right)C_d}{R} > 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Definimos ahora que la probabilidad de $p$ es

$$p = \frac{R-d}{u-d}, \tag{4.8}$$

si esto se satisface entonces $1-p$ es

$$1 - p = \frac{u-R}{u-d}. \tag{4.9}$$

En efecto

$$\begin{aligned} 1 - p = 1 - \frac{R-d}{u-d} &= \frac{u-d-R+d}{u-d} \\ &= \frac{u-R}{u-d}. \end{aligned}$$

Entonces podemos reescribir la ecuación (4.7) y con esto tenemos que

$$hS + B = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{R}. \tag{4.10}$$

Esta $p$ representa una medida de probabilidad y no representa la probabilidad de que el activo suba o baje, sino la de riesgo neutral, que es la que esta regida por la hipótesis de no arbitraje.

Un ejemplo para verlo más claro Consideremos este portafolio, uno de ellos que sea una posición larga en $\Delta$ en acciones y la otra una posición corta en una opción de compra, Solo nos falta calcular el valor de $\Delta$ que hace que el portafolio sea libre de riesgo, si la acción pasa de 30 a 35, el valor de la acción sera $35\Delta$ y el valor de la opción sera de 2 dólares, tenemos que el valor total del portafolio será de $35\Delta - 2$. Si el precio de las acciones baja de 30 a 25, el valor de la acción será de $25\Delta$ y el valor de la opción es de 1 dólar con un valor total del portafolio de $25\Delta - 1$.

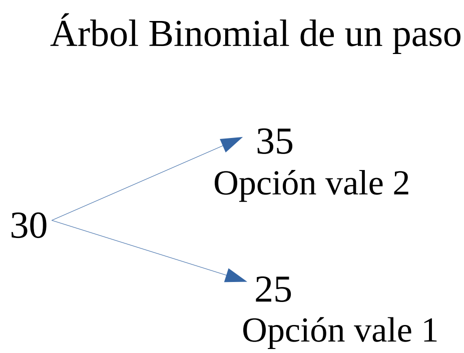



**Figura 4.2.** Ejemplo árbol binomial discreto. Fuente: elaboración propia.

Si el portafolio es libre de riesgo entonces el valor de $\Delta$ se elige de forma que iguala ambas alternativas,

$$35\Delta - 2 = 25\Delta - 1$$

entonces $\Delta = 0.1$.

El portafolio sin riesgo es

| Posición | Acción | Opción |
|---|---|---|
| Larga | 0.1 | – |
| Corta | – | 2 |

si la acción sube a 35 tenemos que

$$35(0.1) - 2 = 1.5,$$

si la acción baja a 25 tenemos que

$$25(0.1) - 1 = 1.5.$$

Sin importar bajadas o subidas de precio el valor del portafolio es de 1.5 al finalizar el contrato de la opción. Como el portafolio libre de riesgo, supongamos que en este caso la tasa de interés del riesgo es de 12 por ciento anual, deducimos que el valor del portafolio es de 1.5 en este día y obtenemos

$$1.5e^{-0.12(0.1)} = 1.48211. \tag{4.11}$$

Se sabe que el valor actual de la acción es de 30, ahora supongamos que el precio de la opción sea $f$. El valor del portafolio sería de

$$30(0.1) - f = 3 - f$$

Con el resultado anterior (4.11) tenemos que

$$3 - f = 1.48211$$

por lo tanto $f = 1.51789$ que aproximadamente es $f = 1.52$.

Con esto tenemos que el valor actual de la opción es de 1.52 dólares. Si el valor de la opción fuese mayor que 1.52 el portafolio inicial costaría menos que 1.5 y ganaría el tipo de interés, de lo contrario es una perdida porque vender en corto sería un préstamo a una tasa de interés menor que el libre de riesgo.

La probabilidad de que la acción suba o baje de precio está dada como

$$pf_u + (1-p)f_d = S_0e^{rT}, \tag{4.12}$$

donde $f_u$ es el valor de la acción en subida, $f_d$ es el valor de la acción en bajada y $S_0$ es el valor de la acción actual. Con estos datos podemos sustituir y tenemos que

$$35p + 25(1-p) = 30e^{0.12(0.1)}.$$

Despejando $p$ obtenemos

$$10p = 5.36217.$$

y el valor de la probabilidad de riesgo es de

$$p = 0.53622.$$

Al final de los tres meses la opción de compra tiene una probabilidad de 0.53622 de valer 2 dólares y una probabilidad 0.46378 de valer un dólar.

## 4.3. Árbol binomial continuo

El precio de la acción puede subir o bajar no solo una vez sino un numero finito $m$ de veces en el intervalo $[0, T]$, cada $\Delta t$ con $T = m\Delta t$; el método se basa en construir un árbol con los posibles valores del activo, dado un valor inicial de este. Luego analizar los posibles cambios de precios a través del tiempo $T$ y determinar la probabilidad de riesgo neutro, por medio del análisis anterior del modelo se puede hacer una generalización. Supongamos $S_u = uS$ y $S_d = dS$, la condición de arbitraje

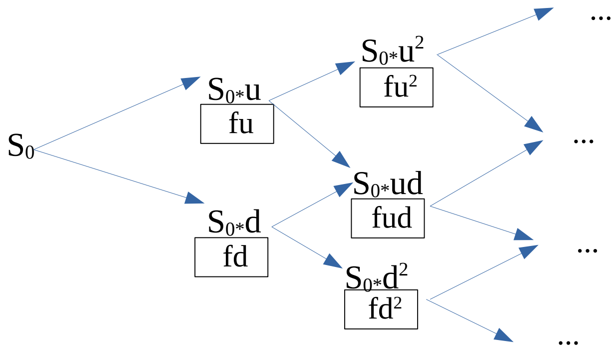



**Figura 4.3.** Árbol binomial continuo. Fuente: elaboración propia.

es $S_d < R = e^{r\Delta t} < S_u$ y sustituyendo ecuación 4.8 tenemos

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{4.13}$$

Aquí $p$ no depende de $S$ por lo que, no depende del precio del activo sino que es intrínseco al activo, lo que lo hace más cercano a la realidad.

Suponiendo que el modelo toma $m$ pasos, a un tiempo $T$ el sistema va tomar $m$ posibilidades de movimiento:

$$S_m^j = Su^j d^{m-j}, \quad 0 \leq j \leq m.$$

La variable aleatoria que representa este comportamiento es la binomial, en efecto

$$P(S_m(T) = S_m^j(T)) = \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}. \tag{4.14}$$

Ahora calculemos su valor esperado de $S(T)$, tomando la esperanza:

$$E(S_m(T)) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^j (1-p)^{m-j} Su^k d^{m-k}.$$

Aplicando lo que se vio en el primer capitulo sobre la distribución binomial sobre la esperanza tenemos que

$$E(S_m(T)) = S(pu + (1-p)d)^m = S(p(u-d)+d)^m.$$

Ahora que conocemos el valor de $p$ obtenemos:

$$S\left(\left(\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}\right)(u-d)+d\right)^m = Se^{r\Delta mt} = Se^{rT}. \tag{4.15}$$

Se satisface la relación entre el precio actual y el futuro.

### 4.3.1. Transformación del modelo a una distribución normal

Como el árbol tiene como varias pasos o movimientos, se va siendo cada vez más pequeño el tiempo de ejecución por lo que el precio no va dar un resultado cercano por lo cual es necesario hacerlo converger a otro modelo, para ello tomamos un modelo en donde el precio de expiración es igual al precio del día de hoy, con una tasa interés de cero, y para cada tiempo tanto que suba o baje tendrán una probabilidad similar, ahora supongamos que $S_0$ que el precio de acción o del activo al día de hoy, con una opción de ejercicio en el tiempo $T$, la media del valor del activo en el tiempo $T$ es de $S_0$ , y la varianza del precio del activo en el tiempo $T$ es de $\sigma^2 T$.

