



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

DEFORMACIONES INTEGRABLES APLICADO A MODELOS EPIDÉMICOS

Ludwing Asturias

Asesorado por J. A. Ponciano, Ph.D.

Guatemala, noviembre de 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**DEFORMACIONES INTEGRABLES APLICADO A
MODELOS EPIDÉMICOS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

LUDWING ASTURIAS
ASESORADO POR J. A. PONCIANO, PH.D.

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR Dr. Enrique Pazos Ávalos
EXAMINADOR Dra. María Eugenia Cabrera Catalán
EXAMINADOR M.Sc. Erick Hernández



Universidad De San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas




Ref. D.DTG. 009-2019
Guatemala 13 de noviembre de 2019

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **DEFORMACIONES INTEGRABLES APLICADO A MODELOS EPIDÉMICOS** presentado por el estudiante universitario **Ludwing Osmar Asturias Alquijay**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

“ID Y ENSEÑAD A TODOS”


MSc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



201404005
MI/pec



A mi Familia;
Amigos, Compañeros, Profesores,
Personal Administrativo de la Escuela;
A mi Asesor.
Gracias.



Dedicado a mi Familia



ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL	I
ÍNDICE DE FIGURAS	III
LISTA DE SÍMBOLOS	V
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. GRUPOS DE LIE	1
1.1. Variedad diferencial, cartas y atlas	1
1.1.1. Cambio de coordenadas	2
1.1.2. Mapeo entre variedades	3
1.1.3. Curvas y conectividad	4
1.2. Grupos de Lie	4
1.2.1. Grupos de transformación local	6
1.3. Campos vectoriales	7
1.3.1. Flujos	9
1.3.2. Acción sobre funciones	11
1.3.3. Diferenciales	11
1.3.4. Bracket de Lie	12
1.4. Álgebras de Lie	14
1.4.1. El mapeo exponencial	16
1.4.2. Constantes de estructura	16
1.4.3. Acciones de grupos infinitesimales	17
1.4.4. Representación adjunta	18
2. SISTEMAS HAMILTONIANOS	21
2.1. Bracket de Poisson	21

2.1.1.	Campos vectoriales Hamiltonianos	23
2.1.2.	Funciones de estructura	24
2.1.3.	Estructura de Lie-Poisson	27
2.1.4.	Integrales primeras	28
3.	BIÁLGEBRAS DE LIE	31
3.1.	Álgebras y coálgebras	31
3.2.	Biálgebras y álgebras de Hopf	34
3.2.1.	Biálgebras	34
3.2.2.	Álgebras de Hopf	34
3.2.3.	Triplete de Manin	37
4.	DEFORMACIONES INTEGRABLES APLICADO A MODELOS EPIDEMICOS	39
4.1.	Deformaciones de grupos de Lie-Poisson	39
4.2.	El modelo SIR: una deformación integrable	43
4.2.1.	Estructura de Hamilton-Poisson	44
4.2.2.	Biálgebras de Lie	45
4.2.3.	Construcción del grupo de Lie dual	46
4.2.4.	Deformación del sistema SIR	47
	CONCLUSIONES	51
	RECOMENDACIONES	53
	BIBLIOGRAFÍA	55
A.	APÉNDICE	59
A.1.	Coproducto del grupo dual	59

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Sistema coordinado sobre una variedad	2
1.2. Mapeo entre variedades	4
4.1. Modelo SIR deformado	49

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
Ad	representación adjunta
C	función Casimir
\mathcal{C}^k	espacio de funciones k -veces diferenciable
\mathcal{C}^∞	espacio de funciones suaves
c_{ij}^k	constante de estructura
e	elemento identidad de grupo
$e^{\varepsilon A}$	matriz exponencial
\exp	mapeo exponencial
$\exp(\varepsilon \mathbf{v})$	flujo de campo vectorial \mathbf{v}
G	grupo de Lie
G^*	dual de grupo de Lie
\mathfrak{g}	álgebra de Lie
\mathfrak{g}^*	dual de álgebra de Lie
\mathcal{H}	funcion Hamiltoniana
I	matriz identidad
J	matriz de estructura para bracket de Poisson
J^{ij}	función de estructura para bracket de Poisson
M	multiplicación de álgebra
M	variedad diferenciable
M_i	matriz de elementos de grupo
m	operación de grupo
$\mathcal{O}(\varepsilon^n)$	orden de desvanecimiento
\mathbb{R}	números reales
R_g	mapeo de multiplicación derecha
\mathbb{R}^m	espacio Euclídeo m -dimensional
S	antípoda de biálgebra
TM	fibrado tangente de M

Símbolo	Significado
$TM _x$	fibrado tangente de M en x
u	unidad de álgebra
\mathcal{U}	dominio de transformación de grupo
U_α	carta o sistema coordenado
\mathbf{v}	campo vectorial
$\mathbf{v}(f)$	derivada de Lie de f
$\hat{\mathbf{v}}_H$	campo vectorial Hamiltoniano
$\mathbf{v} _x$	vector tangente en x
x	coordenadas locales
X_i	elementos de la base de álgebra de Lie
δ_j^i	símbolo de Kronecker
$\delta_{\mathfrak{g}}$	coconmutador
Δ	multiplicación de coálgebra
Δ_η	coproducto deformado
ε	counidad de coálgebra
η	parámetro de deformación
ξ^i	coeficiente de campo vectorial
ξ^i	elementos de la base de álgebra de Lie dual
ρ	representación de álgebra de Lie
χ_α	función coordenada
Ψ	flujo de campo vectorial
$\partial/\partial x$ ó ∂_k	derivada parcial
∂/∂^i ó ∂^i	base de vector tangente
∇f	gradiente de f
\simeq	es isomorfo a
\emptyset	conjunto vacío
\subset	inclusión de conjuntos
\cup	unión de conjuntos
\cap	intersección de conjuntos
\in	elemento de
\circ	composición de funciones
\oplus	suma directa
\times	producto cartesiano
\otimes	producto tensorial sobre campo k

Símbolo	Significado
$ $	evaluación
(a, b)	intervalo abierto
$[a, b]$	intervalo cerrado
$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$	bracket de Lie
$\{F, H\}$	bracket de Poisson
$\{F, H\}_\eta$	bracket de Poisson deformado
$\langle \cdot; \cdot \rangle$	emparejamiento de espacio vectorial y su dual

OBJETIVOS

General

Obtener deformaciones integrables en sistemas dinámicos Hamiltonianos equipados de estructuras bialgebraicas de Lie.

Específicos

1. Obtener estructuras bialgebraicas de Lie de sistemas Hamiltonianos de ecuaciones diferenciales ordinarias.
2. Construir deformaciones integrables de modelos epidémicos.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos representan modelos para describir fenómenos que aparecen en física, biología, química, ingeniería, entre otras. En la mayoría de los casos, estos sistemas dinámicos pueden ser analizados dentro del marco de la mecánica Lagrangiana o Hamiltoniana cuyas ecuaciones de evolución temporal están regidas por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La mecánica de Hamilton es una reformulación a las leyes de movimiento de Newton de la mecánica clásica, sin embargo, los sistemas Hamiltonianos canónicos están definidos sobre una variedad simpléctica, es decir, una variedad de dimensión par con coordenadas locales usualmente denotadas por (p_i, q_i) . La idea de una variedad de Poisson es ligeramente más general que la de una variedad simpléctica. Para sistemas dinámicos finito dimensionales las estructuras simplécticas solo pueden ser definidas sobre variedades de dimensión par, mientras que para estructuras de Poisson no existe tal restricción. En áreas como biología, por ejemplo, gran cantidad de sistemas dinámicos son modelados como sistemas de ecuaciones diferenciales de dimensión tres. Podríamos decir, que el primer caso no trivial donde la estructura de Poisson no implica una estructura simpléctica aparece cuando la dimensión del sistema del espacio de fase es tres. Debido a esto, la motivación del presente trabajo es estudiar sistemas dinámicos que describan fenómenos en biología, específicamente aquellos relacionados a la evolución de epidemias, dentro de la teoría de Hamiltonianos no canónicos, es decir, equipar dichos sistemas con una estructura de Hamilton-Poisson al expresar sus ecuaciones de movimiento de la forma $\dot{x} = J(x)\nabla H(x)$, donde H es la función Hamiltoniana y en este caso, J no es necesariamente una matriz simpléctica sino una matriz de estructura dada por los brackets de Poisson de las funciones coordenadas. De esta manera podremos aprovechar las herramientas y métodos que proporciona esta teoría para estudiar de una manera más abstracta las propiedades dinámicas de dichos sistemas.

En muchas ocasiones, se proponen modelos matemáticos simples que luego son modificados para obtener un comportamiento dinámico que se ajuste mejor a las

observaciones. Tal es el caso del modelo clásico de Kermack & McKendrick, un modelo formado por un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión tres, que describe la evolución temporal de una enfermedad infecciosa y ha servido de base para muchos otros modelos más complejos. Es importante mencionar que este modelo posee dos constantes de movimiento que permiten resolver el sistema mediante cuadratura, siendo entonces, un sistema integrable. En nuestro caso, en lugar de modificar el modelo clásico de Kermack & McKendrick agregando explícitamente términos adicionales a las ecuaciones de evolución, se procederá a construir deformaciones integrables mediante coálgebras de Poisson al seguir los pasos descritos en [1], teniendo como ventaja preservar la integrabilidad del sistema. Un procedimiento alternativo para construir deformaciones integrables se presenta en [2], donde alteran las constantes de movimiento y obtienen términos polinomiales de deformación. Otro método para construir deformaciones, presentado en [3], consiste en realizar extensiones al añadir términos cúbicos, cuadráticos y cargas centrales a la estructura de Lie-Poisson.

En el siguiente capítulo se desarrollará la teoría de grupos de Lie que permitirá aplicar los métodos de teoría de grupos a campos vectoriales sobre variedades diferenciales. Se definirá el concepto de variedad diferencial, recordaremos la definición de grupo y se hablará de la importancia de las álgebras de Lie. Los sistemas dinámicos que estudiaremos serán aquellos que tengan una estructura de Lie-Poisson, es por eso que en el capítulo 2 definiremos el concepto de campo vectorial Hamiltoniano y cómo abordar sistemas dinámicos Hamiltonianos que no se limiten a estructuras simplécticas (dimensión par), además se definirá el concepto de sistema integrable en términos del bracket de Poisson. En el capítulo 3 se enunciarán los conceptos básicos que definen un álgebra de Hopf y se hablará sobre la correspondencia uno a uno entre biálgebras de Lie y grupos de Lie-Poisson que serán la clave para construir deformaciones de sistemas dinámicos. Se presentará en el capítulo 4 la metodología para construir deformaciones integrables de sistemas Hamiltonianos mediante coálgebras de Poisson. Como sistema dinámico de interés se tomará el modelo clásico de Kermack & McKendric. En el capítulo final se incluyen algunos puntos relevantes de todo el trabajo, por último se presentan algunas recomendaciones y se describen posibles trabajos a futuro.

1. GRUPOS DE LIE

Uno de los puntos clave de la teoría de Lie es el hecho que un grupo de Lie es equivalente al concepto de una variedad diferencial, llevando consigo las propiedades abstractas de un grupo y las técnicas geométricas de una variedad. En este capítulo estudiaremos objetos que servirán para estudiar sistemas dinámicos de ecuaciones diferenciales tal que sus propiedades no dependan de un sistema coordenado elegido y cómo es que un álgebra de Lie puede describir casi por completo un grupo de Lie.

1.1. Variedad diferencial, cartas y atlas

A lo largo de este trabajo estudiaremos objetos que están definidos sobre subconjuntos abiertos del espacio Euclideo \mathbb{R}^m , como ecuaciones diferenciales y grupos de simetría, cuyas características geométricas fundamentales serán independientes de cualquier sistema de coordenadas. Específicamente, si $U \subset \mathbb{R}^m$ es abierto y $\psi: U \rightarrow V$, donde $V \subset \mathbb{R}^m$ es abierto, es cualquier difeomorfismo, es decir que ψ es un mapeo infinitamente diferenciable con inversa infinitamente diferenciable, entonces los objetos definidos sobre U tendrán una contraparte equivalente sobre V . Aunque la formulación precisa para el objeto sobre U y su contraparte sobre V en general cambiará, las propiedades básicas esenciales seguirán siendo las mismas. Desde este punto de vista, las variedades diferenciables (figura 1.1) proveen el entorno natural para el estudio de objetos que no dependen de coordenadas (ver, por ejemplo, [4], [5], [6], [7], [8], [9], entre otras).

Definición 1.1

Una variedad diferencial m -dimensional es un conjunto M , junto con una colección contable de subconjuntos $U_\alpha \subset M$, llamados cartas o sistemas coordenados, y funciones uno-a-uno $\chi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ sobre subconjuntos abiertos conexos $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, llamados aplicaciones de coordenadas locales, que satisfacen las siguientes propiedades:

a) Los sistemas coordenados cubren M :

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M.$$

b) Sobre la superposición de cualquier par de sistemas coordenados $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ la aplicación compuesta

$$\chi_{\beta} \circ \chi_{\alpha}^{-1}: \chi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \chi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

es una función suave (infinitamente diferenciable).

c) Si $x \in U_{\alpha}$, $\tilde{x} \in U_{\beta}$ son puntos distintos de M , entonces existen subconjuntos abiertos $W \subset V_{\alpha}$, $\tilde{W} \subset V_{\beta}$, con $\chi_{\alpha}(x) \in W$, $\chi_{\beta}(\tilde{x}) \in \tilde{W}$, que satisfacen

$$\chi_{\alpha}^{-1}(W) \cap \chi_{\beta}^{-1}(\tilde{W}) = \emptyset.$$

1.1.1. Cambio de coordenadas

Además de las cartas básicas $\chi_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha}$ dadas en la definición de M , uno siempre puede añadir cartas adicionales $\chi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$, sujeto al requerimiento que ellas sean compatibles con las cartas dadas. Esto significa que para cada α , $\chi \circ \chi_{\alpha}^{-1}$ es suave en la intersección $\chi_{\alpha}(U \cap U_{\alpha})$. Así, la restricción para un conjunto dado de coordenadas locales χ_{α} hacia un sistema coordenado más pequeño $\tilde{U}_{\alpha} \subset U_{\alpha}$ será también un sistema válido. Una posibilidad adicional es componer un mapeo de coordenadas locales dado $\chi_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha}$ con cualquier difeomorfismo $\psi: V_{\alpha} \rightarrow \tilde{V}_{\alpha}$ de \mathbb{R}^m . Dicho difeomorfismo es referido como un cambio de coordenadas. Ya que ambos

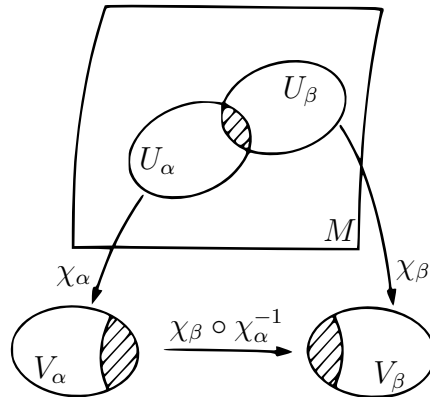


Figura 1.1. Sistema coordenado sobre una variedad (Imagen tomada de [4, Fig. 1])

χ_α y $\psi \circ \chi_\alpha$ son igualmente coordenadas locales válidas sobre el sistema coordenado U_α , cualquier propiedad de M , u objeto definido sobre M , deberá ser independiente de cualquier elección particular de coordenadas locales. Si elegimos definir un objeto sobre una variedad usando su formulación en un sistema coordenado dado, entonces deberemos verificar que la definición es realmente independiente de las coordenadas particulares usadas. Esto requerirá una investigación en cómo se comportan los objetos bajo cambios de coordenadas. Algunas veces, como los cálculos realizados son más fáciles en coordenadas locales, la elección de un sistema coordenado especial en la cual los objetos de interés toman una forma particularmente simple nos permitirá simplificar considerablemente mucho de esos cálculos.

