



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

EFECTO HALL CUÁNTICO Y EL ESTUDIO DE ÓRDENES TOPOLÓGICOS EN LÍQUIDOS CUÁNTICOS

Cornelio Mariano Cap López
Asesorado por Dr. Giovanni Ramírez

Guatemala, Agosto de 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**EFEECTO HALL CUÁNTICO Y EL ESTUDIO DE
ÓRDENES TOPOLÓGICOS EN LÍQUIDOS
CUÁNTICOS**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

CORNELIO MARIANO CAP LÓPEZ
ASESORADO POR DR. GIOVANNI RAMÍREZ

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, AGOSTO DE 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR Dr. Giovanni Ramírez
EXAMINADOR Dr. Rodrigo Sacahui
EXAMINADOR Dr. Enrique Pazos



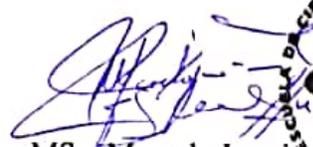
**Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas**



Ref. D.DTG. 007-2019
Guatemala 26 de agosto de 2019

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **EFFECTO HALL CUÁNTICO Y EL ESTUDIO DE ÓRDENES TOPOLÓGICOS EN LÍQUIDOS CUÁNTICOS** presentado por el estudiante universitario Cornelio Mariano Cap López, autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.


MSc. Marcelo Ixquiác
DIRECTOR

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

C.c. Archivo

AGRADECIMIENTOS

A mi padre Mariano y a mi madre Lety, por el amor, la confianza y el apoyo incondicional que me han brindado hasta este momento, por nunca haber dejado de creer en mi y por haberme enseñando con el ejemplo que la clave del éxito es el trabajo duro y constante.

A mis abuelas y abuelos, quienes con su legado y sacrificio han logrado que sus hijos y nietos hayamos podido tener una vida mejor.

A cada amigo y amiga que he conocido desde el inicio de este viaje por haber hecho que este proceso fuera más agradable y haber creado una pequeña familia.

A mis profesores de quienes he aprendido todo lo que sé y quienes nunca se negaron a tenderme la mano cuando lo necesité.

A Juan Diego y a Giovanni, mis asesores. Por todo el apoyo que me brindaron, por toda la paciencia que me tuvieron y por todo el tiempo que dedicaron a apoyarme.

Finalmente, un agradecimiento especial al pueblo de Guatemala. Ya que es quien sostiene a la Universidad de San Carlos de Guatemala y me concedió el privilegio de poder estudiar en ella.

*A ti, porque estuviste conmigo desde el inicio,
porque cuando he triunfado has estado conmigo para celebrar,
y cuando he caído me has ayudado a levantarme.*

A ti, porque la gratitud es enorme y las palabras son pocas.

DEDICATORIA

A todos los héroes y heroínas históricamente ignorados pero que hicieron posible que alguien como yo tuviera el privilegio de acceder a una educación superior pública y gratuita.

A quienes hoy luchan por el desarrollo y el avance de las ciencias en Guatemala. Y que sobre sus hombros se apoya la esperanza de quienes hoy soñamos con hacer ciencia en el país.

A quienes vendrán a continuar y engrandecer el legado de los que han trabajado en la construcción de la cultura científica del país.

A todos los hombres y mujeres que luchan por la defensa de una educación superior pública, gratuita y de calidad; así como también la defensa del carácter social de la Universidad de San Carlos de Guatemala.

¿Quieres acompañar o preceder, o quieres ir por tu camino? Es preciso saber lo que se quiere y si se quiere. Cuarto caso de conciencia.

Friedrich Nietzsche.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	III
LISTA DE SÍMBOLOS	V
OBJETIVOS	VII
INTRODUCCIÓN	IX
1. EFECTO HALL CUÁNTICO ENTERO	1
1.1. Efecto Hall clásico	1
1.2. Cuantización de Landau	3
1.3. Hamiltoniano para campos magnéticos distintos de cero	5
1.3.1. Acoplamiento mínimo y sustitución de Peierls	5
1.3.2. Análisis cuántico del hamiltoniano	6
1.4. Niveles de Landau	8
1.4.1. Niveles de Landau	8
1.4.2. Estados degenerados	9
1.4.3. Interpretación semiclásica de los estados degenerados	12
1.5. Autoestados de diamagnetismo de Landau	15
1.5.1. Funciones de onda en el gauge simétrico	16
1.5.2. Funciones de onda en el gauge de Landau	18
1.6. Efecto Hall cuántico entero	20
1.6.1. Movimiento electrónico en un potencial electrostático externo	21
1.6.2. Conductancia de un nivel de Landau	25
1.6.3. El efecto Hall cuántico entero y percolación	27
2. EFECTO HALL EN EL GRAFENO	31
2.1. Red hexagonal del grafeno	31
2.2. Banda electrónica del grafeno	33
2.3. Niveles de Landau relativistas	38

2.4. Efecto Hall en el grafeno	40
3. EFECTO HALL CUÁNTICO FRACCIONARIO	47
3.1. El rol de las interacciones de Coulomb	48
3.2. Función de onda de Laughlin	50
3.2.1. Parámetro varacional	51
3.2.2. Pseudopotencial de Haldane	52
3.3. Cuasi-partículas y cuasi-agujeros con carga fraccionaria	55
3.3.1. Cuasi-agujeros	55
3.3.2. Cuasi-partículas	57
3.4. Estadística Fraccionaria	57
3.5. Generalización de la función de onda de Laughlin	61
4. ORDEN TOPOLÓGICO	67
4.1. Caracterización y clasificación de los órdenes topológicos	67
4.1.1. Caracterización de los órdenes topológicos	67
4.1.2. Clasificación de los órdenes topológicos	68
4.2. Orden topológico en el efecto Hall cuántico fraccionario	69
4.2.1. La topología en el efecto Hall cuántico	71
4.2.2. Teoría de Chern-Simons	73
4.2.3. Dinámica de Chern-Simons	75
4.2.4. Teoría efectiva para estados de Laughlin	78
4.2.5. Cuasi-agujeros y Cuasi-partículas	79
4.2.6. Teoría de Chern-Simons en un toro geométrico	80
CONCLUSIONES	83
RECOMENDACIONES	85
BIBLIOGRAFÍA	87

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Diagrama de un sistema de Hall.	1
1.2.	Representación del movimiento de ciclotrón.	13
1.3.	Forma gráfica del efecto Hall cuántico entero.	20
1.4.	Paisaje de la distribución del potencial en un sistema de Hall.	22
1.5.	Estados en el borde	27
1.6.	Ejemplificación de estados localizados.	29
2.1.	Red hexagonal del grafeno.	32
2.2.	Subredes A y B en la red hexagonal del grafeno.	35
2.3.	Bandas de energía del grafeno.	37
2.4.	Niveles de Landau para el caso relativista.	40
2.5.	Efecto Tunel de Klein.	42
2.6.	Masa de confinamiento.	44
2.7.	Experimento de Zhang.	46
3.1.	Nivel de Landau al considerar la interacción entre electrones.	48
3.2.	Excitación de un cuasi-agujero.	56
4.1.	cuasi-partículas moviéndose en un toro.	70
4.2.	Trayectorias en un toro geométrico.	80

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
\mathbf{E}	Campo eléctrico
\mathbf{B}	Campo magnético
\mathbf{p}	Operador de momentum lineal
ω_C	Frecuencia de ciclotrón
\mathbf{j}	Densidad de corriente
\hbar	Constante de Planck
e	Carga fundamental
\mathbf{A}	Potencial vectorial
l_B	Longitud magnética
H	Hamiltoniano
Π	Sustitución de Peierls
$[A, B]$	Relación de conmutación entre A y B
\mathcal{S}	Superficie limitada por una trayectoria
\mathcal{I}	Operador identidad
∇	Operador nabra
\mathbf{a}_i	Vector base en una red cristalina
$\psi(x)$	Función de onda
S	Acción
$U(1)$	Grupo unitario
\mathcal{F}_{ij}	Curvatura de Berry
W_i	Ciclos de Wilson
$ \psi\rangle$	vector <i>ket</i>
$\langle\psi $	funcional <i>bra</i>
$\langle\varphi \psi\rangle$	<i>braket</i>

OBJETIVOS

General

Estudiar el efecto Hall cuántico entero, fraccionario y el caso especial del efecto Hall relativista en el grafeno para poder obtener el orden topológico del efecto Hall y explorar la forma de aplicarlo a la simulación y computación cuántica.

Específicos

1. Obtener la cuantización de Landau y los niveles de Landau para calcular la cuantización de la resistencia de Hall, tanto para el caso entero como para el caso fraccionario e interpretar su comportamiento.
2. Describir la estructura del grafeno, la banda electrónica del grafeno y aplicar los resultados para el cálculo del hamiltoniano de Dirac; útil en la descripción de los electrones en el grafeno y obtener los niveles de Landau relativistas los cuales describen el efecto Hall relativista en el grafeno.
3. Desarrollar la teoría de Laughlin para obtener los estados de los electrones en un sistema de Hall fraccionario y aplicarla en la estadística fraccionaria con el objetivo de describir las partículas con carga fraccionaria.
4. Introducir la caracterización y clasificación de los órdenes topológicos para obtener el orden topológico del efecto Hall cuántico fraccionario.

