



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

INVARIANZA DEL EFECTO CASIMIR EN VARIEDADES UNIDIMENSIONALES

Cristian Alfredo Raxón Soc

Asesorado por Ph.D. Pedro Fernando Morales Almazán

Guatemala, Julio 2020

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**INVARIANZA DEL EFECTO CASIMIR EN
VARIEDADES UNIDIMENSIONALES**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

CRISTIAN ALFREDO RAXÓN SOC
ASESORADO POR PH.D. PEDRO FERNANDO MORALES ALMAZÁN

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, JULIO 2020

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR Dr. Enrique Pazos Avalos
EXAMINADOR Lic. Ricardo Enrique Contreras Folgar
EXAMINADOR Licda. Lucía Mariel Arana Peña

Ref. D.DTG. 003-2020
Guatemala 23 de julio de 2020

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **“INVARIANZA DEL EFECTO CASIMIR EN VARIETADES UNIDIMENSIONALES”** presentado por el estudiante universitario **Cristian Alfredo Raxón Soc**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

“ID Y ENSEÑAD A TODOS”



M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

AGRADECIMIENTOS

A mi mamá

Por siempre haberme brindado su apoyo incondicional. Te amo mamá.

A mi papá

Por ser un ejemplo de trabajo, esfuerzo y superación. Te amo papá.

A mis compañeros

Por los momentos que compartimos tanto dentro como fuera de las aulas, especialmente en Fisired.

Al PhD. Pedro Fernando Morales Almazán

Por haber dirigido este trabajo de graduación. Que Dios se lo multiplique.

Al Departamento de Física de la Facultad de Ingeniería

Por haberme permitido laborar como Auxiliar en dicho departamento.

A la Universidad de San Carlos de Guatemala

Por haberme brindado la formación académica como físico.

También...

Agradezco a las personas que a lo largo de mi carrera profesional me han dado una oportunidad y que han confiado en mi.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. Fundamentos de geometría diferencial	1
1.1. Variedades diferenciales de dimensión n	1
1.1.1. Definición	1
1.1.2. Ejemplos de variedades	2
1.1.2.1. El círculo	2
1.1.2.2. La esfera	2
1.1.2.3. El cilindro	2
1.2. Función analítica	2
1.3. Espacio tangente	2
1.4. Métrica	2
1.5. Curva, velocidad y longitud de arco	3
1.6. Inmersión y parametrización por longitud de arco	3
1.7. Variedad Riemanniana	4
1.8. Laplaciano	5
2. Efecto Casimir	7
2.1. Historia del efecto Casimir	7
2.2. Fuerzas de Van der Waals	8
2.3. Experimentos	10
2.3.1. Sparnaay	10
2.3.2. Lamoreaux	11
2.4. Energía de Casimir	12

2.5. Modelos simples del efecto Casimir	13
2.5.1. El efecto Casimir sobre un intervalo	13
2.5.2. La fórmula de Abel-Plana y regularización	17
2.5.3. El efecto Casimir sobre un círculo	20
3. Regularización por funciones Zeta	23
3.1. Función Zeta de Riemann	23
3.2. Función Zeta de Hurwitz	24
3.3. Función Zeta de Epstein	24
3.4. La función Zeta de un operador diferencial	25
3.5. Regularización de la energía del vacío	26
4. Invarianza en variedades unidimensionales	27
4.1. Invarianza	27
4.1.1. Invarianza de un operador	27
4.2. Transformaciones	28
4.3. Laplaciano en variedades unidimensionales generalizadas	29
4.4. El oscilador armónico simple como variedad unidimensional	29
4.5. Funciones zeta y condiciones de frontera para el oscilador armónico simple	30
4.5.1. Condiciones de frontera de Dirichlet	30
4.5.2. Condiciones de frontera de Neumann	31
4.5.3. Condiciones de frontera mezcladas	31
4.5.3.1. Mezcla 1	31
4.5.3.2. Mezcla 2	32
4.5.3.3. Mezcla 3	32
5. Atracción y repulsión en una dimensión	33
5.1. Pistón de Casimir	33
5.2. Energías termodinámicas de Casimir	34
5.2.1. Energía de Casimir en la temperatura de cero absoluto	34
5.2.2. Energía de Casimir para la distribución de Planck	35
5.2.3. Energía de Casimir para la distribución de Rayleigh-Jeans	35
5.3. Fuerzas termodinámicas de Casimir	37
5.3.1. Fuerzas de Casimir en la temperatura de cero absoluto	37
5.3.2. Fuerzas de Casimir para la distribución de Planck	38
5.3.3. Fuerzas de Casimir para la distribución de Rayleigh-Jeans	38
5.4. Entropías termodinámicas de Casimir	40

5.4.1. Entropía de Casimir en la temperatura de cero absoluto	40
5.4.2. Entropía de Casimir para la distribución de Planck	41
5.4.3. Entropía de Casimir para la distribución de Rayleigh-Jeans	41
CONCLUSIONES	45
RECOMENDACIONES	47
BIBLIOGRAFÍA	49
ANEXOS	51
A. Valores propios, condiciones de frontera y funciones zeta	51
A.1. Funciones zeta con condiciones de frontera desacopladas	51
A.2. Condiciones de frontera de Dirichlet	52
A.3. Condiciones de frontera de Neumann	53
B. Condiciones de frontera mezcladas	53
B.1. Mezcla 1	53
B.2. Mezcla 2	54
B.3. Mezcla 3	55
C. Laplaciano inducido	55
D. Invarianza del producto escalar	57
E. Invariantes de un operador	59

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Placas paralelas	8
2.2. Descripción de la fuerza de van der Waals	10
2.3. desc	11
2.4. Tres variedades unidimensionales	20
4.1. Vector tangente y vector perpendicular	29
5.1. Pistón de Casimir.	34
5.2. Energía de Casimir para condiciones de frontera semejantes	36
5.3. Energía de Casimir para condiciones de frontera no semejantes	37
5.4. Fuerza de Casimir para condiciones de frontera semejantes	39
5.5. Fuerza de Casimir para condiciones de frontera no semejantes	40
5.6. Entropía de Casimir para condiciones de frontera semejantes.	42
5.7. Entropía de Casimir para condiciones de frontera no semejantes.	43

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
Δ	operador laplaciano
\hbar	constante de Planck
M	variedad diferencial de dimensión n
$T_p M$	espacio tangente de M
S^1	variedad diferencial de una dimensión
g^{ij}	métrica
α	curva diferenciable
\square	operador caja
ω_n	n -ésima frecuencia de vibración
λ	valor propio
ζ	función zeta
ζ_R	función zeta de Riemann
ζ_H	función zeta de Hurwitz
ζ_R	función zeta de Riemann
$\zeta_{\mathcal{E}}$	función zeta de Epstein
\mathbb{R}^n	espacio \mathbb{R} de n dimensiones
\mathcal{L}	operador de Sturm-Liouville

OBJETIVOS

General

Demostrar que para cualquier variedad unidimensional inmersa en el espacio \mathbb{R}^n , la energía y otras magnitudes físicas asociadas al efecto Casimir, son invariantes ante transformaciones analíticas sobre la inmersión de la variedad unidimensional.

Específicos

1. Estudiar la regularización de series divergentes a través de las funciones zeta.
2. Identificar el tipo de transformaciones sobre la inmersión de la variedad unidimensional en el espacio \mathbb{R}^n .
3. Demostrar que las transformaciones dejan invariante las propiedades de la variedad unidimensional.
4. Analizar que las magnitudes físicas como la energía, fuerza y entropía de un sistema físico -pistón de Casimir- dependen de la temperatura a la que se encuentre y de las condiciones de frontera.

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1, se establecen las definiciones y los fundamentos matemáticos que se utilizan en el desarrollo de este trabajo de graduación.

En el capítulo 2, se describe el efecto Casimir, los antecedentes, la historia, los diversos experimentos que se han realizado por varias metodologías y algunos modelos del efecto Casimir en variedades unidimensionales.

En el capítulo 3, se definen las funciones zeta y se desarrollan ejemplos de regularización con estas funciones zeta.

En el capítulo 4, se aplican transformaciones analíticas a una variedad unidimensional en el espacio \mathbb{R}^n y se demuestra que estas transformaciones dejan invariante muchas de las propiedades de la variedad. Luego se aplica el operador laplaciano a la variedad unidimensional sobre el espacio \mathbb{R}^n para luego volverse un problema de Sturm-Liouville. Estos tipos de problemas dependen de las condiciones de frontera y de los valores propios asociados a la variedad unidimensional. A través de los valores propios, funciones zeta y técnicas de regularización se puede obtener significado físico de varias expresiones matemáticas divergentes que tienden al infinito.

En el capítulo 5, se analiza un sistema físico llamado “pistón de Casimir” que consiste en dos placas o paredes paralelas fijas a una distancia, y en medio de ellas es introducido otra placa llamada "partición" que se mueve dentro de las placas fijas, y que este pistón se encuentra a una temperatura T . Se analiza el movimiento, energía, fuerza y entropía de la partición bajo el efecto de varias temperaturas y de las condiciones de frontera.

1. Fundamentos de geometría diferencial

Actualmente muchas de las ramas de la física moderna como la relatividad especial, la teoría cuántica de campos, la teoría de cuerdas, la cosmología, entre otras, requiere de herramientas matemáticas más elaboradas y complejas para poder modelar sistemas de partículas, explorar las propiedades geométricas de sistemas; la conservación de muchos observables como la energía, el momentum angular, entre otras cantidades; el análisis de transformaciones que permitan la invarianza de estas cantidades. Debido a estas razones en este capítulo se presentan conceptos y definiciones que se abordan en la exploración y el estudio del efecto Casimir.

1.1. Variedades diferenciales de dimensión n

1.1.1. Definición

Definición 1.1. Se dice que M es una variedad diferencial de dimensión n si

1. M es un espacio topológico.
2. M está provisto con una familia de pares $\{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}$.
3. $\{\mathcal{U}_i\}$ es una familia de conjuntos abiertos que cubren M , es decir, $\cup_i \mathcal{U}_i = M$.
4. dada \mathcal{U}_i y \mathcal{U}_j tal que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, el mapeo $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ de $\phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ hacia $\phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ es inyectivo e infinitamente diferenciable.

El par (\mathcal{U}_i, ϕ_i) es llamado una *carta* sobre M . Mientras que una colección de cartas $\{(\mathcal{U}_i, \phi_i)\}$ es llamada un *atlas*. Sea M un espacio topológico y $\mathcal{U} \subseteq M$ un conjunto abierto. Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Un homeomorfismo $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $\phi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ es llamado un *sistema de coordenadas* sobre \mathcal{U} , y las funciones x_1, \dots, x_n son las *funciones coordenadas*. El mapeo inverso ϕ^{-1} es una *parametrización* de \mathcal{U} .

1.1.2. Ejemplos de variedades

1.1.2.1. El círculo

El círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ es una variedad diferencial de una dimensión. Un posible atlas $\mathcal{A} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ para esta variedad es

$$\begin{aligned} U_1 &= S^1 - \{(-1, 0)\} & \phi_1(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} \quad \text{con} \quad -\pi < \phi_1(x, y) < \pi \\ U_2 &= S^1 - \{(1, 0)\} & \phi_2(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} \quad \text{con} \quad 0 < \phi_2(x, y) < 2\pi. \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.2.2. La esfera

La esfera $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ se dice que es una variedad diferencial de 2 dimensiones. Es una *superficie* en \mathbb{R}^3

1.1.2.3. El cilindro

La esfera $S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$ se dice que es una variedad diferencial de 2 dimensiones. Es una superficie \mathbb{R}^3 .

1.2. Función analítica

Definición 1.2. Una función $f(z)$ es *analítica* en una región \mathcal{R} si tiene una derivada compleja $f'(z)$ en cada punto de \mathcal{R} .

1.3. Espacio tangente

Definición 1.3. Sea p un punto que $p \in M$. Un *espacio tangente* de M en p , está denotado por $T_p M$. Este espacio tangente es generado por la base $\{e_i\}$ llamada la *base coordenada*. Si un vector $V \in T_p M$ es escrito como $V = V^i e_i$, los números V^i son llamados los *componentes de V* con respecto a e_i .

1.4. Métrica

Definición 1.4. Sea M una variedad diferencial. Una *métrica Riemanniana* sobre M es un campo tensorial tipo (0,2) que satisface los siguientes axiomas para cada punto $p \in M$:

1. $g_p(U, V) = g_p(V, U)$,

2. $g_p(U, U) \geq 0$, donde la igualdad se mantiene si y solo si $U = 0$.

Aquí $U, V \in T_p M$ y $g_p = g|_p$. Cabe decir que g_p es una forma bilinear simétrica positivamente definida.

1.5. Curva, velocidad y longitud de arco

Definición 1.5. Una *curva diferenciable parametrizada* en \mathbb{R}^{n+1} es una función suave, donde I es un intervalo abierto en \mathbb{R} . Por suavidad de una función se establece que α es de la forma $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ donde cada x_i es una función suave valuada sobre I .

Definición 1.6. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una curva parametrizada. El *vector de velocidad* en un tiempo $t \in I$ es el vector definido

$$\dot{\alpha}(t) = \left(\alpha(t), \frac{d\alpha}{dt}(t) \right) = \left(\alpha(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_{n+1}}{dt}(t) \right). \quad (1.2)$$

Este vector es tangente a la curva α en $\alpha(t)$.

Definición 1.7. La *longitud de arco* $l(\alpha)$ de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ está definida como la integral de α

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \quad (1.3)$$

donde a y b pertenecen a I .

