



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

MECANISMO DE AMPLIFICACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN LA MAGNETÓSFERA TERRESTRE

José Alejandro Franco Altamirano

Asesorado por Rualdo Soto-Chavez y Giovanni Ramírez

Guatemala, Julio 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**MECANISMO DE AMPLIFICACIÓN DE ONDAS
ELECTROMAGNÉTICAS EN LA MAGNETÓSFERA
TERRESTRE**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

JOSÉ ALEJANDRO FRANCO ALTAMIRANO
ASESORADO POR RUALDO SOTO-CHAVEZ Y GIOVANNI RAMÍREZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, JULIO 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR Dr. Rodrigo Sacahui
EXAMINADOR Lic. Héctor Pérez
EXAMINADOR Lic. Gustavo Santos



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



Ref. D.DTG. 007-2019
Guatemala 12 de julio de 2019

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **MECANISMO DE AMPLIFICACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN LA MAGNETÓSFERA TERRESTRE** presentado por el estudiante universitario **José Alejandro Franco Altamirano**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.

MSc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



AGRADECIMIENTOS

Al **Pueblo de Guatemala**, ya que gracias a ellos tuve acceso a una formación académica accesible y de calidad.

A los **Docentes de la ECFM**, por todo lo que me enseñaron a lo largo de la carrera, no sólo sobre los cursos, sino también de la vida.

A **Rualdo Soto-Chavez** por proponerme este trabajo. También por su apoyo en el resto de mi formación con sus consejos, experiencias y comentarios.

A **Giovanni Ramírez**, por su paciencia infinita y apoyo en los últimos años de la carrera y por darme la posibilidad de estudiar los temas que me interesaban, incluso cuando nadie los trabajaba aquí. Héroe.

DEDICATORIA

Le dedico este trabajo a mi familia, Mari, Alejandro, Lala y Siki. Por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida y por creer en mi, sobre todo en aquellos momentos en que yo no lo hacía. Para el resto, Mynor, Christian, Karen, Jéssica y los demás, por todo lo que hemos vivido juntos. También para Dardo, Charlie, Milo, Peter, Tuki, Mackito, y el resto de amigos que hicieron que estos años fueran más interesantes y placenteros.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	III
ÍNDICE DE TABLAS	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. Definición de un Plasma	1
1.1. Longitud de Debye	2
1.1.1. Esquema físico	2
1.1.2. Derivación de la longitud de Debye	2
1.2. Frecuencia de plasma	5
1.2.1. Esquema físico	6
1.2.2. Derivación de la frecuencia electrónica de plasma	6
1.3. Parámetro de plasma	9
2. Magnetósfera y ondas coro	11
2.1. Plasmas geofísicos	11
2.2. Dinámica de espejo	12
2.2.1. Partículas atrapadas	15
2.3. Propagación de ondas electromagnéticas paralelas a un campo magnético externo; ondas coro	15
2.4. Dinámica de partículas con una onda electromagnética	19
3. Mecanismo de amplificación	25
3.1. Ecuaciones de movimiento de electrones	25
3.2. Evolución de la onda	26

3.3. Ecuaciones del mecanismos de amplificación	32
4. Simulación y resultados numéricos	33
4.1. Simulación	33
4.2. Resultados numéricos	34
Conclusiones	41
Trabajo a futuro y recomendaciones	43

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Efecto de la longitud de Debye en el decaimiento de campo eléctrico .	5
2.1.	Función de dispersión para una onda EM con $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	18
4.1.	Campo magnético en función del tiempo en el régimen de saturación	35
4.2.	Campo magnético en función del tiempo en el régimen transitorio . .	35
4.3.	Tasa de ganancia en función tiempo	36
4.4.	Comparación de diferentes semillas de campo B	37
4.5.	Parametros de resonancia	38
4.6.	Modelo clásico contra relativista	39

ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Valores iniciales para la simulación.	34
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
γ	factor gamma
ϵ_0	permitividad del vacío
η	función de fase de la onda
θ	ángulo polar
λ_D	longitud de Debye
Λ_D	parámetro de plasma
μ_0	permeabilidad del vacío
μ	momento dipolar
Φ	fase de la onda
ψ	ángulo de complemento
ω	frecuencia
ω_c	frecuencia de ciclotrón
ω_p	frecuencia electrónica de
\bar{B}_0	campo magnético externo
\bar{B}_w	campo magnético de la onda
c	velocidad de la luz
e	carga eléctrica elemental
\bar{E}	campo eléctrico
\bar{E}_w	campo eléctrico de la onda
\bar{J}	densidad de corriente
\bar{k}	vector de onda
m_i	masa de iones
m_e	masa de electrones
n_i	densidad de iones
n_e	densidad de electrones
p_i	presión de iones
p_e	presión de electrones

Símbolo	Significado
\bar{P}	momentum lineal
\bar{r}	distancia en coordenadas esféricas
t	tiempo
T_i	temperatura de iones
T_e	temperatura de electrones
\bar{v}	velocidad

OBJETIVOS

General

Estudiar el mecanismo relativista de amplificación para las ondas electromagnéticas conocidas como ondas coro que se propagan en la magnetósfera usando una aproximación de variación lenta de amplitud.

Específicos

1. Explicar qué es un plasma y los parámetros importantes para su estudio.
2. Entender la propagación de ondas electromagnéticas en un campo magnético externo para explicar la propagación de las *ondas coro* en la magnetósfera terrestre.
3. Desarrollar analíticamente las ecuaciones de movimiento dadas por la dinámica de partículas que rigen la amplificación de la onda electromagnética.
4. Realizar simulaciones computacionales para obtener la solución numérica del sistema de ecuaciones de movimiento.
5. Contextualizar los resultados numéricos obtenidos dentro de los resultados experimentales.

INTRODUCCIÓN

El plasma es un gas ionizado que presenta efectos colectivos y es considerado el cuarto estado de la materia [1]. El estudio de este medio inició con los estudios desarrollados por Langmuir en 1927 y desde entonces ha sido estudiado en diversas ramas de la física. Actualmente, la ramas más importantes son la física de fusión, interacciones plasma-láser y la astrofísica. Con relación a esta última, la existencia del campo magnético terrestre hace posible que partículas provenientes del viento solar sean atrapadas y formen un medio, un plasma. Esta región es conocida como magnetósfera [3]. La formación de esta tiene que ver con la forma del campo magnético de la Tierra. En este medio se pueden propagar ondas las ondas electromagnéticas.

Las *ondas coro* son unas de las emisiones de ondas naturales más intensas generadas por inestabilidades en el plasma en la magnetósfera terrestre, fueron observadas por primera vez en 1953 por L. Stoney. Las ondas coro son ondas coherentes de baja frecuencia que se propagan en el medio. Estas ocurren a frecuencias desde las centenas de Hz hasta algunos kHz y presentan cambios de frecuencia en fracciones de segundo [7].

El mecanismo de generación de ondas coro ha sido extensamente estudiado desde los años 50 y ahora es bastante aceptado que las ondas son generadas por procesos no lineales los cuales involucran electrones ciclotrónicos resonantes de ondas *whistler-mode* y electrones energéticos en la magnetósfera terrestre. Sin embargo, no hay consenso en la explicación de algunas de las propiedades importantes de las ondas coro, por ejemplo, el mecanismo de amplificación.

En los años 70, se demostró que las ondas coro toman lugar cerca del ecuador geomagnético, en donde la primera derivada del campo magnético es cercano a cero, es decir, donde es constante. También se observaron dos bandas de frecuencias, una por debajo y otra sobre un medio de la frecuencia de ciclotrón de electrones locales. También se midió la energía de los electrones entre los entre los 10 a 100 keV. Mucha de la teoría al respecto, trata sobre la propagación de las ondas de forma paralela al campo magnético externo [4].

En los últimos años el estudio de este fenómeno ha resurgido debido a la investigación de mecanismos de aceleración de electrones. Las ondas coro están siendo consideradas como una fuente local de electrones energéticos en la región de Van Allen exterior [5]. Es importante entender el comportamiento de estos electrones ya que pueden causar serios daños a los sistemas electrónicos de naves y satélites.

Hasta ahora se sabe que las amplitudes esperadas en este fenómeno no son lineales y que hay un régimen de saturación. Las observaciones demuestran que la frecuencia de plasma es entre 1 y 5 veces la frecuencia de ciclotrón, lo cuál da un índice de refracción entre 2 y 16. Esto hace que el campo magnético de la onda coro esté entre las decenas y centenas de pT. Por otro lado, los cambios de frecuencia mencionados oscilan entre los 10 y 20 kHz/s.[5].

En el siguiente trabajo presentamos un mecanismo relativista para explicar la amplificación de la onda coro. Este está basado en las similitudes de las ondas coro con los láseres de electrones libres según fuera explicado en el trabajo de [5]. En el primer capítulo, se introducen conceptos básicos sobre física de plasma. En el capítulo 2, inicia hablando sobre plasmas geofísicos e introduciendo la definición de magnetósfera. Luego, se habla sobre propagación de ondas electromagnéticas en un plasma y se definen las ondas coro. El capítulo termina con un análisis de las dinámica de partículas cargadas con una onda electromagnética oblicua en un campo magnético externo.

El capítulo 3 presenta el modelo de amplificación. En la primera parte, se hacen simplificaciones a los resultados del capítulo 2 respecto a la dinámica de las partículas. En la segunda parte, se usa la aproximación de variación lenta de amplitud para desarrollar la ecuación de onda electromagnética. El capítulo finaliza con el sistema de ecuaciones que rigen el modelo de amplificación propuesto. En el capítulo 4 se habla sobre el programa desarrollado para resolver el sistema de ecuaciones planteado al final del capítulo 3 y se discuten los resultados numéricos obtenidos.

1. Definición de un Plasma

Un plasma se define cualitativamente como un gas ionizado cuasi-neutral que presenta efectos colectivos y que posee una conductividad eléctrica alta [1]. Una definición cuantitativa requiere de tres parámetros: la *longitud de Debye*, λ_D , que es una escala de longitud, la *frecuencia electrónica de plasma*, ω_p , que es una escala inversa de tiempo y finalmente el parámetro de colisiones o *parámetro de plasma*, Λ_D , el cuál indica si el medio se rige por efectos colectivos o por interacciones de Coulomb. Para que un gas ionizado se comporte como un plasma existen dos criterios, uno es el macroscópico y el otro es el microscópico [2]. Para el primero, se debe considerar dos valores de un plasma, que son

- Escala de longitud, que es la dimensión geométrica típica del gas ionizado L . Esta se compara con una cantidad característica del plasma conocida como longitud de Debye, λ_D .
- Escala característica de tiempo inverso, que es el tiempo inverso de tránsito térmico para que una partícula se mueva a través del plasma, $\omega_T = v_T/L$. Esta se compara con la frecuencia electrónica del plasma, ω_p .

Para que un gas ionizado se comporte como un plasma se requiere que la longitud de Debye sea mucho más pequeña que la escala de longitud del plasma, $\lambda_D \ll L$, y que la frecuencia de plasma sea mucho mayor que la escala de tiempo inverso, $\omega_p \gg \omega_T$. Para el criterio microscópico se deben considerar el tipo de colisiones del gas. Para que el gas se comporte como un plasma se necesita una *colisionalidad* baja, es decir, que los efectos colectivos de larga distancia predominen sobre las colisiones de corto alcance de Coulomb. Esto se mide mediante el parámetro de plasma y este a su vez indica la cantidad de partículas que hay en una esfera de Debye. Esta última es una esfera cuyo radio es λ_D . La baja colisionalidad se logra cuando $\Lambda_D \gg 1$.

1.1. Longitud de Debye

Una de las consecuencias de tener efectos colectivos y la alta conductividad, es la eficiencia para neutralizar campos eléctricos externos de corriente directa. La distancia a la que la mayor parte del campo externo es neutralizado se conoce como longitud de Debye, λ_D [11].