INTRODUCCIÓN

El efecto Hall cuántico (QHE, por sus siglas en inglés) aparece en sistemas electrónicos bidimensionales sometidos a campos magnéticos muy fuertes. Desde el descubrimiento fenomenológico de su versión entera (IQHE) en 1980 por Klitzing [19] y posteriormente su versión fraccionaria (FQHE) en 1982 por el grupo de Tsui y por Laughlin [22, 20], el estudio de este fenómeno cuántico ha revelado nuevos fenómenos físicos. Esto, junto con la jerarquía de estructuras [15, 17, 18], indica que los sistemas de electrones que muestran un efecto Hall cuántico, en específico el fraccionario, contienen estructuras internas bastante complejas, también conocidos como líquidos cuánticos (FQH). La estructura interna de estos sistemas representa un nuevo estado de la materia por lo que ha sido necesario desarrollar nuevos conceptos y nuevas técnicas para entender estos nuevos estados.

La forma de caracterizar nuevos estados de la materia es una de las tareas más básicas de la rama de la física de la materia condensada, para la mayoría de sistemas se puede aplicar el punto de vista de Landau en el que los distintos estados de la materia son caracterizados por sus simetrías, tanto aquellas que se preservan en el estado fundamental como las que se rompen. Esto se puede describir utilizando parámetros de orden que caracterizan transiciones de fase [43]. Sin embargo los líquidos cuánticos no cumplen con este paradigma, ya que no existe simetría o parámetros locales que distingan los estados cuánticos de Hall.

El primer intento de caracterizar la estructura interna de los líquidos cuánticos fue propuesto por Girvin y McDonald [14], donde demostraron que un líquido cuántico puede describirse en términos de la teoría de Ginzburg-Landau-Chern-Simons [36], sin embargo al momento de intentar explicar algunos líquidos cuánticos no abelianos no se puede utilizar la teoría de Ginzburg-Landau-Chern-Simons. Por lo tanto se necesita una forma más generalizada para caracterizar los estados de la materia.

La estructura interna de estos líquidos cuánticos es universal en el sentido de que se puede mantener su estructura aunque sea sometida a perturbaciones arbitrarias. Estas estructuras representan una nueva fase en el diagrama de fases [43],

por lo tanto los líquidos cuánticos FQH representan un nuevo estado de la materia que se puede describir a partir del concepto de *órdenes topológicos* introducidos por X.G. Wen [9, 34]. Este orden topológico es capaz de describir este nuevo tipo de estado de la materia y que es universal en el sentido que los órdenes topológicos son independientes de las perturbaciones que puedan existir en un sistema.

En este trabajo de graduación se quieren presentar las ideas y el desarrollo teórico que describe el efecto Hall cuántico entero, el fraccionario y el caso especial en el grafeno en el que los electrones muestran velocidades relativistas. Esta base teórica se utiliza para poder mostrar el comportamiento de los electrones en el efecto Hall cuántico fraccionario que se ha mencionado anteriormente, el cual da origen a líquidos cuánticos FQH y que hacen necesaria la introducción de la idea de orden topológico para poder describir este nuevo estado exótico de la materia.

1. EFECTO HALL CUÁNTICO ENTERO

1.1. Efecto Hall clásico

El efecto Hall clásico fue descubierto en el año 1879 por Edwin Hall y es el resultado del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético [12]. Consideremos un campo magnético, \mathbf{B} , en la dirección de \hat{z} , los electrones están restringidos a moverse en el plano (x, y) y una corriente \mathbf{I} que va en la dirección de \hat{x} . El efecto Hall ocurre cuando este arreglo induce un voltaje de Hall, V_H , en la dirección de \hat{y} . Como se muestra en la figura 1.1.

Modelo de Drude

Para tener una descripción cualitativa del efecto Hall podemos considerar el modelo de Drude de transporte de carga. En este modelo tenemos un campo eléctrico, \mathbf{E} , que acelera a los portadores de carga y en ausencia de un campo magnético \mathbf{B} se traduce en una corriente en la dirección de \mathbf{E} . También consideramos un término de fricción lineal causado por cualquier cosa que se oponga al movimiento de las cargas. Entonces la ecuación de movimiento está dada por [40]

$$\frac{dp}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m_e} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\mathbf{p}}{\tau}, \quad (1.1)$$

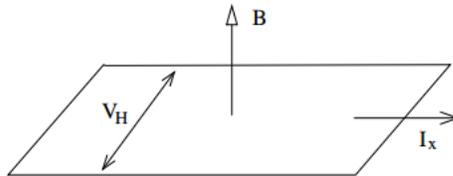


Figura 1.1. Diagrama del montaje experimental del efecto Hall, en el cual el paralelogramo representa la placa metálica, por la que circula una corriente \mathbf{I}_x y está sometida a un campo magnético externo \mathbf{B} el cual genera el voltaje de Hall V_H . Fuente: D. Tong[12]

donde al considerar el transporte de partículas con cargas negativas como los electrones, se toma una carga $q = -e$ que representa la carga del electrón, m_e es la masa del electrón y τ es un coeficiente llamado tiempo de dispersión que se puede interpretar como el tiempo medio entre las colisiones. Las características macroscópicas propias del transporte de cargas, como la resistividad y conductividad del sistema, se obtienen de la solución estática de la ecuación de movimiento (1.1) con $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$, y como nuestro sistema es de dos dimensiones, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$. Se obtienen entonces las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} eE_x &= -\frac{eB}{m_e}p_y - \frac{p_x}{\tau}, \\ eE_y &= \frac{eB}{m_e}p_x - \frac{p_y}{\tau}, \end{aligned}$$

de donde se puede reconocer que aparece una frecuencia característica conocida como frecuencia de ciclotrón

$$\omega_C = \frac{eB}{m_e}, \quad (1.2)$$

esta frecuencia caracteriza el movimiento de ciclotrón de las partículas cargadas en un campo magnético. Por otra parte, con la ayuda de la conductividad de Drude [12]

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e}, \quad (1.3)$$

se pueden reescribir las ecuaciones de movimiento de la forma

$$\begin{aligned} \sigma_0 E_x &= -en \frac{p_x}{m_e} - en \frac{p_y}{m_e} (\omega_C \tau) \\ \sigma_0 E_y &= en \frac{p_x}{m_e} (\omega_C \tau) - en \frac{p_y}{m_e}, \end{aligned}$$

por otro lado también se puede considerar la densidad de corriente

$$\mathbf{j} = -en \frac{\mathbf{p}}{m_e}, \quad (1.4)$$

en su forma matricial, $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$, para obtener el tensor de resistividad, es importante resaltar que en este contexto la cantidad n denota la densidad de electrones que genera la densidad de corriente \mathbf{j}

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_C \tau \\ -\omega_C \tau & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \mu B \\ -\mu B & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

el término que se introdujo en el último paso es conocido como movilidad y está definido de la siguiente forma [12]

$$\mu = \frac{e\tau}{m_e}. \quad (1.6)$$

En la ecuación (1.5) se puede identificar la resistividad de Hall que se encuentra en la anti-diagonal del tensor de resistividad

$$\rho_H = \frac{\omega_C\tau}{\sigma_0} = \frac{B}{en}, \quad (1.7)$$

además, a partir de la resistividad (1.5), es fácil obtener la conductividad simplemente invirtiendo la matriz,

$$\sigma = \rho^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_L & -\sigma_H \\ \sigma_H & \sigma_L \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

con $\sigma_L = \sigma_0 / (1 + \omega_C^2\tau^2)$ y $\sigma_H = \sigma_0\omega_C\tau / (1 + \omega_C^2\tau^2)$. Usando estas expresiones el límite teórico en el cual las impurezas se desvanecen se da cuando $\omega_C\tau \rightarrow \infty$, tiempos de dispersión bastante grandes. Para este límite los tensores de resistividad y conductividad toman la forma

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B}{en} \\ -\frac{B}{en} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{en}{B} \\ -\frac{en}{B} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

1.2. Cuantización de Landau

Para poder entender el efecto Hall cuántico, es importante entender el concepto de los niveles de Landau; que no es más que la cuantización de la energía cinética de una partícula libre cargada en dos dimensiones, sometida a un campo magnético perpendicular. Esta cuantización sirve para estudiar lo que sucede en el efecto Hall con una sola partícula con lo cual se puede hacer la estadística sobre el comportamiento colectivo de varias partículas que se someten a esas condiciones.

Consideremos el hamiltoniano para una partícula libre en dos dimensiones, a la que posteriormente se le dará un tratamiento cuántico. Como este hamiltoniano es invariante ante traslaciones, el momentum $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ es una cantidad que se conserva en la ausencia de un campo magnético externo. En mecánica cuántica esto significa que el operador de momentum conmuta con el hamiltoniano, $[\mathbf{p}, H] = 0$, lo que implica que comparten autovectores [3]

Hamiltoniano para una partícula libre

El hamiltoniano para una partícula libre, para el caso no relativista está dado únicamente por su energía cinética y se expresa de la forma

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (1.10)$$

en términos de la masa m de la partícula. Sin embargo nos interesa el movimiento de los electrones en algún material, por lo que la descripción del movimiento de un electrón libre en una estructura cristalina parece poco apropiado. Una partícula en una red no se puede describir por la ecuación (1.10) sino que es necesario definir el hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \sum_i^N V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1.11)$$

donde el último término representa el potencial electrostático causado por los iones que se sitúan en los sitios \mathbf{r}_i de la red. Tomando esto en cuenta, el hamiltoniano ahora depende de la posición \mathbf{r} de la partícula con respecto a los iones, y por lo tanto el momentum \mathbf{p} ya no es una constante de movimiento.