Si dividimos el tiempo en intervalos [0,T] dentro de $m$ movimientos iguales, entonces para cada movimiento tendremos una media de 0 y una varianza $\dfrac{\sigma^2 T}{m}$, para variables aleatorias independientes se aplica lo mismo.

Para cada movimiento, tenemos que el activo se va mover para arriba o abajo como

$$\sigma_m = \sigma\sqrt{\frac{T}{k}},$$

con probabilidad 0.5 para cada movimiento, Sea $Z_j$ una sucesión de variables aleatorias independientes que toman el valor 1 o -1 con probabilidad de 0.5. Después de $m$ pasos el activo va tener una distribución de la forma

$$S_0 + \sum_{j=1}^{m} \sigma_m Z_j.$$

Ahora queremos ver que pasa si $m$ tiende al infinito, a medida que $m$ crece, nuestro modelo del árbol se vuelve cada vez más fino pero la varianza de la expresión

$\sigma_m \sum_{j=1}^{m} Z_j$ es igual a $\sigma^2 T$ y su media se mantiene en 0. Ahora por medio del teorema del limite central lo veremos más adelante este resultado, dado el caso eso significa que

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} Z_j$$

converge a una distribución normal con media 0 y varianza 1, denotado como $N(0, 1)$. Nuestra distribución del precio del activo converge a

$$S_0 + \sigma\sqrt{T}N(0, 1). \tag{4.16}$$

Y el precio de la opción converge a

$$E(f(S_0 + \sigma\sqrt{T}N(0, 1))) = \frac{1}{2\pi} \int f(S_0 + \sigma\sqrt{T}x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{4.17}$$

Donde $f(S_T)$ es el precio de la opción que se va pagar en el tiempo $T$.

### 4.3.2. Valuación de una opción *Call* mediante el modelo

Consideremos una opción *call* europea sobre el activo $\mathcal{S}$ con un precio de ejercicio $\mathcal{X}$ y un tiempo de expiración $T$, usando las distribución binomial (1.20) y la definición de 2.7, tenemos que el modelo para $m$ pasos es

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= e^{-r\Delta tm} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \max(\mathcal{S}_m^k - \mathcal{X}, 0) \\ &= e^{-r\Delta tm} \sum_{k=k_0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} (\mathcal{S}u^k d^{m-k} - \mathcal{X}). \end{aligned} \tag{4.18}$$

En donde $k_0$ es el mínimo $k$ tal que $\mathcal{S}u^k d^{m-k} > \mathcal{X}$ ya que $\mathcal{S}_m^k$ es creciente en $k$, ahora $k_0$ es el mínimo entero positivo $k$ que sea mayor igual a

$$\frac{\ln(\frac{k}{\mathcal{S}d^m})}{\ln(\frac{u}{d})}$$

Con esto tenemos que el valor de la opción es

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (pu)^k ((1-p)d)^{m-k} - \mathcal{X}e^{-rT} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}. \tag{4.19}$$

## 4.4. Modelo de Cox, Ross y Rubinstein (CRR)

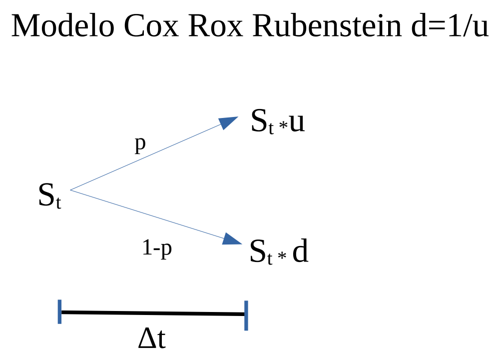



**Figura 4.4.** Modelo Cox, Ross y Rubinstein. Fuente: elaboración propia.

Tomemos la siguiente distribución log-normal que tenga esta propiedad ln $\sim N(\ln(S_0 + \mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$ Calculando media y varianza a esta distribución usando la definición 1.30 tenemos.

$$\begin{aligned} E[S_t] &= S_0 e^{\mu T} \\ \operatorname{Var}[S_t] &= S_0^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T - 1}). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Pero a nosotros nos interesa un tiempo más pequeño, aplicando el $\Delta t = \frac{T}{m}$, ahora podemos aplicar $\Delta t$ en la anterior ecuación y tenemos

$$E[S_{t+\Delta t}] = S_t e^{\mu \Delta t}. \tag{4.21}$$

Ahora la varianza

$$\operatorname{Var}[S_{t+\Delta t}] = S_t^2 e^{2\mu \Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t - 1}).$$

Expandiendo la función exponencial en series,[1] recordemos que nuestra[2] $\Delta t \to 0$, con esto tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}[S_{t+\Delta t}] &\approx S_t^2(1 + 2\mu\Delta t)(1 + \sigma^2 \Delta t - 1) \\ &= S_t^2 \sigma^2 \Delta t + S_t^2 (2\mu \Delta t)(\sigma^2 \Delta t) \\ &\approx S_t^2 \sigma^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Tenemos la ecuación de la media nos quedaría de la siguiente manera

$$pS_t u + (1-p)S_t d = S_t e^{r\Delta t},$$

[1] $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
[2] $e^x = 1 + x$, cuando $x \to 0$

despejando $p$ tenemos

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{4.22}$$

La varianza queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S_{t+\Delta t}) &= E(S_{t+\Delta t}^2) - E(S_{t+\Delta t})^2 \\
S_t^2 \sigma^2 \Delta t &= S_t^2 p u^2 + S_t^2 (1-p) d^2 - S_t^2 [pu + (1-p)d]^2 \\
&= pu^2 + (1-p)d^2 - [p^2 u^2 + 2p(1-p)ud + d^2(1-p)^2] \\
&= u^2(p - p^2) + d^2[(1-p) - (1-p)^2] - 2p(1-p)ud \\
&= u^2 p(1-p) + d^2(1-p)[1 - (1-p)] - 2p(1-p)ud \\
&= p(1-p)[u^2 - 2ud + d^2] \\
&= p(1-p)(u-d)^2.
\end{aligned}$$

Ahora falta por conocer como es $p(1-p) = p - p^2$, para ello utilizamos la ecuación 4.22

$$\begin{aligned}
p - p^2 &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} - \frac{e^{2r\Delta t - 2e^{r\Delta t}} d + d^2}{(u-d)^2} \\
&= \frac{(e^{r\Delta t} - d)(u - d) - e^{2r\Delta t} + 2e^{r\Delta t} d - d^2}{(u-d)^2} \\
&= \frac{e^{r\Delta t} u - ud - e^{r\Delta t} d + d^2 - e^{2r\Delta t} + 2e^{r\Delta t} d - d^2}{(u-d)^2} \\
&= \frac{e^{r\Delta t}[u - d + 2d] - ud - e^{2r\Delta t}}{(u-d)^2} \\
&= \frac{e^{r\Delta t}[u + d] - ud - e^{2r\Delta t}}{(u-d)^2}.
\end{aligned}$$

Sustituimos $p(1-p)$ en la varianza

$$\sigma^2 \Delta t = \frac{e^{r\Delta t}[u + d] - ud - e^{2r\Delta t}}{(u-d)^2}(u-d)^2.$$

Cancelamos términos por lo tanto

$$\sigma^2 \Delta t = e^{r\Delta t}[u + d] - ud - e^{2r\Delta t}. \tag{4.23}$$

### 4.4.1. Los valores de $u$ y $d$

Para encontrar los valores de $u$ y $d$ hay que resolver la ecuación anterior 4.23 y haciendo que $d = \frac{1}{u}$ sustituyendo esto en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}\sigma^2\Delta t &= e^{r\Delta t}\left[u + \frac{1}{u}\right] - u\frac{1}{u} - e^{2r\Delta t}\\ &= e^{r\Delta t}\left[u + \frac{1}{u}\right] - 1 - e^{2r\Delta t}.\end{aligned}$$