1.1.1. Esquema físico

Para obtener λ_D pensemos en el siguiente sistema. Se tiene un circuito de corriente directa con un componente que contiene un plasma con densidad de iones, n_i , y electrones, $n_e = n$, con temperaturas T_i y T_e respectivamente. El tamaño de dicho componente es L . Si el circuito es cerrado, el componente descrito está sujeto a un potencial V . Debido al campo eléctrico E generado por el circuito, los electrones se mueven hacia el potencial positivo mientras que los iones positivos se mueven hacia el potencial negativo. El movimiento de dichas cargas genera un campo eléctrico en sentido contrario al campo externo, siendo capaz de neutralizarlo. Este fenómeno se conoce como *apantallamiento de Debye* (Debye shielding en inglés) [1]. La neutralización no es perfecta. Cerca de las paredes del plasma, hay una capa pequeña donde se concentran los electrones. El grosor de esta capa es la *longitud de Debye*. La razón de ser de esta es que las partículas cargadas tienen una temperatura diferente de cero, por lo que si las partículas son muy energéticas, pueden atravesar esta capa. La longitud de apantallamiento entonces es proporcional a la temperatura del medio [2]

1.1.2. Derivación de la longitud de Debye

Para derivar la longitud de Debye, se usaremos la ecuación de momentum para un fluido adecuada a un plasma. Basta con saber que las ecuaciones para iones y electrones están dadas en según [2] como

$$\begin{aligned} m_e n_e \left(\frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + \bar{v}_e \cdot \nabla \bar{v}_e \right) &= -en_e \bar{E} - \nabla p_e, \\ m_i n_i \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla \bar{v}_i \right) &= en_i \bar{E} - \nabla p_i, \end{aligned}$$

donde $m_{e,i}$ es la masa, $v_{e,i}$ la velocidad y $p_{e,i}$ la presión de los electrones y los iones. \bar{E} es el campo eléctrico. Según el esquema físico planteado anteriormente, haremos las siguientes suposiciones:

1. La corriente eléctrica es tan pequeña que se pueden despreciar efectos de campo magnético. Esto también hace posible considerar al plasma en un *estado estable* donde $v_e \approx v_i \approx 0$.
2. En un estado estable se cumple que $\nabla \times \bar{E} = 0$, por lo que $\bar{E} = -\nabla\varphi$.
3. Temperaturas constantes T_e y T_i .
4. Se trabaja en una dimensión.
5. La ecuación de estado es $p_{e,i} = n_{e,i}T_{e,i}$ en donde las temperaturas están en unidades de la constante de Boltzmann.
6. Se ignora la fuerza de gravedad.

Con esto, las ecuaciones de momentum, en términos del potencial se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{T_e}{en_e} \frac{dn_e}{dx} &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} + \frac{T_i}{en_i} \frac{dn_i}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Al integrar dichas ecuaciones encontramos las densidades locales de carga en el plasma. Estas también son conocidas como relaciones de Boltzmann [2] y son

$$n_e = n_0 \exp(e\varphi/T_e), \quad (1.1)$$

$$n_i = n_0 \exp(-e\varphi/T_i), \quad (1.2)$$

donde n_0 es la densidad no perturbada lejos de la orilla del componente que contiene al plasma. Para mantener la neutralidad de carga global, n_0 es la misma para iones y electrones. Por simplicidad, la constante asociada al potencial se escoge de forma que $\varphi = 0$ en el centro de la configuración, $x = 0$. Ahora, cerramos el sistema con la ecuación de Poisson

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon_0}(n_e - n_i). \quad (1.3)$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial ordinaria no lineal. Para hacer avances, la resolveremos en el régimen de voltaje muy bajo, es decir $e\varphi/T_{e,i} \ll 1$. Esto permite expandir (1.2) en polinomios de Taylor como $\exp(\pm e\varphi/T_{e,i}) \approx 1 \pm e\varphi/T_{e,i}$. Sustituyendo en (1.3) se linealiza la ecuación y queda como

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i} \right) \varphi = 0, \quad (1.4)$$

sujeta por la geometría descrita a las condiciones de contorno $\varphi(-L/2) - \varphi(L/2) = V_0$ y $\varphi(0) = 0$. La solución a la ecuación tiene la siguiente forma

$$\varphi = -\frac{V_0}{2} \frac{\sinh(x/\lambda_D)}{\sinh(L/2\lambda_D)}, \quad (1.5)$$

$$E = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{V_0}{2\lambda_D} \frac{\cosh(x/\lambda_D)}{\sinh(L/2\lambda_D)}, \quad (1.6)$$

donde

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} = \frac{e^2 n_o}{\epsilon_o T_e} + \frac{e^2 n_o}{\epsilon_o T_i}, \quad (1.7)$$

donde λ_D la longitud de Debye. Para entender mejor el comportamiento de la solución, en la figura 1.1 mostramos algunos campos eléctricos según (1.6) con diferentes valores de λ_D .

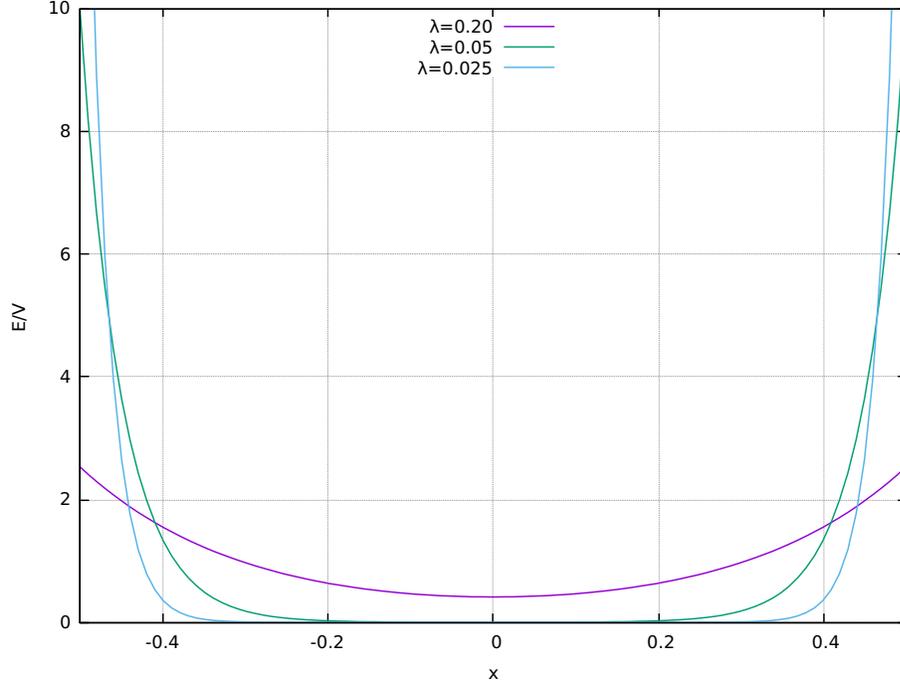


Figura 1.1. Campos eléctricos en una región de longitud L con distintos valores de λ_D . A medida que la longitud de Debye se hace más pequeña, el campo \vec{E} decrece más rápido y tiende a cero.

En la literatura sobre el tema (por ejemplo [1] y [3]), es normal encontrar la longitud de Debye como

$$\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 T_e}{e^2 n_0} \right)^{1/2}, \quad (1.8)$$

esto es, se considera que la longitud de Debye depende sólo de los parámetros de los electrones. Esto se justifica considerando que la masa de los iones es tan grande comparada a la de los electrones, que prácticamente estos no se mueven y se pueden despreciar para la encontrar λ_D . Esto no se cumple ya que según (1.7) es la temperatura y no la masa la que determina si se puede despreciar la contribución de los iones. Para que (1.8) sea válida, se debe tener que $T_i \gg T_e$ [2].

1.2. Frecuencia de plasma

La frecuencia electrónica de plasma, ω_{pe} , define el criterio para determinar si un gas ionizado es un plasma o no. Esto se mencionó anteriormente y es equivalente a requerir que el plasma neutralice campos eléctricos de corriente alterna AC de baja frecuencia [1].

1.2.1. Esquema físico

Supongamos que tenemos un plasma con las mismas condiciones descritas anteriormente para calcular la longitud de Debye con la diferencia de que ahora el campo eléctrico es de corriente alterna. Si la frecuencia aplicada es suficientemente baja, esperaríamos que las partículas tuvieran suficiente tiempo para reaccionar al campo y completar el movimiento que neutraliza al campo.

Por otro lado, si la frecuencia es lo suficientemente alta, el campo cambia tan rápidamente que las partículas no tienen tiempo de moverse antes que el campo cambie de signo. Por tanto, el plasma no neutraliza el campo y su presencia es prácticamente nula [2].

1.2.2. Derivación de la frecuencia electrónica de plasma

Para la derivación de la frecuencia electrónica de plasma, necesitamos la descripción de este medio como un fluido. Requerimos la ecuación de momentum, la ecuación de continuidad y la ecuación de Poisson, las cuales presentamos en el orden mencionado

$$\begin{aligned}
 m_j n_j \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_j \cdot \nabla \right) \bar{v}_j &= \pm e n_j (\bar{E} + \bar{v}_j \times \bar{B}) - \nabla p - \pm m_e n_e \bar{\nu}_{ei} (\bar{v}_e - \bar{v}_i), \\
 \frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \bar{v}_j) &= 0, \\
 \nabla \cdot \bar{E} &= \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0},
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde el subíndice j puede cambiarse por i o e para referirse a iones o electrones. \bar{v}_j denota velocidad, p presión y ν_{ie} frecuencia de colisiones entre iones y electrones. Para hacer avances, haremos las siguientes suposiciones:

1. La corriente eléctrica es tan pequeña que prácticamente se pueden despreciar los efectos de inducción, $\bar{B} = 0$. El campo eléctrico es entonces electrostático.
2. La inercia de los iones es tal que estos prácticamente no se mueven y por lo tanto generan un fondo fijo de carga positiva, $n_i = n_0$. Debido a esto, no usaremos las ecuaciones de momentum y de continuidad para los iones.
3. No consideraremos efectos térmicos, por lo que se elimina el término de presión. Esto implica que inicialmente, los electrones no se mueven y entonces $v_{e0} = 0$.

También consideraremos que los electrones e iones no colisionan, por lo que $\nu_{ie} = 0$.

4. El movimiento sucede en una sola dimensión. Con esto podemos cambiar el gradiente por una derivada.

El sistema de ecuaciones se puede escribir como

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} &= \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_e v_e) &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{e}{\epsilon_0}(n_0 - n_e).\end{aligned}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Una forma de obtener información de estos sistemas es aplicando un proceso de *linealización*[1]. Es un proceso tan común en física de plasmas, que le dedicaremos un poco de tiempo a ello. El proceso de linealización consiste en que a un sistema en equilibrio, indicado por un subíndice 0, le aplicamos una perturbación pequeña indicada por el subíndice 1. Si la perturbación es de una amplitud pequeña, los términos de orden superior de esta pueden ser ignorados [1].

Entonces lo que hacemos es expresar la variable de interés como $g = g_0 + g_1$. Si tuvieramos otra variable $q = q_0 + q_1$ y se multiplicara con g , tendríamos $gq = g_0q_0 + g_0q_1 + g_1q_0 + g_1q_1$. El primer término sería de orden 0 ya que g_0 y q_0 son de la misma magnitud. El segundo y tercer término serían de orden 1 ya que tanto g_1 como q_1 son pequeños. El último término es de orden 2 ya que se tiene la multiplicación de dos números muy pequeños. Por lo general, este término se menosprecia ya que su aporte es despreciable. Además, si consideremos que la perturbación es sinusoidal, las cantidades físicas se pueden expresar como

$$g_1 = g_0 \exp\{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)\}, \quad (1.10)$$

donde \bar{k} es el vector de onda, \bar{r} la dirección de propagación, ω la frecuencia y t el tiempo. El subíndice 1 indica que es una cantidad perturbada y por lo tanto pequeña. Esto permite trabajar las ecuaciones en espacio de Fourier, donde es más sencillo resolver las ecuaciones. Pasar a espacio de Fourier consiste en expresar $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ y $\partial/\partial x \rightarrow ik\hat{x}$. Para ver esto, basta con aplicar la derivada respecto al tiempo a (1.10) y ver que se vuelve a obtener g_1 multiplicado por $-i\omega$. Lo mismo para k .

Encontraremos la frecuencia electrónica de plasma linealizando el sistema (1.10) basándonos en el proceso descrito anteriormente. Las cantidades de interés son la densidad de electrones, el campo eléctrico y la velocidad. Podemos escribir estos como

$$\begin{aligned} n_e &= n_0 + n_1, \\ E &= E_0 + E_1, \\ v_e &= v_0 + v_1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Las cantidades en equilibrio expresan el estado del plasma en ausencia del campo externo, $E_0 = 0$. Lo mismo sucede para la velocidad v_0 . La densidad del plasma inicialmente es uniforme, entonces podemos expresar esta información como

$$\nabla n_0 = v_0 = E_0 = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial t} = 0.$$

El proceso de linealización consiste entonces en sustituir (1.12) en (1.10) y usar (1.13) para hacer simplificaciones. Haciendo esto, se obtiene lo siguiente para la ecuación de momentum

$$\begin{aligned} m_e \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_1 \cdot \nabla) v_1 \right) v_1 &= -eE_1 \\ m \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -eE_1, \end{aligned} \tag{1.13}$$

en donde el término $(v_1 \cdot \nabla)v_1$ es despreciado porque se están multiplicando dos términos de orden 1, lo que hace que sea de orden 2. Para la ecuación de continuidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot n_0 v_1 + \nabla \cdot n_1 v_1 &= 0, \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot v_1 &= 0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde suprimimos el primer término por condiciones iniciales y el cuarto término por ser de orden superior. Finalmente, para la ecuación de Poisson

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x} = -en_1. \tag{1.15}$$

Ahora, asumimos que n_1 , E_1 y v_1 son de la forma (1.10) entonces las ecuaciones (1.14), (1.14) y (1.15) forman el siguiente sistema

$$\begin{aligned} -im_e\omega v_1 &= -eE_1, \\ -i\omega n_1 + in_0kv_1 &= 0, \\ i\epsilon_0kE_1 &= -en_1. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Resolviendo para ω encontramos la frecuencia de plasma dada como

$$\omega_p = \left(\frac{n_0e^2}{\epsilon_0m_e} \right)^{1/2} \tag{1.17}$$

La frecuencia de plasma depende solo de la densidad. Lo que nos dice este valor es que si una perturbación, digamos un campo eléctrico, tiene un valor menor que ω_p , esta perturbación no se propaga. El caso en el que la frecuencia sea mayor, la onda si se propaga y prácticamente el plasma no afecta dicha propagación.