Este problema se puede resolver con ayuda del teorema de Bloch [40], el cual establece que aunque una traslación espacial arbitraria no sea una operación simétrica permitida, como en el caso de una partícula libre (1.10), el sistema es invariante ante una traslación por un vector arbitrario si la extensión de la red es infinita. De la misma manera que para una partícula libre, donde se define el momentum como un generador de una traslación espacial, se puede definir un generador de una traslación de red. Este generador es llamado momentum de la red o *cuasimomentum*.

Como consecuencia de que las traslaciones de red son discretas, no todos los valores de este cuasimomentum tienen interpretación física, sino que únicamente aquellos que se encuentran dentro de la primera zona de Brillouin [40]. En un cristal, los electrones pueden ser descritos en términos de un hamiltoniano $H(p_x, p_y)$ si se tiene en mente que el momentum \mathbf{p} en esta expresión es un momentum de la red restringido a la primera zona de Brillouin. Sin embargo, es importante notar que, aunque la mayoría de veces se puede escribir el hamiltoniano resultante de la forma (1.10), la masa generalmente no es la masa del electrón libre sino la masa de banda m_b que toma en cuenta características de la banda de energía.

1.3. Hamiltoniano para campos magnéticos distintos de cero

En esta sección se analizará el comportamiento de las partículas al ser sometidas a un campo magnético, para esto se comenzará introduciendo la sustitución de Peierls a partir de la cual se obtendrán las relaciones de conmutación útiles para obtener la cuantización de Landau más adelante.

1.3.1. Acoplamiento mínimo y sustitución de Peierls

Para describir electrones libres sometidos a un campo magnético, se necesita reemplazar el momentum de la partícula por su forma invariante de gauge

$$\mathbf{p} \longrightarrow \Pi = \mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.12)$$

donde $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ es el potencial vectorial que se genera a partir del campo magnético $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ [39]. La ecuación (1.12) que también se conoce como la sustitución mínima, la cual es una transformación canónica, que se demuestra más adelante obteniendo las relaciones de conmutación canónicas y verificando que estas se mantienen.

Para el caso de electrones en una red, esta sustitución no es tan sencilla debido a la presencia de varias bandas de energía [3]. Además el potencial vectorial no se encuentra ligado, incluso para un campo magnético finito; como por ejemplo el gauge de Landau, definido como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = B(-y, 0, 0). \quad (1.13)$$

Para este caso, el valor del potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ puede ser tan grande como $\mathbf{B} \times \mathbf{L}_y$. Donde \mathbf{L}_y es la extensión macroscópica del sistema en la dirección de \hat{y} . Sin embargo, la sustitución del momentum mecánico que se muestra ecuación (1.12), se conoce como la sustitución de Peierls la cual aplica para un sistema de electrones en una red. Esta sustitución (1.12) se cumple siempre y cuando la distancia a entre los puntos de la red es más pequeña que la *longitud magnética* definida como

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}, \quad (1.14)$$

que es la escala de longitud magnética fundamental en presencia de un campo magnético. Con la ayuda de la sustitución de Peierls, se puede escribir la expresión para

el hamiltoniano de una partícula cargada en presencia de un campo magnético, simplemente si se reemplaza la expresión del momentum en el hamiltoniano en ausencia de un campo magnético, por el momentum (1.12)

$$H(\mathbf{p}) \longrightarrow H(\Pi) = H(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) = H^B(p, r), \quad (1.15)$$

como el potencial vectorial tiene una dependencia espacial, el hamiltoniano ya no es invariante ante traslaciones, y el momentum \mathbf{p} ya no es una cantidad conservada. Aplicando esta sustitución a la ecuación (1.10), el hamiltoniano en presencia de un campo magnético para el caso clásico estaría dado por

$$H^B = \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}]^2}{2m}. \quad (1.16)$$

1.3.2. Análisis cuántico del hamiltoniano

Para poder analizar el hamiltoniano en la ecuación (1.16) desde el punto de vista de la mecánica cuántica, se puede usar un método estándar, conocido como la cuantización canónica [41]. En este método se interpretan las cantidades físicas como operadores que actúan sobre vectores de estado en un espacio de Hilbert. Por lo tanto en el hamiltoniano (1.16), las cantidades físicas básicas en el argumento de H son la posición $\mathbf{r} = (x, y)$ y el momentum canónico $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ que cumplen con las relaciones de conmutación canónicas [41]

$$[x, p_x] = i\hbar, \quad [y, p_y] = i\hbar \quad \text{y} \quad [x, y] = [p_x, p_y] = [x, p_y] = [y, p_x] = 0, \quad (1.17)$$

lo que significa que cada componente del operador de posición no conmuta con el momentum canónico asociado a esa dirección. Esta no conmutatividad entre la posición y su momentum asociado es el origen del principio de incertidumbre de Heisenberg [12], el cual establece que no se puede saber con precisión la posición y el momentum de una partícula al mismo tiempo, $\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar$ y $\Delta y \Delta p_y \gtrsim \hbar$.

Como consecuencia de las relaciones de conmutación en (1.17) las componentes del momentum invariante de gauge ya no conmutan entre ellas

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= [p_x + eA_x(\mathbf{r}), p_y + eA_y(\mathbf{r})] = e([p_x, A_y] - [p_y, A_x]) \\ &= e \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} [p_x, x] + \frac{\partial A_y}{\partial x} [p_x, y] - \frac{\partial A_x}{\partial x} [p_y, x] + \frac{\partial A_x}{\partial y} [p_y, y] \right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

en donde se utilizó la relación expuesta por Goerbig en [3]

$$[\mathcal{O}_1, f(\mathcal{O}_2)] = \frac{df}{d\mathcal{O}_2}[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2], \quad (1.19)$$

entre dos operadores arbitrarios, de los cuales su conmutador es un número complejo o un operador que conmuta con \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 . Con la ayuda de las relaciones de conmutación en 1.17, el conmutador en 1.18 da como resultado

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -ie\hbar \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = -ie\hbar (\nabla \times \mathbf{A})_z = -ie\hbar B, \quad (1.20)$$

y en términos de longitud magnética (1.14),

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i \frac{\hbar^2}{l_B^2}. \quad (1.21)$$

Esta ecuación nos da la relación de conmutación para las componentes del momentum invariante de gauge, relación que tiene características importantes, ya que es una transformación canónica en la que se puede interpretar a uno de los elementos Π_i como una coordenada y el otro como su momentum conjugado. Ya que se espera de una cantidad invariante de gauge, tal como lo son las componentes de Π , que su conmutador también sea una cantidad invariante de gauge el cual solo depende de constantes universales y del campo magnético \mathbf{B} y no del potencial vectorial \mathbf{A} . Por otro lado, las componentes del momentum invariante de gauge Π , son cantidades que se conjugan entre sí de forma similar a la relación entre las cantidades x y p_x así como también y y p_y como se muestra en la ecuación (1.17).

Como p_x genera una traslación en x y del mismo modo p_y lo hace en dirección de y , tenemos un caso similar donde Π_x genera un *boost* del momentum invariante de gauge en la dirección de y , de forma similar Π_y en la dirección de x . Como consecuencia, no se puede diagonalizar al mismo tiempo Π_x y Π_y , en contraste con el caso anterior en el que el campo magnético es cero, en el que los argumentos del hamiltoniano p_x y p_y , conmutan.

Para diagonalizar el hamiltoniano (1.16), podemos usar el par de operadores conjugados Π_x y Π_y para introducir el operador escalera de la misma forma que se hace en Mecánica Cuántica para el oscilador armónico en una dimensión [41]. El operador escalera, puede ser visto como la posición compleja de un oscilador en una

dimensión, la cual se expande por la posición en el eje x y el momentum en el eje y ,

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - i \frac{p}{p_0} \right) \quad \text{y} \quad \tilde{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + i \frac{p}{p_0} \right), \quad (1.22)$$

donde $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ y $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$ son constantes de normalización en términos de la frecuencia de oscilación ω [41]. Los operadores \tilde{a} y \tilde{a}^\dagger cumplen con la relación de conmutación

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1. \quad (1.23)$$

En el caso de nuestro sistema bidimensional de electrones sometidos a un campo magnético, los operadores escalera juegan el rol de un momentum invariante de gauge complejo, y se expresan como

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar} (\Pi_x - i\Pi_y) \quad \text{y} \quad a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar} (\Pi_x + i\Pi_y), \quad (1.24)$$

en donde las constantes de normalización se escogen de tal forma que se cumpla la relación de conmutación (1.23), estas expresiones nos permiten poder expresar las componentes de Π en términos de los operadores escalera (1.24)

$$\Pi_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}l_B} (a^\dagger + a) \quad \text{y} \quad \Pi_y = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}l_B} (a^\dagger - a). \quad (1.25)$$

1.4. Niveles de Landau

Podemos utilizar los resultados de la sección anterior para calcular el espectro de energía asociado al hamiltoniano (1.16) para el caso no relativista. El principal objetivo de esta sección es entender este espectro de energía.