Despejamos $u + \frac{1}{u}$ de la ecuación

$$\begin{aligned}\left[u + \frac{1}{u}\right] &= \frac{\sigma^2\Delta + 1 + e^{2r\Delta t}}{e^{r\Delta t}}\\ &= e^{-r\Delta t}\sigma^2\Delta + e^{-r\Delta t} + e^{r\Delta t}.\end{aligned}$$

Aplicamos las series de $e$, recordando que $\Delta t \to 0$ con esto

$$\begin{aligned}e^{-r\Delta t} &\approx (1 - r\Delta t)\\ e^{r\Delta t} &\approx (1 + r\Delta t)\end{aligned}$$

Sustituimos estos valores y además sabemos que $r\sigma^2\Delta t^2 = 0$

$$\begin{aligned}u + \frac{1}{u} &= (1 - r\Delta t)(\sigma^2\Delta) + (1 - r\Delta t) + (1 + r\Delta t)\\ &= \sigma^2\Delta t + 2.\end{aligned}$$

Con esto nos queda una ecuación cuadrática de esta forma

$$u^2 - u(\sigma^2\Delta t + 2) + 1 = 0,$$

resolviendo el sistema de ecuación

$$\begin{aligned}u &= \frac{\sigma^2\Delta t + 2 \pm \sqrt{(\sigma^2\Delta t + 2)^2 - 4}}{2}\\ &= \frac{\sigma^2\Delta t + 2 \pm \sqrt{\sigma^4\Delta t^2 + 4\sigma^2\Delta t + 4 - 4}}{2}\\ &= \frac{\sigma^2\Delta t + 2 \pm \sqrt{4\sigma^4\Delta t}}{2}\\ &= \frac{\sigma^2\Delta t + 2 \pm 2\sigma\sqrt{\Delta t}}{2}.\end{aligned}$$

Procediendo la división
$$u = \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}$$
Con esto $\sqrt{\Delta t}$ es más grande que $\Delta t$ para un $\Delta t$ pequeño, y $\sigma^2$ es relativamente más pequeño que $\sigma$, con esto podemos ignorar el primer término $\dfrac{\sigma^2 \Delta t}{2}$.

$$u \approx 1 \pm \sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Recordando que $u > d$ tenemos

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

## 4.5. Construcción del modelo a partir de una variación de crecimiento

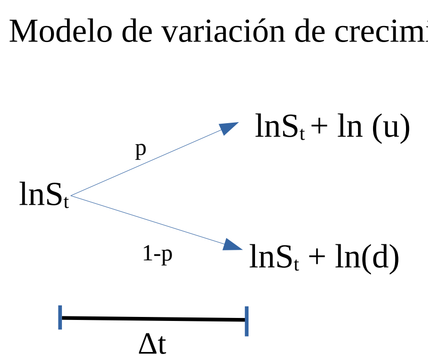



**Figura 4.5.** Modelo de variación de crecimiento . Fuente: elaboración propia.

**Definición 4.1.** La **variación de crecimiento** en el precio de un activo es

$$Y = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{\mathcal{S}_m}{\mathcal{S}_0}\right). \tag{4.25}$$

Donde $\mathcal{S}_m$ es el precio del activo de la acción a tiempo $T$ y $\mathcal{S}_0$ es el precio inicial. Ahora si es un tasa libre de riesgo entonces $Y = r$. Notemos también que $Y$ depende de $m$ y que:
$$\frac{\mathcal{S}_m}{\mathcal{S}_0} = \frac{\mathcal{S}_m \mathcal{S}_{m-1} \cdots \mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_{m-1}\mathcal{S}_{m-2} \cdots \mathcal{S}_0}.$$

Con esto podemos reescribir la variación de crecimiento de la siguiente manera

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln\left(\frac{\mathcal{S}_j}{\mathcal{S}_{j-1}}\right). \tag{4.26}$$

Como construimos el modelo $u$ con probabilidad $p$ y $d$ con probabilidad $1-p$ de la recursión $\frac{\mathcal{S}_j}{\mathcal{S}_{j-1}}$, con esto podemos calcular el valor esperado o la esperanza de $Y$, tenemos que

$$\mu = E(Y) = E\Bigg(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln\left(\frac{\mathcal{S}_j}{\mathcal{S}_{j-1}}\right)\Bigg) = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} E\Bigg(\ln\left(\frac{\mathcal{S}_j}{\mathcal{S}_{j-1}}\right)\Bigg).$$

Con esto tenemos partiendo a base de las probabilidades de $u$ y $d$ tenemos

$$\mu = \frac{1}{T}m[\ln(u)p + \ln(d)(1-p)].$$

Como habíamos definido nuestro modelo en la sección 4.2, $T = m\Delta t$, por lo que $\frac{m}{T} = \frac{1}{\Delta t}$, sustituimos tenemos que

$$\mu = \frac{1}{\Delta t}[\ln(u)p + \ln(d)(1-p)] = E(Y). \tag{4.27}$$

Ahora solo falta calcular la varianza con esto sabemos que es

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln\left(\frac{\mathcal{S}_j}{\mathcal{S}_{j-1}}\right)\right) = \frac{1}{T^2}m\,\mathrm{Var}\left(\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_0}\right).$$

Tenemos que $m = \frac{1}{T\Delta t}$ y con las probabilidades que ya tenemos sustituimos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{1}{T\Delta t}[(\ln^2(u)p + \ln^2(d)(1-p)) - (\ln(u)p + \ln(d)(1-p))^2] \\
&= \frac{1}{T\Delta t}[p\ln^2(u) + \ln^2(d) - p\ln^2(d) - p^2\ln^2(u) - 2p\ln(u)\ln(d) + \\
&+ 2p^2\ln(u)\ln(d) - \ln^2(d) + 2p\ln^2(d) - p^2\ln^2(d)] \\
&= \frac{1}{T\Delta t}[p(\ln^2(u) + \ln^2(d) - 2\ln(u)\ln(d)) - \\
&- p^2(\ln^2(u) + \ln^2(d) - 2\ln(u)\ln(d))]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T\Delta t}[p(\ln(u)-\ln(d))^2 - p^2(\ln(u)-\ln(d))^2] \\
&= \frac{1}{T\Delta t}\left[p\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 - p^2\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{T\Delta t}[p-p^2]\left(\ln^2\left(\frac{u}{d}\right)\right) \\
&= \frac{1}{T\Delta t}\ln^2\left(\frac{u}{d}\right)p(1-p).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto nos queda la varianza

$$
\sigma^2 = \frac{1}{T\Delta t}\ln^2\left(\frac{u}{d}\right)p(1-p). \tag{4.28}
$$

**Definición 4.2.** La **volatilidad** en el precio es $\sigma$ que es la desviación estándar 4.28 del crecimiento del precio anualizado, es decir cuando $T = 1$

$$
\sigma = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\ln^2\left(\frac{u}{d}\right)p(1-p)}. \tag{4.29}
$$

Con esto hemos construido un modelo de la forma log $-$normal.

### 4.5.1. Tolerancia de p

Para encontrar el valor de $p$ tenemos que tener en cuenta el siguiente parámetro

$$
\frac{u}{d} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{d}} = e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}}.
$$

Estos valores de $u$ y de $d$ vienen de 4.24, ahora que ya tenemos este parámetro podremos sustituir estos valores en la ecuación 4.29,

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\ln^2\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{d}}\right)p(1-p)} \\
\sigma^2 &= \ln^2(e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}})p(1-p) \\
\sigma^2\Delta t &= 4\sigma^2 p(1-p)\Delta t \\
\frac{1}{4} &= p(1-p) \\
p^2 - p + \frac{1}{4} &= 0 \\
\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo que la probabilidades de movimiento ascendentes y descendentes no son más de $p = \frac{1}{2}$, por el parámetro dado.

### 4.5.2. Los valores de $u$ y $d$

Para encontrar el valor de $u$ y $d$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de 4.27 y aplicando 1.15 en 4.27 .