A menudo uno expande la colección de cartas para incluir todas aquellas compatibles con las cartas definitorias. La colección resultante, llamada una colección maximal de cartas o *atlas* en M , todavía satisface (a), (b), (c) de la definición 1.1, pero ya no es contable.

Usualmente, al hablar sobre coordenadas locales en una variedad, prescindiremos de la referencia explícita de la aplicación χ_α definiendo el sistema de coordenadas locales, y hablaremos como si la expresión de coordenadas locales fuesen idénticas con los puntos correspondientes sobre la variedad misma. Así, diremos “sean $x = (x^1, \dots, x^m)$ coordenadas locales sobre M ”, que, más precisamente, significa que existe un mapeo de coordenadas locales $\chi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, con $U_\alpha \subset M$ abierto, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ abierto, tal que cada p en U_α tiene coordenadas locales $x = \chi_\alpha(p)$. Como χ_α es uno-a-uno, podemos claramente identificar p con su expresión de coordenada local x . [4]

1.1.2. Mapeo entre variedades

Si M y N son variedades suaves, un mapeo $F: M \rightarrow N$ se dice ser suave si su expresión en coordenadas locales es un mapeo suave en cualquier sistema coordenado. En otras palabras, para cada sistema coordenado $\chi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ sobre M y cada sistema $\tilde{\chi}_\beta: \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ sobre N , el mapeo compuesto

$$\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es un mapeo suave donde sea que esté definido (ver figura 1.2). En otras palabras, un mapeo suave es de la forma $y = F(x)$, donde F es una función suave sobre los subconjuntos abiertos dando coordenadas locales x en M y y en N . [4]

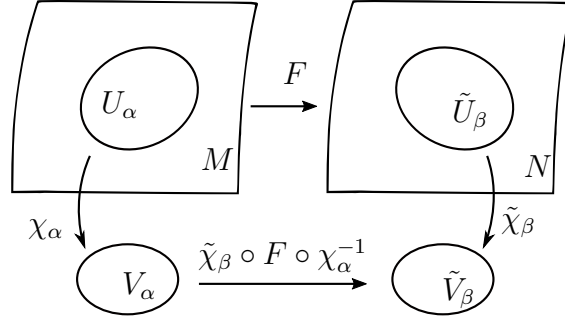


Figura 1.2. Mapeo entre variedades. (Fuente: elaboración propia)

1.1.3. Curvas y conectividad

Una curva C sobre una variedad suave M está parametrizada por un mapeo suave $\phi: I \rightarrow M$ donde I es un subintervalo de \mathbb{R} . En coordenadas locales, C está definido por m funciones $x = \phi(t) = (\phi^1(t), \dots, \phi^m(t))$. Note que no es necesario que ϕ sea uno-a-uno (así una curva puede tener auto-intersecciones). En consecuencia, las curvas son más generales que subvariedades uno-dimensionales. Una curva degenerada particular ocurre cuando $\phi(t) \equiv x_0$ para todo t , para algún x_0 fijo, así C consiste de un punto solamente. Una curva cerrada es una cuyos puntos finales coinciden: $\phi(a) = \phi(b)$, con $I = [a, b]$, un intervalo cerrado.

Una variedad es conexa por trayectorias si para cualquier par de puntos existe una curva suave que los une. Una variedad M es simple conexa si cada curva cerrada $C \subset M$ puede ser deformada continuamente en un punto. [4]

1.2. Grupos de Lie

A primera vista, un grupo de Lie parece ser una unión poco natural entre el concepto algebraico de un grupo y la noción geométrica-diferencial de una variedad. Sin embargo, tal como veremos pronto, esta combinación de álgebra y cálculo conduce al desarrollo de técnicas para el estudio de grupos con simetrías continuas (ver, por ejemplo, [4], [10], [11], entre otras). Comenzamos recordando la definición de un grupo abstracto.

Definición 1.2

Un grupo es un conjunto G junto con una operación binaria tal que para cualquier par de elementos g y h de G , el producto $g \cdot h$ es de nuevo un elemento de G . Se requiere que la operación de grupo satisfaga los siguientes axiomas:

- *Asociatividad.* Si g, h y k son elementos de G , entonces

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$$

- *Elemento identidad.* Existe un elemento distinguido e de G , llamado el elemento identidad, el cual tiene la propiedad que

$$e \cdot g = g = g \cdot e$$

para todo g en G .

- *Inversas.* Para cada g en G existe una inversa, denotada g^{-1} , con la propiedad

$$g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g.$$

La característica distintiva de un grupo de Lie es que también tiene la estructura de una variedad suave, de modo que los elementos del grupo pueden ser variados continuamente.

Definición 1.3

Un grupo de Lie r -paramétrico es un grupo G que también tiene la estructura de una variedad suave r -dimensional de modo que tanto la operación de grupo

$$m: G \times G \rightarrow G, \quad m(g, h) = g \cdot h, \quad g, h \in G,$$

y la inversión

$$i: G \rightarrow G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G,$$

son mapeos suaves entre variedades.

Un *homomorfismo* de grupo de Lie es un mapeo suave $\phi: G \rightarrow H$ entre dos grupos de Lie que respeta las operaciones de grupo:

$$\phi(g \cdot \tilde{g}) = \phi(g) \cdot \phi(\tilde{g}), \quad g, \tilde{g} \in G.$$

Si ϕ tiene una inversa suave, esta determina un *isomorfismo* entre G y H .

Si G y H son grupos de Lie r - y s -paramétricos, entonces su producto cartesiano $G \times H$ es un grupo de Lie $(r + s)$ -paramétrico con operación de grupo

$$(g, h) \cdot (\tilde{g}, \tilde{h}) = (g \cdot \tilde{g}, h \cdot \tilde{h}), \quad g, \tilde{g} \in G, \quad h, \tilde{h} \in H,$$

que es un mapeo suave en la estructura del producto de variedades.

Al restringir nuestra atención a grupos de Lie conexos, estamos excluyendo en consideración simetrías discretas, como reflexiones, y concentrándonos en simetrías, como rotaciones, que puedan ser conectadas continuamente al elemento identidad en el grupo. [4]

1.2.1. Grupos de transformación local

Muchos de los grupos de Lie aparecen como grupos de transformaciones sobre alguna variedad M . En general un grupo de Lie G tendrá lugar como un grupo de transformaciones de alguna variedad M si para cada elemento del grupo $g \in G$ existe un mapeo asociado desde M hacia sí mismo. Además, el grupo puede actuar solo localmente, es decir que las transformaciones de grupo pueden no estar definidas para todos los elementos del grupo ni para todos los puntos en la variedad.

Definición 1.4

Sea M una variedad suave. Un grupo local de transformaciones actuando sobre M está dado por un grupo (local) de Lie G , un subconjunto abierto \mathcal{U} , con

$$\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M,$$

que es el dominio de definición del grupo de acción, y un mapeo suave $\Psi: \mathcal{U} \rightarrow M$ con las siguientes propiedades (para abreviar, denotaremos $\Psi(g, x)$ por $g \cdot x$)

a)

$$g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x, \quad g, h \in G, \quad x \in M, \quad (1.1)$$

donde sea que ambos lados de esta ecuación estén definidos,

b)

$$e \cdot x = x \quad \forall x \in M, \quad (1.2)$$

y

c)

$$g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x, \quad g \in G, \quad x \in M, \quad (1.3)$$

siempre y cuando $g \cdot x$ esté definido.

Note que para cada $x \in M$, los elementos del grupo g tal que $g \cdot x$ esté definido forman un grupo local de Lie

$$G_x \equiv \{g \in G: (g, x) \in \mathcal{U}\}.$$

Por otro lado, para cualquier $g \in G$, existe una subvariedad abierta

$$M_g \equiv \{x \in M: (g, x) \in \mathcal{U}\}$$

de M donde la transformación dada por g está definida. En ciertos casos, el único elemento que actúa sobre todo M puede ser el elemento identidad. En el otro extremo, un grupo *global* de transformaciones es aquel en el que podemos tomar $\mathcal{U} = G \times M$. En este caso, $g \cdot x$ está definido para cada $g \in G$ y cada $x \in M$, por tanto no hay necesidad de preocuparse sobre dominios precisos de definición. [4]

1.3. Campos vectoriales

Comenzamos con una discusión de vectores tangentes. Suponga que C es una curva suave sobre una variedad, parametrizada por $\phi: I \rightarrow M$, donde I es un subintervalo de \mathbb{R} . En coordenadas locales $x = (x^1, \dots, x^m)$, C está dado m funciones suaves $\phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$ de la variable real ε . En cada punto $x = \phi(\varepsilon)$ de C la curva tiene un *vector tangente*, es decir la derivada $\dot{\phi}(\varepsilon) = d\phi/d\varepsilon = (\dot{\phi}^1(\varepsilon), \dots, \dot{\phi}^m(\varepsilon))$. Denotaremos

$$\mathbf{v}|_x = \dot{\phi}(\varepsilon) = \dot{\phi}^1(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dot{\phi}^2(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \dot{\phi}^m(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^m} \quad (1.4)$$

al vector tangente de C en $x = \phi(\varepsilon)$.

Dos curvas $C = \{\phi(\varepsilon)\}$ y $\tilde{C} = \{\tilde{\phi}(\theta)\}$ pasando por el mismo punto

$$x = \phi(\varepsilon^*) = \tilde{\phi}(\theta^*)$$

para algún ε^* , θ^* , tienen el mismo vector tangente si y solo si sus derivadas coinciden en el punto:

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon}(\varepsilon^*) = \frac{\tilde{\phi}}{d\theta}(\theta^*). \quad (1.5)$$

Este concepto es independiente del sistema de coordenadas locales usado cercano a x . En efecto, si $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$ es la expresión en coordenadas locales

en términos de $x = (x^1, \dots, x^m)$ y $y = \psi(x)$ es cualquier difeomorfismo, entonces $y = \psi(\phi(\varepsilon))$ es la formulación en coordenadas locales para la curva en términos de las y -coordenadas. El vector tangente $(\mathbf{v})|_x = \dot{\phi}(\varepsilon)$, que tiene la expresión (1.4) en las x -coordenadas, toma la forma

$$\mathbf{v}|_{y=\psi(x)} = \frac{d}{d\varepsilon} \psi^j(\phi(\varepsilon)) \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial \psi^j}{\partial x^k}(\phi(\varepsilon)) \frac{d\phi^k}{d\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (1.6)$$

en las y -coordenadas. Como la matriz Jacobiana $\partial\psi^j/\partial x^k$ es invertible en cada punto, la ecuación (1.5) se cumple si y solo si

$$\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\phi(\varepsilon^*)) = \frac{d}{d\theta} \psi(\tilde{\phi}(\theta^*)),$$

lo que demuestra la proposición. Note que (1.6) nos dice cómo un vector tangente (1.4) se comporta bajo un cambio de coordenadas $y = \psi(x)$ dado.

La colección de todos los vectores tangentes de todas las curvas posibles pasando por un punto x dado en M es llamado el *espacio tangente* de M en x , y es denotado por $TM|_x$. Si M es una variedad m -dimensional, entonces $TM|_x$ es un espacio vectorial m -dimensional, siendo $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^m\}$ una base para $TM|_x$ en las coordenadas locales dadas. La colección de todos los espacios tangentes correspondiendo a todos los puntos x en M es llamado el *fibrado tangente* de M , denotado por

$$TM = \bigcup_{x \in M} TM|_x.$$

Un *campo vectorial* \mathbf{v} sobre M asigna un vector tangente $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ a cada punto $x \in M$, con $\mathbf{v}|_x$ variando suavemente de punto a punto. En coordenadas locales (x^1, \dots, x^m) , un campo vectorial tiene la forma

$$\mathbf{v}|_x = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m},$$

donde cada $\xi^i(x)$ es una función suave de x .