1.4.1. Niveles de Landau

En términos del momentum invariante de gauge, el hamiltoniano (1.16) para electrones no relativistas se puede expresar de la forma

$$H^B = \frac{1}{2m_e} (\Pi_x^2 + \Pi_y^2), \quad (1.26)$$

se pueden utilizar los operadores escalera definidos en (1.25) y reemplazarlos en la ecuación anterior; y con la ayuda de la relación de conmutación (1.23) obtenemos,

$$\begin{aligned}
H^B &= \frac{\hbar^2}{4m_e l_B^2} \left[a^{\dagger 2} + a^{\dagger} a + a a^{\dagger} + a^2 - \left(a^{\dagger 2} - a^{\dagger} a - a a^{\dagger} + a^2 \right) \right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4m_e l_B^2} (a^{\dagger} a + a a^{\dagger}) = \frac{\hbar^2}{m_e l_B} (a^{\dagger} a + 1/2) \\
H^B &= \hbar \omega_C \left(a^{\dagger} a + \frac{1}{2} \right); \tag{1.27}
\end{aligned}$$

en donde se utilizó la relación $\omega_c = \hbar/m_e l_B$, entre la frecuencia de ciclotrón (1.2) y la longitud magnética (1.14). En este punto, se puede ver que el hamiltoniano (1.27) tiene la misma forma que el del oscilador armónico cuántico en una dimensión. Como en el caso del oscilador armónico cuántico, los valores y vectores propios del hamiltoniano (1.27) son los del operador número aa^{\dagger} con $aa^{\dagger} |n\rangle = n |n\rangle$, por lo que los operadores escalera actúan sobre estos estados de la manera usual

$$a^{\dagger} |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \text{y} \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \tag{1.28}$$

en donde la ecuación anterior es válida para $n > 0$, por lo que la aplicación de a al estado fundamental $|0\rangle$ da cero,

$$a |0\rangle = 0. \tag{1.29}$$

Con esta última ecuación podemos calcular los vectores propios asociados a los niveles más bajos de energía, así como los n niveles más altos

$$|n\rangle = \frac{(a^{\dagger})^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \tag{1.30}$$

por lo tanto los niveles de energía para una partícula no relativista cargada en dos dimensiones, están discretizados y caracterizados por el entero n ,

$$\epsilon_n = \hbar \omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{1.31}$$

en donde estos niveles reciben el nombre de niveles de Landau [12] y n es el operador número.

1.4.2. Estados degenerados

En las secciones anteriores, se ha establecido que la energía para un sistema de partículas cargadas no relativistas en dos dimensiones se caracterizan por el número

cuántico n , que denota los llamados niveles de Landau. Sin embargo este sistema cuántico aún se encuentra indeterminado, tal como se puede ver en el siguiente análisis dimensional.

El hamiltoniano original (1.10) es una función que depende de dos pares de operadores conjugados, x con p_x , como también de y con p_y . Mientras que al expresar el hamiltoniano original en términos del momentum invariante de gauge Π , o de los operadores escalera, el hamiltoniano (1.16) depende solo de un par de operadores conjugados. Por lo que, del modelo original se espera que los estados cuánticos se describan por dos números cuánticos; uno para cada dimensión espacial.

Este es el caso de los modelos sin campo magnético externo, en el cual los estados cuánticos se caracterizan por los dos números cuánticos p_x y p_y , los cuales son las componentes del momentum lineal. Por lo tanto, para poder tener una descripción completa de los estados cuánticos, se debe buscar un segundo par de operadores conjugados que conmuten con el hamiltoniano y poder obtener los estados degenerados de los niveles de Landau.

En analogía con el momentum invariante de gauge (1.12), se considera una sustitución similar pero con signo contrario,

$$\tilde{\Pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

que se puede tomar como un pseudo-momentum simplemente para darle un nombre a este operador. Con este nuevo operador, se puede expresar el operador de momentum \mathbf{p} y el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en términos de Π y $\tilde{\Pi}$,

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} (\Pi + \tilde{\Pi}) \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2e} (\Pi - \tilde{\Pi}). \quad (1.33)$$

Al tomar el conmutador entre las componentes del pseudo-momentum [3], resulta ser invariante de gauge,

$$[\tilde{\Pi}_x, \tilde{\Pi}_y] = i \frac{\hbar^2}{l_B^2}, \quad (1.34)$$

esta expresión se calcula de la misma forma que el conmutador (1.21) entre Π_x y Π_y , también de la misma forma se calcula el conmutador mixto entre la componentes

del momentum invariante de gauge y el pseudo-momentum,

$$\begin{aligned}
[\Pi_x, \tilde{\Pi}_x] &= 2ie\hbar \frac{\partial A_x}{\partial x}, \\
[\Pi_y, \tilde{\Pi}_y] &= 2ie\hbar \frac{\partial A_y}{\partial y}, \\
[\Pi_x, \tilde{\Pi}_y] &= ie\hbar \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) = -[\tilde{\Pi}_x, \Pi_y].
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Estos conmutadores mixtos son cantidades que no se desean obtener porque inducirían dinámica sin interpretación física, debido a que las componentes del pseudo-momentum no conmutan con el hamiltoniano $[\tilde{\Pi}_{x/y}, H] \neq 0$. Sin embargo esta situación se puede evitar si se elige el gauge apropiado, que para este caso resulta ser el llamado *gauge simétrico* [3]

$$\mathbf{A}_S(\mathbf{r}) = \frac{B}{2} (-y, x, 0), \tag{1.36}$$

con el cual las relaciones de conmutación 1.35 se desvanecen, de tal forma que el pseudo-momentum conmute con el hamiltoniano. Es importante notar que también existe una segunda selección de gauge bastante popular, conocido como el *gauge de Landau* [3]

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{r}) = B(-y, 0, 0), \tag{1.37}$$

en el que los conmutadores mixtos no se desvanecen. Este último es útil para la descripción de geometrías que son invariantes ante traslaciones en dirección de la componente y . Sin embargo el gauge simétrico juega un rol importante en dos aspectos; el primero, permite dar una interpretación semiclásica mas fácil que el gauge de Landau, y segundo, las funciones de onda que se obtienen a partir del gauge simétrico tienen bastante importancia para construir las funciones de onda que describen el efecto Hall cuántico fraccionario [3].

Utilizando el pseudo-momentum, con sus componentes conjugadas $\tilde{\Pi}_x$ y $\tilde{\Pi}_y$ se puede introducir, de la misma forma que con el momentum invariante de gauge Π , operadores escalera,

$$b = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} \left(\tilde{\Pi}_x + i\tilde{\Pi}_y \right) \quad \text{y} \quad b^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} \left(\tilde{\Pi}_x - i\tilde{\Pi}_y \right), \tag{1.38}$$

en donde se satisfacen las relaciones de conmutación $[b, b^\dagger] = 1$, y que, en el gauge simétrico conmutan con los operadores escalera a y a^\dagger , $[b, a^{(\dagger)}] = 0$, y por lo tanto también con el hamiltoniano, $[b^{(\dagger)}, H] = 0$. Se puede introducir el opera-

donde el número bb^\dagger asociado con estos operadores escalera, por lo que sus autoestados satisfacen la ecuación de valores propios

$$b^\dagger b |m\rangle = m |m\rangle. \quad (1.39)$$

Por lo tanto se obtiene un segundo número cuántico, un entero $m \geq 0$, que resulta necesario para describir, como se esperaba del análisis dimensional anterior, los estados cuánticos completos adicionales al número cuántico n correspondiente a los niveles de Landau. Así los estados cuánticos, para partículas no relativistas, se convierten en un producto tensorial de dos vectores del espacio de Hilbert [41]

$$|n, m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle. \quad (1.40)$$

1.4.3. Interpretación semiclásica de los estados degenerados

Con un tratamiento semiclásico, el gauge simétrico permite hacer una conexión con las constantes de movimiento que se obtienen al resolver las ecuaciones de movimiento clásico de un electrón en un campo magnético,

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} = -e (\dot{\mathbf{r}} \times B) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\omega_C \dot{y} \\ \ddot{y} = \omega_C \dot{x} \end{cases} \quad (1.41)$$

que resulta ser la aceleración de los electrones debido a la fuerza de Lorentz [39]. Si se integran estas ecuaciones se obtiene que

$$\left. \begin{cases} \dot{x} = \frac{\Pi_x}{m_e} = \omega_C (y - Y) \\ \dot{y} = \frac{\Pi_y}{m_e} = \omega_C (x - X) \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y = Y - \frac{\Pi_x}{eB} \\ x = X - \frac{\Pi_y}{eB} \end{cases} \quad (1.42)$$

donde $\mathbf{R} = (X, Y)$ es una constante de integración, que se interpreta como una constante de movimiento. Esta cantidad se puede interpretar fácilmente: representa el centro del movimiento de ciclotrón de los electrones, ver figura 1.2.