Dada una métrica Riemanniana, se puede definir la longitud de una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ como

$$l(\alpha) = \int_0^1 g_p(\alpha'(t), \alpha'(t))^{1/2} dt. \quad (1.4)$$

1.6. Inmersión y parametrización por longitud de arco

Definición 1.8. Una curva suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es una curva *regular* si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Equivalentemente, se dice que α es una *inmersión* de I hacia \mathbb{R}^{n+1} .

Ahora se considera una curva $\beta : I' \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Si β es una *reparametrización* de α entonces $l(\alpha) = l(\beta)$, es decir, las curvas α y β tienen la misma longitud. Si $\beta = \alpha \circ h$ donde $I' \rightarrow I$ es tal que $h'(t) > 0$ para todo $t \in I'$, entonces

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \int_c^d \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_c^d \|\alpha'(h(t))\| h'(t) dt \\ &= \int_a^b \|\alpha'(u)\| du \\ &= l(\alpha) \end{aligned}$$

donde c y d son los límites de I' . Si α es una curva con velocidad unitaria,

$$\|\alpha'(t)\| = 1 \tag{1.5}$$

entonces para $t_1, t_2 \in I$ junto con $t_1 < t_2$,

$$l(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = t_2 - t_1, \tag{1.6}$$

si en la ecuación anterior $t_1 = 0$ y $t_2 = t$ se obtiene

$$l(\alpha) = t \tag{1.7}$$

así la longitud de cualquier segmento de α es solamente la longitud del intervalo del parámetro t . Por esta razón a las curvas con velocidad unitaria se les dice que están *parametrizadas por la longitud de arco*.

1.7. Variedad Riemanniana

La idea de una variedad Riemanniana es una variedad equipada en cada uno de sus puntos con un tensor simétrico no-degenerado g_{ij} . El producto interno está definido en cada espacio tangencial $T_p M$. Este tensor llamado el *tensor métrico* o también la *métrica*. El tensor métrico es simétrico y puede ser utilizado para definir el producto escalar de dos vectores en un determinado punto

Definición 1.9. Una *variedad de Riemann* o *variedad Riemanniana* (M, g) es una variedad suave M con una familia de productos internos positivos $g = g_p$ sobre $T_p M$

para cada $p \in M$. La familia g es llamada una *métrica de Riemann*.

1.8. Laplaciano

El *laplaciano* sobre una variedad diferencial asociada junto a una métrica g está definido como

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_j (g^{ij} \sqrt{\det g} \partial_i) f \quad (1.8)$$

donde $\det g$ es el determinante de la métrica.

2. Efecto Casimir

2.1. Historia del efecto Casimir

En 1948 el físico holandés Hendrik Casimir predijo la existencia de una fuerza entre dos placas conductoras paralelas descargadas cuando ellas están muy cerca entre sí, y que dicha fuerza puede ser de atracción o repulsión entre ellas. El efecto Casimir es una manifestación de las fluctuaciones del vacío del campo electromagnético. Estas fluctuaciones generan una fuerza sobre dos placas conductoras paralelas descargadas que están cercanas entre sí [Fig. 2.1]. El origen del efecto Casimir es esencialmente geométrico debido a que el espacio dentro de las placas es diferente del espacio fuera de ellas, las fluctuaciones en el vacío también son diferentes en las dos regiones. Estas fluctuaciones ejercen distintas fuerzas sobre las placas tanto dentro como fuera de ellas creando una fuerza neta, ya sea de atracción o de repulsión. Esta fuerza de atracción entre las placas por unidad de área separadas por una distancia a es

$$F_{Cas} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \quad (2.1)$$

y la energía asociada a esta fuerza, por definición $E_{Cas} = \int F_{Cas} \cdot da$, es

$$E_{Cas} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 a^3}. \quad (2.2)$$

La interpretación de las expresiones (2.1) y de (2.2) es que debido a la cuantización del campo electromagnético dentro de las placas paralelas separadas por una distancia a , el vacío se interpreta como la ausencia de fotones con distintos niveles de energía, es decir, que no hay fotones que sean múltiplos del *nivel fundamental de energía* también llamado *nivel basal* o *nivel cero* debido a su naturaleza de energía mínima. Esta cantidad energía mínima tiene la capacidad de realizar un *trabajo*, que se define como la fuerza que puede desplazar o mover un objeto, que en este caso estos paquetes de energía mínima tienen asociada una fuerza que trata de atraer las placas entre ellas mismas.

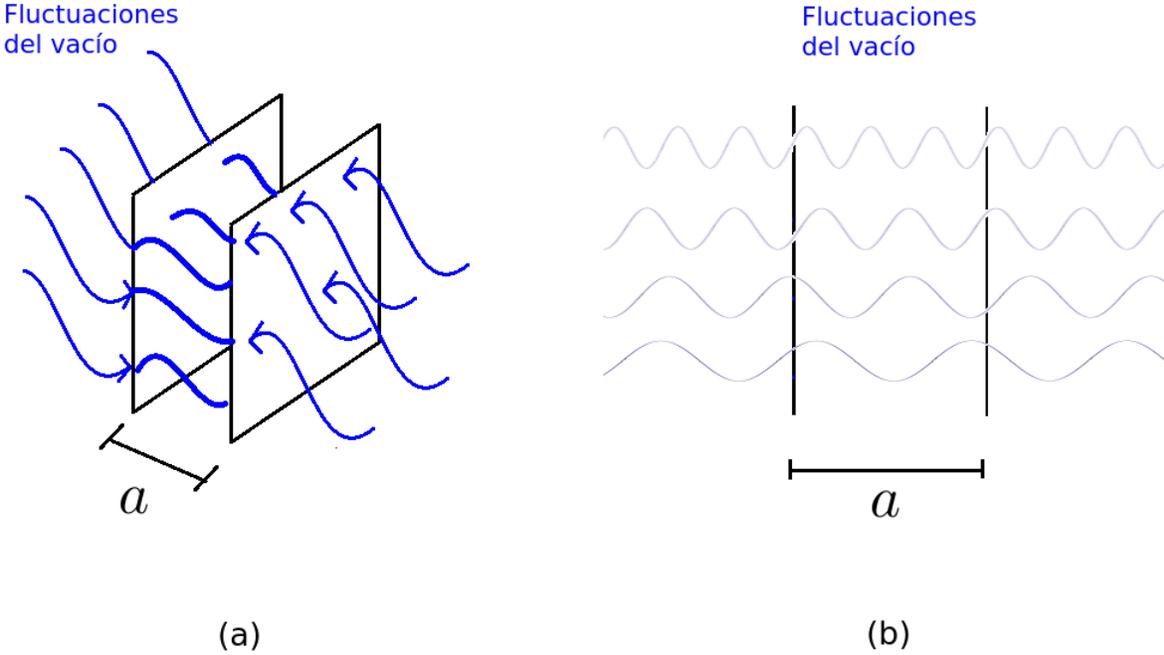


Figura 2.1. Dos placas metálicas paralelas conductoras descargadas separadas por una distancia a . Las fluctuaciones del vacío actúan sobre las placas. Se tiene (a) la vista lateral y (b) la vista frontal del efecto Casimir. Fuente: elaboración propia.

2.2. Fuerzas de Van der Waals

La historia del efecto Casimir puede decirse que ha comenzado alrededor de 1870, más de 35 años antes del nacimiento de Hendrik Casimir, cuando Johannes van der Waals escribió su tesis doctoral en la que deriva una corrección a la ley de los gases ideales, ahora conocida como la *ecuación de van der Waals*. La ley de los gases ideales es

$$P = \frac{NkT}{V},$$

donde P es la presión, V es el volumen, N es el número de partículas en el gas, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura. La ecuación de van der Waals es

$$P = \frac{NkT}{V - N\sigma} - \frac{n^2\theta}{V^2},$$

donde θ representa una interacción atractiva entre las partículas, y σ es el volumen de cada partícula. La lógica detrás de estas correcciones es que el volumen disponible en el envase donde se encuentra el gas es el volumen del recipiente, menos el volumen total ocupado por las partículas de gas, y que la presión se reduce por la interacción entre las partículas. Esta interacción que se conoce como las *fuerzas de*

van der Waals, que se utilizan generalmente como un término colectivo para todas las fuerzas entre las partículas en un gas. La parte que más interesa es la parte conocida como la fuerza de London, o la fuerza de London-van der Waals, o simplemente como dispersión. La fuerza de London es la única fuerza entre los átomos de un gas noble. Ahora, como sabemos, los gases nobles se componen de átomos neutros con distribuciones de carga con simetría esférica. ¿Cuál es el origen de esta fuerza? La distribución de carga de un átomo de un gas noble es en promedio simétrica esférica, pero en cualquier dado momento hay una probabilidad finita de que el átomo, como un todo, puede tener un momento dipolar. Si este es el caso, esto puede dar lugar a momentos dipolares inducidos en átomos cercanos, lo que da lugar a una atracción débil. En 1947, Casimir, junto con Dirk Pólder, publicaron un artículo [6] en el que se calcula la fuerza entre un átomo neutro y una placa conductora perfecta. Casimir después calcula la fuerza entre dos placas neutras de una manera similar. Estos cálculos son bastante complejos. Sin embargo, el resultado es una pequeña expresión. Comencemos con la imagen física de la interacción de van der Waals. Consideramos dos dipolos polarizables 1 y 2 [Fig. 2.2]. Estos dipolos pueden ser considerados siendo compuesto por electrones que se mueven al azar alrededor de la posición de una carga positiva como un ion. Debido a las fluctuaciones aleatorias de las posiciones de los electrones se supone que no tienen ninguna dirección preferida, como en el caso del estado fundamental en el átomo de hidrógeno que tiene simetría esférica. Las fluctuaciones en el movimiento electrónico dan lugar a la polarización de el átomo. A su vez, un dipolo eléctrico, digamos un dipolo 1, crea un campo eléctrico $E(r)$ a una distancia r e induce la polarización de un dipolo eléctrico 2, $d = \alpha E(r)$, donde α es la *polarización*. La escala del campo eléctrico dipolar es de $1/r^3$, y considerando la energía de un dipolo inducido

$$U = -\frac{1}{2}dE = -\frac{1}{2}\alpha E^2,$$

se obtiene la escala $U \propto -\frac{1}{r^6}$ para la energía del dipolo 2, interpretado como la energía de interacción de van der Waals. Como consecuencia, dos cuerpos macroscópicos neutros separados por una corta distancia de unos pocos nanómetros son atraídos por la fuerza de van der Waals.

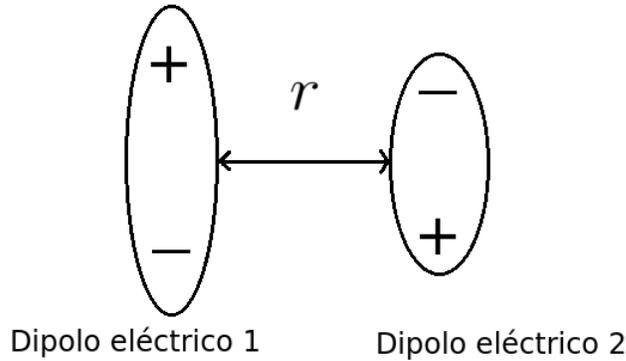


Figura 2.2. Descripción de la fuerza de van der Waals. Un momento dipolar es creado en el dipolo 1 debido a fluctuaciones aleatorias internas. Este momento de dipolo crea un campo eléctrico del orden $E \sim 1/r^3$ que es electrostático. El campo llega al dipolo 2, a una distancia r y con polarización α induciendo su momento de dipolo eléctrico. Esto puede interpretarse como la energía de interacción de van der Waals. Fuente: elaboración propia.

2.3. Experimentos

2.3.1. Sparnaay

En 1958 Marcus Sparnaay publicó un artículo [24], donde realizó el primer intento de medir la fuerza de Casimir. Para medir la fuerza entre placas paralelas de distintos materiales como aluminio, cromo y acero, utilizó la medición de la expansión de un resorte, en equilibrio, que era controlado por la capacitancia que había entre cada par de placas. El par de placas formadas por cromo y acero, y el par formado por dos placas de cromo, mostraron tener una fuerza de atracción entre ellas; y el par de placas de aluminio mostraba una fuerza repulsiva entre ellas, como puede observarse en la figura 2.3.

Los requisitos fundamentales expuestos por Sparnaay para realizar el experimento con placas paralelas fueron:

1. superficies de las placas limpias totalmente libres de impurezas químicas y partículas de polvo;
2. la medición precisa y reproducible de la separación entre los dos superficies. En particular, una medición de la distancia media en el contacto de las dos superficies, que es distinto de cero;
3. bajas cargas electrostáticas en la superficie y las bajas diferencias de potencial entre las superficies.

Teóricamente, para el caso de la interacción entre una esfera perfectamente conductora y una placa perfectamente conductora, la fuerza de Casimir está dada por

$$F_{Cas} = -\frac{\pi^3 R \hbar c}{360 d^3} \quad (2.3)$$

donde R es el radio del lente esférico y d es la distancia entre la placa y el lente, y se debe satisfacer $R \gg d$. Fue reportado que entre los valores teóricos y los valores medidos experimentalmente de la fuerza de Casimir, el nivel de exactitud fue del 5% para el rango que va desde 0.6 hasta 6 μm de distancia. En conclusión, este experimento introdujo la medición moderna y de muy alta precisión debido al mecanismo siguiente: las dos capacitancias de los dos capacitores que controlaban la alineación de la placa debían ser iguales. Si en caso ambas capacitancias no tuvieran el mismo valor, un cambio de fase en la corriente alterna del circuito era detectada y un circuito de retroalimentación realizaba las correcciones para la correcta alineación del pendulú de torsión.