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\Delta t}[\ln(u)p + \ln(d)(1-p)] \\ \sigma^2\Delta t &= \ln^2(u)p + \ln^2(d)(1-p) - (\mu\Delta t)^2, \end{aligned}$$

en el segunda ecuación es la misma varianza solo que en términos de $\mu$, para que funcione este modelo tenemos la restricción de que $p = \frac{1}{2}$, está restricción esta dada por el resultado anterior ahora tenemos este sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\Delta t}[\ln(u)0.5 + \ln(d)0.5] \\ \sigma^2\Delta t &= \ln^2(u)0.5 + \ln^2(d)0.5 - (\mu\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Despejando $\ln(u)$ de la primera ecuación tenemos $\ln(u) = 2\mu\Delta t - \ln(d)$, hacemos que $D = \ln(d)$ por lo tanto nos queda $\ln(u) = 2\mu\Delta t - D$, ahora sustituimos $\ln(u)$ en la segunda ecuación y tenemos

$$\begin{aligned} \sigma^2\Delta t &= 0.5(2\mu\Delta t - D)^2 + 0.5D^2 - (\mu\Delta t)^2 \\ &= 0.5(4\mu^2\Delta t^2 - 4D\mu\Delta t + D^2) + 0.5D^2 - \mu^2\Delta t^2 \\ &= D^2 + \mu^2\Delta t^2 - 2\mu\Delta t D. \end{aligned}$$

Nos queda una ecuación cuadrática de la siguiente forma

$$D^2 - 2\mu\Delta t D + (\mu^2\Delta t^2 - \sigma^2\Delta t) = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned} D &= \frac{2\mu\Delta t \pm \sqrt{(4\mu^2\Delta t^2 - 4(\mu^2\Delta t^2 - \sigma^2\Delta t))}}{2} \\ &= \frac{2\mu\Delta t \pm \sqrt{4\sigma^2\Delta t}}{2} \\ &= \frac{2\mu\Delta t \pm 2\sigma\sqrt{\Delta t}}{2}. \end{aligned}$$

Devolviendo el valor de $D$ tenemos que

$$\ln(d) = \mu\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Ahora que tenemos este resultado podremos saber el de $\ln(u)$

$$\ln(u) = 2\mu\Delta t - \mu\Delta t \mp \sigma\sqrt{\Delta t} = \mu\Delta t \mp \sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Recordemos que $u > d$ por lo que

$$\begin{aligned} u &= e^{\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

### 4.5.3. Valor de $\mu$

Para encontrar el valor de $\mu$ necesitaremos la ecuación 4.22 con la sustitución de estos valores 4.30,

$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{r\Delta t-} - e^{\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \\ &= \frac{e^{\mu\Delta t}[e^{r\Delta t-\mu\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]}{e^{\mu\Delta t}[e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}]} \\ &= \frac{e^{(r-\mu)\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos las series de $e$, para poder simplificar la ecuación recordando que $\Delta t \to 0$, sabiendo procedemos con las operaciones

$$\begin{aligned} e^{(r-\mu)\Delta t} &= 1 + (r-\mu)\Delta t \\ e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} &= 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} \\ e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} &= 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la ecuación anterior tenemos

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1 + (r-\mu)\Delta t - 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} - \dfrac{\sigma^2 \Delta t}{2}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
&= \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} + (r - \mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r - \mu - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}\right).
\end{aligned}
$$

Como tomamos el valor de $p = 1/2$, para que eso suceda en está ecuación el valor de $\mu$ tiene que ser

$$
\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}. \tag{4.31}
$$

Con esto tenemos que la probabilidad de que suba y baje es de $1/2$ lo cual este valor de $\mu$ tiene que tener un parecido a la ecuación (1.32), dado que estamos trabajando con una distribución log-normal, por lo tanto el los valores de $u$ y $d$ quedan de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
u &= e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \\
d &= e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Las ventajas que tiene el modelo de variación de crecimiento

| Modelos | Ventajas | Desventajas |
|---|---|---|
| Variación de Crecimiento | 1)No hay aproximaciones.<br>2) El valor de p mantiene un valor positivo entre [0,1].<br>3) La convergencia de la tasa es general. | 1) No toma el valor $S_0 ud \neq S_0$.<br>2) El valor de p tiene tolerancia |
| CRR | 1) Es el modelo más común y famoso del árbol binomial.<br>2) Toma en cuenta el valor inicial $S_0 ud = S_0$. | 1) El valor de p no necesariamente tiene que ser [0,1] al menos que $\Delta t$ sea muy pequeño.<br>2) El cálculo de la varianza y los valores u y d son validos solamente si $\Delta t$ es muy pequeño. |

**Tabla 4.1.** Ventajas y desventajas de los modelos del arbol binomial.

# 5. Modelo de Black-Scholes

## 5.1. Introducción

Es un modelo que modela cualquier derivado financiero en la forma continua. Elaborado por Fischer Black, Myron Scholes en 1973; la elaboración de este modelo utilizaron la teoría de evaluación de derivados, análisis estocástico y argumentos de no arbitraje para el valor teórico de un *call* europeo. El resultado de sus investigaciones con llevo una pieza clave a la ingeniería financiera y a los modelos matemáticos financieros.

El modelo se ha convertido en una herramienta indispensable en la valoración de opciones y otros derivados financieros, tal fue el éxito de este modelo que en el año 1997 Myron Scholes y Robert Merton se llevaron el premio nobel en economía mientras que Fischer Black ya había fallecido en 1995. (Black y Scholes, 1973),(Merton, 1973).

## 5.2. Construcción del modelo

Para construir la formula necesitamos el teorema de Ito 3.3.1, sea $V(S,t)$ el valor de una opción estilo europeo, es decir que solo se puede ejercer en la fecha expiración en el instante $t$ cuando el precio del activo subyacente es $S$. Haciendo la misma estrategia del principio del arbol binomial $h$ cobertura o $\Delta-$ *hedging*, que es no más

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \tag{5.1}$$

Ahora construimos un portafolio $\Pi$ libre de riesgo de la siguiente manera

$$\Pi = \Delta S - V. \tag{5.2}$$

Que pasa si los valor de nuestro portafolio suben tenemos

$$\Pi_u = \Delta S_u - V_u.$$

Y cuando bajan

$$\Pi_d = \Delta S_d - V_d.$$

Como es un portafolio libre de riesgo podemos igualar ambas ecuaciones y nos queda

$$\Delta S_u - V_u = \Delta S_d - V_d,$$

es decir

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} = \frac{\partial V}{\partial S}, \tag{5.3}$$

que es la variación del valor de la opción con respecto a $S$ del activo subyacente. Ahora que ya sabemos el valor de $\Delta$, de la ecuación 5.2 aplicamos derivada y luego sustituimos 5.1, con lo cual nos queda

$$d\Pi = \Delta dS - dV = \Delta(\mu S dt + \sigma S dW) - dV. \tag{5.4}$$

Ahora utilizando el teorema de Ito 3.3.1.

$$dV = \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt,$$

por lo cual

$$d\Pi = \Delta \mu S dt + \Delta \sigma S dW - \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt.$$

Separamos la parte determinística de la estocástica

$$d\Pi = \left(\Delta \sigma S - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\right) dW + \left(\Delta \mu S - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt.$$

Como sabemos el valor de $\Delta$ 5.3 podremos sustituirlo en la ecuación anterior

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \sigma S - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\right) dW + \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt,$$

finalmente tenemos como resultado final

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt. \tag{5.5}$$

Además, $\Pi$ es un portafolio libre de riesgo tenemos que su retorno es el mismo con una tasa $r$, en un periodo de $[t, t + \Delta t]$, con lo cual

$$d\Pi = \Pi r dt. \tag{5.6}$$

Sustituimos ambas ecuaciones y tenemos

$$(\Delta S - V) r dt = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt.$$

Sustituimos el valor de $\Delta$ y cancelamos el $dt$ y tenemos finalmente

$$\frac{\partial V}{\partial S} Sr - Vr = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Ahora despejamos $Vr$ y con esto tenemos **la ecuación de Black-Scholes**

$$\frac{\partial V}{\partial S} Sr + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = Vr. \tag{5.7}$$

La ecuación anterior es una ecuación en derivadas parciales de segundo grado parabólica.