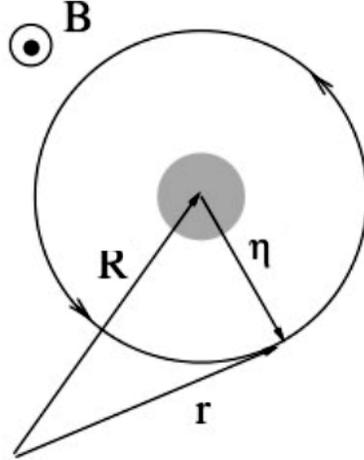


Figura 1.2. Movimiento de ciclotrón de un electrón en un campo magnético \mathbf{B} alrededor del centro guía \mathbf{R} . La región gris representa la incertidumbre de la posición del centro guía debido a la no conmutatividad de sus componentes (1.47). $\boldsymbol{\eta}$ representa la variable de ciclotrón y \mathbf{r} es la posición del electrón el cuál está compuesto tanto por \mathbf{R} y $\boldsymbol{\eta}$. Fuente: adaptado de Goerbig [3]

Si se integran las ecuaciones (1.42), obtenemos las ecuaciones clásicas del movimiento de ciclotrón

$$x(t) = X - r \sin(\omega_C t + \phi) \quad y \quad y(t) = Y + r \cos(\omega_C t + \phi), \quad (1.43)$$

donde ϕ es otra constante de movimiento. El movimiento de ciclotrón por sí mismo se describe por medio de las velocidades Π_x/m y Π_y/m . Mientras que la energía depende de estas velocidades que determinan el radio r , que se muestra en la figura 1.2, en el movimiento de ciclotrón este radio es totalmente independiente de la posición de su centro \mathbf{R} , tal como se espera de las ecuaciones de movimiento (1.41) que son invariantes ante traslaciones. Para relacionar el centro de guía con el pseudo-momentum $\tilde{\Pi}$ usamos las ecuaciones (1.33) para el potencial vectorial en el gauge simétrico,

$$e\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{eB}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Pi} - \tilde{\boldsymbol{\Pi}}). \quad (1.44)$$

Las posiciones x así como y , se pueden expresar en términos de los momenta $\boldsymbol{\Pi}$ y $\tilde{\boldsymbol{\Pi}}$,

$$\begin{aligned} y &= \frac{\tilde{\Pi}_x}{eB} - \frac{\Pi_x}{eB}, \\ x &= -\frac{\tilde{\Pi}_y}{eB} + \frac{\Pi_y}{eB}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Estas ecuaciones comparadas con las ecuaciones (1.42) nos permite identificar

$$X = -\frac{\tilde{\Pi}_y}{eB} \quad \text{y} \quad Y = \frac{\tilde{\Pi}_x}{eB}. \quad (1.46)$$

Esto significa que, en el gauge simétrico, las componentes del pseudo-momentum representan las componentes del centro de guía; que son constantes de movimiento naturales del sistema. En un tratamiento cuántico, estos operadores necesariamente deben de conmutar con el hamiltoniano [3] como se ha establecido anteriormente. Además, la relación de conmutación (1.34) entre las componentes del pseudo-momentum induce a la relación de conmutación

$$[X, Y] = il_B^2, \quad (1.47)$$

entre las componentes del operador del centro de guía, esto significa que existe una incertidumbre de Heisenberg asociada a la posición del centro de guía de un estado cuántico, por lo tanto no se pueden conocer sus componentes (x, y) de forma simultánea, y el centro de guía se encuentra delimitado por una superficie

$$\Delta X \Delta Y = 2\pi l_B^2 \quad (1.48)$$

representado en la región gris de la figura 1.2. Esta superficie mínima tiene el mismo rol que la acción h en el estado de fases y por lo tanto nos permite contar el número de estados cuánticos posibles en una superficie macroscópica dada \mathcal{A} ,

$$N_B = \frac{\mathcal{A}}{\Delta X \Delta Y} = \frac{\mathcal{A}}{2\pi l_B^2} = n_B \times \mathcal{A}, \quad (1.49)$$

en donde se introdujo el término de densidad de flujo

$$n_B = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{B}{h/e}, \quad (1.50)$$

que es el campo magnético medido en unidades de flujo cuántico h/e . Por lo tanto, el número de estados cuánticos en un nivel de Landau es igual al número de flujo cuántico que atraviesa la superficie \mathcal{A} , y cada nivel de Landau está macroscópicamente degenerado. De manera similar, con el operador del centro de guía, podemos introducir la llamada variable de ciclotrón $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$ que describe el movimiento de ciclotrón y sus propiedades dinámicas. La variable de ciclotrón es perpendicular a la velocidad del electrón y se puede expresar en término del momentum invariante

de gauge $\mathbf{\Pi}$,

$$\eta_x = \frac{\Pi_y}{eB} \quad y \quad \eta_y = -\frac{\Pi_x}{eB}, \quad (1.51)$$

como se puede ver de las ecuaciones (1.42). De esta forma la posición del electrón se puede descomponer entre su centro de guía y su variable de ciclotrón $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta}$. Además, las componentes de la variable de ciclotrón no conmutan entre sí y se pueden obtener con la ayuda de la ecuación (1.21)

$$[\eta_x, \eta_y] = \frac{[\Pi_x, \Pi_y]}{(eB)^2} = -i\ell_B^2 = -[X, Y]. \quad (1.52)$$

Hasta ahora se ha discutido el caso de una sola partícula y sus posibles estados cuánticos. Ahora consideramos N electrones independientes a temperatura cero. En la ausencia de un campo magnético, los electrones en un metal, debido a su naturaleza fermiónica y a que el principio de exclusión de Pauli prohíbe la doble ocupación de un solo estado cuántico, llenan todos los estados cuánticos hasta alcanzar la energía de Fermi, que depende del número de electrones. Esta situación es similar a la que ocurre en presencia de un campo magnético en el que los electrones ocupan los niveles más bajos de Landau, siendo estos los de baja energía. Una vez uno de los niveles de Landau está lleno, los electrones comienzan a ocupar niveles superiores.

Para describir el proceso en el que se van llenando los niveles de Landau, es útil introducir la relación entre el número de electrones $N_{el} = n_{el} \times \mathcal{A}$ y el flujo cuántico,

$$\nu = \frac{N_{el}}{N_B} = \frac{n_{el}}{n_B} = \frac{hn_{el}}{eB}, \quad (1.53)$$

que recibe el nombre de *factor de ocupación* [3]. La parte entera del factor de ocupación cuenta el número de niveles de Landau totalmente llenos. También se puede ver que se puede variar este factor, ya sea cambiando el número de partículas o bien el campo magnético. En el caso en el que el número de partículas se mantiene fijo si se disminuye la intensidad del campo magnético aumenta el factor de ocupación.

1.5. Autoestados de diamagnetismo de Landau

Con las herramientas algebraicas que se han desarrollado hasta el momento es posible calcular las funciones de onda electrónicas necesarias para poder estudiar el sistema de Hall, en esta sección se presentarán las funciones de onda en el gauge simétrico y también en el gauge de Landau. Estas funciones de onda son importantes

para el estudio tanto del efecto Hall cuántico entero, como del fraccionario ya que dependiendo del tipo de simetrías que se quieran estudiar en el sistema se elige la transformación gauge más apropiada.

1.5.1. Funciones de onda en el gauge simétrico

Se pueden obtener todos los estados cuánticos $|n, m\rangle$ a partir de un solo estado $|n = 0, m = 0\rangle$ con la ayuda de la ecuación [4, 3]

$$|n, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |n, m\rangle, \quad (1.54)$$

la cual es una generalización de la ecuación (1.30); para este caso a^\dagger es en realidad $a^\dagger \otimes \mathcal{I}$ y b^\dagger corresponde a $\mathcal{I} \otimes b^\dagger$, donde \mathcal{I} es el operador identidad. Un estado en el nivel más bajo de Landau ($n = 0$) se caracteriza por la condición (1.29)

$$a |n = 0, m\rangle = 0, \quad (1.55)$$

la cual, para poder obtener la función de onda, necesita ser transformada a una ecuación diferencial.