2.4. Energía de Casimir

De la cuantización del campo electromagnético dentro de la cavidad formada por las dos placas paralelas, se puede determinar que el estado de menor energía es la llamada *energía del vacío*

$$E_0 = \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{2}.$$

En la presencia de la cavidad solo se permiten modos discretos, con una densidad de modos

$$k = \frac{\nu \pi}{a}$$

donde ν es un modo de vibración y a es la distancia entre las placas paralelas. Escribiendo la energía del vacío en términos de ν , la energía dentro de la cavidad es

$$E_0 = \sum_k \frac{\hbar \omega_n}{2} = \sum_k \hbar c k = \frac{\pi \hbar c}{a} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu.$$

La energía del vacío en el mismo espacio sin las placas paralelas es

$$E_{libre} = \frac{\pi \hbar c}{a} \int_0^{\infty} \nu d\nu.$$

Ambas energías son infinitas pero la diferencia entre estas dos energías es finita

$$E_{Casimir} = E_0 - E_{libre}$$

que se define como la *energía de Casimir*. El resultado de esta diferencia es

$$E_{Casimir} = -\frac{\pi\hbar c}{12a}$$

la energía de Casimir, que depende de la distancia entre las placas paralelas, en una dimensión a .

2.5. Modelos simples del efecto Casimir

En esta sección se presentan modelos del efecto Casimir donde se plantean distintos tipos de problemas simples. Se visualiza la forma de desarrollar el análisis para cada uno de ellos considerando aspectos geométricos, cálculos, condiciones de frontera y regularización de cantidades infinitas que se presentan al momento de determinar la fuerza y la energía de Casimir para estos modelos.

2.5.1. El efecto Casimir sobre un intervalo

Se considera un campo escalar $\varphi(x, t)$ dependiente del tiempo t y una coordenada $x = x^1$, obedeciendo la ecuación de Klein Gordon

$$\square\varphi(x, t) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x, t) = 0, \quad (2.4)$$

donde m es la masa del campo y \square es el operador de d'Alembert definido como

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Ahora se consideran las propiedades del campo escalar definido sobre un intervalo $0 < x < a$ con condiciones de frontera de Dirichlet

$$\varphi(0, t) = \varphi(a, t) = 0. \quad (2.6)$$

Luego se considera el campo escalar a lo largo del eje $-\infty < x < \infty$. En ambos casos la meta principal es encontrar el espectro de oscilaciones.

Para el caso del intervalo $[0, a]$, el producto escalar de dos soluciones de la Ec. (2.4),

f y g , es

$$(f, g) = i \int_0^a dx \left(f^* \frac{\partial g}{\partial x_0} - \frac{\partial f^*}{\partial x_0} g \right), \quad (2.7)$$

donde $x_0 = ct$. De la Ec. (2.4), se sigue que (f, g) no depende del tiempo. El conjunto ortonormal completo de frecuencias positivas y negativas de la Ec. (2.4), obedeciendo las condiciones de frontera en la Ec. (2.6) y satisfaciendo

$$\left(\varphi_n^{(\pm)}, \varphi_{n'}^{(\pm)} \right) = \pm \delta_{nn'}, \quad \left(\varphi_n^{(\pm)}, \varphi_{n'}^{(\mp)} \right) = 0, \quad (2.8)$$

está dado por

$$\varphi_n^{(\pm)}(x, t) = \left(\frac{c}{a\omega_n} \right)^{1/2} e^{\mp i\omega_n t} \sin k_n x. \quad (2.9)$$

Las frecuencias de oscilación discretas y los números de onda están dados por

$$\omega_n = \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2 \right)^{1/2}, \quad k_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

y $\delta_{nn'}$ es la delta de Kronecker. La energía del estado de menor energía de un campo $\varphi(x, t)$ sobre un intervalo es

$$E_0(a, m) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \frac{c^2 \pi^2 n^2}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (2.11)$$

Si el campo $\varphi(x, t)$ está definido sobre el eje $-\infty < x < \infty$, el producto escalar de dos soluciones de la Ec. (2.4) es

$$(f, g) = i \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(f^* \frac{\partial g}{\partial x_0} - \frac{\partial f^*}{\partial x_0} g \right), \quad (2.12)$$

que es similar a la Ec. (2.7). En este caso el conjunto ortonormal completo de soluciones de la Ec. (2.4) obedeciendo las condiciones de frontera (2.6) satisface

$$\left(\varphi_k^{(\pm)}, \varphi_{k'}^{(\pm)} \right) = \pm \delta(k - k'), \quad \left(\varphi_k^{(\pm)}, \varphi_{k'}^{(\mp)} \right) = 0, \quad (2.13)$$

donde las soluciones de las frecuencias positivas y negativas son ondas planas

$$\varphi_k^{(\pm)}(x, t) = \left(\frac{c}{4\pi\omega_n} \right)^{1/2} e^{\mp i(\omega_k t - kx)}. \quad (2.14)$$

Las frecuencias de oscilación están definidas como

$$\omega_k = \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k^2 \right)^{1/2}, \quad (2.15)$$

con números de onda continuos $-\infty < k < \infty$, y $\delta(k - k')$ es la función delta de Dirac en una dimensión.

La energía del estado de vacío del campo $\varphi(x, t)$ sobre el eje entero es

$$E_{0M}(m) = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \omega_k L = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k^2 \right)^{1/2} L. \quad (2.16)$$

El subíndice M en la energía del vacío (2.16) establece que es para un caso sin condiciones de frontera.

Las expresiones (2.11) y (2.16) para la energía del vacío del campo escalar en dos dimensiones sobre un intervalo y sobre el eje entero, respectivamente, ambas son infinitas. Ellas divergen para valores muy grandes de n y k . Para tratar con estas cantidades infinitas de una manera útil, uno tiene que volverlas finitas. Este procedimiento es conocido como *regularización*. Existen muchos procedimientos de regularización pero se utilizará el más simple, que introduce una función de corte que tienen la forma $\exp(-\delta ck_n)$ y $\exp(-\delta ck)$ después de los signos de suma e integración en las Ecms. (2.11) y (2.16), respectivamente, donde $\delta > 0$ es un parámetro. Después que la regularización ha actuado sobre dichas cantidades, la regularización debe ser removida colocando $\delta \rightarrow 0$. Ahora se aplica este procedimiento de regularización a la Ec. 2.11. Por simplicidad, se considera un campo sin masa con $m = 0$ y junto con la Ec. (2.11) se obtiene la energía del vacío regularizada sobre un intervalo $(0, a)$.

$$E_0^{(\delta)}(a) \equiv \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\pi n}{a} \exp\left(-\delta \frac{c\pi n}{a}\right) = \frac{\pi \hbar c}{8a} \sinh^{-2} \frac{\delta c\pi}{2a}. \quad (2.17)$$

Esta cantidad es finita, pero diverge cuando δ va hacia cero. En el límite de un δ pequeño, de la Ec. (2.17) se obtiene

$$E_0^{(\delta)}(a) = \frac{\hbar a}{2\pi c \delta^2} - \frac{\pi \hbar c}{24a} + O(\delta^2). \quad (2.18)$$

Esta ecuación representa la energía del vacío como la suma de un término singular y una contribución finita.

Ahora se aplica la regularización a la Ec. (2.16) para la energía del vacío de un

campo escalar sobre el eje entero. Considerando $m = 0$, se obtiene

$$E_{0M}^{(\delta)} \equiv \frac{\hbar c}{2\pi} \int_0^\infty k dk e^{-\delta ck} L = \frac{\hbar L}{2\pi c \delta^2}. \quad (2.19)$$

Esto es la energía del vacío regularizada para el eje entero.

Ahora se separa el intervalo $(0, a)$ del eje entero sin imponer ninguna condición de frontera en $x = 0$ y $x = a$. De acuerdo a la Ec. (2.19), la energía del vacío para dicho intervalo es

$$E_{0M}^{(\delta)}(a) = \frac{E_{0M}^{(\delta)}}{L} a = \frac{\hbar a}{2\pi c \delta^2}. \quad (2.20)$$

Puede notarse que la Ec. (2.20) coincide con el primer término del lado derecho de la Ec. (2.18), divergiendo cuando δ va a cero. Para obtener un resultado finito se debe sustraer la energía infinita del vacío (2.20) para un campo sobre un intervalo sin restricciones de la energía infinita del vacío (2.18) para un intervalo restringido por las condiciones de frontera. Realizando esto se obtiene una cantidad finita

$$E^{(\delta)}(a) \equiv E_0^{(\delta)} - E_{0M}^{(\delta)}(a) = -\frac{\pi \hbar c}{24a} + O(\delta^2). \quad (2.21)$$

Removiendo la regularización, se obtiene la energía de Casimir para el campo escalar sobre un intervalo

$$E(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} E^{(\delta)}(a) = -\frac{\pi \hbar c}{24a}. \quad (2.22)$$

Este resultado es análogo a la Ec. (2.2), para la energía del vacío obtenida de la cuantización del campo electromagnético entre placas metálicas ideales. La magnitud de la energía de Casimir $E(a)$ incrementa mientras los valores de frontera se aproximan entre sí. De la Ec. (2.22), la fuerza de Casimir actuando sobre las fronteras del intervalo es

$$F(a) = -\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{\pi \hbar c}{24a^2}. \quad (2.23)$$

Esto es similar a la fuerza electromagnética (2.1) obtenida de la cuantización del campo electromagnético entre las placas paralelas.

La Ec. (2.21) es un típico ejemplo de *sustracción*, utilizado en teoría cuántica de campos para remover infinitos. Usualmente, la substracción de cualquier cantidad infinita es interpretada como una *renormalización*.

Es de interés considerar condiciones de frontera de Dirichlet en $x = 0$ y la condición

de frontera de Neumann en $x = a$

$$\varphi(0, t) = \left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (2.24)$$

A veces tales condiciones son llamadas *inusuales*, *híbridas*, o *mezcladas*. El conjunto ortonormal completo de soluciones de la Ec. (2.4) tiene la misma for que la Ec. (2.9), con

$$k_n = \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Para un campo sin masa, la energía del vacío regularizada está dada por

$$\begin{aligned} E_0^{(\delta)}(a) &= \frac{\hbar}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right) e^{-\delta c\pi(2n+1)/2a} \\ &= \frac{\hbar c\pi}{8a} \coth \frac{\delta c\pi}{2a} \operatorname{csch} \frac{\delta c\pi}{2a}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En el límite de un pequeño δ , se obtiene

$$E_0^{(\delta)}(a) = \frac{\hbar a}{2\pi c\delta^2} + \frac{\pi\hbar c}{48a} + O(\delta^2). \quad (2.27)$$

Es importante resaltar que el término divergente tiene la misma forma que en la Ec. (2.18) y que es igual a la contribución del espacio libre (2.20). Como resultado, la energía de Casimir para un campo escalar sobre un intervalo con las condiciones de frontera (2.24) es positiva, y la respectiva fuerza de Casimir es repulsiva:

$$E(a) = \frac{\pi\hbar c}{48a}, \quad F(a) = \frac{\pi\hbar c}{48a^2} \quad (2.28)$$

2.5.2. La fórmula de Abel-Plana y regularización

Las sumas discretas e integrales con respecto a una variable continua, tal como las Ecs. (2.11) y (2.16), respectivamente, aparecen frecuentemente en cálculos de la energía de Casimir. En algunos casos tales cantidades pueden ser simplificadas con ayuda de la fórmula Abel-Plana

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(t)dt = \frac{1}{2}F(0) + i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [F(it) - F(-it)], \quad (2.29)$$

donde $F(z)$ es una función analítica en la mitad del plano derecho. Esta fórmula primero fue aplicada a la teoría del efecto Casimir por Mamayev en 1976. Para

ilustrar la utilidad de la Ec. (2.29), se aplica a un campo escalar masivo sobre un intervalo. Primero se empieza por colocar

$$F(n) = \frac{\hbar}{2} \omega_n f(\omega_n, \delta), \quad (2.30)$$

donde ω_n está determinada en la Ec. (2.10). Aquí, $f(\omega, \delta)$ es alguna función de corte que decaiga lo suficientemente rápido mientras incrementa ω tal que la suma y la integral en la Ec. (2.29) convergen:

$$f(\omega, \delta) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \omega \rightarrow \infty \quad \text{para todo} \quad \delta \neq 0. \quad (2.31)$$

Esta función también debe satisfacer las condiciones

$$f(\omega, \delta) \leq 1, \quad f(\omega, 0) = 1. \quad (2.32)$$

Es evidente que en el caso límite $\delta \rightarrow 0$, la integral sobre el lado derecho de la Ec. (2.29) no depende en forma específica de $f(\omega, \delta)$. La independencia de los resultados obtenidos de la forma de la función de corte está automáticamente garantizado. Esto se cumple para todas las aplicaciones de la fórmula de Abel-Plana.