1.3. Parámetro de plasma

Hasta el momento, no hemos calculado el campo eléctrico \bar{E} sumando las contribuciones individuales de las partículas una por una. Tampoco hemos considerado las interacciones de Coulomb entre las partículas. Esto es porque la densidad de un plasma tiende a ser tan baja, que dos cargas raramente están lo suficientemente cerca para que el potencial de Coulomb supere a las energías cinéticas de las partículas o sobrepase el campo eléctrico de largo alcance generado por el resto de cargas [2]. Es decir, los efectos colectivos. Para determinar el criterio que separa el régimen donde el campo eléctrico de larga distancia generado por la población domina sobre las interacciones de Coulomb individuales, compararemos la distancia promedio entre partículas y la distancia de interacción de Coulomb.

Si la distancia promedio entre partículas es b_{ent} y la distancia de interacciones de Coulomb b_{Coul} , entonces los efectos colectivos dominarán a las fuerzas de Coulomb si $b_{ent} \gg b_{Coul}$. Esto quiere decir que raramente las partículas interactúan. Para calcular b_{ent} , asumimos que hay n_e partículas en un metro cúbico. Si dividimos el volumen entre el número de partículas encontramos el volumen que ocupa cada una de ellas. Esto es, a cada partícula le corresponde un cubo de lado $n^{-1/3}$. Entonces la distancia promedio entre partículas es de $b_{ent} = n^{-1/3}$.

Por otro lado, para encontrar b_{Coul} consideramos una partícula que se acerca a otra. Para que la interacción de Coulomb sea fuerte, dicha partícula debe acercarse lo suficiente a la otra de forma que $\frac{1}{2}mv^2 \approx e^2/(4\pi\epsilon_0 b_{Coul})$ [1]. La energía cinética de una partícula se asocia con la temperatura como $mv^2 \approx T$. Así que

$$b_{Coul} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 T}. \quad (1.18)$$

Regresando a la condición para que los efectos colectivos dominen $b_{ent} \ll b_{Coul}$ obtenemos

$$\frac{1}{n^{1/3}} \gg \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 T}. \quad (1.19)$$

En términos de la longitud de Debye y definiendo el parámetro de plasma Λ_D

$$\Lambda_D = \frac{4\pi}{3} n \lambda_{De}^3 \gg \frac{4\pi}{3(2\pi)^{3/2}} \sim 0.27. \quad (1.20)$$

de modo entonces quedan definidos el parámetro de de plasma en términos de la longitud de Debye y esta última en términos de la temperatura.

2. Magnetósfera y ondas coro

Luego de que definimos qué es un plasma y los parámetros importantes de este, pondremos en contexto la región donde se da el mecanismo de amplificación, la *magnetósfera* y el tipo de onda que se amplifica, las ondas o *emisiones coro*. Este capítulo se dividirá en tres partes. En la primera parte hablaremos sobre plasmas geofísicos que conciernen al planeta Tierra. Sobre todo se hablará de la magnetósfera. En la segunda trataremos la propagación de ondas electromagnéticas paralelas al campo magnético terrestre e introduciremos el concepto de ondas coro. Finalmente, en la tercera parte, discutiremos cómo es la interacción de una onda electromagnética con polarización oblicua y una partícula cargada. Estos resultados se usarán para presentar el mecanismo de amplificación.

2.1. Plasmas geofísicos

Los plasmas geofísicos son aquellos que se generan en el espacio. Existen varios tipos de estos y la diferencia entre ellos son la densidad y la temperatura [3].

El **viento solar** es el plasma emitido por el Sol a velocidades supersónicas. La densidad de este tiende a ser $n_e \sim 5\text{cm}^{-3}$ y su temperatura de $T_e \sim 10^5\text{K}$ [3]. Este, al interactuar con el campo magnético terrestre, B_r , reduce su velocidad y parte de él es deflectado.

Del viento solar que no es completamente desviado, una parte de ese viento se queda atrapado en el campo magnético terrestre, formando una capa de plasma llamada **magnetósfera**. El plasma no se distribuye de manera uniforme en esta región, sino que se agrupa en diferentes partes con densidades y temperaturas diferentes. Una de estas regiones es conocida como *anillo de radiación de Van Allen* [3]. Esta se ubica entre 2 y 6 radios terrestres y se compone de electrones y protones oscilantes entre los polos de la Tierra. La dinámica de rebote se da por el *efecto espejo* el cuál se discutirá con mayor detalle en las siguientes páginas. La densidad de esta región es $n_e \sim 1\text{cm}^{-3}$ mientras que la temperatura es $T_e \sim 5 \times 10^7\text{K}$ [3].

A partir de 80km de la superficie de la Tierra, los rayos UV del Sol ionizan parte de la atmósfera. Como las colisiones entre partículas en esta región es rara, no hay recombinación y la población de partículas ionizadas se mantiene. Esta capa es conocida como **ionósfera**. Sus parámetros habituales son $n_e \sim 10^5 \text{cm}^{-3}$ y $T_e \sim 10^3 \text{K}$ [3].

La **plasma-esfera** es un plasma en forma de toroide adentro del anillo de radiación. Este es denso pero bastante frío. Sus parámetros son $n_e \sim 5 \times 10^2 \text{cm}^{-3}$ y $T_e \sim 5 \times 10^3 \text{K}$ [3]. Se ubica a unos 4 radios terrestres.

A distancias no muy lejanas a la superficie de la Tierra, el campo magnético puede ser aproximado como el campo generado por un dipolo. Este campo tiene la característica de que es más intenso en los polos que en el ecuador. Si el momento dipolar de la Tierra es $M_E = 8.05 \times 10^{22} \text{Am}^2$, en un sistema de coordenadas esféricas donde r es la distancia al punto de interés y λ la latitud, el campo es

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{M_E}{r^3} (-2 \sin \lambda \hat{r} + \cos \lambda \hat{\lambda}), \\ |B| &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{M_E}{r^3} (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2},\end{aligned}$$

si consideramos una trayectoria donde la magnitud del campo no varía su magnitud, una forma de expresar el radio r es como la distancia desde la superficie de la Tierra hasta el ecuador de dicha línea de campo. A este parámetro se le denomina r_{eq} . Tenemos entonces que

$$r = r_{eq} \cos^2 \lambda, \quad (2.1)$$

con eso, podemos expresar el campo magnético usando el radio de la Tierra como referencia. Definiendo el *parámetro de capa* como $L = r_{eq}/R_E$ [3], podemos expresar el campo como

$$B(\lambda, L) = \frac{B_E (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{L^3 \cos^6 \lambda}, \quad (2.2)$$

donde $B_E = (\mu_o M_E)/(4\pi R_E^3) = 3.11 \times 10^{-5} \text{T}$.

2.2. Dinámica de espejo

Cuando se estudia la dinámica de partículas cargadas en un campo magnético con gradiente paralelo, el resultado principal es que la partícula experimenta una

fuerza en dirección contraria al gradiente [1] dada por

$$F_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B, \quad (2.3)$$

donde μ es el momento dipolar. Un resultado importante de la dinámica según esta configuración es que el momento magnético se conserva. Para ver esto, escribimos la ecuación la ecuación de movimiento

$$F_{\parallel} = m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}, \quad (2.4)$$

donde s denota la trayectoria paralela al campo, si multiplicamos por la velocidad

$$\begin{aligned} mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} v_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s} \frac{ds}{dt} \\ &= -\mu \frac{dB}{dt}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

por otro lado, sabemos que la energía se conserva. Esto es $dE/dt = 0$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = 0, \quad (2.6)$$

sustituyendo la energía perpendicular por la definición de momento magnético $\mu = (m v_{\perp}^2)/(2B)$, y la parte paralela por (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu B) &= \mu \frac{dB}{dt} + B \frac{d\mu}{dt} = \mu \frac{dB}{dt}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

la conservación de momento magnético combinada con la fuerza paralela pueden generar un rebote de partículas en una configuración de campo magnético con gradiente paralelo. Este efecto se denomina *efecto espejo* [3].

La combinación de un momento magnético constante y una fuerza paralela dada por (2.3) pueden tener un impacto dramático en el movimiento del centro de guía de las partículas [2]. El efecto espejo consiste en una partícula que se mueve de una región de campo magnético dada a una región con un campo magnético más grande. Ya sabemos que esta sufrirá una fuerza en dirección opuesta al movimiento. Por otro lado, la conservación del momento magnético nos dice cómo es que se debe dar este cambio.

Debido a que la energía de la partícula se conserva y ya que sabemos que la

energía paralela se reduce debido a la fuerza, la energía perpendicular debe aumentar. Puede llegar un punto donde la velocidad paralela llegue a ser cero. En este momento, la partícula puede empezar a desplazarse en sentido contrario al original debido a que sigue estando expuesta a la fuerza.

Describamos el proceso con ecuaciones. La energía de la partícula siempre está dada por

$$E = \frac{1}{2}m (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.7)$$

Compararemos la energía de la partícula en dos puntos, uno inicial donde el campo magnético es B_o y las velocidades son $v_{i\parallel}$ y $v_{i\perp}$ y uno final donde se tiene B_f , $v_{f\parallel}$ y $v_{f\perp}$. También se puede definir el *ángulo de inclinación*. Este relaciona la velocidad paralela y perpendicular inicial con la velocidad total de la partícula [3]

$$\begin{aligned} v_{i\perp} &= v_o \sin \theta, \\ v_{i\parallel} &= v_o \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Asumiendo que $B_o < B_f$, la partícula se mueve a una región con mayor campo magnético. Sabemos entonces que la partícula empezará a perder velocidad paralela pero la energía siempre se conserva, haciendo que la velocidad perpendicular se incremente. Se puede llegar a un punto donde toda la energía paralela se pierda, $v_{f\parallel} = 0$. En este momento la relación de velocidades está dada por

$$v_{f\perp}^2 = v_{i\parallel}^2 + v_{i\perp}^2 = v_o^2. \quad (2.9)$$

Por otro lado, ya que el momento magnético se conserva

$$\frac{v_{o\perp}^2}{B_o} = \frac{v_{f\perp}^2}{B_f}, \quad (2.10)$$

combinando las últimas ecuaciones y usando la definición de ángulo de inclinación, podemos llegar a

$$\frac{B_o}{B_f} = \sin^2 \theta_c, \quad (2.11)$$

donde θ_c será el ángulo crítico. La ecuación (2.11) nos indica entonces la relación de campo que debe de existir entre dos puntos para que la partícula pueda rebotar en dicho punto. Si el ángulo $\theta > \theta_c$ entonces la partícula rebotará (incluso puede que antes de llegar a ese punto) mientras que si $\theta < \theta_c$ la partícula no rebotará en ese punto.

2.2.1. Partículas atrapadas

El campo magnético terrestre se comporta de forma que es más intenso cerca de los polos que en el ecuador, de modo que que las partículas puedan rebotar y ser confinadas dentro del campo magnético. De hecho, es el efecto espejo el responsable de que exista la magnetósfera [3]. Se puede profundizar más detalles de cómo es que se da este proceso en la magnetósfera. Para discutir el efecto espejo necesitamos comparar el campo magnético en dos puntos diferentes. En el caso de un campo dipolar, el campo es mínimo en el ecuador, haciendo este un buen punto de referencia inicial. Según (2.2) evaluado en $\lambda = \pi/2$.

$$B_{eq} = \frac{B_E}{L^3}. \quad (2.12)$$

Luego, el campo en el punto que se da el rebote será B_m . Con esto, el ángulo de inclinación ecuatorial α_{eq} está dado por (2.11)

$$\sin^2 \alpha_{eq} = \frac{B_{eq}}{B_m} = \frac{\cos^6 \lambda_m}{(1 + 3 \sin^2 \lambda_m)^{1/2}}. \quad (2.13)$$

Vemos que en esta configuración, el ángulo de inclinación no depende de la distancia a la superficie. Partículas con ángulo de inclinación ecuatorial pequeño, tienen velocidades paralelas grandes y los puntos de rebote se encuentran a latitudes mayores y más cercanas a la superficie. Por otro lado, si el ángulo es grande, los puntos de espejo se encuentran más cercanos al ecuador.

2.3. Propagación de ondas electromagnéticas paralelas a un campo magnético externo; ondas coro

En la sección anterior vimos que partículas cargadas, cuando se trasladan a una región donde el campo magnético disminuye, pueden quedar confinadas. Todas estas partículas conforman un medio, un plasma [3]. En este medio puede haber propagación de ondas electromagnéticas, de diferentes tipos, por ejemplo, sin campo magnético externo, con campo magnético externo perpendicular o paralelo al vector de propagación etc. Para hablar de ondas coro, sólo hace falta analizar las ondas cuya propagación se da paralela a un campo magnético externo.