Una *curva integral* de un campo vectorial \mathbf{v} es una curva suave parametrizada $x = \phi(\varepsilon)$ cuyo vector tangente en cualquier punto coincide con el valor de \mathbf{v} en el mismo punto:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v}|_{\phi(\varepsilon)}$$

para todo ε . En coordenadas locales, $x \equiv \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$ debe ser una solución del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.7)$$

donde los $\xi^i(x)$ son los coeficientes de \mathbf{v} en x . Para $\xi^i(x)$ suave, los teoremas estándar de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias garantizan que existe una solución única para (1.7) para cada conjunto de condiciones iniciales

$$\phi(0) = x_0. \quad (1.8)$$

Esto implica la existencia de una curva integral *maximal* única $\phi: I \rightarrow M$ pasando por un punto dado $x_0 = \phi(0) \in M$, donde “maximal” significa que no está contenida en cualquier curva más grande. [4]

1.3.1. Flujos

Si \mathbf{v} es un campo vectorial, la curva integral maximal parametrizada pasando por x en M es denotada por $\Psi(\varepsilon, x)$ y llamada el *flujo* generado por \mathbf{v} . Así, para cada $x \in M$, y ε en algún intervalo I_x conteniendo 0, $\Psi(\varepsilon, x)$ será un punto sobre la curva integral pasando por x en M . El flujo de un campo vectorial tiene las propiedades básicas:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \quad x \in M, \quad (1.9)$$

para todo $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que ambos lados de la ecuación están definidos,

$$\Psi(0, x) = x, \quad (1.10)$$

y

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, x) = \mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon, x)} \quad (1.11)$$

para todo ε donde esté definido. Aquí (1.11) simplemente establece que \mathbf{v} es tangente a la curva $\Psi(\varepsilon, x)$ para x determinado, y (1.10) da las condiciones iniciales para esta curva integral. La prueba de (1.9) se deduce fácilmente de la unicidad de las soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias; es decir como funciones de δ ambos lados de (1.9) satisfacen (1.7) y tienen las mismas condiciones iniciales en $\delta = 0$.

Comparando las primeras dos propiedades (1.9), (1.10) con (1.1), (1.2), vemos

que el flujo generado por un campo vectorial es equivalente a la acción de un grupo local del grupo de Lie \mathbb{R} en la variedad M , a veces llamada un grupo uniparamétrico de transformaciones. El campo vectorial \mathbf{v} es llamado el *generador infinitesimal* de la acción ya que por el teorema de Taylor, en coordenadas locales

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

donde $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ son los coeficientes de \mathbf{v} . Las órbitas de la acción de un grupo uniparamétrico son las curvas integrales máximas del campo vectorial \mathbf{v} . Por otra parte, si $\Psi(\varepsilon, x)$ es cualquier grupo uniparamétrico de transformaciones actuando sobre M , entonces su generador infinitesimal es obtenido por (1.11) en $\varepsilon = 0$:

$$\mathbf{v}|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x). \quad (1.12)$$

La unicidad de las soluciones a (1.7), (1.8) garantiza que el flujo generado por \mathbf{v} coincida con la acción local dada de \mathbb{R} en M sobre el dominio común de definición. Por lo tanto existe una correspondencia uno-a-uno entre grupos uniparamétricos locales de transformaciones y sus generadores infinitesimales.

El cálculo del flujo o el grupo uniparamétrico generado por un campo vectorial \mathbf{v} dado (en otras palabras, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias) es usualmente referido como *exponenciación* del campo vectorial. La notación

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x \equiv \Psi(\varepsilon, x)$$

puede ser entendida como una notación abreviada para series de operadores diferenciales que actúan sobre x . En términos de esta notación exponencial, las tres propiedades de arriba pueden ser reexpresadas como

$$\exp[(\delta + \varepsilon)\mathbf{v}]x = \exp(\delta\mathbf{v}) \exp(\varepsilon\mathbf{v})x \quad (1.13)$$

donde quiera que esté definida

$$\exp(0\mathbf{v})x = x, \quad (1.14)$$

y

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})x] = \mathbf{v}|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}. \quad (1.15)$$

para todo $x \in M$. [4]

1.3.2. Acción sobre funciones

Sea \mathbf{v} un campo vectorial sobre M y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Nos interesará ver como f cambia bajo el flujo generado por \mathbf{v} , es decir observaremos $f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x)$ cuando ε varía. En coordenadas locales, si $\mathbf{v} = \xi^i(x)\partial/\partial x^i$, entonces usando regla de la cadena y (1.15) hallamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) &= \xi^i(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) \\ &\equiv \mathbf{v}(f)[\exp(\varepsilon\mathbf{v})x]. \end{aligned} \tag{1.16}$$

En particular, en $\varepsilon = 0$,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = \xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \mathbf{v}(f)(x).$$

En esta notación, el campo vectorial \mathbf{v} actúa como un operador diferencial parcial de primer orden sobre funciones $f(x)$ de variable real sobre M . Además, por el teorema de Taylor,

$$f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = f(x) + \varepsilon\mathbf{v}(f)(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

así $\mathbf{v}(f)$ provee el *cambio infinitesimal* en la función f bajo el flujo generado por \mathbf{v} .

De acuerdo a la nueva interpretación de los símbolos $\partial/\partial x^i$, cada vector tangente $\mathbf{v}|_x$ en un punto x define una derivada sobre el espacio de funciones suaves de variable real definidas cerca a x en M . Esto significa que $\mathbf{v}|_x$, cuando se aplique a una función suave f , devuelve un número real $\mathbf{v}(f) = \mathbf{v}(f)(x)$, y además, esta operación determinada por \mathbf{v} tiene las propiedades básicas de derivación

a) Linealidad

$$\mathbf{v}(f + g) = \mathbf{v}(f) + \mathbf{v}(g), \tag{1.17}$$

b) Regla de Leibniz

$$\mathbf{v}(f \cdot g) = \mathbf{v}(f) \cdot g + f \cdot \mathbf{v}(g). \tag{1.18}$$

Así podemos también definir campos vectoriales como derivaciones, es decir, mapeos que satisfacen (1.17), (1.18) sobre el espacio de funciones suaves en M . [4]

1.3.3. Diferenciales

Sean M y N variedades suaves y $F: M \rightarrow N$ un mapeo suave entre ellos. Cada curva parametrizada $C = \{\phi(\varepsilon): \varepsilon \in I\}$ sobre M es mapeado por F a una curva

parametrizada $\tilde{C} = F(C) = \{\tilde{\phi}(\varepsilon) = F(\phi(\varepsilon)) : \varepsilon \in I\}$ sobre N . Por lo tanto F induce un mapeo desde el vector tangente $d\phi/d\varepsilon$ a C en $x = \phi(\varepsilon)$ hacia el correspondiente vector tangente $d\tilde{\phi}/d\varepsilon$ a \tilde{C} en el punto imagen $F(x) = F(\phi(\varepsilon)) = \tilde{\phi}(\varepsilon)$. Este mapeo inducido es llamado el *diferencial* de F , y es denotado por

$$dF(\dot{\phi}(\varepsilon)) = \frac{d}{d\varepsilon}\{F(\phi(\varepsilon))\}. \quad (1.19)$$

Como todo vector tangente $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ es tangente a alguna curva pasando por x , el diferencial mapea el espacio tangente a M en x hacia el espacio tangente a N en $F(x)$:

$$dF: TM|_x \rightarrow TN|_{F(x)}.$$

Es importante notar que si \mathbf{v} es un campo vectorial sobre M , entonces en general $dF(\mathbf{v})$ no será un campo vectorial bien definido sobre N . Por un lado, $dF(\mathbf{v})$ puede no estar definido del todo en N ; por otro, si dos puntos x y \tilde{x} en M son mapeados al mismo punto $y = F(x) = F(\tilde{x})$ en N , no existe garantía que $dF(\mathbf{v}|_x)$ y $dF(\mathbf{v}|_{\tilde{x}})$ sean el mismo. Dos campos vectoriales \mathbf{v} en M y \mathbf{w} en N se dicen estar F -relacionados si $dF(\mathbf{v}|_x) = \mathbf{w}|_{F(x)}$ para todo $x \in M$. Si \mathbf{v} y $\mathbf{w} = dF(\mathbf{v})$ están F -relacionados,

$$F(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = \exp(\varepsilon dF(\mathbf{v}))F(x) \quad (1.20)$$

entonces F mapea curvas integrales de \mathbf{v} a curvas integrales de \mathbf{w} . [4]

1.3.4. Bracket de Lie

La operación más importante en campos vectoriales es su bracket de Lie o conmutador. El bracket de Lie es un operador que asigna a dos campos vectoriales \mathbf{v} , \mathbf{w} cualquiera sobre M un tercer campo vectorial denotado $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Si \mathbf{v} y \mathbf{w} son campos vectoriales sobre M , entonces su bracket de Lie es el único campo vectorial que satisface

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)) \quad (1.21)$$

para todas las funciones suaves $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. El bracket de Lie tiene las siguientes propiedades:

a) Bilinealidad

$$\begin{aligned} [c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] &= c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}', \mathbf{w}], \\ [\mathbf{v}, c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] &= c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}, \mathbf{w}'], \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde c, c' son constantes.

b) Antisimetría

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}]. \quad (1.23)$$

c) Identidad de Jacobi

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0. \quad (1.24)$$

Si $F: M \rightarrow N$ es cualquier mapeo suave, y \mathbf{v}, \mathbf{w} son campos vectoriales en M tal que $dF(\mathbf{v}), dF(\mathbf{w})$ están F -relacionados con campos vectoriales bien definidos en N , entonces su bracket de Lie también está F -relacionado:

$$dF([\mathbf{v}, \mathbf{w}]) = [dF(\mathbf{v}), dF(\mathbf{w})]. \quad (1.25)$$

Existe una caracterización más geométrica del bracket de Lie de dos campos vectoriales como el “conmutador infinitesimal” de dos grupos uniparamétricos $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ y $\exp(\varepsilon\mathbf{w})$.

Teorema 1.1

Sean \mathbf{v} y \mathbf{w} campos vectoriales suaves sobre una variedad M . Para cada $x \in M$, el conmutador

$$\psi(\varepsilon, x) = \exp(-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{w}) \exp(-\sqrt{\varepsilon}\mathbf{v}) \exp(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{w}) \exp(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{v})x$$

define una curva suave para $\varepsilon \geq 0$ suficientemente pequeño. El bracket de Lie $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_x$ es el vector tangente a esta curva en el punto final $\psi(0, x) = x$:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0^+} \psi(\varepsilon, x). \quad (1.26)$$

El flujo generado por dos campos vectoriales conmuta si y solo si su bracket de Lie se desvanece en cualquier lugar.

Teorema 1.2

Sean \mathbf{v}, \mathbf{w} campos vectoriales sobre M . Entonces

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v}) \exp(\theta \mathbf{w}) x = \exp(\theta \mathbf{w}) \exp(\varepsilon \mathbf{v}) x \quad (1.27)$$

para todo $x \in M$ y $\varepsilon, \theta \in V$, donde $V \subset \mathbb{R}^2$ es un subconjunto abierto conexo conteniendo $(0,0)$ tal que ambos lados de (1.27) estén definidos en todos los puntos en ello, si y solo si

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 0$$

en cualquier lugar.

1.4. Álgebras de Lie

Sea G un grupo de Lie. Para cualquier elemento del grupo $g \in G$, el mapeo de *multiplicación derecha*

$$R_g: G \rightarrow G$$

definido por

$$R_g(h) = h \cdot g$$

es un difeomorfismo, con inversa

$$R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}.$$

Un campo vectorial \mathbf{v} sobre G es llamado *invariante-derecho* si

$$dR_g(\mathbf{v}|_h) = \mathbf{v}|_{R_g(h)} = \mathbf{v}|_{hg}$$

para todo g y h en G . Note que si \mathbf{v} y \mathbf{w} son invariante-derecho, así lo es cualquier combinación lineal $a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$, $a, b \in \mathbb{R}$; Por lo tanto el conjunto de todos los campos vectoriales invariante-derecho forma un espacio vectorial.

Definición 1.5

El álgebra de Lie de un grupo de Lie G , denotado por \mathfrak{g} , es el espacio vectorial de todos los campos vectoriales invariante-derecho sobre G .

Note que cualquier campo vectorial invariante-derecho está determinado únicamente por su valor en la identidad porque

$$\mathbf{v}|_g = dR_g(\mathbf{v}|_e), \quad (1.28)$$

ya que $R_g(e) = g$. Por otro lado, cualquier vector tangente a G en e determina únicamente un campo vectorial invariante-derecho en G por la fórmula (1.28). En efecto,

$$dR_g(\mathbf{v}|_h) = dR_g(dR_h(\mathbf{v}|_e)) = d(R_g \circ R_h)(\mathbf{v}|_e) = dR_{hg}(\mathbf{v}|_e) = \mathbf{v}|_{hg},$$

provee la invarianza derecha de \mathbf{v} . Por lo tanto podemos identificar el algebra de Lie \mathfrak{g} de G con el espacio tangente de G en el elemento identidad

$$\mathfrak{g} \simeq TG|_e. \quad (1.29)$$

En particular, \mathfrak{g} es un espacio vectorial finito-dimensional de la misma dimensión que el grupo de Lie subyacente. [4]

Adicionalmente a su estructura de espacio vectorial, dicha álgebra de Lie está también equipada con una operación bilinear antisimétrica llamada el bracket de Lie.

Definición 1.6

Un álgebra de Lie es un espacio vectorial \mathfrak{g} junto con una operación bilinear

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g},$$

llamada el bracket de Lie para \mathfrak{g} , que satisface los axiomas

a) *Bilinealidad*

$$[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}', \mathbf{w}],$$

$$[\mathbf{v}, c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] = c[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}, \mathbf{w}'],$$

para constantes $c, c' \in \mathbb{R}$,

b) *Antisimetría*

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}],$$

c) *Identidad de Jacobi*

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0,$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}'$ en \mathfrak{g} .