Como resultado al separar el término con $n = 0$, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{mc^2}{2} + E_0(a, m), \quad (2.33)$$

donde $E_0(a, m)$ está definida en Ec. (2.11). De una forma similar, tomando en cuenta el cambio de variable $ak = \pi t$, se encuentra

$$\int_0^{\infty} dt F(t) = \frac{E_{0M}(m)a}{L} = E_{0M}(a, m), \quad (2.34)$$

donde E_{0M} está definida en la Ec. (2.16). Entonces la energía de Casimir es

$$E(a, m) \equiv E_0(a, m) - E_{0M}(a, m) \quad (2.35)$$

se encuentra que de la fórmula Abel-Plana (2.29) con la regularización removida

$$E(a, m) = -\frac{mc^2}{4} + i\frac{\pi\hbar c}{2a} \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} [G_A(it) - G_A(-it)]. \quad (2.36)$$

Aquí, la función $G_A(t)$ es definida por

$$G_A(t) \equiv (A^2 + t^2)^{1/2}, \quad A \equiv \frac{mca}{\pi\hbar}. \quad (2.37)$$

Es útil considerar una función más general $G_A^{(\alpha)}(z)$, que está definida por

$$G_A^{(\alpha)}(z) = e^{\alpha \ln(A^2 + z^2)}. \quad (2.38)$$

Esta función tiene dos puntos de ramificación $z_{1,2} = \pm iA$. Yendo alrededor de los puntos de ramificación se puede probar la igualdad

$$G_A^{(\alpha)}(it) - G_A^{(\alpha)}(-it) = 2ie^{\alpha \ln(t^2 - A^2)} \sin \pi\alpha\theta(t - A), \quad (2.39)$$

donde $\theta(x)$ es una función. Para $\alpha = 1/2$, se obtiene la Ec. (2.37) de la Ec. (2.38), y

$$G_A(it) - G_A(-it) = 2i(t^2 - A^2)^{1/2} \theta(t - A) \quad (2.40)$$

de la Ec. (2.39).

Sustituyendo la Ec. (2.40) en (2.36), se obtiene

$$E(a, m) = -\frac{mc^2}{4} - \frac{\hbar c}{4\pi a} \int_{2\mu}^{\infty} \frac{\sqrt{y^2 - 4\mu^2}}{e^y - 1} dy \quad (2.41)$$

donde $2\pi t \equiv y$ y $\pi A = mca/\hbar \equiv \mu$. La primera contribución en la parte derecha de la Ec. (2.41) está asociada con la energía total de los puntos de frontera. No depende de a y por lo tanto no contribuye en la fuerza de Casimir.

Para $\mu = 0$ ($m = 0$), la Ec. (2.41) conduce a

$$E(a, 0) = E(a) = -\frac{\hbar c}{4\pi a} \int_0^{\infty} \frac{y dy}{e^y - 1} = -\frac{\pi\hbar c}{24a} \quad (2.42)$$

de acuerdo con (2.22). En el caso contrario de una masa muy grande, $\mu \gg 1$, se obtiene

$$E(a, m) \approx -\frac{mc^2}{4} - \frac{\hbar c\sqrt{\mu}}{4\sqrt{\pi a}} e^{-2\mu}, \quad (2.43)$$

Para campos escalares con condiciones de frontera mezcladas o antiperiódicas, una modificación de la fórmula Abel-Plana es útil para la suma sobre números semi-

enteros:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) - \int_0^{\infty} F(t)dt = -i \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^{2\pi t} + 1} [F(it) - F(-it)]. \quad (2.44)$$

2.5.3. El efecto Casimir sobre un círculo

Se analizará un ejemplo muy simple del efecto Casimir sobre un círculo. Se utiliza el intervalo $0 \leq x \leq a$ cuyo punto inicial y final son identificados por las siguientes condiciones periódicas:

$$\varphi(0, t) = \varphi(a, t), \quad \partial_x \varphi(x, t) |_{x=0} = \partial_x \varphi(x, t) |_{x=a}. \quad (2.45)$$

La imagen geométrica de un intervalo con las condiciones (2.45) es un círculo de circunferencia a . El intervalo I [Fig. 2.4(a)] posee una topología euclídeana, mientras que el mismo intervalo con las condiciones (2.45) posee la topología de un círculo S^1 [Fig. 2.4(b)]. En todos los casos el campo escalar satisface las Ecs. (2.4) y (2.5). Aquí, para S^1 , en contraste con (2.6), nuevas soluciones son permitidas, tales que $\varphi \neq 0$ en los puntos $x = 0, a$.

El conjunto ortonormal completo de soluciones con frecuencias positivas y negativas de Ecs. (2.4) y (2.5) con condiciones (2.45) pueden ser escritas de la forma

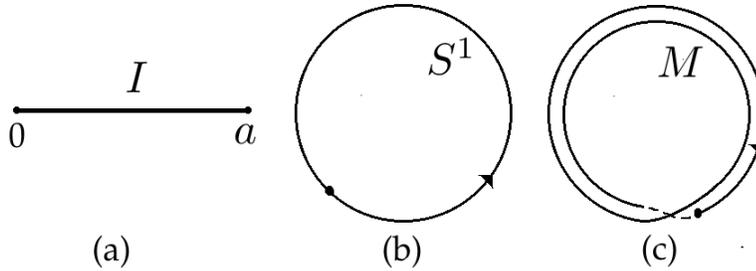


Figura 2.4. Tres variedades diferenciales planas de una dimensión, con (a) topología euclídeana, y la topología de un círculo con (b) condición periódica y (c) condición antiperiódica. Fuente: elaboración propia.

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(\pm)}(x, t) &= \left(\frac{c}{2a\omega_n}\right)^{1/2} e^{\mp i(\omega_n t - k_n x)}, \\ \omega_n &= \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2\right)^{1/2}, \quad k_n = \frac{2\pi n}{a}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

Estas soluciones satisfacen la Ec. (2.8). La única diferencia de la Ec. (2.10) es en los valores de el número de onda k_n . Esto conduce a diferentes frecuencias de oscilación para el campo escalar sobre un intervalo.

La energía del vacío del campo $\varphi(x, t)$ sobre un círculo S^1 está dado por

$$E_0(a, m) = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n - \frac{\hbar}{2} \omega_0 = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n - \frac{mc^2}{2} \quad (2.47)$$

La energía de Casimir es obtenida realizando la diferencia

$$E(a, m) = E_0(a, m) - E_{0M}(a, m), \quad (2.48)$$

donde $E_{0M}(a, m)$ está definida en las Ecs. (2.16) y (2.34).

Sustituyendo las Ecs. (2.47), (2.16) y (2.34) en la Ec. (2.48), se obtiene

$$\begin{aligned} E(a, m) &= -\frac{mc^2}{2} + \hbar \left[\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n - \frac{a}{2\pi} \int_0^{\infty} \omega_k dk \right] \\ &= -\frac{mc^2}{2} + \frac{2\pi\hbar c}{a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{B^2 + n^2} - \int_0^{\infty} \sqrt{B^2 + t^2} dt \right], \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde $B \equiv mac/(2\pi\hbar)$ y $ak = 2\pi t$. La energía de Casimir (2.49) puede ser calculada usando la fórmula de Abel-Plana (2.29) y las Ecs. (2.37) y (2.40), obteniendo el resultado:

$$E(a, m) = -\frac{\hbar c}{\pi a} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\sqrt{y^2 - \mu^2}}{e^y - 1} dy. \quad (2.50)$$

Aquí, $2\pi t \equiv y$ como en la Ec. (2.41) y la masa sin dimensión es $\mu = mca/\hbar = 2\pi B$. Puede notarse que el término

$$\frac{1}{2}F(0) = \frac{2\pi\hbar c}{a}B = \frac{mc^2}{2} \quad (2.51)$$

en la parte derecha de la fórmula Abel-Plana cancela el primer término en la parte derecha de la Ec. (2.49). Porque, la Ec. (2.50), en contraste con la Ec. (2.41), no contiene una contribución lineal en la masa. La explicación física de este hecho se debe a que el espacio con la topología de un círculo no contiene puntos límites y por lo tanto la masa m del campo no contribuye en el cálculo de la energía del vacío en el círculo.

Para un campo sin masa, $\mu = 0$ y la Ec. (2.50) se obtiene

$$E(a, 0) = E(a) = -\frac{\hbar c}{\pi a} \int_0^\infty \frac{y dy}{e^y - 1} = -\frac{\pi \hbar c}{6a}. \quad (2.52)$$

En el caso de una masa muy grande, $\mu \gg 1$, se obtiene de la Ec. (2.50)

$$E(a, m) \approx -\frac{\hbar c \sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\mu}, \quad (2.53)$$

i.e. la energía de Casimir es exponencialmente pequeña.

Brevemente, se analiza las condiciones antiperiódicas impuestas sobre un campo escalar,

$$\varphi(x + a, t) = -\varphi(x, t). \quad (2.54)$$

En el caso del campo sin masa, las frecuencias permitidas son

$$\omega_n = \frac{2\pi c}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.55)$$

La aplicación de la fórmula Abel-Plana (2.44), adaptada para la suma sobre números semi-enteros, toma como resultado la energía de Casimir

$$E(a) = \frac{\pi \hbar c}{12a}. \quad (2.56)$$

Se hace énfasis que la condición antiperiódica (2.54), en el signo de la energía de Casimir cambia, similarmente para el caso de las condiciones de frontera mezcladas. Las condiciones periódicas (2.45) pueden ser presentadas como una sola ecuación

$$\varphi(x + a, t) = \varphi(x, t), \quad (2.57)$$

similarmente para la Ec. (2.54). Fueron descritas geométricamente por un círculo de circunferencia a . Si las condición antiperiódica (2.54) son impuestas sobre el campo, se regresa al mismo valor del campo

$$\varphi(x, t) = \varphi(x + 2a, t) \quad (2.58)$$

después de dos vueltas, i.e. después de viajar una distancia " $2a$ "[ver Fig. (2.4)(c)].

3. Regularización por funciones Zeta

La regularización es un método utilizado para que expresiones como sumas o productos divergentes puedan tener un valor finito. Por ejemplo, la suma infinita de todos los números enteros positivos diferentes de cero

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots \quad (3.1)$$

es una sumatoria infinita. Por medio de la regularización de la función zeta, esta sumatoria infinita tiene un valor definido

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12} \quad (3.2)$$

ya que por definición de la función zeta de Riemann

$$\zeta_R(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}. \quad (3.3)$$

Para la física la regularización de funciones zeta representa una herramienta muy poderosa ya que permite la convergencia de expresiones infinitas y darle significado físico a las cantidades analizadas en los diferentes sistemas.

3.1. Función Zeta de Riemann

La función zeta de Riemann se define

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } s > 1. \quad (3.4)$$

La función zeta de Riemann también tiene una representación integral definida

$$\zeta_R(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } s > 1, \quad (3.5)$$

donde $\Gamma(s)$ es la función gamma. Una propiedad muy importante es la existencia de una ecuación llamada *fórmula de reflexión* y para la función zeta de Riemann es

$$\zeta_R(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta_R(1-s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad (3.6)$$

o de forma alterna

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_R(s) = \pi^{s-1/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta_R(1-s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (3.7)$$

3.2. Función Zeta de Hurwitz

Una importante generalización de la función zeta de Riemann, ζ_R , es la función zeta de Hurwitz ζ_H definida como

$$\zeta_H(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots \quad (3.8)$$

La representación integral es definida como

$$\zeta_H(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \frac{e^{-ta}}{1-e^{-t}}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad \operatorname{Re} a > 0 \quad (3.9)$$

donde $\Gamma(s)$ es la función gamma. Una identidad entre la función zeta de Hurwitz y la función zeta de Riemann es

$$\zeta_H(s, 1/2) = (2^s - 1) \zeta_R(s). \quad (3.10)$$

3.3. Función Zeta de Epstein

Ahora se considera una función zeta asociada con las sumas de cuadrados de enteros. Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > d/2$ y $c \in \mathbb{R}_+$, $\vec{r} \in \mathbb{R}_+^d$. La función zeta de Epstein está definida como

$$\zeta_{\mathcal{E}}(s, c|\vec{r}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(c + r_1 m_1^2 + r_2 m_2^2 + \dots + r_d m_d^2)^s}. \quad (3.11)$$

La representación integral está definida como

$$\zeta_{\mathcal{E}}(s, c|\vec{r}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} e^{-t(c+r_1 m_1^2 + r_2 m_2^2 + \dots + r_d m_d^2)}. \quad (3.12)$$

3.4. La función Zeta de un operador diferencial

El método de la regularización de una función zeta es definido de la siguiente manera: tomar un operador que puede ser un Hamiltoniano, \hat{H} , correspondiente a un sistema cuántico, establecer condiciones de frontera, agregar un posible campo e incluir una posible métrica. En términos matemáticos, se considera un operador diferencial, A , más las condiciones de frontera correspondientes. Cuando para un determinado problema los operadores están asociados a ecuaciones diferenciales que generalmente son de segundo orden, y se encuentran bajo determinadas condiciones de frontera para encontrar sus eigenvalores se le conoce como *problema de Sturm-Liouville*. Este tipo de problemas de Sturm-Liouville tienen tres propiedades muy importantes que son válidas tanto en la física clásica como en la teoría cuántica, que son: a) Los operadores son autoadjuntos, y también son llamados *hermitianos*, que tienen un conjunto ortogonal de eigenfunciones. b) Los eigenvalores de un operador hermitiano son reales. c) Las eigenfunciones de un operador hermitiano forman un conjunto completo. El espectro de este operador A puede ser o no ser calculable explícitamente y cabe resaltar que como los eigenvalores son reales una parte del espectro puede ser positiva o negativa. La parte positiva del espectro está asociada a un sistema físico, mientras que la parte negativa está asociada a un problema que no tiene significado físico. Bajo condiciones generales, al operador A puede asociarse una *función zeta*, ζ_A :

$$\zeta_A(s) = \text{Tr } A^{-s}, \quad (3.13)$$

donde $s \in \mathbb{C}$. Si el operador A^{-s} se define utilizando el teorema espectral, la función zeta puede escribirse de la forma siguiente:

$$\zeta_A(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}, \quad \lambda_n \neq 0, \quad (3.14)$$

donde λ_n es el n -ésimo eigenvalor del operador A . Cuando los eigenvalores tienen una de las siguientes formas: (i) an , (ii) $a(n+b)$ ó (iii) $a(n_1^2 + n_2^2)$, se obtienen la (i) función zeta de Riemann ζ_R , (ii) la función zeta de Hurwitz ζ_H y (iii) la función zeta de Epstein ζ_E , respectivamente.