### 5.2.1. Solución a la ecuación de Black-Scholes

No vamos a entrar en todos los detalles en esta solución, pero si daré las ideas necesarias para encontrar la solución. Para encontrar una solución de la ecuación para un *call* europeo sobre un activo de precio $S$ con un precio de ejercicio $X$ y un tiempo de expiración $T$, en este caso $V = C$ con lo cual la ecuación 5.7 pasa ser

$$\frac{\partial C}{\partial S} Sr + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = Cr. \tag{5.8}$$

Las condiciones de la ecuación son las siguientes, en la condición inicial cuando el precio del activo es nulo entonces también el precio de la opción debe serlo si no se ejerce la opción, y cuando el precio tiende al infinito es $C(S, T) = S - Ke^{-r(T-t)}$ y para la condición final es cuando ejercemos la opción que va ser $C(S, T) = \text{máx}(S - K, 0)$, por lo que esto es

$$\begin{cases} C(S,T) = 0, & \text{Condición inicial } (0 = T) \\ C(S,T) = \text{máx}(S - K, 0), & \text{Condición final } (t = T) \\ \lim\limits_{S\to\infty} C(S,T) = S - Ke^{-r(T-t)}, & \text{Condición en el infinito.} \end{cases}$$

Hacemos cambio de variables para que quede una expresión sencilla de manipular

$$S = Ke^x, \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad C(S,T) = KV(x,\tau).$$

Calculamos sus derivadas parciales y obtenemos lo siguiente

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{2}{K\sigma^2}\frac{\partial C}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{K}\frac{\partial C}{\partial S}S,$$

por lo tanto al calcular la segunda derivada parcial tenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{K}(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial C}{\partial S}S) = \frac{1}{K}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2 + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Con esto tenemos la nueva condición inicial que queda:

$$V(x,0) = \frac{1}{K}, \quad C(S,T) = \frac{1}{K}\,\text{máx}(S-K,0) = \text{máx}(e^x - 1, 0).$$

Ahora nos falta ver las condiciones de contorno que nos quedaría así

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S}\bigg( - e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x} + e^{-x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg) = \frac{e^{-2x}}{K}\bigg(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\bigg).$$

Ya con esto podemos reemplazar estas condiciones en 5.8 y con ello obtenemos

$$rKV = -\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{K}\bigg(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\bigg)\sigma^2 K^2 e^{2x} + re^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}Ke^x.$$

Asociamos y dividimos K en ambos lados

$$rV = -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\bigg)\sigma^2 + r\frac{\partial V}{\partial x}.$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial V}{\partial \tau} = -rV + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\sigma^2 + r\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Multiplicamos por 2 y dividimos $\sigma^2$ ambos lados y tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = V\frac{-2r}{\sigma^2} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial V}{\partial x}$$

Ordenando

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{-2r}{\sigma^2}.$$

Para simplificar la notación $\lambda = \dfrac{2r}{\sigma^2}$, luego se vuelve hacer cambios de variables,

$$V(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau}u(x,\tau). \tag{5.9}$$

Al resolver esta ecuación usando derivadas parciales se obtiene la ecuación de calor, para ver esos detalles revisar junto con su solución en el capitulo 11 del libro (Steele, 2012) o en el libro (Duffy, 2013) solo que en este usan métodos interactivos para encontrar la solución , ya con esa ecuación se encuentran los valores de $\alpha$ y $\beta$ que son

$$\alpha = -\frac{\lambda - 1}{2}, \quad \beta = -\frac{(\lambda+1)^2}{4},$$

luego de resolver la ecuación de calor obtenemos una integral como solución particular

$$u(x,\tau) = u_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}ds,$$

donde

$$u(x,0) = u_0 = \begin{cases} e^{\frac{\lambda+1}{2}s} - e^{\frac{\lambda-1}{2}s}, & \text{si } s \geq 0 \\ 0, & \text{si } s \leq 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

En la fórmula de $u(x,\tau)$, las variables $x$ y $\tau$ quedan fijas, así que se puede hacer un cambio de variables

$$y = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}, \quad ds = \sqrt{2\tau}dy$$

queda la integral de la siguiente manera

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + x)e^{-\frac{1}{2}y^2}dy,$$

Sabemos que $u_0(s) = 0$ si $s < 0$, así que realidad no integramos en todo $\mathbb{R}$, sino que en el intervalo $\left[-\dfrac{x}{\sqrt{2\tau}}, +\infty\right]$ y esto es porque $y\sqrt{2\tau} + x \geq 0$ es decir $y \geq -\dfrac{x}{\sqrt{2\tau}}$ la integral queda

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau}+x)e^{-\frac{1}{2}y^2}dy,$$

ahora sustituimos $u$ de la ecuación 5.10 por lo que da dos integrales de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda+1}{2}(y\sqrt{2\tau}+x)}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda-1}{2}(y\sqrt{2\tau}+x)}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda+1}{2}(y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda-1}{2}(y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\
&= I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos la integrales por separado

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda+1}{2}(y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{\lambda+1}{2}(y\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}y^2}dy.$$

Para resolverlo necesitamos primero una completación de cuadrados en el exponente dentro de la integral

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda+1}{2}(y\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}y^2 \\
&= -\frac{1}{2}[-(\lambda+1)(y\sqrt{2\tau}) + y^2] \\
&= -\frac{1}{2}\left[y^2 - y(\lambda+1)\sqrt{2\tau} + \frac{\tau(\lambda+1)^2}{2}\right] + \frac{\tau(\lambda+1)^2}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\left[y - (\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}\right]^2 + \frac{\tau(\lambda+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Ya cumplido el objetivo sustituimos en la integral y tenemos lo siguiente

$$I_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{\tau(\lambda+1)^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y-(\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}]^2}dy.$$

Hacemos un cambio de variable para que la expresión de la integral sea más fácil de resolver de la siguiente manera

$$w = y - (\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}, \quad dw = dy.$$

Con esto la integral queda una nueva expresión

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{\tau(\lambda+1)^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-(\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \\
&= e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{\tau(\lambda+1)^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-(\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw.
\end{aligned}
$$

Observemos que la integral es la simétrica de la función de distribución normal $N$ de una variable normal

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-(\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw,$$

tiene la forma de una distribución normal 1.29 si hacemos el siguiente cambio

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + (\lambda+1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}.$$

Por consiguiente la función de distribución queda

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw = N(d_1),$$

por lo tanto

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{\tau(\lambda+1)^2}{4}} N(d_1).$$

Ahora solo falta calcular la integral $I_2$, que es lo mismo al calculo que hicimos en $I_1$, salvo que en todo el calculo se debe de cambiar $\lambda + 1$ por $\lambda - 1$ y así obtenemos el siguiente resultado

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + (\lambda-1)\sqrt{\frac{\tau}{2}} \\
I_2 &= e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x+\frac{\tau(\lambda-1)^2}{4}} N(d_2).
\end{aligned}
$$

ya teniendo los resultados podemos sustituir $u(x,\tau)$, en la ecuación 5.9 lo cual obtendríamos

$$
\begin{aligned}
V(x,\tau) &= e^{-\frac{\lambda-1}{2}x-\frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau}(I_1 - I_2) \\
&= e^{-\frac{\lambda-1}{2}x-\frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau}(e^{\frac{1}{2}(\lambda+1)x+\frac{\tau(\lambda+1)^2}{4}} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)x+\frac{\tau(\lambda-1)^2}{4}} N(d_2)),
\end{aligned}
$$

resolviendo los exponentes en la primera parte

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(\lambda-1)}{2}x - \frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau + \frac{\lambda+1}{2}x + \frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau \\
&= -\frac{\lambda}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{\lambda}{2}x + \frac{1}{2}x \\
&= x,
\end{aligned}$$

ahora la segunda parte

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(\lambda-1)}{2}x - \frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau + \frac{\lambda-1}{2}x + \frac{(\lambda-1)^2}{4}\tau \\
&= -\frac{(\lambda+1)^2}{4}\tau + \frac{(\lambda-1)^2}{4}\tau \\
&= -\frac{\lambda^2+2\lambda+1}{4}\tau + \frac{\lambda^2-2\lambda+1}{4}\tau \\
&= -\frac{4\lambda}{4}\tau \\
&= -\lambda\tau.
\end{aligned}$$