1.4.1. El mapeo exponencial

El mapeo exponencial $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ es obtenido al establecer $\varepsilon = 1$ en el subgrupo uniparamétrico generado por \mathbf{v} :

$$\exp(\mathbf{v}) \equiv \exp(\mathbf{v})e.$$

El diferencial

$$d \exp: T\mathfrak{g}|_0 \simeq \mathfrak{g} \rightarrow TG|_e \simeq \mathfrak{g}$$

de \exp en 0 es el mapeo identidad. Así, por el teorema de la función inversa, \exp determina un difeomorfismo local de \mathfrak{g} hacia una vecindad del elemento identidad en G . Consecuentemente, cada elemento del grupo g suficientemente cercano a la identidad puede ser escrito como un exponencial: $g = \exp(\mathbf{v})$ para algún $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$. Además, es posible escribir cualquier elemento g del grupo como una serie finita de productos de exponenciales

$$g = \exp(\mathbf{v}_1) \exp(\mathbf{v}_2) \dots \exp(\mathbf{v}_k)$$

para algún $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathfrak{g}$. El efecto neto de esta observación es que la prueba de la invarianza de algún objeto bajo el grupo entero de Lie se reduce a la prueba de su invarianza solamente bajo subgrupos uniparamétricos de G , que a su vez será ampliado por una forma de “invarianza infinitesimal” bajo los correspondientes generadores infinitesimales en \mathfrak{g} . [4]

1.4.2. Constantes de estructura

Suponga que \mathfrak{g} es cualquier álgebra de Lie finito-dimensional de algún grupo de Lie G . Si introducimos una base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ de \mathfrak{g} , entonces el bracket de Lie de cualquiera dos vectores de la base debe nuevamente estar en \mathfrak{g} . Por tanto existen ciertas constantes c_{ij}^k , $i, j, k = 1, \dots, r$, llamadas las *constantes de estructura* de \mathfrak{g} tal que

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = c_{ij}^k \mathbf{v}_k, \quad i, j = 1, \dots, r. \quad (1.30)$$

Note que, como los \mathbf{v}_i 's forman una base, si conocemos las constantes de estructura, entonces podemos recuperar el álgebra de Lie \mathfrak{g} usando solamente (1.30) y la bilinealidad del bracket de Lie. Las condiciones de antisimetría y la identidad de Jacobi imponen restricciones adicionales sobre las constantes de estructura:

1. Antisimetría

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad (1.31)$$

2. Identidad de Jacobi

$$c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{li}^k c_{kj}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m = 0. \quad (1.32)$$

Por otro lado, no es difícil demostrar que cualquier conjunto de constantes c_{ij}^k que satisfacen (1.31), (1.32) son las constantes de estructura de algún álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Si elegimos una nueva base de \mathfrak{g} , $\hat{\mathbf{v}}_i = a_{ij} \mathbf{v}_j$, entonces

$$\hat{c}_{ij}^k = a_{il} a_{jm} b_{nk} c_{lm}^n, \quad (1.33)$$

donde (b_{ij}) es la matriz inversa a (a_{ij}) . Así, dos conjuntos de constantes de estructura determinan el mismo álgebra de Lie si y solo si ellos están relacionados por (1.33). Consecuentemente, existe una correspondencia uno a uno entre clases de equivalencia de constantes de estructura c_{ij}^k satisfaciendo (1.31), (1.32) y grupos de Lie G conexos, simplemente conexos cuyas álgebras de Lie tienen las constantes de estructura dadas relativa a alguna base. [4]

1.4.3. Acciones de grupos infinitesimales

Suponga que G es un grupo local de transformaciones actuando sobre una variedad M via $g \cdot x = \Psi(g, x)$ para $(g, x) \in \mathcal{U} \subset G \times M$. Existe entonces una “acción infinitesimal” correspondiente al álgebra de Lie \mathfrak{g} de G sobre M . Es decir, si $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ definimos $\psi(\mathbf{v})$ a ser el campo vectorial en M cuyo flujo coincide con la acción del subgrupo uniparamétrico $\exp(\varepsilon \mathbf{v})$ de G en M . Esto significa que para $x \in M$,

$$\psi(\mathbf{v})|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi(\exp(\varepsilon \mathbf{v}), x) = d\Psi_x(\mathbf{v}|_b e), \quad (1.34)$$

donde $\Psi_x(g) \equiv \Psi(g, x)$. Note además que, como

$$\Psi_x \circ R_g(h) = \Psi(h \cdot g, x) = \Psi(h, g \cdot x) = \Psi_{g \cdot x}(h)$$

en cualquier lugar que esté definido, tenemos

$$d\Psi_x(\mathbf{v}|_g) = d\Psi_{g \cdot x}(\mathbf{v}|_e) = \psi(\mathbf{v})|_{g \cdot x}$$

para cualquier $g \in G_x$. Se deduce de la propiedad (1.25) del bracket de Lie que ψ es un homomorfismo de álgebra de Lie de \mathfrak{g} hacia el álgebra de Lie de campos

vectoriales en M :

$$[\psi(\mathbf{v}), \psi(\mathbf{w})] = \psi([\mathbf{v}, \mathbf{w}]), \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}. \quad (1.35)$$

Por lo tanto el conjunto de todos los campos vectoriales $\psi(\mathbf{v})$ correspondiendo a $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ forma un álgebra de Lie de campos vectoriales en M . Por otro lado, dado un álgebra de Lie finito dimensional de campos vectoriales en M , existe siempre un grupo local de transformaciones cuya acción infinitesimal es generada por el álgebra de Lie dada.

Teorema 1.3

Sean $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$ campos vectoriales sobre una variedad M satisfaciendo

$$[\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j] = c_{ij}^k \mathbf{w}_k, \quad i, j = 1, \dots, r,$$

para ciertas constantes c_{ij}^k . Entonces existe un grupo de Lie G cuya álgebra de Lie tiene las constantes de estructura c_{ij}^k dadas relativas a alguna base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$, y una acción de grupo local de G en M tal que $\psi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, \dots, r$, donde ψ está definido por (1.34).

De este modo podemos recuperar \mathfrak{g} del grupo de transformaciones por la fórmula básica

$$\mathbf{v}|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon \mathbf{v})x, \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{g}. \quad (1.36)$$

Un campo vectorial \mathbf{v} en \mathfrak{g} es llamado un *generador infinitesimal* del grupo de acción G . El teorema 1.3 dice que si conocemos generadores infinitesimales $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$, que formen una base para un álgebra de Lie, entonces siempre podemos exponenciar para hallar un grupo local de transformaciones cuya álgebra de Lie coincide con el álgebra dada. [4]

1.4.4. Representación adjunta

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie finito-dimensional de algún grupo de Lie G con base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$. Luego, cualquier elemento \mathbf{v}_i perteneciente a esta base provee una transformación lineal dada por

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j] = Ad(\mathbf{v}_i)(\mathbf{w}_j). \quad (1.37)$$

que es llamada la *representación adjunta* de \mathfrak{g} [12]. La representación adjunta es una representación de álgebras de Lie que está dada por matrices, cuyos elementos explícitos están dados por las constantes de estructura del álgebra:

$$[Ad_{\mathbf{v}_i}]_j^k = c_{ij}^k.$$

2. SISTEMAS HAMILTONIANOS

El formalismo Hamiltoniano es una reformulación de la mecánica clásica que permite estudiar sistemas dinámicos haciendo uso de técnicas geométricas. Sin embargo, la teoría de Hamiltonianos canónicos estudia sistemas físicos sobre variedades simplécticas, restringiendo así la dimensión del espacio de fase. En este capítulo se describe cómo abordar sistemas dinámicos Hamiltonianos cuya variedad no esté limitada a aquellas de dimensión par mediante el uso de variedades de Poisson.

2.1. Bracket de Poisson

Dada una variedad M , un bracket de Poisson sobre M asigna a cada par de funciones suaves de variable real $F, H: M \rightarrow \mathbb{R}$, otra función suave de variable real, que denotamos por $\{F, H\}$. Existen ciertas propiedades básicas que dicha operación debe satisfacer para calificar como un bracket de Poisson. Enunciamos primeramente dichas propiedades en un modo simple, independiente de coordenadas.

Definición 2.1

Un bracket de Poisson sobre una variedad suave M es una operación que asigna una función suave de variable real $\{F, H\}$ sobre M a cada par F, H de funciones suaves de variable real, con las siguientes propiedades:

a) *Bilinealidad:*

$$\{cF + c'P, H\} = c\{F, H\} + c'\{P, H\}$$

$$\{F, cH + c'P\} = c\{F, H\} + c'\{F, P\},$$

para constantes $c, c' \in \mathbb{R}$,

b) *Antisimetría:*

$$\{F, H\} = -\{H, F\},$$

c) *Identidad de Jacobi:*

$$\{\{F, H\}, P\} + \{\{P, F\}, H\} + \{\{H, P\}, F\} = 0,$$

d) *Regla de Leibniz:*

$$\{F, H \cdot P\} = \{F, H\} \cdot P + H \cdot \{F, P\}.$$

Donde \cdot denota la multiplicación ordinaria de funciones reales y F, H, P son funciones suaves reales arbitrarias en M .

Una variedad M con un bracket de Poisson es llamada una *variedad de Poisson*, el bracket define una estructura de Poisson en M . La idea de una variedad de Poisson es ligeramente más general que aquella de una variedad simpléctica, o variedad con estructura Hamiltoniana; en particular, la variedad subyacente M no necesita ser de dimensión par. [4]

Si introducimos coordenadas canónicas especiales, por ejemplo: Sea M el espacio Euclídeo de dimensión par \mathbb{R}^{2n} con coordenadas $(p, q) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$. Si $F(p, q)$ y $H(p, q)$ son funciones suaves, definimos su bracket de Poisson a ser la función

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (2.1)$$

Este bracket claramente cumple las propiedades del bracket de Poisson. Notamos las identidades particulares del bracket

$$\{p^i, p^j\} = 0, \quad \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{q^i, p^j\} = \delta_j^i, \quad (2.2)$$

donde $i, j = 1, \dots, n$, y δ_j^i es la delta de Kronecker.

De forma más general, podemos determinar un bracket de Poisson sobre cualquier espacio Euclídeo $M = \mathbb{R}^m$. Permita $(p, q, z) = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n, z^1, \dots, z^l)$ ser las coordenadas, así $2n + l = m$, y defina el bracket de Poisson entre dos funciones $F(p, q, z), H(p, q, z)$ por la misma fórmula (2.1). En particular, si la función $F(z)$ depende solamente de las z 's, entonces $\{F, H\} = 0$ para todas las funciones H . Dichas funciones, en particular las z 's mismas, son conocidas como *funciones Casimir* y están caracterizadas por la propiedad que su bracket de Poisson con cualquier otra función es siempre cero. Adicionalmente a las relaciones básicas (2.2) tenemos

$$\{z^i, \cdot\} = 0 \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.3)$$

A (2.1) se le conoce como *bracket de Poisson canónico*.

Definición 2.2

Sea M una variedad de Poisson. Una función suave de variable real $C: M \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada función Casimir si el bracket de Poisson de C con cualquier otra función se desvanece idénticamente, es decir, $\{C, H\} = 0$ para toda $H: M \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1.1. Campos vectoriales Hamiltonianos

Sea M una variedad de Poisson. Concentrándonos por el momento solo en la bilinealidad y regla de Leibniz, note que dado una función suave H sobre M , el mapeo $F \mapsto \{F, H\}$ define una derivada en el espacio de funciones suaves F en M , y por lo tanto, por (1.17), (1.18) determina un campo vectorial sobre M . Esta observación lleva a una definición fundamental.

Definición 2.3

Sea M una variedad de Poisson y $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. El campo vectorial Hamiltoniano asociado a H es el único campo vectorial suave $\hat{\nu}$ sobre M que satisface

$$\hat{\nu}_H(F) = \{F, H\} = -\{H, F\} \quad (2.4)$$

para cada función suave $F: M \rightarrow \mathbb{R}$. Las ecuaciones que gobiernan el flujo de $\hat{\nu}_H$ son referidas como ecuaciones de Hamilton para el “Hamiltoniano” H .

Si tomamos como ejemplo el caso del bracket de Poisson canónico (2.1) en \mathbb{R}^m , $m = 2n + l$, el campo vectorial Hamiltoniano que corresponde a $H(p, q, z)$ es claramente

$$\hat{\nu}_H = \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i}. \quad (2.5)$$

El flujo correspondiente es obtenido al integrar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

$$\frac{dz^j}{dt} = 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad (2.7)$$

que son las ecuaciones de Hamilton en este caso. En el caso no degenerado $m = 2n$, tenemos solamente (2.6), que es la forma canónica de las ecuaciones de Hamilton en mecánica clásica. [4]

Existe una conexión fundamental entre el bracket de Poisson de dos funciones y el bracket de Lie de sus campos vectoriales Hamiltonianos asociados.

Proposición 2.1

Sea M una variedad de Poisson. Sean $F, H: M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves con campos vectoriales Hamiltonianos $\hat{\mathbf{v}}_F, \hat{\mathbf{v}}_H$. El campo vectorial Hamiltoniano asociado con el bracket de Poisson de F y H es, por un signo, el bracket de Lie de los dos campos vectoriales Hamiltonianos:

$$\hat{\mathbf{v}}_{\{F,H\}} = -[\hat{\mathbf{v}}_F, \hat{\mathbf{v}}_H] = [\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_F]. \quad (2.8)$$

Demostración. Sea $P: M \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier función suave. Usando la definición de conmutación del bracket de Lie, hallamos

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{v}}_H, \hat{\mathbf{v}}_F]P &= \hat{\mathbf{v}}_H \cdot \hat{\mathbf{v}}_F(P) - \hat{\mathbf{v}}_F \cdot \hat{\mathbf{v}}_H(P) \\ &= \hat{\mathbf{v}}_H\{P, F\} - \hat{\mathbf{v}}_F\{P, H\} \\ &= \{\{P, F\}, H\} - \{\{P, H\}, F\} \\ &= \{P, \{F, H\}\} \\ &= \hat{\mathbf{v}}_{\{F,H\}}(P), \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la identidad de Jacobi, antisimetría del bracket de Poisson, y la definición (2.4) de un campo vectorial Hamiltoniano. Ya que P es arbitrario, esto basta para demostrar (2.8). □

2.1.2. Funciones de estructura

Sean $x = (x^1, \dots, x^m)$ coordenadas locales en M y $H(x)$ una función de variable real. El campo vectorial Hamiltoniano asociado será de la forma general $\hat{\mathbf{v}}_H = \xi^i(x)\partial/\partial x^i$, donde $\xi^i(x)$, que dependen de H , son funciones coeficiente a ser determinadas. Sea $F(x)$ una segunda función suave. Usando (2.4), hallamos

$$\{F, H\} = \hat{\mathbf{v}}_H(F) = \xi^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i}.$$