3.5. Regularización de la energía del vacío

Dependiendo de la magnitud física a calcular, la función zeta debe ser evaluada para cierto valor de s . Si se está interesado en la energía del vacío o la energía de Casimir, es obtenida como la suma del espectro

$$E_{Cas} = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n, \quad (3.15)$$

que generalmente tiene la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n,$$

que es una suma infinita y divergente por lo que no puede obtenerse información o algún resultado para ser interpretado; pero mediante la utilización de la regularización de funciones zeta, ésta expresión se vuelve convergente, y puede reescribirse como

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \text{ para } s = -1$$

y por definición corresponde a la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ valuada en $s = -1$, por lo que la energía de Casimir (3.15) puede reescribirse como

$$E_{Cas} = \frac{\hbar}{2} \zeta(-1), \quad (3.16)$$

donde $\zeta(-1) = -1/12$. Generalmente, la serie (3.15) es divergente e implica una continuación analítica a través de la función zeta. En otras palabras, la regularización de la función zeta es un caso especial de la continuación analítica.

4. Invarianza en variedades unidimensionales

Se considera una variedad unidimensional S^1 , que está en función de una variable t , la cual se encuentra dentro de dos placas conductoras paralelas infinitas separadas por un intervalo $[0, L]$ que son normales a una curva $\alpha(t)$, el laplaciano está en función del parámetro t y es independiente del sistema de coordenadas de \mathbb{R}^n . Se aplican diversas *transformaciones analíticas* sobre la variedad unidimensional y estas transformaciones dejan *invariante* a la variedad en el espacio \mathbb{R}^n , ya que estas transformaciones toman en cuenta al punto inicial y al punto final, y *no depende* de otras propiedades geométricas como la curvatura, orientabilidad o torsión.

4.1. Invarianza

4.1.1. Invarianza de un operador

Si A y A' son dos operadores representados por matrices de $n \times n$, y si existe una matriz B invertible llamada *matriz de cambio de base* de $n \times n$ tal que

$$A' = BAB^{-1} \quad (4.1)$$

B es llamada una *matriz de cambio de base*. A estas operaciones entre matrices del tipo

$$A \mapsto BAB^{-1} \quad (4.2)$$

se le conocen como *transformaciones de semejanza*. Estas transformaciones de semejanza dejan invariantes varias funciones asociadas a una matriz (ver apéndice E), por ejemplo:

la traza

$$\text{Tr}(A) = \sum_i a_{ii}, \quad (4.3)$$

el polinomio característico

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I|, \quad (4.4)$$

el determinante

$$|A|, \quad (4.5)$$

y los eigenvalores

$$Av = \lambda v. \quad (4.6)$$

Ante el cambio de base de un operador estos invariantes (Ecs. (4.3), (4.4), (4.5), (4.6)) son muy importantes ya que contienen la información del sistema sobre el que un operador actúa porque también implica un cambio de coordenadas.

4.2. Transformaciones

Una curva $\alpha(t)$ puede ser desplazada o trasladada espacialmente, es decir, puede aplicarse una *transformación espacial* γ a la curva, de la forma

$$\alpha(t) \rightarrow \alpha(t) + \gamma(t), \quad (4.7)$$

también puede aplicarse una *rotación espacial* R

$$\alpha(t) \rightarrow R\alpha(t), \quad (4.8)$$

o una *reflexión espacial* aplicada por el signo negativo

$$\alpha(t) \rightarrow -\alpha(t). \quad (4.9)$$

Estas transformaciones dejan *invariante* el producto interno -para un valor de t - entre los vectores $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ (ver Apéndice D). La invarianza del producto interno bajo estas transformaciones implica la independencia del sistema de coordenadas bajo el cual la variedad unidimensional se encuentra inmersa. La invarianza es ideal para expresar e investigar las leyes de la física.

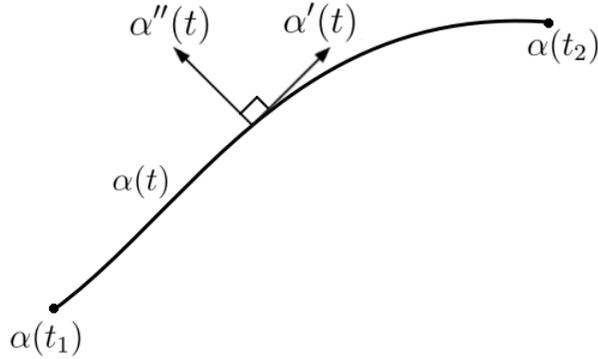


Figura 4.1. En $\alpha(t)$, el vector tangente $\alpha'(t)$ es perpendicular al vector $\alpha''(t)$.

4.3. Laplaciano en variedades unidimensionales generalizadas

Sea $S^1 \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad unidimensional con la métrica g' y el espacio \mathbb{R}^n con la métrica g . Sea t el parámetro de la variedad unidimensional S^1 y sea $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión llamada *curva* hacia \mathbb{R}^n definida como

$$\alpha : (t) \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)), \quad (4.10)$$

donde $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ forman el *sistema de coordenadas* de \mathbb{R}^n . Sea Δ_{S^1} el laplaciano sobre S^1 . Si la curva α está parametrizada por su longitud de arco (1.6), el laplaciano Δ_{S^1}

$$\Delta_{S^1} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (4.11)$$

está en función del parámetro t de la variedad unidimensional y es independiente del sistema de coordenadas de \mathbb{R}^n . Este laplaciano también puede ser considerado como un operador \mathcal{L} .

4.4. El oscilador armónico simple como variedad unidimensional

El efecto Casimir para una variedad unidimensional que se encuentra entre dos placas conductoras paralelas infinitas separadas por un intervalo $[0, L]$ es equivalente a un problema de Sturm-Liouville $\mathcal{L}f_\lambda(x) = \lambda^2 f_\lambda(x)$, es decir, que puede ser considerado como un problema de valores propios para condiciones de frontera

establecidas. Como punto de partida, se considera al operador \mathcal{L} como el laplaciano en una dimensión espacial x

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} \quad (4.12)$$

que actúa sobre la variedad unidimensional generalizada. Ahora el problema de Sturm-Liouville

$$-\frac{d^2}{dx^2}f_\lambda(x) = \lambda^2 f_\lambda(x), \quad x \in [0, L] \quad (4.13)$$

físicamente pueda interpretarse como la ecuación del *oscilador armónico simple*

$$\frac{d^2}{dx^2}f_\lambda(x) + \lambda^2 f_\lambda(x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (4.14)$$

La solución general para la ecuación del oscilador armónico en una dimensión es de la forma

$$f_\lambda(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x, \quad x \in [0, L]. \quad (4.15)$$

La función zeta asociada al operador \mathcal{L} es

$$\zeta(s) = \sum_n \lambda_n^{-2s}. \quad (4.16)$$

4.5. Funciones zeta y condiciones de frontera para el oscilador armónico simple

Las condiciones de frontera, se definen como

$$af_\lambda(0) + bf'_\lambda(0) = 0 \quad (4.17)$$

$$cf_\lambda(L) + df'_\lambda(L) = 0 \quad (4.18)$$

donde $|a| + |b| > 0$ y $|c| + |d| > 0$.

4.5.1. Condiciones de frontera de Dirichlet

Para las condiciones de Dirichlet, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ y $d = 0$

$$(1)f_\lambda(0) + (0)f'_\lambda(0) = 0 \quad (4.19)$$

$$(1)f_\lambda(L) + (0)f'_\lambda(L) = 0 \quad (4.20)$$

los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{L} \quad (4.21)$$

y la función zeta asociada para $s = -1/2$ es

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \zeta_R(-1) = -\frac{\pi}{12L}. \quad (4.22)$$

4.5.2. Condiciones de frontera de Neumann

Para las condiciones de frontera de Neumann, $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ y $d = 1$

$$(0)f_\lambda(0) + (1)f'_\lambda(0) = 0 \quad (4.23)$$

$$(0)f_\lambda(L) + (1)f'_\lambda(L) = 0 \quad (4.24)$$

los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{L} \quad (4.25)$$

y la función zeta asociada para $s = -1/2$ es

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \zeta_R(-1) = -\frac{\pi}{12L}. \quad (4.26)$$

4.5.3. Condiciones de frontera mezcladas

4.5.3.1. Mezcla 1

Si $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ y $d = 0$

$$(0)f_\lambda(0) + (1)f'_\lambda(0) = 0 \quad (4.27)$$

$$(1)f_\lambda(L) + (0)f'_\lambda(L) = 0 \quad (4.28)$$

los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2L} \quad (4.29)$$

y la función zeta asociada para $s = -1/2$ es

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \left(\frac{-1}{2} \right) \zeta_R(-1) = \frac{\pi}{24L}. \quad (4.30)$$

4.5.3.2. Mezcla 2

Si $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ y $d = 1$

$$(1)f_\lambda(0) + (0)f'_\lambda(0) = 0 \quad (4.31)$$

$$(0)f_\lambda(L) + (1)f'_\lambda(L) = 0 \quad (4.32)$$

los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2L} \quad (4.33)$$

y la función zeta asociada para $s = -1/2$ es

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \left(\frac{-1}{2} \right) \zeta_R(-1) = \frac{\pi}{24L}. \quad (4.34)$$

4.5.3.3. Mezcla 3

Si $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ y $d = 1$

$$(1)f_\lambda(0) + (1)f'_\lambda(0) = 0 \quad (4.35)$$

$$(1)f_\lambda(L) + (1)f'_\lambda(L) = 0 \quad (4.36)$$

los valores propios son

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{L} \quad (4.37)$$

y la función zeta asociada para $s = -1/2$ es

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \zeta_R(-1) = -\frac{\pi}{12L}. \quad (4.38)$$

Para una variedad unidimensional, las condiciones de frontera de Dirichlet o de Neumann son análogas a que el extremo de una cuerda esté fijo o que pueda desplazarse libremente, respectivamente. Estas combinaciones de las condiciones de frontera conducen a que las funciones zeta puedan tener resultados ya sea positivos o negativos. Estos resultados pueden modelar un sistema físico llamado *pistón de Casimir*, el cual es un sistema que utiliza estas configuraciones análogas a una cuerda para estudiar variables físicas como la fuerza, energía, entropía, entre otras, de placas paralelas que estén en condiciones fijas o que puedan desplazarse libremente, que se detallarán en el capítulo número cinco.

5. Atracción y repulsión en una dimensión

En este capítulo, se explora el efecto Casimir dentro de un sistema llamado *pistón*. Estos pistones pueden estar a diferentes temperaturas. Debido a la naturaleza de los fotones o paquetes de energía que se encuentran en el pistón a una temperatura T , para cada uno de los niveles de energía $\hbar\omega_n$ y sus distintos modos de vibración ω_n , estos fotones o paquetes de energía obedecen a ciertas distribuciones estadísticas, e.g. la distribución o ley de Planck, o a la distribución o ley de Rayleigh–Jeans, en equilibrio termodinámico; debido a estas consideraciones se explora un *efecto Casimir termodinámico* y junto a él, propiedades físicas como la fuerza, energía y entropía dentro del pistón.

5.1. Pistón de Casimir

Un pistón es una cavidad rectangular de paredes o placas conductoras dividida en dos secciones por una placa conductora o partición intermedia que se puede mover. Naturalmente esta cavidad puede dividirse en dos sistemas: un sistema formado por la pared o placa a y la partición c , y otro sistema formado por la pared o placa b y la partición c (ver figura 5.1). Se ha demostrado que la fuerza de Casimir puede ser de atracción o repulsión según las condiciones de frontera que se establezcan sobre el pistón para con cada una de las dos paredes. Si las condiciones de frontera entre las paredes y la partición son de Dirichlet (4.19, 4.20) o de Neumann (4.23, 4.24), estas condiciones de frontera son *semejantes*. Si las condiciones de frontera entre las paredes y la partición son de la mezcla 1 (4.27, 4.28) o de la mezcla 2 (4.31, 4.32), estas condiciones de frontera son *no semejantes*.

Para un sistema físico, se considera un pistón formado por dos paredes paralelas con una partición en medio de ellas que está a una temperatura T . Las temperaturas que se consideran para este pistón son: el cero absoluto, temperaturas finitas (ley de Planck) y temperaturas muy altas (ley de Rayleigh–Jeans).

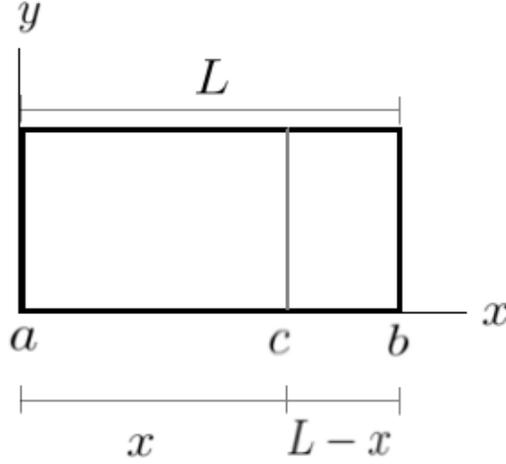


Figura 5.1. Pistón de Casimir. Cavity formada por dos paredes o placas paralelas conductoras a y b , de longitud L . En medio de la cavity se encuentra la partición c que puede moverse entre las paredes. La cavity se divide en dos sistemas: un sistema formado por la pared o placa a y la partición c , y otro sistema formado por la pared o placa b y la partición c .