Con este resultado obtenemos la solución general

$$V(x,\tau) = e^{x}N(d_1) - e^{-\lambda\tau}N(d_2). \tag{5.11}$$

Ahora sustituimos los anteriores cambios de variables, que hicimos anteriormente para recuperar sus términos en esta fórmula

$$\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad C(S,T) = KV(x,\tau).$$

Haciendo la respectiva sustitución

$$\begin{aligned}
V(x,\tau) &= e^{\ln(\frac{S}{K})}N(d_1) - e^{-\frac{2r}{\sigma^2}(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}N(d_2) \\
C &= \frac{\frac{S}{K}N(d_1) - e^{-r(T-t)}N(d_2)}{K} \\
&= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)
\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos la **formula de Black Scholes**

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{5.12}$$

además

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} + (\frac{2r}{\sigma^2}+1)\sqrt{\frac{\sigma^2(T-t)}{4}} \\ &= \frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + r\sqrt{T-t} + \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{T-t} \\ &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} + (\frac{2r}{\sigma^2}-1)\sqrt{\frac{\sigma^2(T-t)}{4}} \\ &= \frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + r\sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2}{2}\sqrt{T-t} \\ &= \frac{\ln(\frac{S}{K}) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

ya tenemos resuelto la formula de Black Scholes para el caso de opciones *calls*. Conociendo esto, podemos determinar para el caso de *puts*, utilizando paridad 2.11, teniendo en cuenta que $X = K$

$$\begin{aligned} P &= C - S + Ke^{r(T-t)} \\ &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - S + Ke^{r(T-t)} \\ &= S(N(d_1)-1) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_2)-1) \\ &= -S(1-N(d_1)) + Ke^{-r(T-t)}(1-N(d_2)) \end{aligned}$$

Usando la propiedad de la distribución normal 1.1 tenemos

$$\begin{aligned} P &= -S(N(-d_1)) + Ke^{-r(T-t)}(N(-d_2)) \\ &= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned}$$

Esta es la solución de la ecuación de Black Scholes . $\square$

## 5.3. Convergencia del árbol binomial al modelo de Black Scholes

Tomemos en cuenta la variación de crecimiento de nuestro activo 4.1, sabemos que es una suma de variables aleatorias independientes

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln\left(\frac{\mathcal{S}_j}{\mathcal{S}_{j-1}}\right).$$

Teniendo en cuenta que sabemos la esperanza y la varianza de $Y$

$$E(Y) = r - \frac{1}{2}\sigma^2, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{\sigma^2}{T}.$$

Por el teorema central del límite 1.7.2 que, cuando $\Delta t \to 0$, es decir $m \to \infty$, $Y$ tiende a una distribución a una variable aleatoria normal con media $r - \frac{1}{2}\sigma^2$ y varianza $\frac{\sigma^2}{T}$, es decir

$$Y \to N\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{T}\right).$$

Como

$$Y = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{\mathcal{S}_m}{\mathcal{S}_0}\right),$$

operemos

$$\begin{aligned} e^Y &= \left(\frac{\mathcal{S}_m}{\mathcal{S}_0}\right)^{\frac{1}{T}} \\ e^{YT} &= \frac{\mathcal{S}_m}{\mathcal{S}_0} \\ \mathcal{S}_m &= \mathcal{S}_0 e^{YT}. \end{aligned}$$

Como $Y$ tiende a una distribución normal con parámetros $r - \frac{1}{2}\sigma^2$ y $\frac{\sigma^2}{T}$, desarrollando el límite de la variable $Y$ y reemplazando $S_T$ por $\mathcal{S}_m$ nos queda

$$S_T = S_0 e^{T[\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}Z + r - \frac{\sigma^2}{2}]}, \quad Z \sim N(0,1).$$

Notar que el análisis previo puede hacerse para cualquier $t \in (0, T]$, con lo cual el precio del activo subyacente a tiempo $t$ tiene una distribución log −normal

$$S_T = S_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z + (r - \frac{\sigma^2}{2})t} \quad Z \sim N(0,1). \tag{5.13}$$

Ahora lo podemos ver con un derivado $V$, con una función $F(S)$ tenemos

$$V = e^{-rT}E(F(S_T)).$$

Aplicando 5.13 y el teorema del límite central1.7.2 se tiene

$$\lim_{\Delta t \to 0} V = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(Se^{\sigma\sqrt{t}Z+(r-\frac{\sigma^2}{2})t})e^{-\frac{Z^2}{2}}dz. \tag{5.14}$$

Donde $S = S_0$ es el precio inicial del activo y se uso la función de la distribución normal, aplicamos el resultado anterior a un *call*. Supongamos una tasa de interés $r$, una volatilidad $\sigma$, un tiempo de expiración $T$ y un precio de ejercicio $K$. La aproximación log $-$normal quedaría

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}(Se^{\sigma\sqrt{T}Z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T} - K, 0)e^{-\frac{Z^2}{2}}dz.$$

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(Se^{\sigma\sqrt{T}Z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz - e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\frac{Z^2}{2}}dz.$$

$$C = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}(Se^{\sigma\sqrt{T}Z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T} - K)dz.$$

La integral no es cero si y solo si

$$\begin{aligned} Se^{\sigma\sqrt{T}Z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T} &\geq K \\ e^{\sigma\sqrt{T}Z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T} &\geq \frac{K}{S} \\ \sigma\sqrt{T}Z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T &\geq \ln(\frac{K}{S}) \\ Z &\geq \frac{\ln(\frac{K}{S}) + \frac{\sigma^2 T}{2} - rT}{\sqrt{\sigma}T}. \end{aligned}$$

Denotemos el lado derecho de esta desigualdad como $d1$. nuestra integral ahora tiene dos términos, en el segundo termino tenemos

$$\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1} e^{-\frac{Z^2}{2}}KdZ.$$

La integral de la densidad normal de $d1$ a $\infty$ es igual a $N(-d1)$, donde la integral de $-\infty$ a $-d1 = d2$ es igual con esto tenemos

$$\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} KN\Bigg(\frac{\ln(\frac{K}{S}) - \frac{\sigma^2 T}{2} + rT}{\sqrt{\sigma}T}\Bigg)$$

Ahora nos quedaría así las integrales

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1}(Se^{\sigma\sqrt{T}Z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz - Ke^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d2}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz.$$

Para que ambas integrales sean similares hay que hacer este cambio de variable en la primera integral $z = u + \sigma\sqrt{T}$, y esto se convierte

$$e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1}(Se^{\sigma\sqrt{T}(u+\sigma\sqrt{T})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}e^{-\frac{(u+\sigma\sqrt{T})^2}{2}}du$$
$$e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1}(Se^{(\sigma\sqrt{T}u+\sigma^2T)+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}e^{-\frac{(u^2+2\sigma\sqrt{T}u+\sigma^2T)}{2}}du$$
$$e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1}(Se^{(\sigma\sqrt{T}u+\sigma^2T-\frac{\sigma^2}{2}T)+rT}e^{-\frac{(u^2+2\sigma\sqrt{T}u+\sigma^2T)}{2}}du$$
$$e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1}(Se^{(\sigma\sqrt{T}u+\frac{\sigma^2T}{2})+rT}e^{-\frac{(u^2+2\sigma\sqrt{T}u+\sigma^2T)}{2}}du$$
$$e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1}(Se^{(\sigma\sqrt{T}u+\frac{\sigma^2T}{2})+rT-\frac{(u^2+2\sigma\sqrt{T}u+\sigma^2T)}{2}}du$$
$$e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1}e^{-\frac{u^2}{2}}Se^{rT}du.$$