Pero, nuevamente por (2.4),

$$\xi^i(x) = \hat{\mathbf{v}}_H(x^i) = \{x^i, H\},$$

así esta fórmula se convierte

$$\{F, H\} = \{x^i, H\} \frac{\partial F}{\partial x^i}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, usando la propiedad de antisimetría del bracket de Poisson, podemos cambiar totalmente este procedimiento y calcular el último conjunto de brackets de Poisson en términos de los campos vectoriales Hamiltonianos particulares $\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{v}}_{x^i}$ asociados con las funciones de coordenadas local x^i , es decir

$$\{x^i, H\} = -\{H, x^i\} = -\hat{\mathbf{v}}_i(H) = -\{x^j, x^i\} \frac{\partial H}{\partial x^j},$$

la segunda igualdad se deduce de una segunda aplicación de (2.9), con H sustituyendo F y x^i reemplazando H . Así obtenemos la fórmula básica

$$\{F, H\} = \{x^i, x^j\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} \quad (2.10)$$

para el bracket de Poisson. En otras palabras, para calcular el bracket de Poisson de cualquier par de funciones en algún conjunto de coordenadas locales dado, es suficiente con conocer los brackets de Poisson entre las funciones de coordenadas mismas. Tales brackets básicos,

$$J^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (2.11)$$

son llamados las *funciones de estructura* de la variedad de Poisson M relativa a las coordenadas locales dadas, y sirven para determinar únicamente la estructura de Poisson misma [4]. Por conveniencia, reunimos las funciones de estructura dentro de una matriz antisimétrica $J(x)$ de $m \times m$, llamada la *matriz de estructura* de M . Usando ∇H para denotar el vector (columna) gradiente para H , la forma en coordenadas locales (2.10) para el bracket de Poisson puede ser escrita como

$$\{F, H\} = \nabla F \cdot J \nabla H. \quad (2.12)$$

Por ejemplo, en el caso del bracket canónico (2.1) sobre \mathbb{R}^m , $m = 2n + l$, la matriz

de estructura toma la forma simple

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

relativa a las coordenadas (p, q, z) , donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

El campo vectorial Hamiltoniano asociado con $H(x)$ tiene la forma

$$\hat{\mathbf{v}}_H = J^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.13)$$

ó, en notación matricial, $\hat{\mathbf{v}}_H = (J\nabla H) \cdot \partial_x$, donde ∂_x denota el “vector” con entradas $\nabla/\nabla x^i$. Por lo tanto, en el mapa de coordenadas dado, las ecuaciones de Hamilton toman la forma

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\nabla H(x). \quad (2.14)$$

De forma alterna, usando (2.9), podemos escribir esto en la forma de bracket

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\},$$

siendo la i -ésima componente del lado derecho $\{x^i, H\}$. Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden se dice ser un *sistema Hamiltoniano* si existe una función Hamiltoniana $H(x)$ y una matriz de funciones $J(x)$ determinando un bracket de Poisson (2.12) a través de la cual el sistema toma la forma (2.14).

Proposición 2.2

Sea $J(x) = (J^{ij}(x))$ una matriz $m \times m$ de funciones de $x = (x^1, \dots, x^m)$ definida sobre un subconjunto abierto $M \subset \mathbb{R}^m$. Entonces $J(x)$ es la matriz de estructura para un bracket de Poisson $\{F, H\} = \nabla F \cdot J\nabla H$ sobre M si y solo si esta tiene las propiedades de:

a) *Antisimetría:*

$$J^{ij}(x) = -J^{ji}(x), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

b) *Identidad de Jacobi:*

$$J^{il} \partial_l J^{jk} + J^{kl} \partial_l J^{ij} + J^{jl} \partial_l J^{ki} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad (2.15)$$

para todo $x \in M$.

2.1.3. Estructura de Lie-Poisson

Uno de los ejemplos más importantes de una estructura de Poisson es aquella asociada con un álgebra de Lie \mathfrak{g} r -dimensional. Sean c_{ij}^k , $i, j, k = 1, \dots, r$, las constantes de estructura de \mathfrak{g} relativa a la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$. Sea V otro espacio vectorial r -dimensional, con coordenadas $x = (x^1, \dots, x^r)$ determinada por una base $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$. Defina el *bracket de Lie-Poisson* entre dos funciones suaves $F, H: V \rightarrow \mathbb{R}$ a ser

$$\{F, H\} = c_{ij}^k x^k \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j}. \quad (2.16)$$

Esto claramente toma la forma (2.10) con funciones de estructura $J^{ij}(x) = c_{ij}^k x^k$ lineales. La verificación de las propiedades de la proposición 2.2 para la matriz de estructura se deducen fácilmente de las propiedades básicas (1.31), (1.32) de las constantes de estructura; en particular, (2.15) se reduce a la identidad de Jacobi (1.32).

Existe una caracterización más intrínseca del bracket de Lie-Poisson. Primero, recordemos que si V es cualquier espacio vectorial y $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave de variable real, entonces el gradiente $\nabla F(x)$ en cualquier punto $x \in V$ es naturalmente un elemento del espacio vectorial dual V^* que consiste de todas las funciones (continuas) lineales sobre V . En efecto, por definición,

$$\langle \nabla F(x); y \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \varepsilon y) - F(x)}{\varepsilon}$$

para cualquier $y \in V$, donde $\langle ; \rangle$ es el emparejamiento natural entre V y su dual V^* . Teniendo esto en mente, identificamos el espacio vectorial V usado en nuestra construcción inicial del bracket de Lie-Poisson con el espacio dual \mathfrak{g}^* del álgebra de Lie \mathfrak{g} , siendo $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ la base dual a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$. Si $F: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función suave, entonces su gradiente $\nabla F(x)$ es un elemento de $(\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ (ya que \mathfrak{g} es finito dimensional). Entonces el bracket de Lie-Poisson tiene la forma independiente de coordenadas

$$\{F, H\}(x) = \langle x, [\nabla F(x), \nabla H(x)] \rangle, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad (2.17)$$

donde $[,]$ es el bracket de Lie ordinario en el álgebra de Lie \mathfrak{g} misma. Si $H: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función, el sistema asociado de ecuaciones de Hamilton toma la forma

$$\frac{dx^i}{dt} = c_{ij}^k x^k \frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad i = 1, \dots, r,$$

en la cual las coordenadas x^k mismas aparecen explícitamente. [4]

2.1.4. Integrales primeras

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en forma Hamiltoniana

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\nabla H(x, t), \quad (2.18)$$

donde $H(x, t)$ es la función Hamiltoniana y $J(x)$ la matriz de estructura que determina el bracket de Poisson. En este caso, las integrales primeras son fácilmente caracterizadas usando el bracket de Poisson.

Proposición 2.3

Una función $P(x, t)$ es una integral primera del sistema Hamiltoniano (2.18) si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \{P, H\} = 0 \quad (2.19)$$

para todo x, t . En particular, una función independiente del tiempo $P(x)$ es una integral primera si y solo si $\{P, H\} = 0$ en todo su dominio.

Demostración. Sea $\hat{\mathbf{v}}_H$ un campo vectorial Hamiltoniano determinando (2.18). Entonces, por (1.16), si $x(t)$ es cualquier solución de las ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{d}{dt}P(x(t), t) = \frac{\partial P}{\partial t}(x(t), t) + \hat{\mathbf{v}}_H(P)(x(t), t).$$

Así, $dP/dt = 0$ a lo largo de las soluciones si y solo si (2.19) se cumple en todos lados. \square

Corolario 2.1

Si $x_t = J\nabla H$ es cualquier sistema Hamiltoniano con función Hamiltoniana independiente del tiempo $H(x)$, entonces $H(x)$ misma es automáticamente una integral primera.

Corolario 2.2

Si $x_t = J\nabla H$ es un sistema Hamiltoniano, entonces cualquier función Casimir $C(x)$ para el bracket de Poisson determinado por J es automáticamente una primera integral.

Un sistema Hamiltoniano de orden $2n$ que posea n integrales primeras $P_1(x), \dots, P_n(x)$ que estén en *involución*, es decir

$$\{P_i, P_j\} = 0 \quad \forall i, j,$$

es llamado un sistema Hamiltoniano *completamente integrable* ya que, en principio, sus soluciones se pueden determinar por cuadratura sola ([4], [13], [14]).

3. BIÁLGBRAS DE LIE

Existe una correspondencia uno a uno entre biálgebras de Lie y grupos de Poisson-Lie que permite construir deformaciones de sistemas dinámicos. Estas estructuras bialgebraicas se definen en términos de coálgebras y están sujetas a condiciones de homomorfismo para garantizar la compatibilidad entre estructuras algebraicas.

3.1. Álgebras y coálgebras

Definición 3.1

Sea k un campo. Un k -álgebra es un triplete (A, M, u) , donde A es un espacio k -vectorial, $M: A \otimes A \rightarrow A$ y $u: k \rightarrow A$ son morfismos de espacios k -vectoriales con las siguientes propiedades:

a) *Asociatividad:*

$$M \circ (I \otimes M) = M \circ (M \otimes I)$$

b) *Elemento identidad:*

$$M \circ (I \otimes u) = I = M \circ (u \otimes I)$$

donde I denota el mapeo identidad de A y el símbolo \otimes se refiere al producto tensorial sobre k . El mapeo M es llamado la multiplicación (o producto) del álgebra A , y u es llamado la unidad de A .

Estos axiomas se pueden formular en términos de diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{I \otimes M} & A \otimes A \\
\downarrow M \otimes I & & \downarrow M \\
A \otimes A & \xrightarrow{M} & A
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& A \otimes A & \\
u \otimes I \nearrow & \downarrow M & \nwarrow I \otimes u \\
k \otimes A & & A \otimes k \\
\searrow \sim & & \swarrow \sim \\
& A &
\end{array}$$

En el primer diagrama, $(A \otimes A) \otimes A$ es isomorfo a $A \otimes (A \otimes A)$, esto expresa la asociatividad de la multiplicación del álgebra. De forma similar, en el segundo diagrama se identifican los espacios $k \otimes A$, A y $A \otimes k$ como isomorfos, expresando la existencia de una identidad multiplicativa. [15]

La importancia de la definición anterior reside en el hecho que, debido a su naturaleza categorial, esta puede ser dualizada. De este modo obtenemos la noción de un coálgebra.

Definición 3.2

Un coálgebra es un triplete (C, Δ, ε) , donde C es un espacio k -vectorial, $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ y $\varepsilon: C \rightarrow k$ son morfismos de espacios k -vectoriales con las siguientes propiedades:

a) Coasociatividad:

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$$

b) Elemento identidad:

$$(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I = (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta$$

Los mapeos Δ y ε son llamados la comultiplicación y la counidad, respectivamente, del coálgebra C .

De forma equivalente, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow I \otimes \Delta \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes I} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & \swarrow \sim & \downarrow \Delta & \searrow \sim & \\
 k \otimes C & & & & C \otimes k \\
 & \swarrow \varepsilon \otimes I & & \searrow I \otimes \varepsilon & \\
 & & C \otimes C & &
 \end{array}$$

La conmutatividad del primer diagrama es llamado *coasociatividad* ([15], [16], [17]).

Sea (C, Δ, ε) un coálgebra. Definimos recurrentemente la secuencia de mapeos (Δ_n) de la siguiente manera:

$$\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}, \quad (3.1)$$

para cualquier $n \geq 2$ donde $\Delta_1 \equiv \Delta$ y $\Delta_n: C \rightarrow C \otimes \dots \otimes C$ (C aparece $n + 1$ veces).

Como sabemos, en un álgebra tenemos una propiedad llamada asociatividad generalizada. La propiedad dual en el caso de coálgebras es llamada coasociatividad generalizada, y es dado por el siguiente lema.

Lema 3.1

Sea (C, Δ, ε) un coálgebra, Entonces:

- a) Para cualquier $i \geq 2$ tenemos $\Delta_i = (\Delta_{i-1} \otimes I) \circ \Delta$.
- b) Para cualquier $n \geq 2$, $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ y $m \in \{0, \dots, n - i\}$ tenemos

$$\Delta_n = (I^m \otimes \Delta_i \otimes I^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i}.$$

Usando la notación de Sweedler, tomando el caso $n = 2$ tenemos

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2,$$

$$\Delta_2(c) = \Delta(c_1) \otimes c_2 = c_1 \otimes \Delta(c_2) = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3,$$

que es justamente la igualdad $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Definición 3.3 1. Un álgebra (A, M, u) se dice conmutativa si $T \circ M = M$, donde $T: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ es el mapeo de giro, definido por $T(a \otimes b) = b \otimes a$ para todo $a, b \in A$.

2. Un coálgebra (C, Δ, ε) es llamada coconmutativa si $T \circ \Delta = \Delta$, donde el mapeo de giro $T: C \otimes C \rightarrow C \otimes C$ está definido por $T(c \otimes d) = d \otimes c$ para todo $c, d \in C$. En notación de Sweedler, C es coconmutativo si y solo si $c_1 \otimes c_2 = c_2 \otimes c_1$ para cualquier $c \in C$. [15]

3.2. Biálgebras y álgebras de Hopf

3.2.1. Biálgebras

Definición 3.4

Un biálgebra es un espacio k -vectorial H , equipado con una estructura algebraica (H, M, u) , y con una estructura coalgebraica (H, Δ, ε) tal que M y u son morfismos de coálgebras (de forma equivalente, Δ y ε son morfismos de álgebras) ([15], [18]).

En la notación de Sweedler, las condiciones en la cual Δ y ε son morfismos de álgebras se convierten en

$$\Delta(hg) = h_1 g_1 \otimes h_2 g_2, \quad \varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g),$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \varepsilon(1) = 1$$

3.2.2. Álgebras de Hopf

Sea (C, Δ, ε) un coálgebra y (A, M, u) un álgebra. Definimos sobre el conjunto $Hom(C, A)$ una estructura algebraica en la cual la multiplicación, denotada por $*$ está dada de la siguiente manera: si $f, g \in Hom(C, A)$, entonces

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2)$$

para cualquier $c \in C$. La multiplicación previamente definida es asociativa y el elemento identidad del álgebra $Hom(C, A)$ es $u\varepsilon \in Hom(C, A)$, ya que

$$(f * (u\varepsilon))(c) = f(c_1)(u\varepsilon)(c_2) = f(c_1)\varepsilon(c_2)1 = f(c)$$

por lo tanto $f * (u\varepsilon) = f$. De forma similar, $(u\varepsilon) * f = f$.

Consideremos un caso especial de la construcción anterior. Sea H un biálgebra. Denotamos por H^c y H^a al coálgebra y álgebra de H , respectivamente. Entonces podemos definir una estructura algebraica sobre $Hom(H^c, H^a)$, en la cual la multiplicación está definida por $(f * g)(h) = f(h_1)g(h_2)$ para cualquier $f, g \in Hom(H^c, H^a)$ y $h \in H$, y el elemento identidad es $u\varepsilon$. Hacemos la observación que el mapeo identidad $I: H \rightarrow H$ es un elemento de $Hom(H^c, H^a)$.