Si recordamos de la ecuación (1.24) que $a = (l_B/\sqrt{2}\hbar)(\Pi_x - i\Pi_y)$ y, por definición $\tilde{\mathbf{\Pi}} = -i\hbar\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en donde se tomó la representación del momentum como operador $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$. Se puede encontrar que

$$a = -i\sqrt{2} \left[\frac{l_B}{2} (\partial_x - i\partial_y) + \frac{x - iy}{4l_B} \right],$$

donde ∂_x y ∂_y son las componentes del gradiente $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$, debido al término complejo que se ve en la expresión anterior, es conveniente introducir las coordenadas complejas para describir el plano bidimensional. Definimos $z = x - iy$, $z^* = x + iy$, $\partial = (\partial_x + i\partial_y)/2$ y $\bar{\partial} = (\partial_x - i\partial_y)/2$. Por lo que la condición para el nivel más bajo de Landau se convierte en una ecuación diferencial,

$$\left(\frac{z}{4l_B} + l_B\bar{\partial} \right) \phi_{n=0}(z, z^*) = 0, \quad (1.56)$$

que se puede resolver por medio de la función compleja

$$\phi_{n=0}(z, z^*) = f(z)e^{|z|^2/4l_B^2}, \quad (1.57)$$

donde $f(z)$ es una función analítica, y por lo tanto cumple con $\bar{\partial}f(z) = 0$ y $|z|^2 = zz^*$. Esto quiere decir que existe un grado de libertad adicional, debido a que $f(z)$ puede ser cualquier función analítica, este grado de libertad adicional se puede asociar al número cuántico m [3]. Los operadores escalera b y b^\dagger se pueden escribir en la representación de posición de la misma forma que a y con esto se obtiene la representación espacial de los operadores escalera

$$\begin{aligned} a &= -i\sqrt{2} \left(\frac{z}{4l_B} + l_B \bar{\partial} \right), & a^\dagger &= i\sqrt{2} \left(\frac{z^*}{4l_B} - l_B \partial \right) \\ b &= -i\sqrt{2} \left(\frac{z^*}{4l_B} + l_B \partial \right), & b^\dagger &= i\sqrt{2} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial} \right). \end{aligned} \quad (1.58)$$

De la misma forma que para el nivel más bajo de Landau, la condición para el estado de referencia con $m = 0$ es $b|n, m = 0\rangle = 0$, la cual nos lleva a la ecuación diferencial

$$(z^* + 4l_B^2 \partial) \phi'_{m=0}(z, z^*) = 0$$

con la solución

$$\phi'_{m=0}(z, z^*) = g(z^*) e^{-|z|^2/4l_B^2},$$

la cual tiene términos de una función anti-analítica $g(z^*)$ con $\partial g(z^*) = 0$. Por lo tanto, la función de onda $\phi_{n=0, m=0}(z, z^*)$ debe ser una función gaussiana con un factor que sea tanto analítica como anti-analítica, es decir una constante que se establece mediante la normalización

$$\phi_{n=0, m=0}(z, z^*) = \langle z, z^* | n = 0, m = 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}} e^{-|z|^2/4l_B^2}. \quad (1.59)$$

Un estado en un nivel bajo de Landau con un valor m arbitrario se puede obtener con la ayuda de la ecuación (1.54)

$$\begin{aligned} \phi_{n=0, m=0}(z, z^*) &= \frac{i^m \sqrt{2^m}}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!}} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial} \right)^m e^{-|z|^2/4l_B^2} \\ &= \frac{i^m}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!}} \left(\frac{z}{\sqrt{2}l_B} \right)^m e^{-|z|^2/4l_B^2}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

De esta forma se ve que los niveles más bajos de Landau están dados, aparte de la gaussiana, por los polinomios usuales de los estados base z^m de las funciones analíticas. Para concluir la discusión de la funciones de onda en el gauge simétrico, se calcula el valor promedio del operador de centro de guía en el estado $|n = 0, m\rangle$.

Con la ayuda de las ecuaciones (1.38) y (1.40), es posible expresar las componentes del operador de centro de guía en términos de los operadores escalera b y b^\dagger ,

$$X = \frac{l_B}{i\sqrt{2}} (b^\dagger - b) \quad \text{y} \quad Y = \frac{l_B}{\sqrt{2}} (b^\dagger + b), \quad (1.61)$$

y estos operadores actúan en los estados $|n, m\rangle$ de la forma

$$b^\dagger |n, m\rangle = \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle \quad \text{y} \quad b |n, m\rangle = \sqrt{m} |n, m-1\rangle.$$

Por lo tanto el valor promedio del operador de centro de guía en los estados $|n, m\rangle$ es

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \langle n=0, m | \mathbf{R} | n=0, m \rangle = 0$$

pero se tiene que

$$\langle |\mathbf{R}| \rangle = \langle \sqrt{X^2 + Y^2} \rangle = l_B \langle \sqrt{2b^\dagger b + 1} \rangle = l_B \sqrt{2m+1}. \quad (1.62)$$

Esto significa que el centro de guía se encuentra, en un estado cuántico $|n, m\rangle$, en algún lugar de la muestra en un círculo de radio $l_B \sqrt{2m+1}$ mientras que el ángulo está completamente indeterminado. El gauge simétrico es la transformación natural para describir una muestra que tenga la forma de un disco. Si se considera un disco de radio R_{max} y por lo tanto una superficie $\mathcal{A} = \pi R_{max}^2$, el estado cuántico con número cuántico m máximo, al que llamaremos M , tiene un radio $l_B \sqrt{2M+1}$, que naturalmente tiene que coincidir con el radio R_{max} del disco.

De esta forma se obtiene $\mathcal{A} = \pi l_B^2 (2M+1)$, y el número de estados dentro del disco están, en el límite termodinámico $M \gg 1$,

$$M = \frac{\mathcal{A}}{2\pi l_B^2} = n_B \times \mathcal{A} = N_B, \quad (1.63)$$

en concordancia con el resultado obtenido en (1.49) obtenido a partir del principio de incertidumbre de Heisenberg.

1.5.2. Funciones de onda en el gauge de Landau

Si la geometría de la muestra es rectangular, el gauge de Landau (1.37) resulta ser más apropiado que el gauge simétrico para describir el sistema físico de Hall [3]. En la transformación de Landau, el momentum $p_x = \hbar k$ es un número cuántico importante debido a la invarianza traslacional en esta dirección que proporciona el

gauge. Por lo que se propone utilizar el Ansatz de una onda plana para las funciones de onda

$$\psi_{n,k}(x, y) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} \chi_{n,k}(y).$$

En este caso, el hamiltoniano (1.16) se puede reescribir de la forma [4]

$$H^B = \frac{(p_x - eB_y)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_C(y - y_0)^2, \quad (1.64)$$

utilizando el hecho que

$$y_0 = kl_B^2. \quad (1.65)$$

El hamiltoniano (1.64) se reconoce inmediatamente como el hamiltoniano de un oscilador en una dimensión centrado alrededor de la posición y_0 y los estados propios son

$$\chi_{n,k}(y) = H_n \left(\frac{y - y_0}{l_B} \right) e^{-(y-y_0)^2/4l_B^2},$$

en términos de los polinomios de Hermite [42]. La coordenada y_0 juega el rol de la componente Y del centro de guía, la componente X está cubierta por toda la muestra de longitud L , tal como se dicta por la relación de incerteza de Heisenberg que resulta de la relación de conmutación (1.47). Aplicando condiciones de frontera periódicas $k = 2\pi m/L$ para el vector de onda en la dirección \hat{x} , se puede contar el número de estados en una superficie rectangular de largo L y ancho W (en la dirección \hat{y}), similar al razonamiento que se hizo para el gauge simétrico.

Si se considera una muestra que se encuentra en el rango $y_{min} = 0$ a $y_{max} = W$, donde por la condición (1.65) el primero corresponde al vector de onda $|\mathbf{k}| = 0$ y el último a un vector de onda $|\mathbf{k}_{max}| = M \times 2\pi/L$. Dos estados cuánticos vecinos se encuentran separados por la distancia $\Delta y = \Delta k l_B^2 = \Delta m (2\pi/L) l_B^2 = 2\pi l_B^2/L$, y cada estado ocupa una superficie $\sigma = \Delta y \times L = 2\pi l_B^2$, resultado que concuerda con (1.48) que fue obtenido utilizando consideraciones basadas en la relación de incerteza de Heisenberg.

El número total de estados, así como en el gauge simétrico y en el argumento general que dio como resultado la ecuación (1.49), está dado entonces por

$$M = N_B = n_B \times LW = n_B \times \mathcal{A},$$

el cual representa el número de flujo cuántico que atraviesa la superficie, en este caso rectangular, $\mathcal{A} = LW$.

1.6. Efecto Hall cuántico entero

Las propiedades de transporte de un sistema bidimensional de electrones en un campo magnético fuerte fueron reveladas en 1980 con el descubrimiento del efecto Hall cuántico entero por Klaus von Klitzing, Dorda y Pepper, [19]. Quienes recibieron el premio Nobel en 1985 por este importante descubrimiento. El efecto Hall cuántico entero se produce a bajas temperaturas, cuando la escala de energía establecida por $k_B T$ es pequeña comparada con el espaciado $\hbar\omega_C$ de los niveles de Landau [3].

El efecto Hall cuántico consiste en la cuantización en la resistencia de Hall, la cual ya no presenta un comportamiento lineal en \mathbf{B} , como es en el caso clásico, sino que presenta unas plataformas en valores particulares del campo magnético, ver figura 1.3. En las plataformas (también llamados plateaux), la resistencia de Hall está dada en términos de constantes universales

$$R_H = \left(\frac{h}{e^2}\right) \frac{1}{n}, \quad (1.66)$$

y también se expresa en términos del entero n . Tales plataformas en la resistencia de Hall están acompañadas por una resistencia longitudinal que se desvanece.