5.2. Energías termodinámicas de Casimir

5.2.1. Energía de Casimir en la temperatura de cero absoluto

Para dos placas paralelas a temperatura de cero absoluto $T = 0$, la energía tiene la forma siguiente

$$U_{TC}(L) = \sum_n \left(\frac{1}{2} \right) \hbar \omega_n, \quad (5.1)$$

donde la suma es sobre todos los modos normales de vibración dentro de las placas paralelas. Ahora si a las placas paralelas a temperatura de cero absoluto $T = 0$, se le agrega una partición en medio de ellas, la energía de Casimir es el cambio de energía $\Delta U_{TC}(x, L)$ cuando la partición está a una distancia x desde la placa izquierda

$$\Delta U_{TC}(x, L) = U_{TC}(x) + U_{TC}(L - x) - [U_{TC}(L/2) + U_{TC}(L/2)]. \quad (5.2)$$

Para condiciones de frontera semejantes

$$\Delta U_{TC}(x, L) = -\frac{\pi \hbar c}{24} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L - x} - \frac{2}{L/2} \right) \quad (5.3)$$

la partición y las paredes tienen asociada una energía negativa. Para condiciones de frontera no semejantes

$$\Delta U_{TC}(x, L) = \frac{\pi \hbar c}{48} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} - \frac{2}{L/2} \right) \quad (5.4)$$

la partición y las paredes tienen asociada una energía positiva. Las energías de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.2 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.3.

5.2.2. Energía de Casimir para la distribución de Planck

Para una temperatura finita T que incluye la temperatura de cero absoluto, se considera un ensemble de pistones de longitud L de una dimensión, con particiones colocadas en diferentes posiciones x para todos los pistones del ensemble. Si cada uno de estos pistones está en equilibrio térmico para una misma temperatura T , entonces cada uno de los pistones tiene diferente energía promedio y por lo tanto también cada uno de los pistones tiene diferente energía de Casimir. La energía de Casimir para todos los pistones a una misma temperatura finita T , incluyendo la energía para la temperatura de cero absoluto $(1/2)\hbar\omega$, es

$$\Delta U_{PTC}(x, L, T) = \frac{\omega}{\exp(\omega/T) - 1} + \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\omega \coth\left(\frac{1}{2}\frac{\omega}{T}\right) \quad (5.5)$$

donde se considera, para efectos de cálculo, $\hbar/k_B = 1$. Los distintos valores de (5.5) dependen de las condiciones de frontera, ya sean semejantes o no semejantes, que están asociados a los valores propios de ω . Las energías de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.2 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.3.

5.2.3. Energía de Casimir para la distribución de Rayleigh-Jeans

Ahora se considera un pistón con una partición que está a una distancia x fija, con una temperatura T que aumenta. Para esta temperatura que va en aumento, la energía de Casimir de la partición para el espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto (5.5) tiende a la energía del espectro de Rayleigh-

Jeans, que para este caso el valor es

$$\Delta U_{RJ}(x, L, T) = 0 \quad (5.6)$$

para cualquier condición de frontera ya sea semejante o no semejante. Las energías de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.2 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.3.

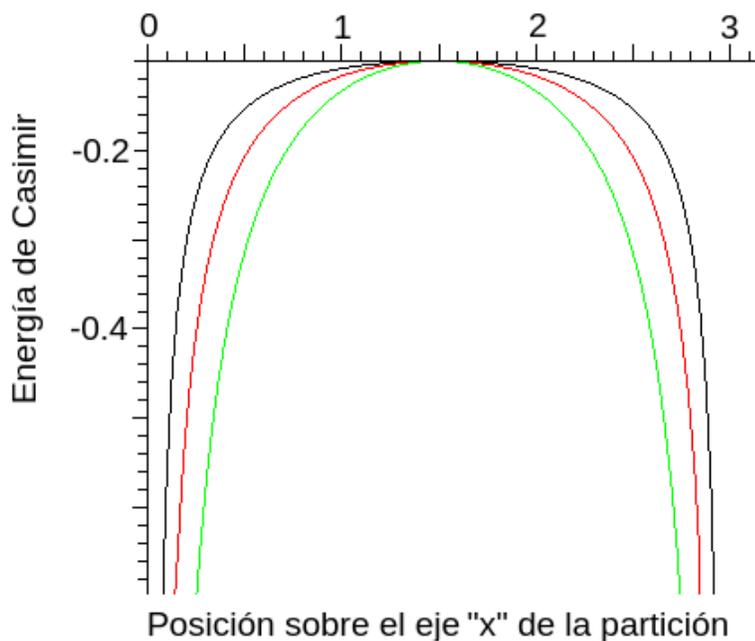


Figura 5.2. Energía de Casimir para condiciones de frontera semejantes. La energía de Casimir para el espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto para condiciones de frontera semejantes entre las paredes y la partición, es graficada como la función de la distancia x desde la pared izquierda localizada en $x = 0$ en un pistón de longitud $L = 3$ para diferentes temperaturas. La curva de color verde, establece la energía de Casimir negativa en la ecuación (5.3) a temperatura $T = 0$. La curva de color rojo, para la temperatura $T = 1$, muestra la energía de Casimir disminuyendo. La curva de color negro, para la temperatura $T = 3$, muestra que el valor de la energía de Casimir disminuye mientras se incrementa la temperatura en el pistón. Mientras la temperatura en el pistón se incrementa, la energía de Casimir negativa disminuye hasta llegar a cero y tiende a la distribución de Rayleigh-Jeans, ecuación (5.6).

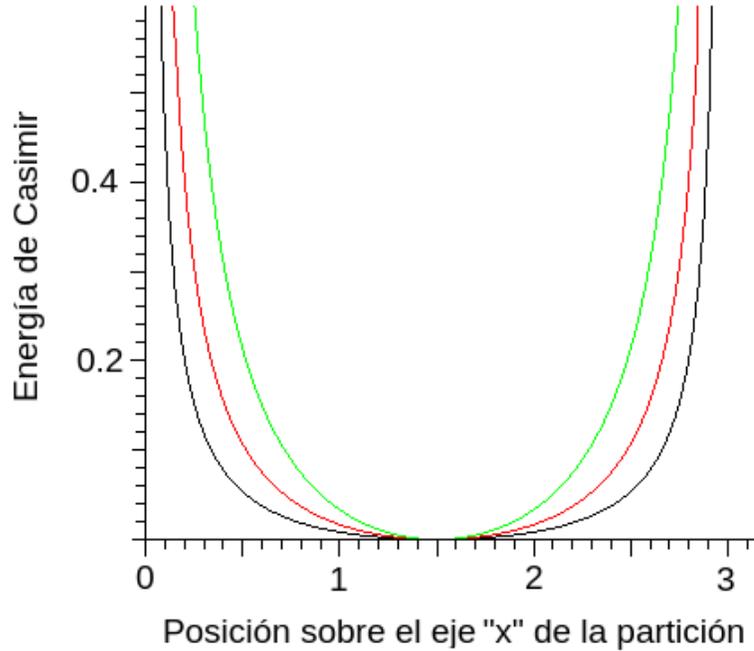


Figura 5.3. Energía de Casimir para condiciones de frontera no semejantes. La energía de Casimir para el espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto para condiciones de frontera no semejantes entre las paredes y la partición, es graficada como la función de la distancia x desde la pared izquierda localizada en $x = 0$ en un pistón de longitud $L = 3$ para diferentes temperaturas. La curva de color verde, establece la energía de Casimir positiva en la ecuación (5.4) a temperatura $T = 0$. La curva de color rojo, para la temperatura $T = 1$, muestra la energía de Casimir disminuyendo. La curva de color negro, para la temperatura $T = 3$, muestra que el valor de la energía de Casimir disminuye mientras se incrementa la temperatura en el pistón. Mientras la temperatura en el pistón se incrementa, la energía de Casimir positiva disminuye hasta llegar a cero y tiende a la distribución de Rayleigh-Jeans, ecuación (5.6).

5.3. Fuerzas termodinámicas de Casimir

La fuerza de Casimir puede obtenerse como función de la energía,

$$\Delta F = -\frac{d(\Delta U)}{dx} \quad (5.7)$$

de la variable x .

5.3.1. Fuerzas de Casimir en la temperatura de cero absoluto

A temperatura de cero absoluto, la fuerzas de Casimir sobre la particion pueden ser obtenidas utilizando las energías como funciones de potencial (5.7). Para condiciones de frontera semejantes, y a temperatura $T = 0$, la fuerza sobre la partición

es atractiva hacia las paredes

$$\Delta F_{TC} = -\frac{\pi\hbar c}{24} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(L-x)^2} \right). \quad (5.8)$$

Para condiciones de frontera no semejantes, la fuerza sobre la partición es repulsiva

$$\Delta F_{TC} = \frac{\pi\hbar c}{48} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(L-x)^2} \right). \quad (5.9)$$

Las fuerzas de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.4 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.5.

5.3.2. Fuerzas de Casimir para la distribución de Planck

La fuerza de Casimir, para el espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto, en un piston de longitud L a temperatura T que incluye la temperatura de cero absoluto con una partición en la posición x está definida como

$$\Delta F(x, L, T) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{X}(\omega_n, x, T) - \mathcal{X}(\omega_n, L-x, T)] \quad (5.10)$$

$$\Delta F(x, L, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\hbar\omega_n}{2x} \coth\left(\frac{\hbar\omega_n}{2k_B T}\right) - \frac{\hbar\omega_n}{2(L-x)} \coth\left(\frac{\hbar\omega_n}{2k_B T}\right) \right], \quad (5.11)$$

Los distintos valores de (5.5) dependen de las condiciones de frontera, ya sean semejantes o no semejantes, que están asociados a los valores propios de ω . Las fuerzas de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.4 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.5.

5.3.3. Fuerzas de Casimir para la distribución de Rayleigh-Jeans

A muy altas temperaturas para condiciones de frontera semejantes, la fuerza que atrae a la partición hacia una de las paredes esta dada por

$$\Delta F_{RJ}(x, L, T) = -\frac{k_B T}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{L-x} \right). \quad (5.12)$$

Por otro lado, a muy altas temperaturas para condiciones de frontera semejantes la fuerza que atrae a la partición hacia una de las paredes esta dada por

$$\Delta F_{RJ}(x, L, T) = 0. \quad (5.13)$$

Las fuerzas de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.4 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.5.

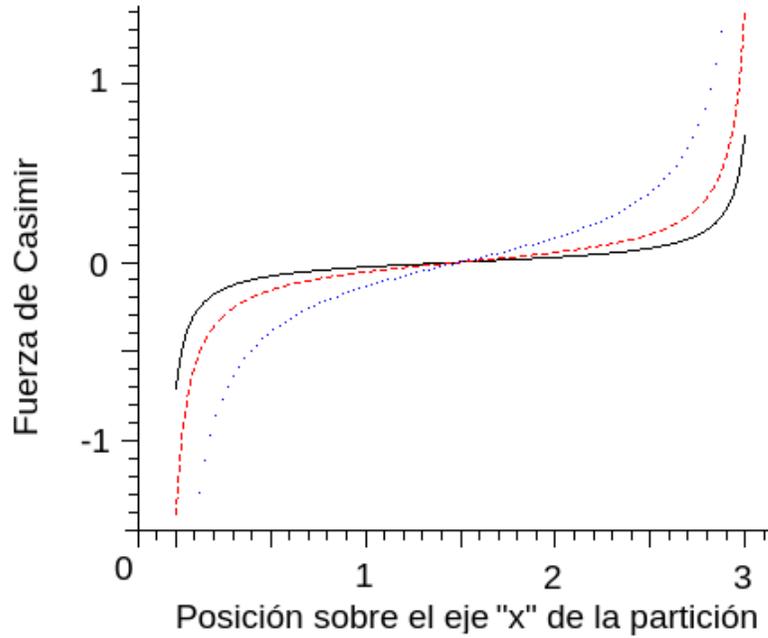


Figura 5.4. Fuerza de Casimir para condiciones de frontera semejantes. La fuerza de Casimir para el espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto para condiciones de frontera semejantes entre las paredes y la partición, es graficada como la función de la distancia x desde la pared izquierda localizada en $x = 0$ en un pistón de longitud $L = 3$ para diferentes temperaturas. La curva de color negro, establece que la fuerza de Casimir en la ecuación (5.8) atrae a la partición hacia las paredes a temperatura $T = 0$. La curva de color rojo, para la temperatura $T = 1$, muestra que la fuerza de Casimir incrementa en la región central del pistón. La curva de color azul, para la temperatura $T = 3$, muestra que el valor de la fuerza de Casimir aumenta mientras se incrementa la temperatura en el pistón. Mientras la temperatura en el pistón se incrementa, la fuerza de Casimir también se incrementa de acuerdo a la fuerza asociada a la distribución de Rayleigh-Jeans, ecuación (5.12).