Definición 3.5

Sea H un biálgebra. Un mapeo lineal $S: H \rightarrow H$ es llamado una antípoda o coinvertida del álgebra H si S es la inversa del mapeo identidad $I: H \rightarrow H$ respecto al producto en $Hom(H^c, H^a)$.

Definición 3.6

Un biálgebra H que posee una antípoda es llamado un álgebra de Hopf ([15], [18], [19]).

En un álgebra, la antípoda es única, siendo la inversa del elemento identidad I en el álgebra $Hom(H^c, H^a)$. Algunas propiedades básicas de la antípoda son:

1. $S(hg) = S(g)S(h) \forall g, h \in H$,
2. $S(1) = 1$,
3. $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$,
4. $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$,
5. $S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1 \forall h \in H$,
6. $h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1 \forall h \in H$,
7. $S^2 = I$.

Las propiedades 1) y 2) significan que S es un antimorfismo de álgebras, y 3) y 4) que S es un antimorfismo de coálgebras.

Si H es un álgebra de Hopf, entonces el conjunto $G(H)$ de elementos tipo grupo de H es un grupo con la multiplicación inducida por aquella de H . En efecto, primero notamos que el elemento identidad se encuentra en $G(H)$. Si $g, h \in G(H)$, entonces $gh \in G(H)$ por el hecho que Δ es un mapeo algebraico. Finalmente, si g es un elemento tipo grupo, entonces $S(g)$ es también un elemento tipo grupo ya que la antípoda es un antimorfismo de coálgebras, y la propiedad de la antípoda muestra que g es invertible con inversa $g^{-1} = S(g)$.

Sea H un álgebra de Hopf y $G(H)$ el grupo de elemento tipo grupo de H . Si $g, h \in G(H)$, entonces un elemento $x \in H$ es llamado (g, h) -primitivo si $\Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x$. El conjunto de todos los elementos (g, h) -primitivos de H es denotado por $P_{g,h}(H)$. Un $(1, 1)$ -primitivo es simplemente llamado un elemento primitivo, $P(H) \equiv P_{1,1}(H)$. [15]

Para nuestros propósitos, el ejemplo más interesante de biálgebras es aquel que posee una estructura de Lie, es decir, un álgebra de Lie \mathfrak{g} con generadores X_i equipado con un coproducto Δ .

Definición 3.7

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una estructura biálgebraica de Lie en \mathfrak{g} es un mapeo lineal antisimétrico $\delta_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, llamado el coconmutador, tal que

- a) El mapeo dual $\delta_{\mathfrak{g}}^*: \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es un bracket de Lie en \mathfrak{g}^* ,
- b) $\delta_{\mathfrak{g}}$ es un 1-cociclo de \mathfrak{g} con valores en $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Un homomorfismo de biálgebras de Lie $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie tal que

$$(\varphi \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathfrak{g}} = \delta_{\mathfrak{h}} \circ \varphi.$$

Una estructura bialgebraica de Lie está determinada por las estructuras algebraicas de Lie en \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* . Por tanto, podríamos denotar en algunas ocasiones el biálgebra de Lie por $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ y en otras por $(\mathfrak{g}, \delta_{\mathfrak{g}})$. De la misma forma, $(\mathfrak{g}, k\delta_{\mathfrak{g}})$ también es un biálgebra de Lie para cualquier escalar k .

La importancia de las biálgebras de Lie surge por su correspondencia uno a uno con grupos de Lie-Poisson.

Teorema 3.1

Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Si G es un grupo de Poisson-Lie, entonces \mathfrak{g} posee una estructura bialgebraica de Lie natural, llamada el biálgebra de Lie tangente a G . Si $\phi: G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Poisson-Lie, y

\mathfrak{h} es el biálgebra de Lie tangente a H , la derivada de ϕ en el elemento identidad e de G es un homomorfismo de biálgebras de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. De forma contraria, si G es conexo y simple conexo, cada estructura bialgebraica de Lie sobre \mathfrak{g} es el biálgebra de Lie tangente de una única estructura de Poisson sobre G que hace de G en un grupo de Poisson-Lie. Además, si $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de biálgebras de Lie, y H es un grupo de Poisson-Lie con biálgebra de Lie tangente \mathfrak{h} , existe un único homomorfismo $\phi: G \rightarrow H$ de grupos de Poisson-Lie con $d\phi/d\varepsilon|_e = \varphi$. [20]

3.2.3. Triplete de Manin

La definición que hemos dado de un biálgebra de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ esconde el hecho que \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* juegan un papel simétrico. Esto es revelado por la siguiente definición, que es equivalente a la definición 3.7.

Definición 3.8

Un triplete de Manin es un triplete de álgebras de Lie $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ junto con una forma bilinear simétrica no degenerada (\cdot, \cdot) en \mathfrak{p} invariante bajo la representación adjunta de \mathfrak{p} , tal que

1. \mathfrak{p}_+ y \mathfrak{p}_- son subálgebras de Lie de \mathfrak{p} ,
2. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ como espacios vectoriales,
3. \mathfrak{p}_+ y \mathfrak{p}_- son isotrópicos para (\cdot, \cdot) .

Proposición 3.1

Para cualquier álgebra de Lie finito dimensional \mathfrak{g} , existe una correspondencia uno a uno entre estructuras bialgebraicas de Lie en \mathfrak{g} y tripletes de Manin $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ tal que $\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{g}$.

Demostración. Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ es un biálgebra de Lie, establecemos $\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_- = \mathfrak{g}^*$, y tomamos el producto interno en $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ determinado por

$$(X, \xi)_{\mathfrak{p}} = \langle X, \xi \rangle, \quad (X, X)_{\mathfrak{p}} = (\xi, \xi)_{\mathfrak{p}} = 0 \quad (3.2)$$

para $X \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Para el caso contrario, el producto interno determina un isomorfismo de espacios vectoriales $\mathfrak{p}_- \simeq \mathfrak{p}_+^*$, y por lo tanto una estructura algebraica de Lie en \mathfrak{p}_+^* . Así, ambas partes de la proposición se deducen del siguiente lema. \square

Lema 3.2

Suponga que \mathfrak{g} y su espacio dual \mathfrak{g}^ son álgebras de Lie, y defina un producto interno sobre $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ por (3.2). Existe una estructura algebraica de Lie sobre $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ (la suma directa de espacios vectoriales) tal que \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* son subálgebras de Lie y que dejan el producto interno invariante si y solo si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ es un biálgebra de Lie, y en este caso la estructura bialgebraica de Lie es única. [20]*

4. DEFORMACIONES INTEGRABLES APLICADO A MODELOS EPIDEMICOS

4.1. Deformaciones de grupos de Lie-Poisson

Para deformar un grupo de Lie es necesario equiparlo con una estructura extra, que es una estructura de grupo de Lie-Poisson. De igual manera, para deformar un álgebra de Lie, esta debe estar equipada con una estructura bialgebraica de Lie. La exponenciación del álgebra de Lie dando como resultado el grupo de Lie, puede ser entendida como la forma canónica de exponenciar la deformación de primer orden del coproducto para encontrar la deformación completa, de esta manera el bracket de Poisson clásico puede ser recuperado como la parte de primer orden de la deformación. De forma contraria, para construir deformaciones del grupo de Lie es natural comenzar describiendo las posibles estructuras de Lie-Poisson en el grupo y luego tratar de extender esas deformaciones de primer orden a deformaciones completas [20].

Dado un álgebra de Lie \mathfrak{g} con base $\{X_i\}$, $i = 1, \dots, \dim(\mathfrak{g})$, y bracket de Lie

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k,$$

el álgebra \mathfrak{g} puede ser equipada con una estructura algebraica de Hopf al definir:

$$\begin{aligned} \Delta(X_i) &= 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1, & \Delta(1) &= 1 \otimes 1, \\ \varepsilon(X_i) &= 0, & \varepsilon(1) &= 1, \\ S(X_i) &= -X_i, & S(1) &= 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Desde el punto de vista físico, si \mathfrak{g} es el álgebra de observables de algún sistema físico de una partícula, el coproducto en (4.1) es solamente la definición usual del total de observables cuánticos de un sistema de dos partículas [21]. La condición de

homomorfismo implica la compatibilidad del coproducto Δ con el bracket de Lie

$$[\Delta(X_i), \Delta(X_j)]_{A \otimes A} = \Delta([X_i, X_j]_A), \quad \forall X_i, X_j \in \mathfrak{g}.$$

Una estructura bialgebraica de Lie (\mathfrak{g}, δ) está dada por un mapeo lineal anti-simétrico $\delta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$

$$\delta(X_k) = f_k^{ij} X_i \wedge X_j, \quad (4.2)$$

donde $X \wedge Y$ significa $X \otimes Y - Y \otimes X$ y la condición de 1-cociclicidad

$$\delta([X, Y]) = [\delta(X), Y \otimes 1 + 1 \otimes Y] + [X \otimes 1 + 1 \otimes X, \delta(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (4.3)$$

De acuerdo a la definición 3.7, el dual δ^* del coconmutador define una segunda estructura algebraica de Lie sobre \mathfrak{g}^* , cuyo bracket de Lie está dado por

$$[\xi^i, \xi^j] = f_k^{ij} \xi^k. \quad (4.4)$$

donde $\{\xi^i\}$ son elementos de la base dual de \mathfrak{g}^* .

Dado un álgebra inicial de Lie \mathfrak{g} , el álgebra de Lie dual \mathfrak{g}^* debe satisfacer la condición de cociclicidad, esta condición implica las siguientes ecuaciones de compatibilidad entre las dos álgebras de Lie:

$$f_k^{ab} c_{ij}^k = f_i^{ak} c_{kj}^b + f_i^{kb} c_{kj}^a + f_j^{ak} c_{ik}^b + f_j^{kb} c_{ik}^a. \quad (4.5)$$

Por lo tanto, para determinar una estructura bialgebraica para \mathfrak{g} , tomaremos como datos iniciales las componentes del tensor de estructura c , luego, el tensor de estructura f deberá satisfacer las ecuaciones de compatibilidad entre álgebras (la condición 1-cociclo 4.5) y la identidad de Jacobi (1.32). Las soluciones de estas dos ecuaciones para el tensor f_k^{ij} proveen todas las posibles estructuras bialgebraicas para \mathfrak{g} . Para nuestros propósitos será conveniente multiplicar todas las componentes del tensor de estructura f_k^{ij} por un parámetro real η , que jugará el rol de un parámetro de deformación. El coconmutador resultante será denotado por δ_η , y la estructura algebraica de Lie dual \mathfrak{g}_η^* será

$$[\xi^i, \xi^j] = \eta f_k^{ij} \xi^k. \quad (4.6)$$

Obviamente, al tomar $\eta = 1$ recobramos el álgebra dual \mathfrak{g}^* . Sin embargo, tal como

veremos más adelante, la presencia explícita de η nos permitirá controlar el proceso de deformación. Otro objeto importante para nuestros propósitos es la existencia de un Casimir deformado que conmute con todos los generadores del álgebra que será la clave para las propiedades de integrabilidad de los sistemas inducidos a partir de sus respectivas coálgebras.

Para construir deformaciones de álgebras de Lie-Poisson mediante coálgebras de Poisson se tomará el biálgebra de Lie tangente $(\mathfrak{g}^*, \delta^*)$ para construir el grupo de Poisson-Lie asociado, para ello seguiremos el método presentado en [1]. Los pasos principales se enlistan a continuación:

1. Tomar el álgebra de Lie \mathfrak{g} , hallar una estructura bialgebraica de Lie (\mathfrak{g}, δ) no trivial y construir su biálgebra de Lie dual $(\mathfrak{g}^*, \delta^*)$. Recordando el teorema 3.1, este nos asegura que $(\mathfrak{g}^*, \delta^*)$ es la estructura bialgebraica de Lie tangente a cierto grupo de Lie-Poisson $(G^*, \{, \})$ tal que $\mathfrak{g}^* = Lie(G^*)$.
2. Introducir el álgebra de Lie isomorfa \mathfrak{g}_η^* para tener un parámetro explícito de deformación en el biálgebra de Lie tangente.
3. Construir el grupo de Lie dual G^* . Pero antes hallar una representación fiel ρ del álgebra de Lie dual \mathfrak{g}^* :

$$[\rho(\xi^i), \rho(\xi^j)] = f_k^{ij} \rho(\xi^k).$$

Usaremos coordenadas X_i en G^* , de este modo, la matriz de elementos del grupo de Lie dual G^* es obtenida mediante la usual exponenciación:

$$G^* = \prod_{i=1}^d \exp(X_i \rho(\xi^i)).$$

4. El coproducto Δ_η para las funciones coordenadas en G^* es solamente el codiferencial de la ley de multiplicación del grupo para las funciones coordenadas X_i [22]:

$$\Delta_\eta: \mathcal{C}^\infty(G^*) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(G^*) \otimes \mathcal{C}^\infty(G^*).$$

En particular, la forma explícita de Δ_η será obtenida al resolver las ecuaciones funcionales que provienen al imponer que el coproducto $\Delta_\eta(G_{ij}^*)$ para las entradas de la matriz de elementos de G^* tiene que estar dada por la multiplicación

de grupo en forma “tensorial” en G^* , es decir

$$\Delta_\eta(G_{ij}^*(\vec{X})) = G_{il}^*(\vec{X}) \otimes G_{lj}^*(\vec{X}) \quad (4.7)$$

donde $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)$ y $G_{ij}^*(\vec{X})$ es la correspondiente entrada de los elementos de grupo G^* en la representación elegida.