Consideremos una onda electromagnética con el vector de onda \vec{k} en dirección del campo externo y admitiendo que el campo magnético sea transversal. En un

sistema de coordenadas cartesianas, tenemos la configuración $\bar{k} = k\hat{z}$, $\bar{E}_1 = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$. En este caso, la ecuación de onda linealizada en espacio de Fourier es

$$-\bar{k}(\bar{k} \cdot \bar{E}_1) + k^2\bar{E}_1 = i\frac{\omega}{\epsilon_0 c^2}\bar{j} + \frac{\omega^2}{c^2}\bar{E}_1.$$

Según la configuración escogida de campo eléctrico y vector de onda $\bar{k} \cdot \bar{E}_1 = 0$. La ecuación anterior toma la siguiente forma si consideramos la relación entre la velocidad y la densidad de corriente $\bar{j} = en\bar{u}$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\bar{E}_1 = -i\frac{\omega}{\epsilon_0 c^2}\bar{j} = i\frac{\omega}{\epsilon_0 c^2}(en\bar{u}_{e1}). \quad (2.14)$$

La ecuación de momentum en espacio de Fourier linealizada para electrones despreciando efectos térmicos es

$$-im_e\omega\bar{u}_{e1} = -e(\bar{E} + \bar{u}_{e1} \times \bar{B}_0), \quad (2.15)$$

en componentes,

$$\begin{aligned} -im_e\omega u_{ex} &= -eE_x - eu_{ey}B_0, \\ -im_e\omega u_{ey} &= -eE_y - eu_{ex}B_0, \\ -im_e\omega u_{ez} &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

resolviendo el sistema, podemos obtener las velocidades en términos de las componentes de campo eléctrico y la frecuencia de ciclotrón $\omega_c = |e|B_0/m_e$ como

$$\begin{aligned} u_{ex} &= \frac{e}{m_e\omega} \left(-iE_x - \frac{\omega_c}{\omega}E_y\right) \left(\frac{1}{1 - \omega_c^2/\omega^2}\right), \\ u_{ey} &= \frac{e}{m_e\omega} \left(-iE_y - \frac{\omega_c}{\omega}E_x\right) \left(\frac{1}{1 - \omega_c^2/\omega^2}\right). \end{aligned}$$

combinando con la ecuaciones de onda se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} (\omega^2 - c^2k^2)E_x &= \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \left(E_x - i\frac{\omega_c}{\omega}E_y\right), \\ (\omega^2 - c^2k^2)E_y &= \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \left(E_y + i\frac{\omega_c}{\omega}E_x\right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

el cual puede ser escrito en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - c^2 k^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} & i \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ -i \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} & \omega^2 - c^2 k^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = 0. \quad (2.18)$$

Este sistema tiene solución si el determinante de la matriz es igual a 0. Es decir, debemos resolver la siguiente ecuación

$$\left(\omega^2 - c^2 k^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \right)^2 = -i^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \right)^2. \quad (2.19)$$

Al resolver esta última ecuación, obtenemos la siguiente relación de dispersión

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{1 \mp \omega_c/\omega}. \quad (2.20)$$

Tenemos dos tipos de onda que se pueden propagar. En términos del índice de refracción

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \omega_c^2/\omega^2}, \quad \text{Ondas R,} \quad (2.21)$$

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 + \omega_c^2/\omega^2}, \quad \text{Ondas L.} \quad (2.22)$$

Terminamos entonces con ondas polarizadas derechas e izquierdas [1]. Nos interesan los *cortes* y *resonancias* de este tipo de ondas.

Para ondas R, los cortes los encontramos cuando $k = n = 0$ por lo que según su índice de refracción

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \omega_c/\omega} \rightarrow \omega = \left(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_{pe}^2} \right) / 2. \quad (2.23)$$

Para ondas L de igual forma

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 + \omega_c/\omega} \rightarrow \omega = \left(-\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_{pe}^2} \right) / 2. \quad (2.24)$$

Para las resonancias haciendo $n = 0$, para la ondas R, $k \rightarrow \infty$ cuando $\omega = \omega_c$. Para las ondas L, k no hay divergencia de k para ningún valor ω . Entonces las ondas R pierden energía cuando están a frecuencia ω_c , dándole energía a los electrones y

por esto no se pueden propagar. Esto no pasa para las ondas L, al menos no por su interacción con electrones.

Finalmente, para ver la propagación mostramos la figura 2.1

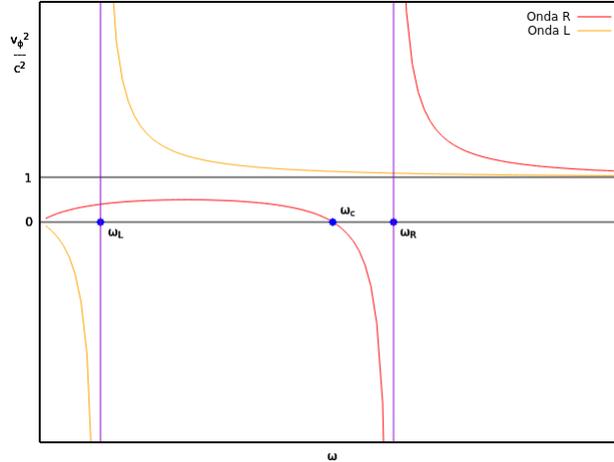


Figura 2.1. De color amarillo se representa una onda L, la cual vemos que se puede propagar cuando tiene una frecuencia $\omega > \omega_L$. Para frecuencias menores no puede haber propagación. Las ondas R están representadas de color rojo. Estas pueden propagarse si la frecuencia es menor que la frecuencia de ciclotrón $\omega < \omega_c$ y para frecuencias $\omega > \omega_R$. No se pueden propagar si la frecuencia se encuentra entre estas dos frecuencias. Imagen hecha por el autor.

Ahora nos podemos enfocar en la descripción de las ondas coro. Estas son una de las emisiones de onda natural más intensas que existen. Se generan debido a inestabilidades del plasma en la magnetósfera terrestre y ocurren en un rango de frecuencia entre los cientos de Hz hasta kHz, con un espectro de frecuencia complejo que usualmente contiene varios paquetes de onda no lineales con frecuencia variable en escalas de tiempo de fracciones de segundo [7].

El mecanismo de generación de las ondas coro ha sido extensivamente estudiado. Es ampliamente aceptado que las ondas coro son generadas por procesos no lineales, los cuales involucran la resonancia electrónica de ciclotrón de una onda con polarización circular con electrones energéticos de la magnetósfera terrestre. Aún así, hay propiedades importantes que todavía no están bien comprendidas, siendo una de ellas el mecanismo de amplificación. [5]

La generación de eventos coro sucede cerca del ecuador geomagnético, donde la primera derivada del campo magnético es cercana a cero. Existe dos bandas de frecuencias de la onda coro: una bajo la mitad de la frecuencia de ciclotrón electrónica, ω_c y por sobre la mitad de la frecuencia de ciclotrón. Se han observado

que las emisiones ocurren cuando hay electrones con energías entre 10 – 100keV.

2.4. Dinámica de partículas con una onda electro-magnética

En esta sección desarrollaremos la interacción de una onda electromagnética con una partícula cargada. El desarrollo se hará para una onda con polarización oblicua y en el siguiente capítulo haremos las simplificaciones necesarias para el modelo de amplificación. La onda está descrita por:

$$\bar{B}_w = [B_x^w \cos(\Phi)] \hat{x} + [B_y^w \sin(\Phi)] \hat{y}, \quad (2.25)$$

$$\bar{E}_w = [-E_x^w \sin(\Phi)] \hat{x} + [E_y^w \cos(\Phi)] \hat{y}, \quad (2.26)$$

donde el índice w hace referencia a la onda, B es el campo magnético, E el campo eléctrico y Φ a la fase de la onda. En nuestro caso, la propagación de la onda se da en un campo magnético externo: el campo magnético de la Tierra. Expresaremos este en su componente paralela y perpendicular cerca del ecuador magnético de forma que, en una configuración cartesiana, el campo en las direcciones \hat{x} y \hat{y} sea constante y el campo en \hat{z} depende sólo de z .

$$\bar{B}_o = \bar{B}_{o\perp} + \bar{B}_{oz}, \quad (2.27)$$

donde

$$\bar{B}_{o\perp} = -B_{0\perp x} \hat{x} - B_{0\perp y} \hat{y}, \quad (2.28)$$

$$\bar{B}_{oz} = B_0(z) \hat{z}. \quad (2.29)$$

Las componentes perpendiculares se pueden obtener explícitamente expandiendo el campo magnético dipolar en series de Taylor. Expresar el campo paralelo como una función de z tiene la ventaja de poder cambiar la función dipolar por una parábola o alguna función parecida en dicha región [5]. Habiendo descrito ya la onda y el campo externo, proseguimos con la ecuación de movimiento relativista de una partícula. Esto se hace con la fuerza de Lorentz

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = -e \left[\bar{E}^w + \frac{\bar{P}}{m_e \gamma} \times (\bar{B}^w + \bar{B}_o) \right], \quad (2.30)$$

donde \bar{P} es el momentum lineal y γ el factor relativista. Expandiendo en componentes

$$\frac{dP_x}{dt} = eE_x^w \sin(\Phi) - \frac{e}{m_e\gamma} [P_y B_0(z) - P_z (B_y^w \sin(\Phi) + B_{0\perp y})], \quad (2.31)$$

$$\frac{dP_y}{dt} = eE_y^w \cos(\Phi) - \frac{e}{m_e\gamma} [-P_x B_0(z) + P_z (B_x^w \cos(\Phi) + B_{0\perp x})], \quad (2.32)$$

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{e}{m_e\gamma} [P_x (B_y^w \sin(\Phi) + B_{0\perp y}) - P_y (B_x^w \cos(\Phi) + B_{0\perp x})]. \quad (2.33)$$

Es más sencillo trabajar con una sola ecuación que describa el movimiento perpendicular. Para encontrar esta ecuación, expresamos las componentes \hat{x} y \hat{y} en términos del momentum perpendicular total P_\perp y el ángulo que se forma respecto al eje x que se denota con θ . El ángulo ψ es el complemento de Φ de forma que ambos sumen θ . Es decir

$$P_x = P_\perp \cos(\theta), \quad (2.34)$$

$$P_y = P_\perp \sin(\theta), \quad (2.35)$$

$$P_\perp^2 = P_x^2 + P_y^2, \quad (2.36)$$

$$\theta = \psi + \Phi, \quad (2.37)$$

$$= \bar{k} \cdot \bar{r} + \omega t + \text{cte} = \tan^{-1}(P_y/P_x)$$

$$\Phi = \bar{k} \cdot \bar{r} + \omega_0 t + \eta(z, t), \quad (2.38)$$

donde \bar{k} es el vector de propagación, \bar{r} el vector de posición, ω la frecuencia de oscilación de la partícula y ω_0 la frecuencia angular inicial de la onda electromagnética. Con estas expresiones, buscaremos expresar las ecuaciones de movimiento paralelo, movimiento perpendicular y la evolución de la fase. Iniciamos con el movimiento paralelo. Encontramos la ecuación paralela sustituyendo los términos de P_x y P_y . La ecuación es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dP_z}{dt} = -\frac{eP_\perp}{m_e\gamma} [& B_y^w \sin(\Phi) \cos(\psi + \Phi) - B_x^w \cos(\Phi) \sin(\psi + \Phi) \\ & + B_{0\perp y} \cos(\psi + \Phi) - B_{0\perp x} \sin(\psi + \Phi)]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Definiendo A_1 de la siguiente forma

$$A_1 = \frac{e}{m_e} \frac{P_\perp}{m_e\gamma} [B_{0\perp y} \cos(\psi + \Phi) - B_{0\perp x} \sin(\psi + \Phi)], \quad (2.40)$$

la ecuación paralela de momentum se puede escribir como

$$\frac{dP_z}{dt} = -\frac{eP_\perp}{m_e\gamma} [B_y^w \sin(\Phi) \cos(\psi + \Phi) - B_x^w \cos(\Phi) \sin(\psi + \Phi)] - m_e A_1. \quad (2.41)$$

Por otro lado, el término en corchetes, expandiendo los términos trigonométricos y haciendo álgebra, se puede escribir como

$$B_y^w \sin(\Phi) \cos(\psi + \Phi) - B_x^w \cos(\Phi) \sin(\psi + \Phi) = \frac{B_y^w - B_x^w}{2} \sin(\psi + 2\Phi) \quad (2.42)$$

$$-\frac{B_y^w + B_x^w}{2} \sin(\psi), \quad (2.43)$$

de manera que la ecuación de momentum paralelo final es

$$\frac{dP_z}{dt} = \frac{eP_\perp}{m_e\gamma} \left[\frac{B_y^w - B_x^w}{2} \sin(\psi + 2\Phi) - \frac{B_y^w + B_x^w}{2} \sin(\psi) \right] - m_e A_1. \quad (2.44)$$