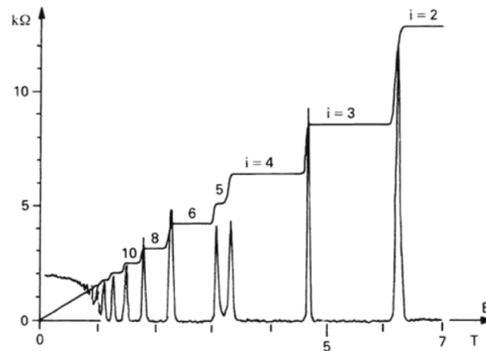


Figura 1.3. Diagrama del efecto Hall cuántico entero en el que se puede ver el comportamiento de las resistencias de Hall y la resistencia longitudinal en función del campo magnético. Acá se puede ver la formación de las plataformas en la resistencia de Hall mientras que la resistencia longitudinal muestra picos en los valores enteros del factor de ocupación. Fuente: D. Tong[12]

Según Goerbig [3] es importante resaltar que la cuantización de la resistencia de Hall, (1.66), es un fenómeno universal; totalmente independiente de las propiedades de la muestra, como geometría o los materiales utilizados para fabricar el gas de electrones bidimensional, o de mayor importancia, la distribución de la concentración de impurezas. Esta universalidad es la razón por la que la cuantización de la

resistencia de Hall es bastante precisa. Típicamente valores del orden de 10^{-9} , que desde 1990 hasta el día de hoy se utiliza como la resistencia estándar.

$$R_{k-90} = h/e^2 = 25812.807\Omega, \quad (1.67)$$

que también se le ha llamado la constante de Klitzing [19], en el que la k del subíndice es honor a Klitzing, y el 90 recuerda al año en el que la resistencia estándar fue definida. Ahora, el tratamiento cuántico que se discutió en la sección anterior, para un sistema de electrones bidimensional sometido a un campo magnético perpendicular es la base para el entendimiento de las propiedades básicas del efecto Hall.

Sin embargo, se necesita relacionar la cuantización de la energía cinética con la cuantización de la resistencia, la es la característica esencial del efecto Hall entero. En esta sección se discutirán las propiedades del transporte de electrones en el efecto Hall entero, se comenzará por describir el movimiento de un electrón en presencia de un potencial electrostático externo para después calcular la conductancia de un nivel de Landau, lo cual nos permite obtener el valor de la resistencia de Hall que se menciona anteriormente, ecuación (1.66); así mismo el rol que juega el desorden en este tipo de transporte.

1.6.1. Movimiento electrónico en un potencial electrostático externo

Considere un sistema de longitud L en el eje x , el cual es mucho más largo que su ancho W el cual se encuentra a lo largo del eje y . Tal sistema se puede modelar por medio de un potencial de confinamiento $V_{conf}(y)$ que solo depende de la dirección \hat{y} , con lo cual el sistema permanece invariante ante traslaciones en dirección de \hat{x} con respecto a este potencial.

Adicionalmente al potencial de confinamiento, se considera también un potencial electrostático que casi no varía $V_{imp}(x, y)$ que es causado por las impurezas de la muestra. Este potencial de impurezas rompe la invarianza ante traslaciones en la dirección de \hat{x} así como en la dirección \hat{y} , que también es afectado por el potencial de confinamiento. El hamiltoniano de una partícula bidimensional en un campo magnético perpendicular debe ser completado por el término de un potencial que tenga la forma

$$V(\mathbf{r}) = V_{conf}(y) + V_{imp}(x, y) \quad (1.68)$$

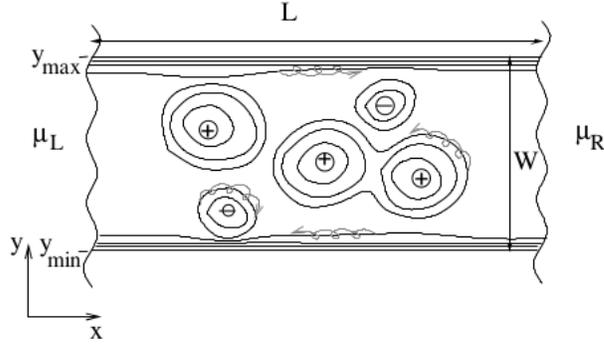


Figura 1.4. Esquema de la distribución de potencial en la muestra. Los contactos metálicos se describen por los potenciales químicos μ_L y μ_R por los contactos en la parte izquierda y derecha, respectivamente. Fuente: Goerbig [3]

el cual crea en la muestra, una distribución de potencial, que es la que se muestra en la figura 1.4

Tratamiento semiclásico

Como primer paso, se considera un potencial $V(\mathbf{r})$ que varía suavemente en la escala establecida por la longitud magnética $\xi \gg l_B$, donde ξ describe la escala de longitud característica para la variación de $V(\mathbf{r})$. En el caso de que el potencial electrostático varía suavemente en una escala de longitud establecida por la longitud magnética y no genera niveles de Landau mixtos, cuando $|\nabla V| \ll \hbar\omega_C/l_B$, se puede aproximar el argumento \mathbf{r} en el potencial (1.68) por la variable del centro de guía \mathbf{R} ,

$$V(\mathbf{r}) \simeq V(\mathbf{R}). \quad (1.69)$$

Como una consecuencia de la no conmutatividad del término del potencial $V(\mathbf{R})$ con el operador del centro de guía, la cantidad anterior adquiere una dinámica, como se puede ver de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{X} &= [X, H] = [X, V(\mathbf{R})] = \frac{\partial V}{\partial Y}[X, Y] = il_B^2 \frac{\partial V}{\partial Y} \\ i\hbar\dot{Y} &= [Y, V(\mathbf{R})] = -il_B^2 \frac{\partial V}{\partial X}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

de donde se concluye que $\dot{\mathbf{R}}$ es perpendicular a ∇V . Las ecuaciones de movimiento de Heisenberg son útiles en la discusión del límite semiclásico debido a que el promedio

de las ecuaciones satisfacen las ecuaciones clásicas de movimiento

$$\langle \dot{\mathbf{R}} \rangle \perp \nabla V, \quad (1.71)$$

lo que significa que, dentro del marco semiclásico, el centro de guía se mueve a través de líneas equipotenciales del potencial electrostático. Esta característica, que recibe el nombre de velocidad de corriente de Hall [3]

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \langle \dot{\mathbf{R}} \rangle = \frac{-\nabla V \times \mathbf{B}}{eB^2}, \quad (1.72)$$

en términos del campo eléctrico local, $\mathbf{E} = \nabla V/e$ es mostrada en la figura 1.4 por las trayectorias en espiral que se aprecian en las curvas equipotenciales.

En los cúmulos que se muestran en la figura 1.4, el esquema de potencial es creado por las impurezas de la muestra, y los electrones se mueven en sentido de las agujas del reloj en una línea equipotencial alrededor de un pico que es causado por una impureza de carga negativa y que se mueve en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor de un valle creado por una impureza de carga positiva.

Si las líneas equipotenciales están cerradas, como es el caso de la mayoría de líneas equipotenciales en un esquema de potencial [3], un electrón no se puede mover de un punto hacia otro en una distancia macroscópica, que para nuestra muestra es de un potencial μ_L a μ_R o viceversa.

Por lo tanto, un electrón moviéndose en una línea equipotencial cerrada no contribuye con el transporte electrónico, y entonces el electrón se encuentra localizado [3]. En los bordes, las líneas equipotenciales reflejan el potencial de confinamiento, el cual es cero en las regiones donde se acumula el potencial pero aumenta de forma rápida cuando se acerca a los bordes de la muestra en y_{min} y y_{max} de la figura 1.4.

En este caso, las líneas equipotenciales están abiertas y por lo tanto conectan los dos contactos electrónicos. Los electrones que ocupan estados cuánticos en estas líneas equipotenciales contribuyen al transporte electrónico, en contraste de aquellos que se encuentran en las líneas equipotenciales cerradas del cúmulo. Estos estados cuánticos reciben el nombre de *estados extendidos* [3], que son el caso contrario a los estados localizados que se mencionan arriba.

Potencial electrostático con invarianza traslacional en la dirección \hat{x}

Aunque las consideraciones semiclásicas presentadas anteriormente nos conducen a la correcta interpretación física de estados localizados y extendidos; ésta se basa en la suposición que el potencial electrostático varía suavemente en la escala de la longitud magnética, de tal forma que podemos reemplazar la posición del electrón con la del centro de guía (1.69).

Sin embargo esta suposición puede presentar problemas bajo el punto de vista del potencial de confinamiento, el cual varía fuertemente en los bordes de la muestra [3]. Por esta razón a la dependencia del potencial de confinamiento en dirección de \hat{y} se le da un tratamiento cuántico. Para ello se necesita escoger el gauge apropiado para el tratamiento cuántico, que resulta ser el gauge de Landau (1.37), debido a que respeta la invarianza traslacional en el eje x , por lo tanto el hamiltoniano (1.64) toma la forma

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_C(y - y_0)^2 + V_{conf}(y). \quad (1.73)$$

Es importante recordar que para un vector de onda \mathbf{k} en la dirección \hat{x} , la posición alrededor de la cual el oscilador armónico está centrado está dado por la ecuación (1.65), $y_0 = kl_B^2$. Se puede expandir el potencial de confinamiento, incluso en el caso de una fuerte variación, alrededor de esta posición,

$$V(y) \simeq V(y_0 = kl_B^2) - eE(y_0)(y - y_0) + \mathcal{O}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right), \quad (1.74)$$

donde el campo eléctrico local está dado en términos de la primera derivada del potencial en y_0 ,

$$eE(y_0) = -\left.\frac{\partial V_{conf}}{\partial y}\right|_{y_0}. \quad (1.75)$$

Haciendo esta expansión se obtiene el hamiltoniano

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_C(y - y'_0)^2 + V_{conf}(y_0) - \frac{1}{2}mv_D^2(y_0), \quad (1.76)$$

donde la velocidad de deriva local toma la forma $v_D = E(y_0)/B$ y la posición del oscilador armónico está desplazada una cantidad $y \rightarrow y'_0 = y_0 + eE(y_0)/m\omega_C$. Como el último término es cuadrático en el campo eléctrico, implica que es un término de segundo orden en la expansión del potencial de confinamiento, por lo que podemos

despreciar este término y el hamiltoniano final queda

$$H = \frac{p_y}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_C(y - y'_0)^2 + V_{conf}(y_0'), \quad (1.77)$$

en donde se reemplazó el argumento de y_0 por la posición desplazada del oscilador armónico y'_0 , que es válida para términos de primer orden en la expansión del potencial de confinamiento.