Por lo tanto

$$C = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d1-\sigma\sqrt{T}}e^{-\frac{u^2}{2}}du - Ke^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d2}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz.$$

Finalmente esto no es nada más que

$$C = SN(d1) - Ke^{-rT}N(d2),$$

Donde

$$d1 = \frac{\ln(\frac{K}{S}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = \frac{\ln(\frac{K}{S}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Ahora usando paridad 2.11 y 1.1 tenemos

$$P = Ke^{-rT}N(-d2) - SN(d1).$$

Esta es la solución de la ecuación de Black Scholes por medio de la convergencia del árbol binomial. $\square$

### 5.3.1. Otra forma de demostración

Esta demostración fue elaborada por John Hull (Hull y cols., 2002), lo elabora por medio de los pasos de tiempo del árbol binomial al infinito. Supongamos un árbol con $n$ pasos de tiempo usando el valor de una opción *call* con precio de ejecución $K$ y un tiempo $T$. cada paso tiene una medida de $\frac{T}{n}$. si la acción se mueve hacia arriba va ser $j$ y $n-j$ va ser cuando se mueva hacia abajo en el árbol, nuestro precio final de acción es $S_0u^jd^{n-j}$, donde $u$ y $d$ son nuestras proporciones de subida y bajadas visto anteriormente. por definición de 2.7

$$\text{máx}(S_0u^jd^{n-j} - K, 0)$$

Por las propiedades de una distribución binomial, la probabilidad de que suba es $j$ y $n-j$ de que baje entonces por 1.20

$$p(j) = \binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}.$$

Por consiguiente el valor de la opción

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!j!}p^j(1-p)^{n-j}\,\text{máx}(S_0u^jd^{n-j} - K, 0).$$

Como el árbol tiene un riesgo neutral podemos tomar esa tasa como $r$ 4.18 por lo cual tenemos

$$C = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(\mathcal{S}u^jd^{n-j} - K). \tag{5.15}$$

Los términos de la ecuación anterior es no cero por lo que el precio de la acción final es más grande que el precio de ejecución y esto es

$$Su^jd^{n-j} > K,$$

por lo tanto

$$\ln(\frac{S}{K}) > -j\ln(u) - (n-j)\ln(d).$$

Como ya sabemos los valores de $u$ y $d$ en 4.24 recordando que $\Delta t = T/n$, sustituimos

$$\ln(\frac{S}{K}) > -n\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - 2j\sigma\sqrt{\frac{T}{n}},$$

despejando $j$

$$j > \frac{n}{2} - \frac{\ln(\frac{S}{K})}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}.$$

Ahora la ecuación 5.15 la podemos reescribir de la siguiente manera

$$C = e^{-rT}\sum_{j>\alpha}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(\mathcal{S}u^jd^{n-j} - K).$$

Donde

$$\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\ln(\frac{S}{K})}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}.$$

Por conveniencia definimos

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{j>\alpha}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}u^jd^{n-j} \\ U_2 &= \sum_{j>\alpha}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Por lo que el valor de la opción es

$$C = e^{-rT}(SU_1 - KU_2). \tag{5.17}$$

Consideremos primero $U_2$, como sabemos la distribución binomial se acerca a una distribución normal debido al teorema límite central 1.7.2, cuando los pasos se acercan al infinito. Específicamente cuando hay $n$ pasos y $p$ de probabilidad, la probabilidad de la distribución de numero de sucesos es aproximadamente una distribución normal con media $np$, y una desviación estándar de $\sqrt{np(1-p)}$ 1.4.1 que son nada más que la media y desviación estándar de una distribución binomial, para que se aproxime a una distribución normal usando 1.7.2 de probabilidad, $U_2$ es la probabilidad de numero de sucesos que son más grande que $\alpha$, por propiedad de la distribución normal.

$$U_2 = N\left(\frac{np-\alpha}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

reemplazando $\alpha$ tenemos

$$U_2 = N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{p(1-p)}} + \frac{\sqrt{n}(p-1/2)}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \tag{5.18}$$

Para el valor de $p$ sabemos por 4.13 tenemos

$$p = \frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}.$$

Usando límites cuando $n \to \infty$, como sabemos que la tolerancia de $p = 1/2$ por lo tanto $p(1-p) = 1/4$, ahora falta probar el límite de $\sqrt{n}(p-1/2)$, para probar este límite lo que tenemos que hacer es parecido al cálculo que hemos hecho en la sub sección de encontrar el valor de $\mu$ en el capitulo 4, solo que en vez de $\Delta t$ vamos a poner $T/n$ y $\mu = 0$.

$$\begin{aligned} e^{rT/n} &= 1 + (r)\frac{T}{n} \\ e^{\sigma\sqrt{T/n}} &= 1 + \sigma\sqrt{T/n} + \frac{\sigma^2 T}{2n} \\ e^{-\sigma\sqrt{T/n}} &= 1 - \sigma\sqrt{T/n} + \frac{\sigma^2 T}{2n}. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} p &= \frac{1 + (r)\frac{T}{n} - 1 + \sigma\sqrt{T/n} - \dfrac{\sigma^2 T}{2n}}{2\sigma\sqrt{T/n}} \\ &= \frac{\sigma\sqrt{T/n} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T/n}{2\sigma\sqrt{T/n}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{T/n}\right). \end{aligned}$$

Ya que tenemos expresado esto podemos proceder a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(p-1/2) &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{T/n}\right)-1/2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1/2-1/2+\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{T}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en $U_2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
U_2 &= N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{1/4}}+\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{1/4}}\right)\\
&= N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T}}+\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)\\
&= N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

Ahora vamos a calcular el valor de $U_1$ de la ecuacion 5.16

$$U_1=\sum_{j>\alpha}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}u^jd^{n-j}.$$

Hacemos un cambio de variable de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{pu}{pu+(1-p)d}\\
1-p' &= \frac{pd}{pu+(1-p)d}.
\end{aligned}$$

Por lo que sustituimos en $U_1$ nos queda

$$U_1=(pu+(1-p)d)^n\sum_{j>\alpha}\binom{n}{j}p'^j(1-p')^{n-j}.$$

Por 4.22 sabemos que $pu+(1-p)d=e^{rT/n}$, entonces

$$U_1=e^{rT}\sum_{j>\alpha}\binom{n}{j}p'^j(1-p')^{n-j}.$$

Esto demuestra que $U_1$ también es una distribución binomial, por lo que usamos los mismos principios que habíamos hecho en $U_2$, la aproximación de una distribución binomial a una distribución normal se obtiene de lo siguiente

$$U_2 = e^{rT} N\left(\frac{np' - \alpha}{\sqrt{np'(1-p')}}\right),$$

sustituyendo $\alpha$ en la ecuación anterior

$$U_2 = e^{rT} N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{p'(1-p')}} + \frac{\sqrt{n}(p'-1/2)}{\sqrt{p'(1-p')}}\right) \tag{5.19}$$

evaluamos el valor de $p'$

$$p' = \frac{\left(\frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/N}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}\right) e^{\sigma\sqrt{T/n}}}{\left(\frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}\right) e^{\sigma\sqrt{T/n}} + e^{-\sigma\sqrt{T/n}} - \left(\frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}\right) e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}.$$

Vamos a trabajar el denominador por lo que expandiremos para eliminar términos

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{rT/n+\sigma T/n} - 1 + 1 - e^{-2\sigma\sqrt{T/n}} - e^{rT/n-\sigma\sqrt{T/n}} + e^{-2\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}} \\
&= \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}\right) e^{rT/n} \\
&= e^{rT/n}.
\end{aligned}$$