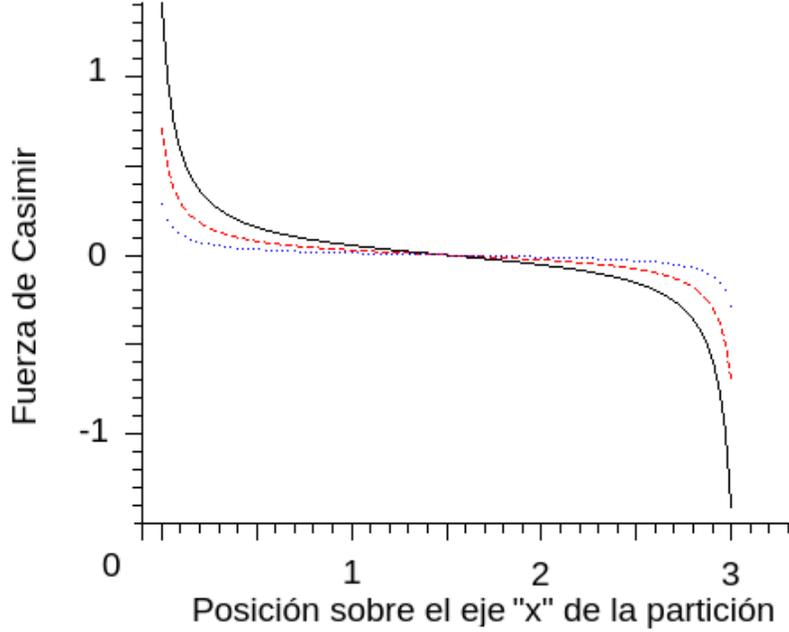


Figura 5.5. Fuerza de Casimir para condiciones de frontera no semejantes. La fuerza de Casimir para el espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto para condiciones de frontera no semejantes entre las paredes y la partición, es graficada como la función de la distancia x desde la pared izquierda localizada en $x = 0$ en un pistón de longitud $L = 3$ para diferentes temperaturas. La curva de color negro, establece que la fuerza de Casimir en la ecuación (5.9) repele a la partición desde las paredes a temperatura $T = 0$. La curva de color rojo, para la temperatura $T = 1$, muestra que la fuerza de Casimir decrece en la región central del pistón. La curva de color azul, para la temperatura $T = 3$, muestra que el valor de la fuerza de Casimir disminuye mientras se incrementa la temperatura en el pistón. Mientras la temperatura en el pistón se incrementa, la fuerza de Casimir tiende a cero de acuerdo a la fuerza asociada a la distribución de Rayleigh-Jeans, ecuación (5.13).

5.4. Entropías termodinámicas de Casimir

5.4.1. Entropía de Casimir en la temperatura de cero absoluto

La entropía de Casimir para la temperatura de cero absoluto $T = 0$, es

$$\Delta S_{TC}(x, L, T) = 0, \tag{5.14}$$

tanto para condiciones de frontera semejantes y no semejantes. Las entropías de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.6 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.7.

5.4.2. Entropía de Casimir para la distribución de Planck

La entropía de Casimir $\Delta S(x, L, T)$ en un piston de longitud L a temperatura T en la partición que se encuentra en la posición x está definida como

$$\Delta S(x, L, T) = S(x, T) + S(L - x, T) - 2S(L/2, T). \quad (5.15)$$

La entropía del espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto, está dada por

$$S_P\left(\frac{\omega}{T}\right) = -\ln \left[2 \sinh \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \right] + \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \coth \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right). \quad (5.16)$$

Las entropías de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.6 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.7.

5.4.3. Entropía de Casimir para la distribución de Rayleigh-Jeans

La entropía de Casimir que incluye la temperatura de cero absoluto, con condiciones de frontera semejantes está dada por

$$\Delta S_{RJ}(x, L, T) = \frac{k_B}{2} \left| \ln \left(\frac{x}{L-x} \right) \right|, \quad (5.17)$$

la cual es independiente de la temperatura y solo depende de la posición x donde se encuentre la partición.

La entropía de Casimir que incluye la temperatura de cero absoluto, para condiciones de frontera no semejantes está dada por

$$\Delta S_{RJ}(x, L, T) = 0 \quad (5.18)$$

para una dimensión. Las entropías de Casimir para las condiciones de frontera semejantes se muestran en la gráfica 5.6 y para las no semejantes se muestran en la gráfica 5.7.

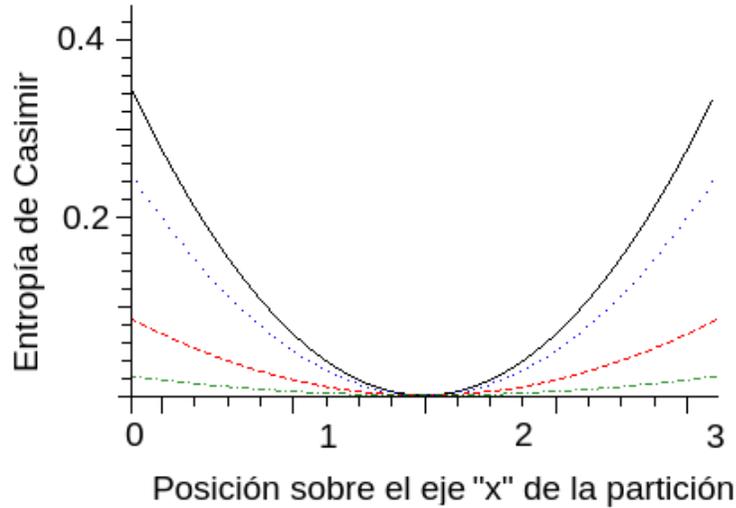


Figura 5.6. Entropía de Casimir para condiciones de frontera semejantes. La entropía de Casimir (5.15) para el espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto para condiciones de frontera semejantes entre las paredes y la partición, es graficada como la función de la distancia x desde la pared izquierda localizada en $x = 0$ en un pistón de longitud $L = 3$ para diferentes temperaturas. Para temperatura $T = 0$ la entropía de Casimir tiende a cero. La curva de color verde es para la temperatura $T = 0.25$. La curva de color rojo para la temperatura $T = 0.5$, la curva de color azul para la temperatura $T = 1$, y la curva de color negro para la temperatura $T = 2$, muestran que el valor de la entropía de Casimir incrementa mientras se incrementa la temperatura en el pistón. Mientras la temperatura en el pistón se incrementa, la entropía de Casimir se vuelve independiente de la temperatura y tiende a la distribución de Rayleigh-Jeans, ecuación (5.17), que solo depende de la posición de la partición en el pistón.

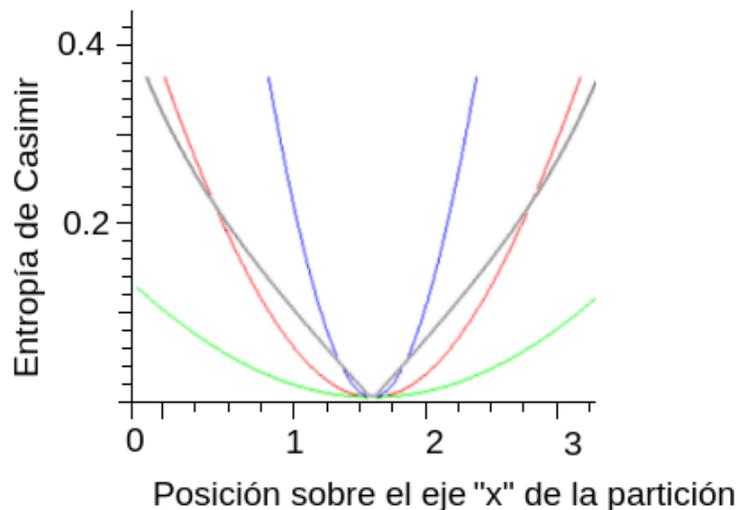


Figura 5.7. Entropía de Casimir para condiciones de frontera no semejantes. La entropía de Casimir (5.15) para el espectro de Planck que incluye la temperatura de cero absoluto para condiciones de frontera no semejantes entre las paredes y la partición, es graficada como la función de la distancia x desde la pared izquierda localizada en $x = 0$ en un pistón de longitud $L = 3$ para diferentes temperaturas. Para temperatura $T = 0$ la entropía de Casimir tiende a cero. La curva de color verde es para la temperatura $T = 0.1$. La curva de color negro para la temperatura $T = 0.2$ muestra un incremento en la entropía de Casimir. La curva de color azul para la temperatura $T = 0.5$, muestra que la región central del pistón la entropía de Casimir disminuye y que cerca de las paredes aumenta. La curva de color rojo para la temperatura $T = 1$, muestra que el valor de la entropía de Casimir disminuye en la región central del pistón mientras se incrementa la temperatura. Mientras la temperatura en el pistón se incrementa, la entropía de Casimir tiende a la distribución de Rayleigh-Jeans cuyo valor en este caso es cero (5.18).

CONCLUSIONES

1. La introducción de una partición entre paredes o placas paralelas lleva a cambios en las energías, fuerzas, y variables termodinámicas asociadas con las condiciones de frontera en la partición y en las paredes.
2. Para ondas electromagnéticas, las fuerzas de Casimir son llamadas "fuerzas de dispersión", o "fuerzas de Van der Waals".
3. Usualmente se piensa que las fuerzas de Van der Waals son atractivas, sin embargo, el tipo de análisis introducido por Casimir sugiere la posibilidad de fuerzas repulsivas.
4. Dependiendo de las condiciones de frontera en el pistón, la partición experimentará atracción o repulsión de las paredes a temperatura cero.
5. Las fuerzas atractivas se incrementan cuando la temperatura aumenta mientras que las fuerzas repulsivas disminuyen cuando la temperatura aumenta.
6. Los cambios de entropía del pistón dependen de la posición en la cual se encuentre la partición.
7. Para altas temperaturas, los cambios en la entropía son independientes de la temperatura para el caso atractivo; pero los cambios de entropía desaparecen para el caso repulsivo.

RECOMENDACIONES

- a)* Investigar sobre otras transformaciones que dejen invariante la inmersión de la variedad unidimensional.
- b)* Utilizar otros tipos de condiciones de frontera para determinar las magnitudes físicas del pistón.
- c)* Utilizar otras técnicas de regularización para series y expresiones divergentes.
- d)* Analizar con otras partículas, ya sea con masa o sin masa, las magnitudes físicas del pistón.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. B. Arfken *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press. San Diego, California, 2005.
- [2] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen. *Advances in the Casimir Effect*. International Series of Monographs On Physics. Reino Unido, 2009.
- [3] M. Bordag, U. Mohideen y V.M. Mostepanenko, “New developments in the Casimir effect” *Phys. Rept.* 353, 1 (2001)
- [4] T. H. Boyer, “Casimir Forces and Boundary Conditions in One Dimension: Attraction, Repulsion, Planck Spectrum, and Entropy” *American Journal of Physics* 71, 990 (2003)
- [5] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1976.
- [6] H. B. G. Casimir, D. Polder, “The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces” *Phys. Rev.* 73, 360 (1948).
- [7] S. Dong. Curves. Consultado en julio de 2016 en <https://www.math.upenn.edu/shiydong/Math501X-1-Curves.pdf>.
- [8] E. Elizalde. *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*. Springer, Alemania, 1995.
- [9] J. Feldman. Examples of Manifolds. Consultado en mayo de 2016 en <http://www.math.ubc.ca/feldman/m428/>.
- [10] G. Fucci, C. Graham y K. Kirsten. Spectral functions for regular Sturm-Liouville problems. *J. Math. Phys.* 56 (2015) 043503.
- [11] G. Fucci, K. Kirsten y P. Morales. Pistons modeled by potentials. *Springer Proc. Phys.*, 137:313-322, 2011.
- [12] D. Fursaev y D. Vassilevich. *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory*. Springer, 2011.

- [13] K. Kirsten. *Spectral Functions in Mathematics and Physics*. Chapman & Hall/CRC. Boca Raton, Florida, 2002.
- [14] K. Kirsten y F. L. Williams. *A Window into Zeta and Modular Physics*. Cambridge University Press.
- [15] S. K. Lamoreaux. *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μ m range*. Phys. Rev. Lett. 78, 5 (1997).
- [16] K. A. Milton. *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-point Energy*. International Series of Monographs On Physics. Reino Unido, 2009.
- [17] P. Morales Almazán. Spectral functions for generalized piston configurations. Consultado en junio de 2016 en <https://baylor-ir.tdl.org/baylor-ir/handle/2104/8503>.
- [18] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [19] T. Nguyen. Casimir Effect and Vacuum Fluctuations. Consultado en marzo de 2016 en <http://www.hep.caltech.edu/~phys199/lectures/>.
- [20] P. Pisani. Funciones Espectrales de Operadores Singulares. Consultado en junio de 2016 en <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/2278>.
- [21] N. Robles. Zeta Function Regularization. Consultado en abril de 2016 en <https://workspace.imperial.ac.uk/theoreticalphysics/Public/MSc/Dissertations/2009/>.
- [22] S. Rosenberg. *The Laplacian on a Riemannian Manifold*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1997.
- [23] W. Simpson y U. Leonhardt. *Forces of the Quantum Vacuum: An Introduction to Casimir Physics*. World Scientific Publishing, 2015.
- [24] M. J. Sparnaay, “Measurements of attractive forces between flat plates” Physica, Volume 24, Issue 6 (1958).
- [25] J. A. Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [26] J. Wilson. Review of Manifolds. Consultado en abril de 2016 en <http://web.stanford.edu/~jchw/notes.html>.
- [27] D. G. Zill y M. R. Cullen. *Differential Equations with Boundary-Value Problems*. Seventh Edition, Cengage Learning, Canada, 2009.