Proseguiremos con la ecuación perpendicular de momentum. Partimos usando la relación entre el momento perpendicular cuadrado con los momentos cuadrados de x y y . Al derivar dicha expresión respecto al tiempo, obtenemos

$$P_\perp \frac{dP_\perp}{dt} = P_y \frac{dP_y}{dt} + P_x \frac{dP_x}{dt}, \quad (2.45)$$

ecuación que podemos simplificar más sustituyendo por el momento perpendicular para obtener

$$\frac{dP_\perp}{dt} = \sin(\theta) \frac{dP_y}{dt} + \cos(\theta) \frac{dP_x}{dt} \quad (2.46)$$

Sustituyendo las derivadas de dP_x/dt y dP_y/dt tenemos la expresión

$$\begin{aligned} \frac{dP_\perp}{dt} = & -e \sin(\theta) \cos \Phi E_y^w + e \cos \theta \sin \Phi E_x^w - \frac{e \sin \theta}{m_e \gamma} P_z B_x^w \cos \Phi + \\ & \frac{e P_z \cos \theta}{m_y \gamma} B_y^w \sin \Phi - \frac{e \sin \theta}{m_e \gamma} P_z B_{0\perp x} + \frac{e P_z \cos \theta}{m_y \gamma} B_{0\perp y} + \\ & \frac{e P_x B_0(z)}{m_e \gamma} \sin \theta - \frac{e P_y B_0(z)}{m_e \gamma} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Los dos últimos términos se eliminan al sustituir las componentes de momentum en términos del momentum perpendicular. El quinto y sexto término tienen que ver con el campo magnético perpendicular, por lo que es usual expresarlo en términos

de una variable, en este caso A_2 , para simplificar. Es decir

$$A_2 = \frac{e}{m_e} \frac{P_z}{m_e \gamma} [B_{0\perp y} \cos \psi + \Phi - B_{0\perp x} \sin \psi + \Phi]. \quad (2.48)$$

Para los cuatro primeros términos, sustituyendo $\theta = \psi + \Phi$ y usando las siguientes funciones trigonométricas

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad (2.49)$$

$$\sin \alpha \pm \beta = \cos \alpha \sin \beta \pm \cos \beta \sin \alpha, \quad (2.50)$$

se puede escribir la ecuación de momentum perpendicular final como

$$\begin{aligned} \frac{dP_\perp}{dt} = \frac{e}{2} \left\{ \sin(\psi + 2\Phi) \left[E_x^w - E_y^w + \frac{P_z}{m_e \gamma} (B_y^w - B_x^w) \right] \right. \\ \left. + \sin(\psi) \left[-E_x^w - E_y^w - \frac{P_z}{m_e \gamma} (B_x^w + B_y^w) \right] + m_e A_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

La última ecuación faltante es la de la evolución del ángulo θ . y su relación con ϕ y Φ . Es decir, necesitamos saber

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.52)$$

para $d\theta/dt$, iniciamos notando que se puede expresar en términos de los momenta P_x y P_y según [4]. Derivando

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \tan^{-1}(P_y/P_x) = \frac{P_y \frac{dP_x}{dt} - P_x \frac{dP_y}{dt}}{P_x^2 + P_y^2} \quad (2.53)$$

$$= \frac{P_y \frac{dP_x}{dt} - P_x \frac{dP_y}{dt}}{P_\perp^2}. \quad (2.54)$$

Sustituyendo las derivadas de momentum tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \left\{ -e [P_x E_y^w \cos(\Phi) + P_y E_x^w \sin(\Phi)] + \frac{e B_0(z) P_\perp}{m_e \gamma} \right. \\ \left. - \frac{e P_z}{m_e \gamma} [P_x (B_x^w \cos(\Phi) + B_{0\perp x}) + P_y (B_y^w \sin(\Phi) + B_{0\perp y})] \right\} / P_\perp^2. \end{aligned}$$

Para simplificar un poco la expresión anterior, comparando el campo magnético

de la onda con el de campo magnético de la Tierra, el primero es entre 4 y 5 ordenes de magnitud menor que el segundo [5], por lo que la componente de la onda se puede despreciar. Para el campo eléctrico pasa lo mismo si consideramos que el argumento anterior y lo juntamos con el hecho que el campo eléctrico se relaciona con el magnético de forma aproximada como $E \sim Bc/n$ donde c es la velocidad de la luz y n el índice de refracción. Entonces, podemos expresar $d\theta/dt$ como

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{eB_0(z)P_{\perp}^2}{m_e\gamma} - \frac{eP_z}{m_e\gamma} (P_x B_{0\perp x} + P_y B_{0\perp y})}{P_{\perp}^2}. \quad (2.55)$$

Para simplificar esta expresión, notamos que en el primer término, la carga por el campo dividido la masa es la frecuencia de ciclotrón que depende de la altura z , tenemos entonces $\omega_c(z)eB_0(z)/m_e$. El segundo término tiene que ver con las componentes perpendiculares al campo magnético de la Tierra, por lo que podemos escribir dicha información respecto a una variable, que en este caso será A_3 . Para simplificar aún mas, podemos escribir el momentum en x y y en términos del momentum perpendicular total. Tenemos entonces

$$A_3 = \frac{e}{m_e} \frac{P_z}{P_{\perp}} [B_{0\perp x} \cos(\psi + \Phi) + B_{0\perp y} \sin(\psi + \Phi)]. \quad (2.56)$$

Entonces, la ecuación de $d\theta/dt$ es

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_c(z)}{\gamma} - \frac{A_3}{\gamma} \quad (2.57)$$

Ahora, estudiaremos la evolución $d\Phi/dt$. Para ello, consideramos que la fase de la onda es de la siguiente forma

$$\Phi = \omega_0 t - \bar{k} \cdot \bar{z} + \eta(z, t), \quad (2.58)$$

donde $\eta(z, t)$ es una función de la distancia y el tiempo. Con la onda propagándose en dirección contraria al campo magnético positivo, la derivada de la fase de la onda es

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \omega_0 + k \frac{dz}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \\ &= \omega_0 + kv_z - \frac{d\eta}{dt}. \end{aligned}$$

Finalmente, despejando la derivada $d\psi/dt$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_c(z)}{\gamma} - \omega_0 + kv_z - \frac{d\eta}{dt} - \frac{A_3}{\gamma}. \quad (2.59)$$

En este capítulo describimos los procesos que hacen que el campo magnético Terrestre capture partículas provenientes del viento solar y formen la magnetósfera. También estudiamos ondas electromagnéticas que se propagan en el plasma y vimos que para ondas cuya propagación es paralela al campo magnético externo, sólo se pueden tener ondas con polarización derecha. Con esto último, definimos las ondas coro como ondas que se propagan por la magnetósfera que presentan amplificaciones y cambios de frecuencia. Para finalizar el capítulo, trabajamos las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada debido a su interacción con una onda electromagnética oblicua. Por completitud, escribimos de nuevo las ecuaciones de movimiento

$$\frac{dP_z}{dt} = \frac{eP_\perp}{m_e\gamma} \left[\frac{B_y^w - B_x^w}{2} \sin(\psi + 2\Phi) - \frac{B_y^w + B_x^w}{2} \sin(\psi) \right] - m_e A_1, \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_\perp}{dt} = \frac{e}{2} \left\{ \sin(\psi + 2\Phi) \left[E_x^w - E_y^w + \frac{P_z}{m_e\gamma} (B_y^w - B_x^w) \right] \right. \\ \left. + \sin(\psi) \left[-E_x^w - E_y^w - \frac{P_z}{m_e\gamma} (B_x^w + B_y^w) \right] + m_e A_2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_c(z)}{\gamma} - \omega_0 + kv_z - \frac{d\eta}{dt} - \frac{A_3}{\gamma}. \quad (2.62)$$

3. Mecanismo de amplificación

En el capítulo anterior hablamos sobre qué son las ondas coro, su relación de dispersión y la interacción de una onda como estas con partículas cargadas de forma general. En este capítulo usaremos esa información para proponer el mecanismo de amplificación. Para ello, haremos algunas simplificaciones en las ecuaciones de movimiento de partículas cargadas. Estudiaremos la evolución de la onda mediante la ecuación de onda y la complementaremos con la ecuación de momentum de un plasma. Después de esto, usaremos una *aproximación de variación de amplitud lenta* para obtener el resultado final.

3.1. Ecuaciones de movimiento de electrones

Las ecuaciones de movimiento a usar en este modelo surgen de simplificaciones directas a las ecuaciones de momentum transversal, momentum longitudinal y de fase.

Para el análisis de la ecuación de momentum lineal longitudinal (2.60) supondremos que el campo magnético externo tiene sólo una componente longitudinal y ninguna transversal. Eso implica que el término $A_1 = 0$. Por otro lado, si consideramos una onda como una onda con polarización circular, las componentes transversales son iguales, $B_x^w = B_y^w$. Según la ecuación de movimiento longitudinal entonces tenemos que

$$\frac{dP_z}{dt} = \frac{eP_\perp}{m_e\gamma} B^w \sin(\psi), \quad (3.1)$$

o escrita en términos de la velocidad perpendicular

$$\frac{dP_z}{dt} = ev_\perp B^w \sin(\psi), \quad (3.2)$$

Para la ecuación de momentum lineal transversal (2.61), al igual que en la ecuación longitudinal, consideramos un campo magnético externo solo con una

componente transversal, el término $A_2 = 0$. También, considerando una onda con polarización circular, la componentes transversales de campo eléctrico son $E_x^w = E_y^w = E^w$, y las de campo magnético $B_x^w = B_y^w = B^w$, de forma que la ecuación transversal se simplifica a

$$\frac{dP_\perp}{dt} = -e \sin(\psi) \left[E^w + \frac{P_z}{m_e \gamma} B^w \right]. \quad (3.3)$$

En términos de la velocidad v_z y notando que al ser un tipo de onda plana que se mueve en dirección contraria al eje de coordenadas a usar, se cumple que $E^w = -(\omega/k)B^w$, entonces

$$\frac{dP_\perp}{dt} = e \sin(\theta) \left[-\frac{\omega}{k} B^w + \frac{P_z}{m_e \gamma} B^w \right] \sim \frac{e\omega B^w}{k} \left[1 - \frac{kv_\perp}{m_e \omega} \right] \sin(\theta), \quad (3.4)$$

A pesar de tener la ecuación correcta de movimiento, en situaciones magnetosféricas normales [5], el término entre corchetes tiende a ser muy pequeño, por lo que podemos despreciar. Esto quiere decir que la ecuación transversal de movimiento es igual a una constante. Es decir, consideramos que

$$P_\perp = \text{cte.} \quad (3.5)$$

Para la ecuación de fase (2.62) Al igual que en las ecuaciones anteriores, si consideramos un campo magnético en una sola dirección, el término $A_3 = 0$. Por otro lado, en condiciones magnetosféricas comunes [10], tenemos que $\eta = 0$, lo que nos permite expresar la ecuación de la fase de la partícula simplemente como

$$\frac{d\psi}{dt} \sim \frac{\omega_c(z)}{\gamma} - \omega_0 + kv_z. \quad (3.6)$$

3.2. Evolución de la onda

Para tratar la evolución, iniciaremos con la ecuación de onda en términos del campo magnético dado por

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \bar{B} = \mu_0 \nabla \times \bar{J}, \quad (3.7)$$

Donde el término derecho representa una fuente. En nuestro caso, la fuente representa a los electrones que se pueden mover a lo largo de las líneas del campo magnético terrestre. El movimiento conjunto de cargas es el que genera una corriente. La co-

riente puede expresarse en una parte lineal \bar{J}_L y otra no lineal \bar{J}_{NL} como

$$\bar{J} = \bar{J}_L + \bar{J}_{NL}. \quad (3.8)$$

La corriente lineal se da por el transporte de electrones mientras que la parte no lineal se da por parte de los electrones resonantes. El objetivo es expresar estas densidades de corrientes en términos del campo eléctrico o campo magnético de la onda para su resolución. Una vez hecho esto, se puede proceder a resolver la ecuación de onda (3.7). Analizaremos cada densidad de corriente por separado. Iniciamos considerando la ecuación de momentum de electrones

$$-m_e n_e \left[\frac{\partial \bar{v}_e}{\partial t} + (\bar{v}_e \cdot \nabla) \bar{v}_e \right] = -en_e (\bar{E} + \bar{v}_e \times \bar{B}), \quad (3.9)$$

donde n_e es la densidad de electrones. Para hacer avances, linealizamos la última ecuación con base en las suposiciones que originalmente el plasma estaba en equilibrio, por lo que la velocidad y el campo eléctrico inicial son cero, entonces $\bar{v}_e = \bar{v}_{e1}, \bar{E} = \bar{E}_w = \bar{E}_1$, el campo magnético es la superposición del campo magnético la Tierra con el campo magnético de la onda $\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_w$ y que la densidad se compone de la densidad en equilibrio y una parte perturbada $n_e = n_0 + n_1$. Sustituyendo y despreciando términos de orden superior, obtenemos

$$n \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = -\frac{en_0}{m_e} \bar{E}_1 + \frac{en_0}{m_e} \bar{v}_1 \times \bar{B}_0. \quad (3.10)$$