Juntando toda la fracción tenemos

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{\left(\frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}\right) e^{\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{rT/n}} \\
&= \frac{e^{rT/n} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}} \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{T/n}}}{e^{rT/n}}\right) \\
&= \frac{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{rT/n}}{e^{\sigma\sqrt{T/n}} - e^{-\sigma\sqrt{T/n}}}.
\end{aligned}$$

Falta probar que se conservan los límites de $p'$, entonces evaluamos el límite cuando $n \to \infty$, como ya hemos trabajados estas series exponenciales sabemos que

$$\begin{aligned}
e^{rT/n} &= 1 + (r)\frac{T}{n} \\
e^{\sigma\sqrt{T/n}} &= 1 + \sigma\sqrt{T/n} + \frac{\sigma^2 T}{2n} \\
e^{-\sigma\sqrt{T/n}} &= 1 - \sigma\sqrt{T/n} + \frac{\sigma^2 T}{2n}.
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos en la ecuación de $p'$ tenemos

$$\begin{aligned}
p' &= \frac{1 + (r)\frac{T}{n} - 1 + \sigma\sqrt{T/n} + \dfrac{\sigma^2 T}{2n}}{2\sigma\sqrt{T/n}} \\
&= \frac{\sigma\sqrt{T/n} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T/n}{2\sigma\sqrt{T/n}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{T/n}\right) \\
\lim_{n\to\infty} p' &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{T/n}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

en efecto $p'(1-p') = 1/4$, falta probar el límite de $\sqrt{n}(p' - 1/2)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(p' - 1/2) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{T/n}\right) - 1/2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(1/2 - 1/2 + \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{T}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $U_1$ es

$$\begin{aligned}
U_1 &= e^{rT/n} N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})}{2\sigma\sqrt{T}\sqrt{1/4}} + \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{1/4}}\right) \\
&= e^{rT/n} N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) \\
&= e^{rT/n} N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

Ya con este resultado por la ecuación 5.17 sustituimos los valores que ya conocemos

$$
\begin{aligned}
C &= e^{-rT}(SU_1 - KU_2) \\
&= SN(d1) - Ke^{-rT}N(d2),
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
d1 = U_1 &= \frac{\ln(\frac{K}{S}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d2 = U_2 &= \frac{\ln(\frac{K}{S}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d1 - \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

Esta es la solución de la ecuación de Black Scholes por medio de la convergencia del árbol binomial. $\square$

# CONCLUSIONES

1. Hay dos formas de construir el modelo árbol binomial con la distribución normal y la log -normal, si utilizamos la distribución normal es porque la distribución binomial converge a una distribución normal, y si usamos la variación de crecimiento podemos construir el modelo con la distribución log- normal o directamente como lo uso Cox, Ross y Rubinstein.

2. Tanto el modelo árbol binomial y la ecuación de Black Scholes se utiliza la teoría de portafolio para la construcción de ambos modelos y lo fundamental usar los términos de ingeniería financiera, para tener noción que hace cada variable.

3. El lema de Ito es fundamental en la construcción de las formulas de Black Scholes, debido a que tiene las condiciones necesarias para poder determinar el precio de las opciones y a esto se debe por $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ tiene una función en forma de movimiento browniano.

4. Hay dos formas de construir el modelo árbol binomial una de ellas es el CRR y la otra es la de variación de crecimiento, comparte una misma idea de construcción basarse de una distribución log-normal, la diferencia es muy notoria debido a que el modelo CRR se basa en que los cambios de precios son inversamente proporcional o sea si sube la opción es lo mismo si llegara a bajar proporcionalmente, haciendo que los valores $u$ y $d$ solo dependa del tiempo y de su volatilidad (desviación estándar), mientras que el modelo de variación de crecimiento en su construcción inicial se basa en el planteamiento de una variación de precios respecto a la acción con llevando que los valores de $u$ y $d$ no solo dependan de el tiempo y de su volatilidad sino que también del interés.

5. La convergencia del árbol binomial a la ecuación de Black scholes es debido a que ambos modelos trabajan en una distribución normal haciendo que uno sea discreto con un iteraciones al infinito y el otro sea continuo, luego usando el teorema de límite central tenemos la convergencia, podría ser que algunos

de lo que trabajaron en la ecuación de Black Scholes se hayan inspirado en el modelo del árbol binomial usando el método de cobertura en el lema de Ito.

6. A pesar de que el modelo CRR y el de variación de crecimiento son modelos diferentes, ambos pueden converger al modelo de Black Scholes.

7. La diferencia del árbol binomial a la ecuación de Black Scholes es que el árbol binomial no tiene tiempo de expiración.

# RECOMENDACIONES

1. Si alguien planea trabajar con contrato de opciones se recomienda usar el modelo de Black scholes para determinar precios no necesariamente tiene que ser acciones sino más bien bienes como por ejemplo café, azúcar, etc.

2. El modelo de árbol binomial es un modelo sencillo se podría usar para predecir, precios de opciones en la bolsa poniendo los parámetros que uno más cree que va suceder, si va subir o bajar y así poder determinar si su inversión va ser efectiva o un fracaso.

3. Seria importante continuar investigaciones de esta índole debido que es un área muy importante en las matemáticas aplicadas y además aporta a la sociedad.

# BIBLIOGRAFÍA


Black, F., y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, *81*(3), 637–654.

Cox, J. C., Ross, S. A., y Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, *7*(3), 229–263.

Cox, J. C., Ross, S. A., y Rubinstein, M. (2003). *The black—scholes formula.* doi: 10.1007/978-3-0348-8041-1_14

Dudley, R. M. (1999). *Uniform central limit theorems* (n.º 63). Cambridge: Cambridge University Press. Descargado de `https://doi.org/10.1017/CBO9780511665622` (Title from publisher's bibliographic system (viewed on 05 Oct 2015))

Duffy, D. J. (2013). *Finite difference methods in financial engineering: a partial differential equation approach.* John Wiley & Sons.

GARCÍA, M. L. S. (s.f.). Aplicación empirica del modelo de Black y Scholes en méxico: 1991-2000.

Gutiérrez, W. (2010). Introducción a TEX y a LaTeX $2_\varepsilon$. *Guatemala: Facultad de Ingeniería, USAC*.

Hull, J. C. J. C., Freixas, X. F., Hull, J. C., Verchik, A., Arana, J. M., y Gracia Beccar, P. (2002). *Introducción a los mercados de futuros y opciones* (n.º 339.1). Pearson Educación,.

Joshi, M. S. (2010). *The concepts and practice of mathematical finance* (2. ed., reprint. with corr. ed.). Cambridge: Cambridge University Press. (Literaturverzeichnis: Seite 526-532)

Øksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations.* doi: 10.1007/978-3-642-14394-6_5

Loukas, S., Mendenhall, W., Wackerly, D. D., y Scheaffer, R. L. (1992). Mathematical statistics with applications. , *48*, 977. doi: 10.2307/2532372

LYUU, Y.-D. (s.f.). *Financial engineering and computation.*

Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of* *economics and management science*, 141–183.

Mun, J. (2002). *Real options analysis: Tools and techniques for valuing strategic investments and decisions* (Vol. 137). John Wiley & Sons.

Roussas, G. G. (1997). *A course in mathematical statistics* (2. ed ed.). San Diego, Calif. [u.a.]: Acad. Press.

Skarpness, B., Larsen, R. J., y Marx, M. L. (1983). An introduction to mathematical statistics and its applications. , *78*, 208. doi: 10.2307/2287143

Steele, J. M. (2012). *Stochastic calculus and financial applications* (Vol. 45). Springer Science & Business Media.

Wilmott, P., Howison, S., y Dewynne, J. (1995). *The mathematics of financial derivatives.* doi: 10.1017/cbo9780511812545

Yahoo. (s.f.). *Chart goog (Google).* Descargado de `https://finance.yahoo.com/chart/GOOG`