5. Identificar cada coordenada X_i del grupo G^* con su correspondiente coordenada x_i del grupo de Lie-Poisson del sistema original. Debido a esta identificación, el coproducto Δ_η es una η -deformación del coproducto primitivo, es decir

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \Delta_\eta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i = \Delta(x_i). \quad (4.8)$$

6. Por el teorema 3.1, existe un único bracket de Poisson $\{, \}_\eta$ en $\mathcal{C}^\infty(G^*)$ que hace de $(\mathcal{C}^\infty(G^*), \Delta_\eta, \{, \}_\eta)$ un grupo de Lie-Poisson, ya que por definición el coproducto es un homomorfismo de álgebras de Poisson

$$\Delta_\eta(\{F, G\}) = \{\Delta_\eta(F), \Delta_\eta(G)\} \quad \forall F, G \in (C)^\infty(G^*). \quad (4.9)$$

donde

$$\{A \otimes B, C \otimes D\} = \{A, C\} \otimes BD + AC \otimes \{B, D\}$$

es la estructura natural de Poisson en $\mathcal{C}^\infty(G^*) \otimes \mathcal{C}^\infty(G^*)$. Resulta que el bracket de Poisson $\{, \}_\eta$ es también una η -deformación del bracket de Lie-Poisson $\{, \}$ del sistema original, en el sentido que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \{x_i, x_j\}_\eta = \{x_i, x_j\}. \quad (4.10)$$

En efecto, el bracket de Lie Poisson $\{, \}_\eta$ debe ser hallado explícitamente al resolver simultáneamente las ecuaciones (4.9) y (4.10) mediante el algoritmo presentado en [22].

Debido a las propiedades (4.8) y (4.10) podemos concluir que, como un coálgebra de Poisson, el grupo de Lie-Poisson $(\mathcal{C}^\infty(G^*), \Delta_\eta, \{, \}_\eta)$ es una η -deformación del álgebra de Lie-Poisson del sistema original.

4.2. El modelo SIR: una deformación integrable

Los modelos epidémicos simples intentan describir la transmisión de una infección en función del tiempo dentro de una gran población al introducir un pequeño grupo de individuos infectados. Parte de los primeros trabajos teóricos sobre modelos epidémicos se deben a Kermack & McKendrick (1927) [23], en la cual la población total se considera constante y se divide en distintas clases de acuerdo a la salud de sus miembros. Esta división consiste de individuos *susceptibles* S que pueden contraer la enfermedad, *infectados* I que tienen la enfermedad y pueden transmitirla, y una tercera clase de individuos, los *recuperados* R , que ya no pueden contraer más la infección debido a que han sido curados con inmunidad, puestos en aislamiento, o fallecido de ser letal la infección (los individuos fallecidos aún son contados). El progreso de individuos esta representado esquemáticamente por

$$S \rightarrow I \rightarrow R.$$

Dichos modelos son usualmente llamados modelos *SIR*. Denotaremos como $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ al número de individuos susceptibles, infectados y recuperados, respectivamente, en determinado momento t . Para escribir las ecuaciones de evolución es necesario hacer algunas suposiciones:

- El aumento en la clase infectada es a una tasa proporcional al número de infectados y susceptibles, que es aSI , donde $a > 0$ es un parámetro constante. Los susceptibles disminuyen en la misma medida.
- La tasa de individuos trasladados de la clase infectada a la clase recuperada es proporcional al número de infectados, que es bI , donde $b > 0$ es una constante; $1/b$ es una medida del tiempo pasado en el estado infectado.
- El periodo de incubación es lo suficientemente corto para ser despreciado, es decir, un individuo susceptible que contrae la enfermedad es infectado de inmediato.

Por lo tanto, las ecuaciones de evolución basadas en las suposiciones anteriores son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -axy \\ \dot{y} &= axy - by \\ \dot{z} &= by \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $a > 0$ es la tasa de infección y $b > 0$ la tasa de recuperación. Dicho modelo es conocido como el modelo clásico de Kermack & McKendrick ([24], [25], [26]). Dado que este modelo no toma en cuenta factores demográficos, una constante de movimiento es el número total de individuos

$$\mathcal{H}_1 = x + y + z \quad (4.12)$$

y otra cantidad conservada bien conocida es

$$\mathcal{H}_2 = x e^{\frac{a}{b}z}. \quad (4.13)$$

4.2.1. Estructura de Hamilton-Poisson

El modelo de Kermack & McKendrick puede ser formulado como un sistema de Hamilton-Poisson $(\mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\}, \mathcal{H})$ en dos modos distintos. Si proponemos \mathcal{H}_1 como función Hamiltoniana, el sistema (4.11) puede ser escrito como

$$\dot{x}_i = \nu_1 \{x_i, \mathcal{H}_1\}$$

con respecto al bracket de Poisson

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= -x, & \{x, z\} &= 0, & \{y, z\} &= -\gamma \\ \nu_1 &= ay \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde $\gamma = b/a$ es un parámetro conocido como tasa relativa de recuperación (su recíproco $\sigma = a/b$ la tasa de contacto de la infección) y ν_1 la función coeficiente. Si ahora proponemos \mathcal{H}_2 como función Hamiltoniana, el sistema (4.11) puede ser escrito como $\dot{x}_i = \nu_2 \{x_i, \mathcal{H}_2\}$ con respecto al bracket de Poisson

$$\{x, y\} = 1, \quad \{x, z\} = -1, \quad \{y, z\} = 1 \quad (4.15)$$

y función de escala

$$\nu_2 = by e^{-\frac{a}{b}z}. \quad (4.16)$$

Ninguna de las estructuras de Poisson anteriores está asociada a un álgebra de Lie. Para obtener una estructura de Poisson-Lie extenderemos la dimensión del espacio vectorial a \mathbb{R}^4 con coordenadas (x, y, z, w) , en donde la cuarta coordenada w será introducida al bracket (4.14)

$$\{x, y\}_0 = -x, \quad \{x, z\}_0 = 0, \quad \{y, z\}_0 = -\gamma w, \quad \{w, \cdot\}_0 = 0, \quad (4.17)$$

siendo estas relaciones de conmutación, ahora sí, un bracket de Poisson-Lie. El álgebra (4.17) corresponde al álgebra $A_{4,3}$ según la clasificación de álgebras de Lie reales de dimensión cuatro dada en [27]. Para este sistema se tienen dos operadores Casimir

$$\mathcal{C}_1 = w, \quad \mathcal{C}_2 = x e^{\frac{a}{b}(z/w)}, \quad (4.18)$$

siendo entonces (4.17) un sistema integrable. Si el Hamiltoniano está dado nuevamente por \mathcal{H}_1 , el sistema de ecuaciones respecto al bracket de Poisson-Lie (4.17) es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -axy \\ \dot{y} &= axy - byw \\ \dot{z} &= byw \\ \dot{w} &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

En efecto, al tomar $w = 1$ recuperamos el sistema SIR (4.11). Puesto que $\dot{w} = 0$, el sistema (4.19) es simplemente una reparametrización de b del sistema original.

4.2.2. Biálgebras de Lie

Consideremos el álgebra de Lie \mathfrak{g} dada por (4.17) escrito en la base (x, y, z, w)

$$\{x, y\}_0 = -x, \quad \{x, z\}_0 = 0, \quad \{y, z\}_0 = -\gamma w, \quad \{w, \cdot\}_0 = 0, \quad (4.20)$$

el cóalgebra de Lie-Poisson está definido mediante el coproducto primitivo

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x \\ \Delta(y) &= y \otimes 1 + 1 \otimes y \\ \Delta(z) &= z \otimes 1 + 1 \otimes z \\ \Delta(w) &= w \otimes 1 + 1 \otimes w. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Una estructura bialgebraica de Lie para \mathfrak{g} deberá satisfacer la condición 1-cociclo,

para ello tomamos como datos iniciales las componentes del tensor de estructura c cuyas entradas distintas de cero son $c_{12}^1 = -1$, $c_{23}^4 = -\gamma$, y consideramos un tensor de estructura f^{ij}_k genérico (antisimétrico en i, j). Al resolver las ecuaciones (4.5) para f hallamos aquellas componentes que son distintas de cero:

$$\begin{aligned} & f_1^{12}, f_1^{13}, f_1^{14}, \\ & f_2^{12}, f_2^{13}, f_2^{14}, f_2^{34}, f_3^{34}, \\ & f_2^{24} = \gamma f_1^{13}, f_3^{14} = \gamma f_2^{12}, f_3^{24} = -\gamma f_1^{12}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

De la identidad de Jacobi para f obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas

$$\begin{aligned} & f_1^{12} f_2^{13} - f_1^{13} f_2^{12} = 0 \\ & f_1^{13} f_3^{34} + f_1^{12} f_2^{34} = 0 \\ & \gamma f_1^{12} f_2^{13} + f_1^{12} f_2^{14} - f_1^{14} f_2^{12} = 0 \\ & \gamma f_1^{13} f_2^{13} - f_2^{13} f_3^{34} - f_2^{12} f_2^{34} + f_1^{13} f_2^{14} - f_1^{14} f_2^{13} = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Al resolver las ecuaciones provenientes de la identidad de Jacobi para f hallamos todas las posibles estructuras bialgebraicas de Lie para \mathfrak{g} . Una de las soluciones del sistema de ecuaciones (4.23) proporciona el siguiente tensor de estructura

$$f_{11}^{12} = 1, \quad f_{33}^{24} = -\gamma \quad (4.24)$$

definiendo así el coconmutador

$$\delta_\eta(x) = \eta x \wedge y, \quad \delta_\eta(z) = -\gamma \eta y \wedge w, \quad \delta_\eta(y) = \delta_\eta(w) = 0 \quad (4.25)$$

y el álgebra de Lie dual \mathfrak{g}^*

$$\begin{aligned} & \{\xi^1, \xi^2\}_\eta = \eta \xi^1, \quad \{\xi^1, \xi^3\}_\eta = 0, \quad \{\xi^1, \xi^4\}_\eta = 0, \\ & \{\xi^2, \xi^3\}_\eta = 0, \quad \{\xi^2, \xi^4\}_\eta = -\gamma \eta \xi^3, \quad \{\xi^3, \xi^4\}_\eta = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

El álgebra de Lie dual (4.26) es también isomorfa al álgebra $A_{4,3}$. Por lo tanto, tenemos una estructura bialgebraica de Lie auto-dual.

4.2.3. Construcción del grupo de Lie dual

Ahora tenemos que construir el grupo de Lie dual G^* cuya álgebra de Lie es \mathfrak{g}^* . Si definimos la matriz e_i^j de 5×5 como aquella con la única entrada distinta de

cero en la fila i y columna j igual a 1, una representación fiel ρ del álgebra (4.26) está dada por

$$\begin{aligned}
\rho(\xi^1) &= \eta e_1^2 \\
\rho(\xi^2) &= -\eta e_1^1 + \eta e_3^4 \\
\rho(\xi^3) &= \eta e_3^5 \\
\rho(\xi^4) &= -\gamma\eta e_4^5
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Es importante notar que el parámetro η aparece como un factor multiplicativo en cada entrada distinta de cero de la matriz de la representación del álgebra de Lie \mathfrak{g}^* (4.26). Ya que, al momento de exponenciar para obtener los elementos del grupo G^* , las potencias de η nos darán las contribuciones correspondientes de diferentes potencias de los generadores del álgebra de Lie. En esta representación, la matriz de elementos del grupo es

$$\begin{aligned}
G^* &= \exp(X\rho(\xi^1)) \exp(Y\rho(\xi^2)) \exp(Z\rho(\xi^3)) \exp(W\rho(\xi^4)) \\
&= \begin{pmatrix} e^{-\eta Y} & \eta X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \eta Y & \eta(Z - \gamma\eta YW) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\gamma\eta W \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

4.2.4. Deformación del sistema SIR

Al resolver las ecuaciones funcionales (4.7) (ver A.1) obtenemos la ley de multiplicación de grupo, es decir, el coproducto para las funciones coordenadas de G^* , que son

$$\begin{aligned}
\Delta_\eta(x) &= x \otimes 1 + e^{-\eta y} \otimes x \\
\Delta_\eta(y) &= y \otimes 1 + 1 \otimes y \\
\Delta_\eta(z) &= z \otimes 1 + 1 \otimes z - \gamma\eta y \otimes w \\
\Delta_\eta(w) &= w \otimes 1 + 1 \otimes w
\end{aligned} \tag{4.29}$$

en donde hemos hecho la identificación de coordenadas $X_i \rightarrow x_i$. El coproducto Δ_η es en efecto una η -deformación del coproducto primitivo (4.21) ya que podemos comprobar fácilmente $\lim_{\eta \rightarrow 0} \Delta_\eta = \Delta$.

Una vez definido el coproducto para las cuatro funciones coordenadas (denotadas por X, Y, Z, W), buscaremos el bracket de Poisson más genérico para la cual

la ecuación (4.9) se cumple. Para ello se usará el Anzatz propuesto en [28]:

$$\{X^i, X^j\} = c_{kl}^{ij} F_k F_l \quad (4.30)$$

donde $c_{kl}^{ij} = -c_{kl}^{ji}$ son parámetros constantes a ser determinados y F_i es cualquier función que aparece como entrada en matriz de elementos del grupo G^* , como también funciones que aparecen en los coproductos para las coordenadas locales. Adicionalmente, (4.30) deberá satisfacer la identidad de Jacobi. En nuestro caso, el coproducto (4.29) es isomorfo a aquel encontrado en [1], de ahí se tiene que el único bracket de Lie-Poisson $\{\cdot, \cdot\}_\eta$ para el cuál el coproducto Δ_η es un mapeo de Poisson es el siguiente:

$$\{x, y\}_\eta = \frac{e^{-\eta x} - 1}{\eta}, \quad \{x, z\}_\eta = 0, \quad \{y, z\}_\eta = -\gamma w e^{-\eta x}, \quad \{w, \cdot\}_\eta = 0, \quad (4.31)$$

que es en efecto, una η -deformación del bracket de Lie-Poisson original (4.17) ya que es fácil comprobar $\lim_{\eta \rightarrow 0} \{\cdot, \cdot\}_\eta = \{\cdot, \cdot\}_0$ en donde hemos hecho nuevamente la identificación de coordenadas $X_i \rightarrow x_i$. De igual forma, las funciones Casimir para el álgebra (4.31) son

$$\mathcal{C}_1 = w, \quad \mathcal{C}_2 = \frac{1 - e^{-\eta x}}{\eta} e^{\sigma \frac{z}{w}}, \quad (4.32)$$

que también son η -deformaciones de los operadores Casimir (4.18).

Por lo tanto, el grupo de Lie-Poisson $(\mathcal{C}^\infty(G^*), \Delta_\eta, \{\cdot, \cdot\}_\eta)$ ha sido construido completamente. Por último, al tomar el mismo Hamiltoniano \mathcal{H}_1 del sistema SIR, el bracket de Lie-Poisson (4.31) genera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ay \frac{e^{-\eta x} - 1}{\eta} = -axy + \frac{ax^2 y}{2} \eta + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \dot{y} &= ay \frac{1 - e^{-\eta x}}{\eta} - byw e^{-\eta x} = axy - by + bxy\eta - \frac{ax^2 y}{2} \eta + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \dot{z} &= byw e^{-\eta x} = by - bxy\eta + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \dot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

que, al tomar $w = 1$, provee una deformación integrable del sistema SIR (4.11), con integrales de movimiento deformadas dadas por las funciones Casimir (4.32). En la figura 4.1 podemos apreciar cómo el parámetro de deformación afecta la severidad

de la epidemia.