Definiendo la corriente de transporte como

$$\bar{J}_c = \bar{J}_L = -en_0 \bar{v}(\bar{r}, t), \quad (3.11)$$

multiplicando la ecuación linealizada de momentum por $-e$ y combinando con la ecuación de corriente

$$-en_0 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{J}_c}{\partial t} = \frac{e^2 n_0}{m_e} \bar{E}_1 - \frac{e^2 n_0}{m_e} \bar{v}_1 \times \bar{B}_0, \quad (3.12)$$

notando que $\omega_c = eB_0/m_e$,

$$\frac{\partial \bar{J}_c}{\partial t} = \frac{e^2 n_0}{m_e} \bar{E}_1 - \bar{J}_c \times \bar{\omega}_c. \quad (3.13)$$

Teniendo una expresión para la densidad de corriente lineal, procedemos a combinar dicho resultado con la ecuación de onda. Para hacer la matemática más

tratable, proponemos el siguiente cambio de variables

$$E_{\perp} = E_x + iE_y, \quad (3.14)$$

$$B_{\perp}(z, t) = B_x + iB_y, \quad (3.15)$$

$$J_{\perp} = J_{\perp c} + J_{\perp r}, \quad (3.16)$$

$$J_{\perp c} = J_x + iJ_y,$$

donde $J_{\perp r}$, es la densidad de corriente perpendicular producida por electrones resonantes, es decir, la contribución no lineal. Con esta notación, la ecuación de onda y la ecuación linealizada de momentum se pueden expresar como

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = i\mu_0 \frac{\partial J_{\perp}}{\partial z}, \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_c \right) J_{\perp c} = \frac{e^2 n_0}{m_e} E_{\perp}. \quad (3.18)$$

Podemos combinar estas dos ecuaciones usando la ley de Faraday para expresar el campo eléctrico en función del campo magnético en la ecuación de momentum y usar esta expresión en la ecuación de onda multiplicada por $(\partial/\partial t - i\omega_c)$ como

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_c \right) \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] B_{\perp} = i\mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_c \right) \frac{\partial J_{\perp r}}{\partial z} \quad (3.19)$$

De nuevo, haremos un cambio de variables para el campo magnético y la densidad de corriente resonante. Este cambio de variables se hace de forma que la amplitud de la onda sea una función de la posición respecto al eje z y el tiempo. Este término, por simplicidad también contendrá la constante de fase de la onda. Al final de esta sección hablaremos de nuevo sobre dicha constante. Por otro lado, la propiedad oscilatoria de la onda se expresa de forma exponencial. El cambio tiene la misma forma

$$B_{\perp} = \mathcal{B}_{\perp}(z, t) \exp\{i(\omega_0 t - k_0 z)\}, \quad (3.20)$$

$$J_{\perp} = \mathcal{J}_{\perp}(z, t) \exp\{i(\omega_0 t - k_0 z)\}. \quad (3.21)$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (3.19), tenemos la evolución del campo magnético en función de la densidad de corriente debida a partículas resonan-

tes. Debido al caracter no lineal, para hacer avances con esta expresión, usaremos una aproximación de variación lenta de amplitud (SVAP por sus siglas en inglés). Esta aproximación desprecia todas las derivadas de segundo orden y superior. Además, considera que las primera derivadas son mucho más pequeñas que los términos originales de forma que

$$\left| \frac{\partial \mathcal{J}_r}{\partial t} \right| \ll \omega |\mathcal{J}_r|, \quad (3.22)$$

$$\left| \frac{\partial \mathcal{J}_r}{\partial z} \right| \ll k |\mathcal{J}_r|, \quad (3.23)$$

entonces, al evaluar (3.19) en términos de (3.20) usando la aproximación de variación lenta de amplitud (3.22) llegamos a

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{i\omega_0^3}{c^2} + ik_0^2\omega_0 + i\omega_c \left(\frac{\omega_0^2}{c^2} - k_0^2 \right) + \frac{i\omega_0\omega_p^2}{c^2} \right] \mathcal{B}_\perp \\ + & \left[\left(-\frac{3\omega_0^2}{c^2} + k_0^2 + \frac{2\omega_c\omega_0}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + 2k_0(\omega_c - \omega_0) \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathcal{B}_\perp \\ & = -i\mu_0 k (\omega_c - \omega_0) \mathcal{J}_r. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Lo último que necesitamos es una expresión que corresponda a la densidad de corriente de partículas resonantes. Esta última no es más que la contribución de todas las partículas que están en resonancia con la onda. Esta contribución se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_r &= -\frac{en_r}{N} \sum_{j=1}^N v_{jx} + iv_{jy}, \\ &= -\frac{en_r}{N} \sum_{j=1}^N v_{j\perp} \cos(\psi) + iv_{j\perp} \sin(\psi), \\ &= -\frac{en_r}{N} \sum_{j=1}^N v_{j\perp} \exp\{i\psi\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $\psi = \theta - \Phi$. Con esto, ya tenemos la evolución de la onda en términos de campo magnético. También podemos analizar la magnitud en los términos de la ecuación (3.24). A propósito separamos el lado izquierdo en términos cúbicos en el primer corchete y en cuadráticos en el segundo corchete. El lado derecho de la ecuación

es de tercer grado. La aproximación de variación lenta de amplitud hace que tanto el campo \mathcal{B} como la fase ϕ cambien de forma tan lenta que se pueden separar los términos *lentos* de los *rápidos*. Esto quiere decir que podemos separar términos según el grado que tenga. Esto permite descomponer (3.24) en dos ecuaciones dadas por

$$\left[-\frac{i\omega_0^3}{c^2} + ik_0^2\omega_0 + i\omega_c \left(\frac{\omega_0^2}{c^2} - k_0^2 \right) + \frac{i\omega_0\omega_p^2}{c^2} \right] \mathcal{B}_\perp = 0, \quad (3.26)$$

$$\left[\left(-\frac{3\omega_0^2}{c^2} + k_0^2 + \frac{2\omega_c\omega_0}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + 2k_0(\omega_c - \omega_0) \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathcal{B}_\perp = \quad (3.27)$$

$$-i\mu_0 k(\omega_c - \omega_0) \frac{en_r}{N} \sum_{j=1}^N v_{j\perp} \exp\{i\psi\},$$

Podemos escribir la ecuación (3.26) como

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}, \quad (3.28)$$

término que representa la relación de dispersión de una onda coro. Para la segunda ecuación, dividiendo toda la ecuación en el término que acompaña la derivada temporal obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2kc^2(\omega_c - \omega)}{k^2c^2 + \omega_p^2 - 3\omega^2 + 2\omega_c\omega} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{B}_\perp = \quad (3.29)$$

$$-i \frac{\mu_0 kc^2(\omega_c - \omega)}{k^2c^2 + \omega_p^2 - 3\omega^2 + 2\omega_c\omega} \frac{en_r}{N} \sum_{j=1}^N v_{j\perp} \exp\{i\psi\},$$

Para simplificar dicha expresión, podemos usar la relación de dispersión de la onda coro (??). Luego de hacer eso, podemos simplificar aún más considerando que, para este caso, la jerarquía de frecuencias es $\omega_p \gg \omega_c \gg \omega$, lo que permite usar la siguiente expresión

$$\frac{2kc^2(\omega_c - \omega)}{k^2c^2 + \omega_p^2 - 3\omega^2 + 2\omega_c\omega} \sim \frac{2kc^2\omega}{\omega_p^2} \sim v_g, \quad (3.30)$$

donde usamos la variable v_g para simplificar. Esta variable es la velocidad de grupo [5]. En términos de dicha velocidad, podemos escribir la evolución de la onda como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathcal{B}_\perp = i \frac{\mu_0 v_g}{2} e n_r \sum_{j=1}^N v_{j\perp} \exp\{i\psi\}, \quad (3.31)$$

La evolución de la onda es una ecuación diferencial parcial de primer orden en el tiempo y en el espacio. De hecho, tiene la forma de una ecuación de continuidad. Para este trabajo, simplificaremos la ecuación (3.31), despreciando los cambios a lo largo del espacio debido a que, según mediciones [5], la amplificación de ondas coro sucede en periodos de tiempo muy rápidos en los que el campo magnético prácticamente no cambia. Al hacer esto, podemos expresar la evolución de la onda como

$$\frac{d\mathcal{B}_\perp}{dt} = i \frac{\mu_0 v_g}{2} e n_r \sum_{j=1}^N v_{j\perp} \exp\{i\psi\}, \quad (3.32)$$

donde usamos diferenciales totales al sólo existir dependencia del tiempo. Finalmente, abordaremos la constante de fase de la onda. Cuando introdujimos \mathcal{B} , comentamos que esta variable contenía la información de la amplitud de la onda en función de z y de t , y que además contenía la constante de fase ϕ . Es decir, tenemos que

$$\mathcal{B}_\perp = B_w(z, t) \exp\{i\phi\}. \quad (3.33)$$

Al derivar esta expresión respecto del tiempo, tenemos

$$\frac{d\mathcal{B}}{dt} = \left(\frac{dB_w}{dt} + iB_w \frac{d\phi}{dt}\right) \exp\{i\phi\}, \quad (3.34)$$

sustituyendo el lado izquierdo de esta última ecuación con (3.32), y definiendo $g = v_g v_\perp \omega_p^2 / 2c^2$

$$\left(\frac{dB_w}{dt} + iB_w \frac{d\phi}{dt}\right) \exp\{i\phi\} = i \frac{g}{N} \sum_j^N \exp\{\psi_j\}, \quad (3.35)$$

separando la parte real de la parte compleja, obtenemos las siguientes dos ecuaciones

$$\frac{dB_w}{dt} = -\frac{g}{N} \sum \sin(\psi_j - \phi) \quad (3.36)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{B_w} \frac{g}{N} \sum \cos(\psi_j - \phi), \quad (3.37)$$

siendo estas las ecuaciones a resolver. La primera, que considera la amplitud del del campo magnético mientras que la segunda la fase de la onda.

3.3. Ecuaciones del mecanismos de amplificación

Hemos derivado las ecuaciones de evolución para una partícula que interactúa con una onda y también la evolución de la onda. Vimos que la onda no interactúa con todas las partículas del medio, sino solo que aquellas que están resonando. El número de partículas resonantes puede variar en un número N , pero para cada una de estas partículas, tenemos 2 ecuaciones de movimiento, una para el momentum lineal paralelo y otra para la fase.

La evolución de la onda se da por dos ecuaciones, una de la amplitud y otra de la fase. Esto quiere decir que el mecanismo de amplificación es un sistema de $2N + 2$ ecuaciones. Por motivos de completitud, presentamos el sistema de ecuaciones de nuevo

$$\frac{dP_z^j}{dt} = ev_{\perp}^j B^w \sin(\psi_j), \quad (3.38)$$

$$\frac{d\phi_j}{dt} = \frac{\omega_c(z)}{\gamma_j} - \omega_0 + k \frac{P_z^j}{\gamma_j}, \quad (3.39)$$

$$\frac{dB_w}{dt} = -\frac{g}{N} \sum_j^N \sin(\psi_j - \phi), \quad (3.40)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{B_w} \frac{g}{N} \sum_j^N \cos(\psi_j - \phi), \quad (3.41)$$

donde los subíndices j denotan una partícula diferente. En el capítulo siguiente hablaremos sobre cómo se resolvió el sistema de ecuaciones y de los resultados que se obtuvieron.

4. Simulación y resultados numéricos

En este capítulo hablaremos sobre el método para resolver el sistema de ecuaciones obtenido anteriormente para el modelo que describe la amplificación. Este capítulo tiene dos secciones: la primera, en donde hablamos sobre la implementación del programa y la segunda donde presentamos y discutimos los resultados numéricos.

4.1. Simulación

En esta sección hablaremos sobre el programa realizado para resolver el sistema de ecuaciones, empezando con el algoritmo usado y terminamos discutiendo las condiciones iniciales del problema.

Según Li et al.[10], la densidad de partículas resonantes medidas que se sugiere para hacer una simulación es 1000. Esto hace que tengamos un sistema de 2002 ecuaciones diferenciales. Debido a la cantidad de ecuaciones, decidimos utilizar el método de Runge-Kutta de orden 4 haciendo una implementación en FORTRAN90 basandonos en el algoritmo descrito por Burden [9]

Para optimizar la implementación del algoritmo generamos dos vectores, de 1000 componentes cada uno, un vector para almacenar el momentum lineal paralelo y otro para la fase de cada partícula. Las ecuaciones a integrar recibían dichos vectores para hacer la integración. Usamos un módulo de FORTRAN90 para guardar las funciones a integrar y un programa en el que se inicializaron las variables e hicimos la integración.