ANEXOS

A. Valores propios, condiciones de frontera y funciones zeta

A.1. Funciones zeta con condiciones de frontera desacopladas

El problema de Sturm-Liouville está definido como un problema de eigenvalores

$$\mathcal{L}f_\lambda(x) = \lambda^2 f_\lambda(x) \quad (\text{A.1})$$

y la función zeta asociada al operador \mathcal{L} es

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda} \lambda^{-2s}. \quad (\text{A.2})$$

Ahora el operador \mathcal{L} se considera como el laplaciano en una dimensión

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \lambda^2 f(x), \quad x \in [0, L] \quad (\text{A.3})$$

sujeto a condiciones de frontera desacopladas

$$af(0) + bf'(0) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$cf(L) + df'(L) = 0 \quad (\text{A.5})$$

donde $|a| + |b| > 0$ y $|c| + |d| > 0$. Reescribiendo la Ec. (A.3) como

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \lambda^2 f(x) = 0 \quad (\text{A.6})$$

tiene una solución general del tipo

$$f(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x. \quad (\text{A.7})$$

Ahora se procede a establecer condiciones de frontera desacopladas Ec.(A.4) y Ec. (A.5) a la Ec. (A.7).

A.2. Condiciones de frontera de Dirichlet

Si $a = 1$ y $b = 0$ en Ec.(A.4); $c = 1$ y $d = 0$ en Ec.(A.5) se obtiene $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$. Sustituyendo estas condiciones en Ec.(A.7), se obtienen las eigenfunciones siguientes

$$f_n = \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) \quad (\text{A.8})$$

y los eigenvalores

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{L}. \quad (\text{A.9})$$

Si se sustituye Ec.(A.9) en Ec.(A.2) se obtiene

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^{-2s} = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} \zeta_R(2s) \quad (\text{A.10})$$

donde ζ_R es la función zeta de Riemann. Si (A.10) toma el valor $s = -1/2$ se obtiene

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \zeta_R(-1) \quad (\text{A.11})$$

Ahora se utiliza la siguiente ecuación funcional que representa la continuación analítica de la función zeta de Riemann para todo el plano complejo, excepto para $s = 1$

$$\zeta_R(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \cos \left(\frac{\pi(1-s)}{2} \right) \zeta(1-s) \quad (\text{A.12})$$

Si (A.12) toma el valor $s = -1$

$$\zeta_R(-1) = -\frac{1}{12} \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo (A.13) en (A.11), se obtiene

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L}\zeta_R(-1) = -\frac{\pi}{12L}. \quad (\text{A.14})$$

A.3. Condiciones de frontera de Neumann

Si $a = 0$ y $b = 1$ en Ec.(A.4); $c = 0$ y $d = 1$ en Ec.(A.5) se obtiene $f'(0) = 0$ y $f'(L) = 0$. Sustituyendo estas condiciones en Ec.(A.7), se obtienen las eigenfunciones siguientes

$$f_n = A \cos \frac{\pi n}{L} x \quad (\text{A.15})$$

y los eigenvalores

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{L}. \quad (\text{A.16})$$

Si se sustituye Ec.(A.16) en Ec.(A.2) se obtiene

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^{-2s} = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} \zeta_R(2s) \quad (\text{A.17})$$

donde ζ_R es la función zeta de Riemann. Si (A.17) toma el valor $s = -1/2$, se obtiene

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L}\zeta_R(-1) = -\frac{\pi}{12L}. \quad (\text{A.18})$$

B. Condiciones de frontera mezcladas

B.1. Mezcla 1

Si $a = 0$ y $b = 1$ en Ec.(A.4); $c = 1$ y $d = 0$ en Ec.(A.5) se obtiene $f'(0) = 0$ y $f(L) = 0$. Sustituyendo estas condiciones en Ec.(A.7), se obtienen las eigenfunciones siguientes

$$f_n = B \cos \frac{\pi(2n-1)}{2L} x \quad (\text{B.19})$$

y los eigenvalores

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2L}. \quad (\text{B.20})$$

Si se sustituye Ec.(B.20) en Ec.(A.2) se obtiene

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi(2n-1)}{2L} \right)^{-2s} = \frac{2^{2s} L^{2s}}{\pi^{2s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2s}} = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} \zeta_H(2s, 1/2) \quad (\text{B.21})$$

donde ζ_R es la función zeta de Riemann. Utilizando la identidad (3.10) en (B.21) la función zeta es

$$\zeta(s) = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} (2^{2s} - 1) \zeta_R(2s). \quad (\text{B.22})$$

Si (B.22) toma el valor $s = -1/2$, se obtiene

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \left(\frac{-1}{2} \right) \zeta_R(-1) = \frac{\pi}{24L}. \quad (\text{B.23})$$

B.2. Mezcla 2

Si $a = 1$ y $b = 0$ en Ec.(A.4); $c = 0$ y $d = 1$ en Ec.(A.5) se obtiene $f(0) = 0$ $f'(L) = 0$. Sustituyendo estas condiciones en Ec.(A.7), se obtienen las eigenfunciones siguientes

$$f_n = A \sin \frac{\pi(2n-1)}{2L} x \quad (\text{B.24})$$

y los eigenvalores

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2L}. \quad (\text{B.25})$$

Si se sustituye Ec.(B.25) en Ec.(A.2) se obtiene

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi(2n-1)}{2L} \right)^{-2s} = \frac{2^{2s} L^{2s}}{\pi^{2s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2s}} = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} \zeta_H(2s, 1/2) \quad (\text{B.26})$$

donde ζ_R es la función zeta de Riemann. Utilizando la identidad (3.10) en (B.26) se obtiene

$$\zeta(s) = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} (2^{2s} - 1) \zeta_R(2s) \quad (\text{B.27})$$

Si (B.27) toma el valor $s = -1/2$, se obtiene

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \left(\frac{-1}{2} \right) \zeta_R(-1) = \frac{\pi}{24L}. \quad (\text{B.28})$$

B.3. Mezcla 3

Si $a = 1$ y $b = 1$ en Ec.(A.4) se obtiene $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$; $c = 1$ y $d = 1$ en Ec.(A.5) se obtiene $f(L) = 0$ y $f'(L) = 0$. Sustituyendo estas condiciones en Ec.(A.7), se obtienen las eigenfunciones siguientes

$$f_n = A \sin \frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi}{L}A \cos \frac{n\pi}{L}x \quad (\text{B.29})$$

y los eigenvalores

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{L}. \quad (\text{B.30})$$

Si se sustituye Ec.(B.30) en Ec.(A.2) se obtiene

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^{-2s} = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \frac{L^{2s}}{\pi^{2s}} \zeta_R(2s) \quad (\text{B.31})$$

Si (B.31) toma el valor $s = -1/2$, se obtiene

$$\zeta(-1/2) = \frac{\pi}{L} \zeta_R(-1) = -\frac{\pi}{12L}. \quad (\text{B.32})$$

C. Laplaciano inducido

Si $\alpha(t)$ está parametrizada por longitud de arco (1.6), entonces $\alpha(t)$ es una curva con velocidad unitaria (1.5):

$$1 = \|\alpha'(t)\| = [\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)]^{1/2}, \quad (\text{C.33})$$

ahora si esta expresión se deriva parcialmente respecto a t en ambos lados

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} [\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} [\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)]^{-1/2} \left[\frac{\partial \alpha'(t)}{\partial t} \cdot \alpha'(t) + \alpha'(t) \cdot \frac{\partial \alpha'(t)}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)]^{-1/2} \left[2 \alpha'(t) \cdot \frac{\partial \alpha'(t)}{\partial t} \right] \\ &= \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

se obtiene que el vector de velocidad $\alpha'(t)$ es ortogonal al vector de aceleración $\alpha''(t)$.

Si S^1 está inmersa en \mathbb{R}^n , se dice que S^1 es una *subvariedad inmersa* de \mathbb{R}^n y debido a esto el producto interno en el espacio tangente $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$ induce un producto interno y una métrica g_{S^1} en el espacio tangente $T_t S^1$. La métrica inducida es definida como

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \delta_{ij} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (\text{C.35})$$

La métrica inducida sobre el espacio tangente de S^1 utilizando el parámetro t es

$$\begin{aligned} g_{S^1} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} dt \otimes dt \\ &= \alpha'_i \alpha'_i dt \otimes dt \\ &= (\alpha'_i)^2 dt \otimes dt \\ &= \|\alpha'(t)\|^2 dt \otimes dt. \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

La representación matricial de la métrica g_{S^1} es

$$g_{S^1}(t) = \left(\|\alpha'(t)\|^2 \right). \quad (\text{C.37})$$

Se considera el laplaciano (1.8) en un sistema de coordenadas $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ junto con la métrica inducida (C.37) sobre la variedad S^1

$$\begin{aligned} \Delta &= - \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^4} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Si la curva $\alpha(t)$ asociada al laplaciano (C.38) se considera como una curva parametrizada por longitud de arco (1.6), implica que posee velocidad unitaria (C.33) y también implica que los vectores de aceleración y velocidad son ortogonales (C.34) entre sí; por lo que el laplaciano se reduce a

$$\Delta = - \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (\text{C.39})$$

un laplaciano independiente de las coordenadas de la curva y dependiente únicamente del parametro t .

D. Invarianza del producto escalar

Transformada 1. Para la traslación espacial

$$\beta(t) = \alpha(t) + \gamma(t) \quad (\text{D.40})$$

si la curva beta cumple la propiedad para la parametrización por longitud de arco (1.6)

$$1 = \|\beta'(t)\|$$

entonces, derivando de ambos lados

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(1) &= \frac{d}{dt}(\|\beta'(t)\|) \\ 0 &= \frac{d}{dt}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{-1/2} \left[\frac{d\beta'(t)}{dt} \cdot \beta'(t) + \beta'(t) \cdot \frac{d\beta'(t)}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{2}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{-1/2} \left[2 \beta'(t) \cdot \frac{d\beta'(t)}{dt} \right] \\ &= \beta'(t) \cdot \beta''(t). \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Transformada 2. Para la rotación espacial

$$\beta(t) = R\alpha(t) \quad (\text{D.42})$$

si la curva beta cumple la propiedad para la parametrización por longitud de arco (1.6)

$$1 = \|\beta'(t)\|$$

entonces, derivando de ambos lados

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(1) &= \frac{d}{dt}(\|\beta'(t)\|) \\
0 &= \frac{d}{dt}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{-1/2} \left[\frac{d\beta'(t)}{dt} \cdot \beta'(t) + \beta'(t) \cdot \frac{d\beta'(t)}{dt} \right] \\
&= \frac{1}{2}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{-1/2} \left[2 \beta'(t) \cdot \frac{d\beta'(t)}{dt} \right] \\
&= \beta'(t) \cdot \beta''(t) \\
&= (R\alpha'(t)) \cdot (R^T \alpha''(t)^T) \\
&= (RR^T)[\alpha(t)' \cdot \alpha''(t)^T] \\
&= \alpha'(t) \cdot \alpha''(t)^T.
\end{aligned} \tag{D.43}$$

Transformada 3. Para la reflexión espacial

$$\beta(t) = -\alpha(t) \tag{D.44}$$

si la curva beta cumple la propiedad para la parametrización por longitud de arco (1.6)

$$1 = \|\beta'(t)\|$$

entonces, derivando de ambos lados

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(1) &= \frac{d}{dt}(\|\beta'(t)\|) \\
0 &= \frac{d}{dt}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{-1/2} \left[\frac{d\beta'(t)}{dt} \cdot \beta'(t) + \beta'(t) \cdot \frac{d\beta'(t)}{dt} \right] \\
&= \frac{1}{2}[\beta'(t) \cdot \beta'(t)]^{-1/2} \left[2 \beta'(t) \cdot \frac{d\beta'(t)}{dt} \right] \\
&= \beta'(t) \cdot \beta''(t) \\
&= (-\alpha'(t)) \cdot (-\alpha''(t)) \\
&= \alpha'(t) \cdot \alpha''(t).
\end{aligned} \tag{D.45}$$

E. Invariantes de un operador

Si A y A' son dos operadores representados por matrices de $n \times n$ y si existe una matriz B invertible de $n \times n$ tal que

$$A' = BAB^{-1} \quad (\text{E.46})$$

B es llamada una *matriz de cambio de base*. Estos cambios de bases entre matrices dejan invariantes varias funciones asociadas a las matrices, por ejemplo: La traza

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A') &= \text{Tr}(BAB^{-1}) \\ &= b_{il}a_{lk}b_{ki}^{-1} \\ &= (b^{-1}b)_{kl}a_{lk} \\ &= \delta_{kl}a_{lk} \\ &= a_{kk} \\ &= \text{Tr}(A). \end{aligned} \quad (\text{E.47})$$

El polinomio característico

$$\begin{aligned} p_{A'}(\lambda) &= |A' - \lambda I| \\ &= |BAB^{-1} - \lambda I| \\ &= |BAB^{-1} - B\lambda I B^{-1}| \\ &= |B(A - \lambda I)B^{-1}| \\ &= |B||A - \lambda I||B^{-1}| \\ &= |A - \lambda I| \\ &= p_A(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

El determinante

$$\begin{aligned} |A'| &= |BAB^{-1}| \\ &= |B||A||B^{-1}| \\ &= |B||A|\frac{1}{|B|} \\ &= |A|. \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

Los eigenvalores

$$\begin{aligned}A'v' &= \lambda v' \\A'Bv &= \lambda Bv \\BAv &= \lambda Bv \\Av &= \lambda v\end{aligned}$$

(E.50)

donde $v' = Bv$.