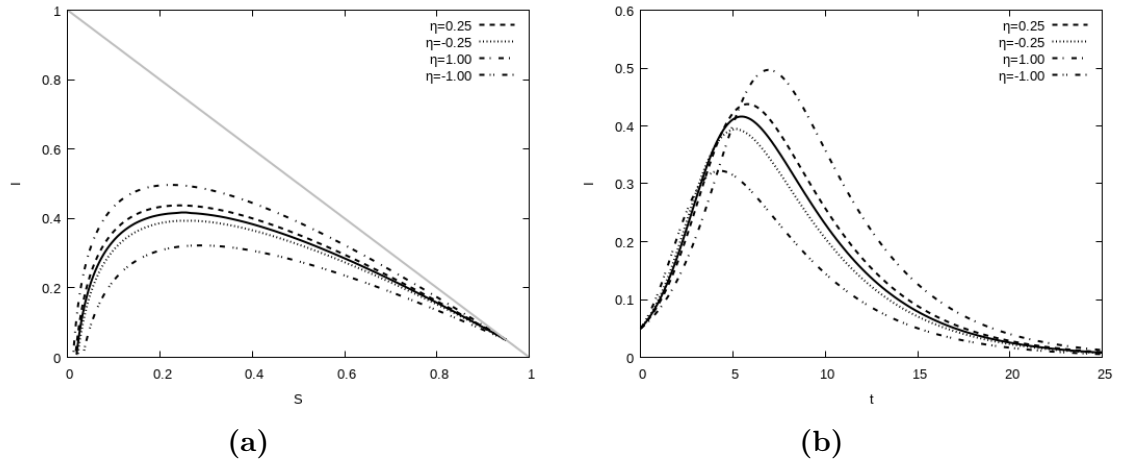


Figura 4.1. (a) Trayectoria en el espacio de fase del sistema SIR (4.11) para los datos iniciales $x(0) = 0.95$, $y(0) = 0.05$, $z(0) = 0$ y parámetros $a = 1$, $b = 0.25$ (línea sólida) y el sistema SIR deformado (4.33) con los mismos parámetros y datos iniciales, $w = 1$ y η indicado en la figura; la línea sólida gris delimita la región $x + y \leq 1$. (b) Número de individuos infectados en función del tiempo de la figura (a). (Fuente: elaboración propia)

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos obtenido deformaciones integrables de sistemas dinámicos Hamiltonianos equipados con estructuras de Lie-Poisson, específicamente, se ha construido una deformación integrable al modelo epidémico SIR clásico de Kermack & McKendrick. Para lograr nuestro objetivo fue necesario hallar una estructura bialgebraica de Lie asociada al sistema de ecuaciones diferenciales original. Los resultados principales se enlistan a continuación:

1. Un grupo de Lie-Poisson $(\mathcal{C}^\infty(G^*), \Delta_\eta, \{, \}_\eta)$ es una η -deformación del coálgebra de Lie-Poisson $(\mathcal{C}^\infty(G), \Delta, \{, \})$ ya que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \Delta_\eta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i = \Delta(x_i)$ y $\lim_{\eta \rightarrow 0} \{x_i, x_j\}_\eta = \{x_i, x_j\}$. De esta manera es posible construir deformaciones de sistemas Hamiltonianos equipados con una estructura de Lie-Poisson.
2. Se ha presentado una expresión explícita del coproducto, brackets de Poisson y funciones Casimir del sistema SIR deformado. Para construir dicha deformación, fue necesario ampliar la dimensión de la variedad de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^4 con el fin de obtener una estructura de Hamilton-Poisson asociada a un álgebra de Lie. Tomando esta estructura algebraica de Lie como punto de partida fue posible encontrar una estructura bialgebraica de Lie al resolver las ecuaciones de compatibilidad entre álgebras provenientes de la condición 1-cociclo.
3. La deformación del sistema SIR aquí presentada no es única. De hecho, existen tantas deformaciones como posibles estructuras bialgebraicas halladas luego de resolver las ecuaciones de compatibilidad de la condición 1-cociclo y satisfacer la identidad de Jacobi para el tensor de estructura f . Debido a esto, cada deformación está completamente determinada por la estructura bialgebraica de Lie dual $(\mathfrak{g}^*, \delta^*)$.

RECOMENDACIONES

Además de los resultados presentados en este trabajo se sugiere la posibilidad de adentrarse aún más en esta línea de investigación al realizar estudios posteriores que permitan aprovechar la estructura coalgebraica del sistema SIR como también de las deformaciones mismas. Posibles trabajos de continuación son los siguientes:

1. Se ha presentado una deformación integrable del modelo clásico de Kermack & McKendrick que consiste en factores exponenciales en función de un parámetro η . Cada potencia de η de la expansión en series de Taylor del sistema SIR deformado brinda un nuevo término al sistema SIR original. Será de importancia dar una interpretación dinámica a cada término de la expansión ya que puede ser de utilidad para el estudio y control de epidemias. Por ejemplo, se puede notar que la severidad de la infección es afectada por el valor del parámetro de deformación, aumentando (disminuyendo) la severidad para valores positivos (negativos) de η .
2. La deformación del sistema SIR que hemos obtenido está completamente determinada por su estructura bialgebraica de Lie asociada, específicamente por la solución del tensor f elegida. Otro aspecto interesante es la clasificación de las soluciones del tensor de estructura f en clases de conjugación bajo la acción de \mathfrak{g} , obteniendo así una clasificación de todas las posibles estructuras bialgebraicas para \mathfrak{g} . De esta manera se podrán clasificar familias de sistemas de ecuaciones deformadas del modelo SIR al estudiar las propiedades dinámicas de cada sistema dentro de cada clase de conjugación de estructuras bialgebraicas de Lie.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Á. Ballesteros, A. Blasco, and F. Musso, “Integrable deformations of Rössler and Lorenz systems from Poisson–Lie groups,” *Journal of Differential Equations*, vol. 260, no. 11, pp. 8207 – 8228, 2016.
- [2] C. Lăzureanu and C. Petrişor, “Stability and energy-Casimir mapping for integrable deformations of the Kermack & McKendrick system,” *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2019, p. 9, 2019.
- [3] H. Gümral and Y. Nutku, “Poisson structure of dynamical systems with three degrees of freedom,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 34, pp. 5691–5723, 12 1993.
- [4] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, vol. 107. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [6] B. F. Schutz, *Geometrical methods for mathematical physics*. Cambridge University Press, 1980.
- [7] C. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*. World Scientific lecture notes in physics, World Scientific, 1999.
- [8] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics, Part II - Revised Edition*. Elsevier Science, 1982.
- [9] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [10] B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.

- [11] P. Ramond, *Group theory: a physicist's survey*. Cambridge University Press, 2010.
- [12] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: a first course*, vol. 129. Springer Science & Business Media, 2013.
- [13] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Dynamical systems: differential equations, maps and chaotic behaviour*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [14] A. T. Fomenko, *Integrability and nonintegrability in geometry and mechanics*, vol. 31. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] S. Dascalescu, C. Nastasescu, and S. Raianu, *Hopf algebras: an introduction*, vol. 235 of *Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics*. CRC Press, 2000.
- [16] N. Bourbaki, *Algebra I: Chapters 1-3*. Actualités scientifiques et industrielles, Springer, 1998.
- [17] S. Shnider and S. Sternberg, *Quantum groups: from coalgebras to Drinfeld algebras: a guided tour*. International Press Incorporated, Boston, 1993.
- [18] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*. Cambridge University Press, 1995.
- [19] R. G. Underwood, *An introduction to Hopf algebras*. Springer-Verlag New York, 2011.
- [20] V. Chari and A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1995.
- [21] Á. Ballesteros and O. Ragnisco, “A systematic construction of completely integrable Hamiltonians from coalgebras,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 31, pp. 3791–3813, apr 1998.
- [22] Á. Ballesteros and F. Musso, “Quantum algebras as quantizations of dual Poisson–Lie groups,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 46, p. 195203, apr 2013.
- [23] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics,” *Proceedings of the royal society of london. Series A*,

Containing papers of a mathematical and physical character, vol. 115, no. 772, pp. 700–721, 1927.

- [24] J. Murray, *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer New York, 2007.
- [25] M. J. Keeling and P. Rohani, *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*. Princeton University Press, 2008.
- [26] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, vol. 46 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [27] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus, “Invariants of real low dimension Lie algebras,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 17, no. 6, pp. 986–994, 1976.
- [28] Á. Ballesteros, A. Blasco, and F. Musso, “Classification of real three-dimensional Poisson–Lie groups,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, p. 175204, apr 2012.

A. APÉNDICE

A.1. Coproducto del grupo dual

A continuación se describirá el procedimiento para hallar la solución del coproducto de las funciones coordenadas del grupo de Lie dual G^* . Consideremos el álgebra de Lie dual \mathfrak{g}^* , con base $\{\xi^i\}$ para $i = 1, \dots, 4$, del sistema SIR dada por

$$\begin{aligned} \{\xi^1, \xi^2\}_\eta &= \eta \xi^1, & \{\xi^1, \xi^3\}_\eta &= 0, & \{\xi^1, \xi^4\}_\eta &= 0, \\ \{\xi^2, \xi^3\}_\eta &= 0, & \{\xi^2, \xi^4\}_\eta &= -\gamma \eta \xi^3, & \{\xi^3, \xi^4\}_\eta &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde η es un parámetro de deformación y γ un parámetro del modelo.

Una representación fiel ρ de esta álgebra de Lie está dada por:

$$\begin{aligned} \rho(\xi^1) &= \eta e_1^2 \\ \rho(\xi^2) &= -\eta e_1^1 + \eta e_3^4 \\ \rho(\xi^3) &= \eta e_3^5 \\ \rho(\xi^4) &= -\gamma \eta e_4^5 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde e_i^j denota la matriz de 5×5 cuya única entrada distinta de cero igual a 1 se encuentra en la fila i y columna j . En esta representación, la matriz de elementos del grupo G^* es:

$$\begin{aligned} G^* &= \exp(X\rho(\xi^1))\exp(Y\rho(\xi^2))\exp(Z\rho(\xi^3))\exp(W\rho(\xi^4)) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\eta Y} & \eta X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \eta Y & \eta(Z - \gamma \eta Y W) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\gamma \eta W \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Identificamos los dos conjuntos $\{X_1, Y_1, Z_1, W_1\}$ y $\{X_2, Y_2, Z_2, W_2\}$ de coordenadas de grupo como

$$\begin{aligned}
X_1 &= X \otimes 1, & X_2 &= 1 \otimes X, \\
Y_1 &= Y \otimes 1, & Y_2 &= 1 \otimes Y, \\
Z_1 &= Z \otimes 1, & Z_2 &= 1 \otimes Z, \\
W_1 &= W \otimes 1, & W_2 &= 1 \otimes W,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

cada uno de ellos perteneciente a una copia distinta de la variedad del grupo, $\{X_1, Y_1, Z_1, W_1\} \in \mathcal{C}^\infty(G^*) \otimes 1$ y $\{X_2, Y_2, Z_2, W_2\} \in 1 \otimes \mathcal{C}^\infty(G^*)$. De esta manera, al imponer la condición que el coproducto $\Delta_\eta(G_{ij}^*)$ para las entradas de la matriz de elementos de G^* tiene que estar dada por la multiplicación del grupo en forma “tensorial”, es decir

$$\begin{aligned}
\Delta_\eta(G_{ij}^*(\vec{X})) &= G_{il}^*(\vec{X}) \otimes G_{lj}^*(\vec{X}) \\
&= M_1 \otimes M_2,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} e^{-\eta Y_1} & \eta X_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \otimes 1 & \eta Y_1 & \eta(Z_1 - \gamma \eta Y_1 W_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1 & -\gamma \eta W_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} e^{-\eta Y_2} & \eta X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \otimes 1 & \eta Y_2 & \eta(Z_2 - \gamma \eta Y_2 W_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1 & -\gamma \eta W_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1 \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

hallamos las siguientes ecuaciones funcionales

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} e^{-\eta(Y_1+Y_2)} & \eta(X_2 e^{-\eta Y_1} + X_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \otimes 1 & \eta(Y_1 + Y_2) & -\gamma \eta^2(Y_1 W_1 + Y_2 W_2 + Y_1 W_2) + \eta(Z_1 + Z_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1 & -\gamma \eta(W_1 + W_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1 \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

$$\begin{pmatrix}
\Delta_\eta(e^{-\eta Y}) & \Delta_\eta(\eta Y) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) \\
\Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(1) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) \\
\Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(1) & \Delta_\eta(\eta Y) & \Delta_\eta(\eta(Z - \gamma\eta YW)) \\
\Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(1) & \Delta_\eta(-\gamma\eta W) \\
\Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(0) & \Delta_\eta(1)
\end{pmatrix} =
\begin{pmatrix}
e^{-\eta(Y_1+Y_2)} & \eta(X_2e^{-\eta Y_1} + X_1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 \otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \otimes 1 & \eta(Y_1 + Y_2) & -\gamma\eta^2(Y_1W_1 + Y_2W_2 + Y_1W_2) + \eta(Z_1 + Z_2) \\
0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1 & -\gamma\eta(W_1 + W_2) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \otimes 1
\end{pmatrix}.
\tag{A.9}$$

De (A.9) se deduce inmediatamente el coproducto para las funciones coordenadas del grupo dual G^*

$$\begin{aligned}
\Delta_\eta(X) &= X \otimes 1 + e^{-\eta Y} \otimes X \\
\Delta_\eta(Y) &= Y \otimes 1 + 1 \otimes Y \\
\Delta_\eta(Z) &= Z \otimes 1 + 1 \otimes Z - \gamma\eta Y \otimes W \\
\Delta_\eta(W) &= W \otimes 1 + 1 \otimes W,
\end{aligned}
\tag{A.10}$$

como también $\Delta_\eta(1) = 1 \otimes 1$.