Para la simulación, usamos electrones resonantes de energía de 20keV y 80keV. Decidimos trabajar con estas energías debido a que son valores comunes en la magnetosfera terrestre para emisiones coro [10]. El resto de los valores iniciales usados para la integración fueron los siguientes [5]

	20 keV	80 keV
v_z	-0.25c	-0.21c
v_{\perp}	0.11c	0.45c
γ_0	$1 + (20/511) = 1.0395$	$1 + (80/511) = 1.1521$
ω_c	8.8E4 rad/s	8.8E4 rad/s
ω_0	26.4E3 rad/s	26.4E3 rad/s
ω_{pe}	$4\omega_c$	$4\omega_c$
n_e	39cm^{-3}	39cm^{-3}
ω_{pr}	$\omega_{pr} = 1000 \text{ rad/s}$	$\omega_{pr} = 1000 \text{ rad/s}$
k	7.7E-4	7.7E-4
g	9020 rad/s	36900 rad/s

Tabla 4.1. Valores iniciales para la simulación.

4.2. Resultados numéricos

Mostramos la amplitud del campo magnético de la onda en la figura 4.1. Observamos que la amplitud del campo, en unidades de pT, crece en dos órdenes de magnitud para partículas de 20keV y 80keV con un campo inicial de 4.5pT. En ambos casos, llegamos a un *régimen de saturación* en las centenas de pT y desde ahí mantienen valores oscilantes entre estas magnitudes. Este régimen de saturación concuerda con las observaciones.

Para el caso de las partículas más energéticas, vemos que la onda se amplifica y oscila más rápido respecto a las partículas menos energéticas. Esto se debe a que las partículas tienen más energía que entregar a la onda. Los resultados de amplificación concuerdan con lo observado de las emisiones coro en el tiempo de amplificación y el régimen de saturación [5].

También presentamos la figura 4.2, en donde se muestra los primeros momentos de interacción entre las partículas y la onda, específicamente el campo magnético como función del tiempo.

Por otro lado, el mecanismo propuesto no muestra ningún cambio de frecuencia en las ondas. Creemos que esto sucede debido a las aproximaciones hechas, sobre todo al no haber considerado la variación espacial del campo.

Para ver cómo crece la amplitud en el tiempo, medimos la tasa de ganancia definida como $\xi = (1/B_w)(dB_w/dt)$ [5], donde aplicamos una derivada numérica. La derivada numérica usada fue una *adelantada* [9], es decir, cada amplitud integrada

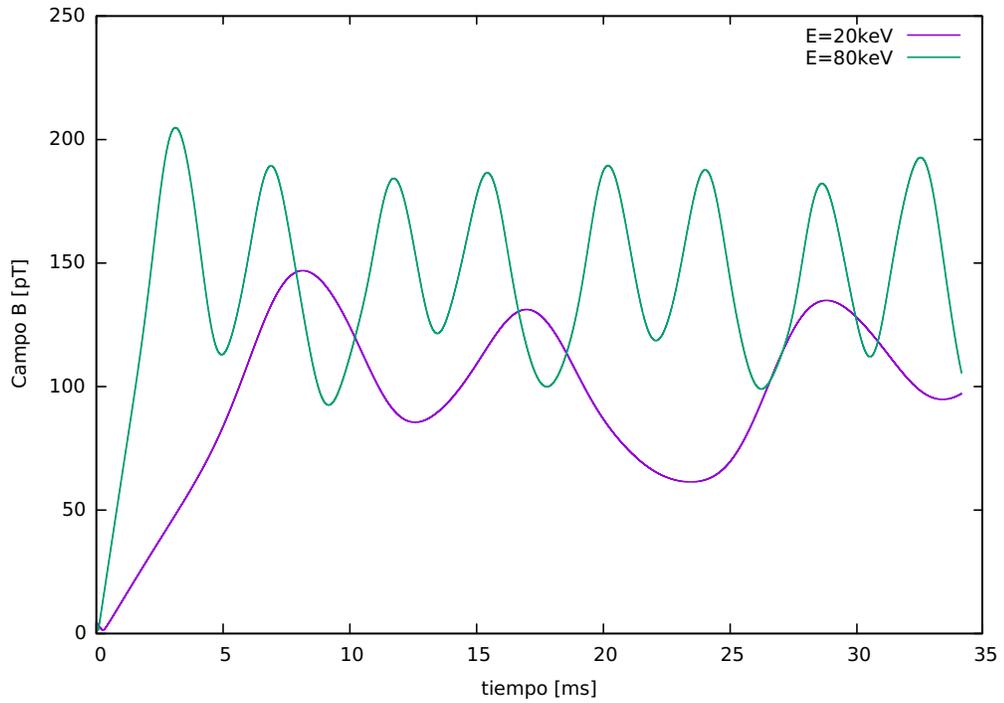


Figura 4.1. Campo magnético en función del tiempo en el régimen de saturación. Fuente: elaboración propia

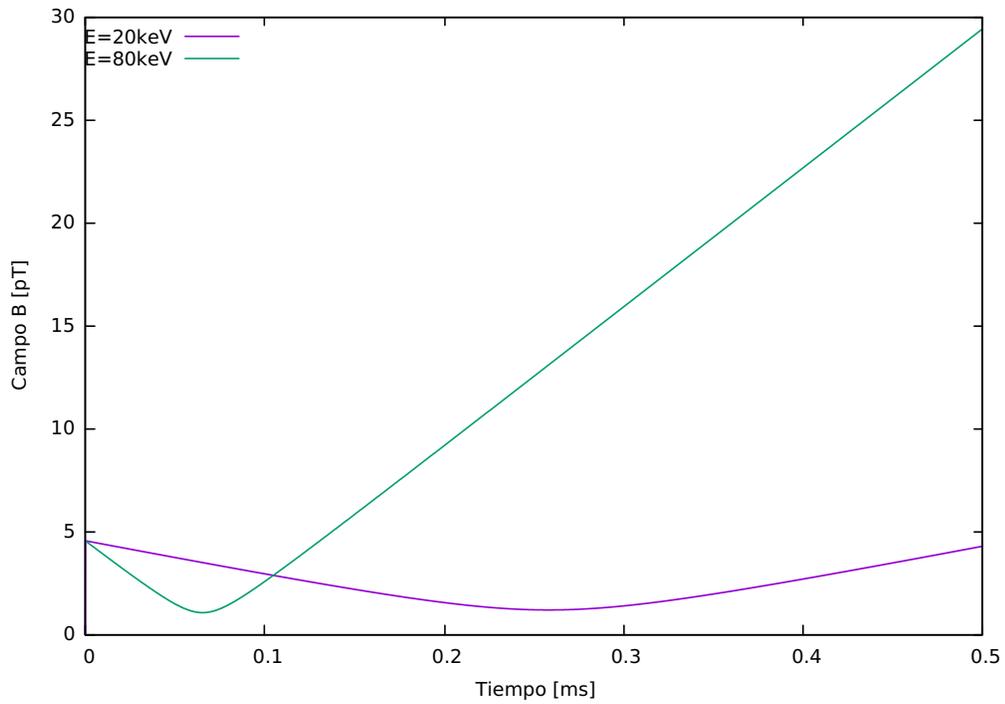


Figura 4.2. Campo magnético en función del tiempo para el régimen transitorio. Fuente: elaboración propia

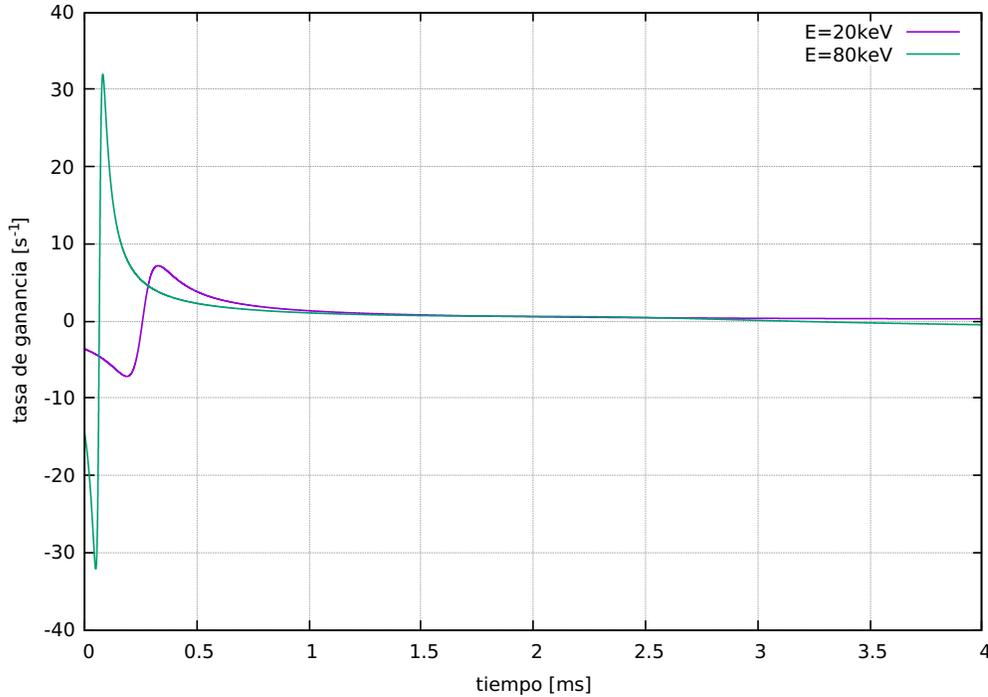


Figura 4.3. Tasa de ganancia en función tiempo. Fuente: elaboración propia

se comparaba con la amplitud anterior para ver el cambio. La tasa de crecimiento se muestra en la figura 4.3 para electrones de 20keV y de 80keV respectivamente. Para ambos casos, observamos que la ganancia se dispara antes de llegar al primer milisegundo. Esto quiere decir que es en este momento donde la amplificación sucede con mayor rapidez, siendo el caso de los electrones más energéticos el más rápido. En ambos casos, observamos que la ganancia tiende a cero de forma precipitada luego del primer milisegundo. Esto indica que ya deja de haber amplificación luego de un corto tiempo. Esto concuerda con la figura 4.1, donde el campo magnético muestra haber alcanzado el régimen de saturación.

También se observa que en el inicio, la tasa es negativa. Esto se explica viendo la figura 4.2 y la definición usada de tasa de ganancia. En la gráfica, vemos que para las primeras decimas de segundo, el valor de campo magnético disminuye y luego crece de nuevo. Que el campo disminuya quiere decir que la onda es quien está entregando energía a las partículas del medio.

Para conocer si el comportamiento depende de ese valor, otra prueba hecha fue la de iniciar con diferentes valores del campo magnético. El resultado fue que la amplificación es independiente de la semilla inicial de campo magnético, confirmando el resultado de [6]. Esto se ve en la figura 4.4, en la que se probaron semillas de 4.5pT, 0.45pT y 0.045pT para partículas de 20keV. En todos los casos, vemos que se alcanza

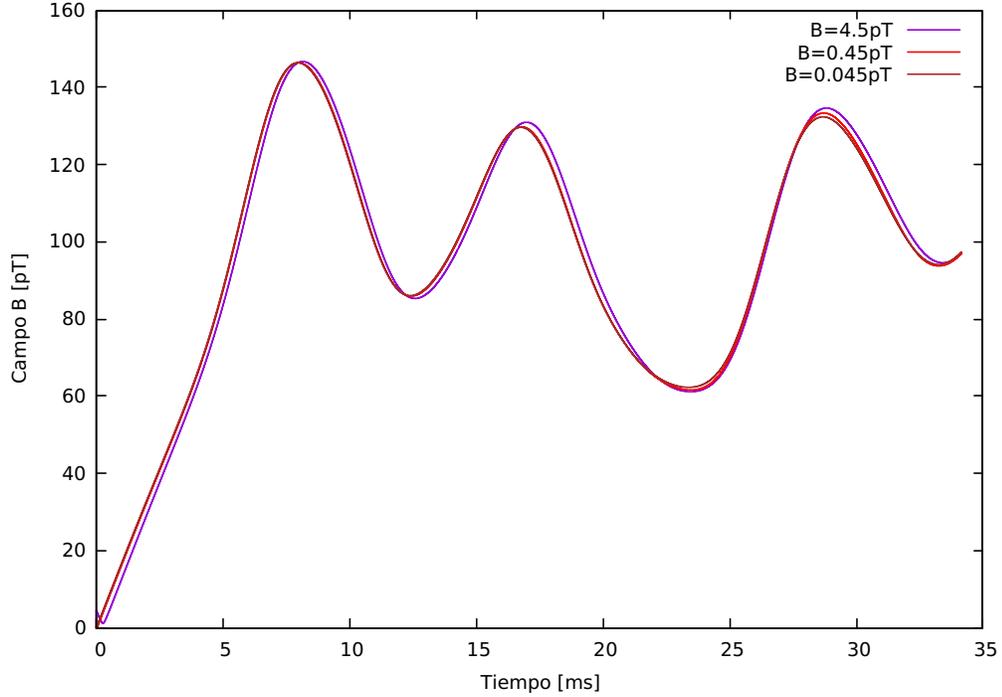


Figura 4.4. Comparación entre amplificación para partículas de 20keV con diferentes valores de campo magnético inicial de la onda. Fuente: elaboración propia

el mismo régimen de saturación. Esto es importante debido a que las emisiones coro tienen un rango extenso de generación, pero siempre llegan al mismo resultado, así que el modelo funciona de manera adecuada [7].

Finalmente, es interesante saber cómo es que las partículas resonantes interactúan con la onda electromagnética. Para que una partícula entre en resonancia con la onda, esta debe tener la velocidad adecuada. Esta velocidad se conoce como *velocidad de resonancia*, $v_R = (\omega - \Omega_e/\gamma)/k$ [5].

El *parámetro de resonancia*, $\delta = k(v_z - v_R)$, mide la desviación del electrón de la resonancia. Cambiando la velocidad paralela podemos escribir el parámetro de resonancia como $\delta = d\psi/dt = \Omega\gamma - \omega + kp_z\gamma$, que es justamente una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones.

Basado en el parámetro de resonancia de las partículas, podemos ver de forma gráfica cómo es que las partículas no siempre están en resonancia con la onda y cómo es que es un proceso diferente para cada partícula, que tiene que ver con las fases originales de las partículas.

En la figura 4.5 mostramos el parámetro de resonancia en función del tiempo para las partículas 1, 45 y 135 en el caso de energía de 20keV y un campo magnético inicial de 4.5pT. Según la gráfica, mientras más se aleje la curva del eje, la resonancia

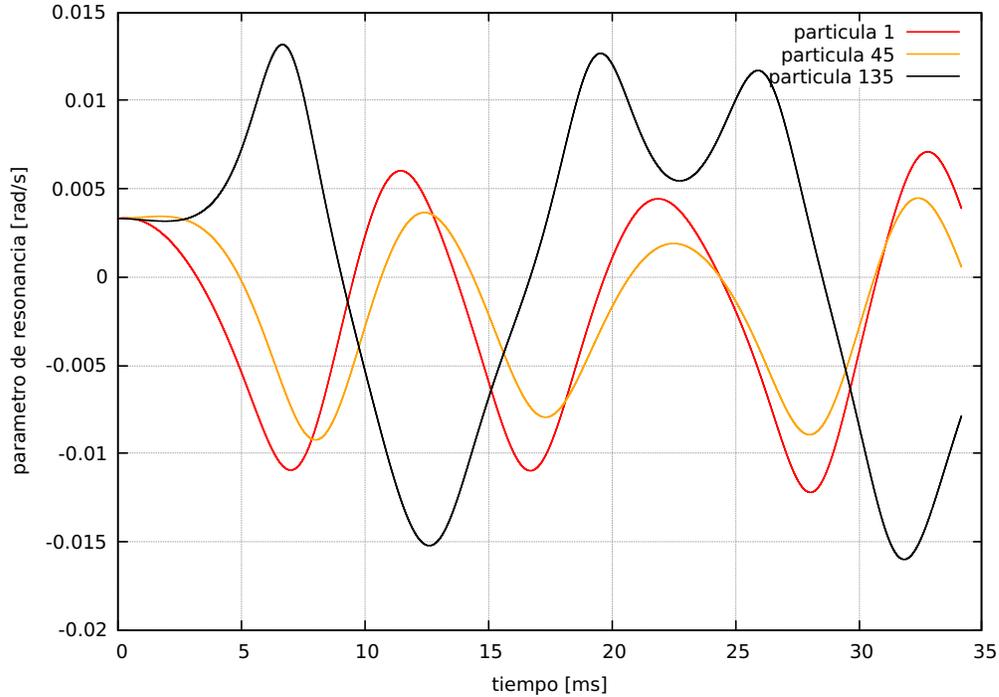


Figura 4.5. Parametro de resonancia en función del tiempo para diferentes partículas resonantes. Fuente: elaboración propia

es menor, mientras que más cerca, refleja una mejor resonancia. Observamos que la partícula 1, de color rojo, y la 45, de color naranja, tienen un comportamiento similar. Por otro lado, la partícula 145, de color negro, difiere por completo. Las diferencias se deben a las fases iniciales de cada partícula. Podemos concluir que el proceso de resonancia es un fenómeno que cambia en el tiempo y que cada partícula contribuye de forma diferente al proceso de amplificación.

Como una prueba más para la implementación del código se explora el límite clásico de la simulación. Hicimos esto haciendo que el factor gamma, γ , fuera siempre la unidad en el sistema (3.38). Aunque la energía de las partículas resonantes es baja, sobre todo comparada a la energía en reposo de los electrones (511keV), vimos que hay diferencia significativas. Para ejemplificar esto, también resolvimos las ecuaciones de manera clásica y comparamos con los datos relativistas. Dicho resultado está en la figura 4.6 en donde mostramos la amplificación para partículas de 20keV y campo de 4.5pT.

Observamos el mismo patrón de amplificación, pero también vemos que el régimen de saturación difiere en algunas decenas de pT. Esta figura muestra que en el caso clásico, la física del problema sigue siendo parecida, pero se pierde resolución en el resultado. Es decir, hay una contribución relevante al considerar el problema

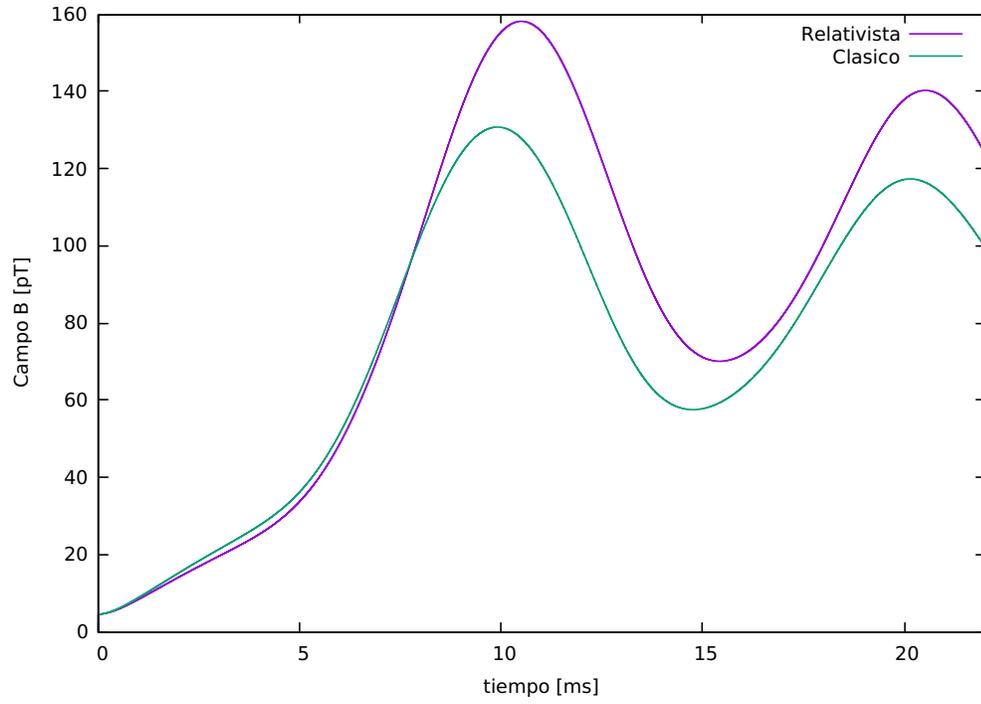


Figura 4.6. Comparación entre amplificación para partículas clásicas y partículas relativistas. Fuente: elaboración propia

de manera relativista.

Conclusiones

1. En resumen, un plasma es un gas ionizado cuasi-neutral y que presenta efectos colectivos. Es un excelente conductor de electricidad, repele campos eléctricos DC y campos eléctricos AC de baja frecuencia. Además, para que el gas pueda ser considerado un plasma se deben cumplir los requisitos de tamaño, frecuencia y el de colisiones dado por:

- Tamaño: $\lambda_{De} \ll L$. Es decir, que el tamaño del plasma debe ser mucho mayor a su longitud de Debye. Esto también hace que el plasma neutralice campos eléctricos DC.
- Frecuencia: $\omega \gg v_T/L$. Es decir, la frecuencia de oscilaciones debe ser mucho mayor a la transito termal. Esto hace que el plasma repela campos eléctricos AC de baja frecuencia.
- Colisiones: $\Lambda_D = \frac{4\pi}{3}n_e\lambda_{De}^3 \gg 1$. Es decir que dominan los efectos colectivos y no las colisiones de Coulomb.

2. La Magnetósfera es una región de partículas cargadas que se forma debido al campo magnético terrestre y el efecto espejo. Este medio puede soportar la propagación de ondas electromagnéticas, siendo una de ellas las ondas coro. Las ondas coro son emisiones altamente energéticas que se forman cerca del ecuador geomagnético terrestre.

3. El modelo de amplificación de las emisiones coro propuesto es un sistema de

$2N + 2$ ecuaciones para N partículas

$$\begin{aligned}\frac{dP_z^j}{dt} &= ev_{\perp}^j B^w \sin(\psi_j), \\ \frac{d\phi_j}{dt} &= \frac{\omega_c(z)}{\gamma_j} - \omega_0 + k \frac{P_z^j}{\gamma_j}, \\ \frac{dB_w}{dt} &= -\frac{g}{N} \sum_j^N \sin(\psi_j - \phi), \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{B_w} \frac{g}{N} \sum_j^N \cos(\psi_j - \phi).\end{aligned}$$

donde los subíndices j denotan una partícula diferente.

4. Los resultados numéricos de la simulación del modelo de amplificación reproducen algunos comportamientos vistos en mediciones de las ondas coro. El mecanismo de amplificación propuesto amplifica la onda electromagnética hasta un régimen de saturación visto en mediciones reales para diferentes energías de partículas resonantes. Además, la ganancia se da en periodos cortos de tiempo y el proceso es independiente del campo magnético inicial de la onda. Finalmente, en el límite clásico, también hay amplificación aunque levemente menor, lo que es consistente con lo esperado.

Trabajo a futuro y recomendaciones

Se presentan propuestas para trabajos posteriores. En la inicialización de variables, se consideró que todas las partículas tenían la misma energía inicial. Esto no tiene por que ser así, por lo que se propone repetir la simulación inicializando la energía de los electrones resonantes mediante una función de distribución de energía. Del mismo modo, la inicialización de la fase de las partículas se hizo distribuyendo de manera uniforme la fase, por lo que otra propuesta es buscar alguna función de distribución que ajuste de otra forma la fase inicial de dichas partículas.

La onda coro debe mantener propiedades importantes, como su relación de dispersión. Una prueba importante para el mecanismo de amplificación es que mantenga a la onda coro como una onda de polarización derecha. Para probar esto en una próxima versión del código agregaremos la opción de calcular los datos necesarios para mostrar la función de dispersión.

También se presentan algunas recomendaciones para quienes puedan interesarse en este tema. La ecuación (3.24) se simplificó despreciando el término espacial, argumentando que los cambios temporales son más relevantes. Se propone entonces no despreciar dicho término y resolver la ecuación diferencial completa. Esto plantea algunos problemas como usar una función de distribución para la densidad de electrones resonantes de forma espacial y alterar las ecuaciones de movimiento de las partículas resonantes con ondas electromagnéticas considerando ahora un campo magnético externo variable en 3 dimensiones. Para las ecuaciones de movimiento propuestas, un estudio más general se podría hacer considerando que el campo externo no es constante, por lo que en las ecuaciones (2.60), (2.62) y (2.62) los términos A_i no se eliminarían. En estas mismas ecuaciones, si se considera una onda oblicua, las componentes de campo en el primer término de las ecuaciones tampoco se eliminaría.

El modelo propuesto, aunque predice amplificación, no muestra un cambio de frecuencia como sucede con los datos experimentales, así que se tiene que buscar una explicación a esto. Una de de las propuestas, que tiene que ver con la recomendación

anterior, es resolver el problema con la ecuación de evolución de onda completa para ver si de esa forma se obtiene el cambio de frecuencia.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. 3rd edition, Springer Switzerland, 2016
- [2] J. Freidberg. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press, New York, 2007
- [3] W. Baumjohann. *Basic Space Plasma Physics* Imperial College Press, London, 2004
- [4] T. Bell, The Nonlinear Gyroresonance Interaction Between Energetic Electrons and Coherent VLF Waves Propagating at an Arbitrary Angle With Respect to the Earth's Magnetic Field. *Journal of Geophysical Research*, Vol 89 905, 1984
- [5] R. Soto-Chavez, A. Bhattacharjee and S. Ng, Chorus wave amplification: A free electron laser in the Earth's magnetosphere. *Physics of Plasmas* 19 2012
- [6] R. Soto-Chavez, A. Bhattacharjee, trabajo en progreso
- [7] O. Santolik, New results of investigations of whistler-mode chorus emissions. *Nonlinear Processes in Geophysics* **621**, 2008.
- [8] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 1999
- [9] J.D. Faires, R. Burden *Numerical Methods* 3rd edition, Brooks Cole, 2002
- [10] Li, W., R. M. Thorne, Y. Nishimura, J. Bortnik, V. Angelopoulos, J. P. McFadden, D. E. Larson, J. W. Bonnell, O. L. Contel, A. Roux, and U. Auster, Themis analysis of 466 observed equatorial electron distributions responsible for chorus excitation, *J. Geophys.* **467**, 2010.
- [11] C Kittel *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, 2004