Por lo tanto se puede obtener el espectro de energías

$$\epsilon_{n,y_0} = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right) + V_{y_0} \quad (1.78)$$

por simplicidad de la notación se omitió la prima en la posición desplazada del oscilador armónico. De esta forma se puede obtener el mismo espectro de niveles de Landau como en el caso de ausencia de potencial de confinamiento, aparte de una energía desplazada que es determinada por el valor del potencial de confinamiento en la posición del oscilador armónico, que puede variar fuertemente. Esta posición y_0 juega el mismo papel que el de la posición del centro de guía, como se mencionó en la última sección, donde se calcularon las funciones de onda en el gauge de Landau 1.5.2. Con esto se obtiene un resultado que es consistente con el tratamiento semiclásico que se trabajó anteriormente.

1.6.2. Conductancia de un nivel de Landau

Ahora se calcula la conductancia de un nivel de Landau completamente lleno para la geometría descrita en la figura 1.4 que es el caso para cuando todos los estados cuánticos, descritos por el gauge de Landau, en el n -ésimo nivel de Landau están ocupados. Como primer paso, se calcula la corriente para el n -ésimo nivel de Landau, que fluye del contacto izquierdo al derecho, y está dado según [3] por

$$\mathbf{I}_n^x = -\frac{e}{L} \sum_k \langle n, k | v_x | n, k \rangle, \quad (1.79)$$

que representa la suma sobre todos los N_B canales cuánticos caracterizados por el vector de onda $k = |\mathbf{k}| = 2\pi m/L$, con la velocidad

$$\langle n, k | v_x | n, k \rangle = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_{n,k}}{\partial k} = \frac{L}{2\pi\hbar} \frac{\Delta \epsilon_{n,m}}{\Delta m}, \quad (1.80)$$

en términos de la relación de dispersión (1.78). La velocidad en la dirección \hat{y} es cero debido a que la energía no se dispersa en función de la componente y del vector de onda. Si tomamos $\Delta m = 1$, la expresión anterior puede ser evaluada y se obtiene que

$$\langle n, k | v_x | n, k \rangle = -\frac{e}{L} (\epsilon_{n, m+a} - \epsilon_{n, m}). \quad (1.81)$$

Aplicando esta ecuación, la corriente (1.79) para el n -ésimo nivel de Landau toma la forma

$$I_n = -\frac{e}{L} \sum_m \frac{L}{h} (\epsilon_{n, m+1} - \epsilon_{n, m}), \quad (1.82)$$

los términos de la suma se cancelan, excepto por los términos de las fronteras $\epsilon_{n, m_{min}}$ y $\epsilon_{n, m_{max}}$, que corresponden a los potenciales químicos μ_{min} y μ_{max} , respectivamente. La diferencia entre estos dos potenciales químicos puede ser descrita en términos del voltaje V entre el borde inferior y el borde superior, $\mu_{max} - \mu_{min} = -eV$. Obteniendo como resultado final

$$I_n = -\frac{e}{h} (\mu_{max} - \mu_{min}) = \frac{e^2}{h} V. \quad (1.83)$$

Esto significa que cada nivel de Landau contribuye con un cuanto de conductancia $G_n = e^2/h$ al transporte electrónico y n niveles de Landau completamente llenos contribuyen una conductancia

$$G = \sum_{n'=0}^{n-1} G_{n'} = n \frac{e^2}{h}. \quad (1.84)$$

Estados en el borde

El transporte de carga, que es independiente de la longitud L o de la geometría particular de la muestra se puede entender mejor por medio del cuadro de los estados en el borde mostrados en la figura 1.5.

Si se considera el borde superior, el estado en el borde que transporta la corriente del nivel de Landau n es el que se sitúa en y_{max}^n , donde el nivel de Landau n cruza la energía de Fermi y el factor de acoplamiento va de un $\nu = n + 1$ a $\nu = n$.

Debido a la curvatura superior del potencial de confinamiento, se impone una dirección particular en el movimiento electrónico, el cual es la dirección de la velocidad de corriente de Hall, ver figura 1.4. Este movimiento unidireccional también es llamado quiralidad del estado de borde [3]. Es importante notar que esta es la misma quiralidad que uno espera de la expresión semiclásica (1.72) para la velocidad de corriente de Hall.

La quiralidad es la misma para todos los estados borde n en el mismo borde de la muestra donde el gradiente del potencial de confinamiento no cambia de dirección. Por lo tanto, incluso si un electrón es dispersado de un canal n a otro n' en el mismo borde, no cambia de dirección de movimiento y el electrón no puede ser dispersado hacia atrás a menos que sea dispersado hacia el borde opuesto con la quiralidad opuesta [3].

Sin embargo, en un sistema de Hall cuántico usual, los bordes opuestos se encuentran separados por una distancia macroscópica W , y los procesos de dispersión hacia atrás están fuertemente suprimidos [3] en la relación l_B/W entre la longitud magnética, que determina la extensión espacial del estado cuántico, y el ancho de la muestra W . También el sistema de Hall cuántico para valores del factor de acoplamiento $\nu = n$ es un líquido de electrones bastante inusual, de hecho resulta ser un aislante topológico en el que sus bordes son conductores. [12]

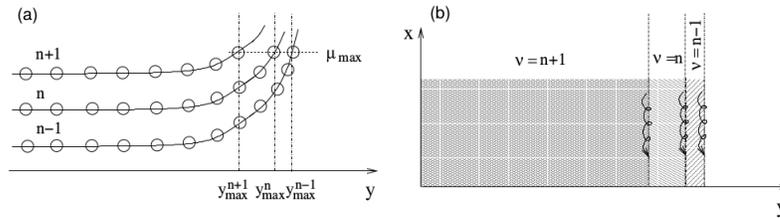


Figura 1.5. Estados borde: a) Los niveles de Landau que se curvan hacia arriba cuando se aproximan a los bordes de la muestra pueden ser descritos por medio de un aumento en el potencial de confinamiento. Por lo que se puede asociar a cada nivel de Landau un valor máximo y_{max}^n para a componente y donde el nivel de Landau cruza el potencial químico μ_{max} . b) En cada posición y_{max}^n el factor de acoplamiento decae por un valor de 1. El estado borde n está asociado con el salto en y_{max}^n y el gradiente del potencial de confinamiento impone una dirección a la velocidad de corriente de Hall para este estado, conocida como quiralidad, la cual es la misma para todos los estados borde en el mismo borde. Fuente: Goerbig [3]

1.6.3. El efecto Hall cuántico entero y percolación

Hasta ahora se ha mostrado que la resistencia de Hall está cuantizada (1.66) cuando los n niveles de Landau están completamente llenos, lo cual ocurre cuando el factor de acoplamiento es exactamente $\nu = n$. Sin embargo no se ha visto por que existen las plataformas que se pueden ver en la resistencia de Hall ya que es una resistencia que se mantiene constante incluso si uno varía el factor de acoplamiento variando el campo magnético alrededor de $\nu = n$ [3].

Para describir la resistencia de Hall constante a lo largo de un intervalo grande

de campo magnético alrededor de $\nu = n$ se tiene que tomar en cuenta la localización de los electrones adicionales, o agujeros que se describen en la sección 1.6.1. Esto se muestra en la figura 1.6 donde se representa el llenado de los niveles de Landau en la franja inferior, la distribución de potencial del último nivel parcialmente lleno mostrada en la parte franja central de la figura 1.6; y las resistencias como una función del campo magnético medidas en un sistema de Hall en la franja superior.

Se empieza con la situación de n niveles de Landau completamente llenos, columna (a) de la figura 1.6, donde el nivel correspondiente al nivel de Landau n y su distribución de potencial se encuentra desocupado; esto debido a que el índice 0 corresponde a el nivel más bajo de Landau, todos los demás niveles de Landau $n' = 0, \dots, n - 1 =$ son los niveles de Landau totalmente llenos y el nivel n es por lo tanto el nivel más bajo desocupado. Acá se logra una medición de la resistencia de Hall $R_H = h/e^2n$ y una resistencia longitudinal de cero [3].

En la columna (b) de la figura 1.6 se representa la situación donde los niveles de Landau n se llenan parcialmente de electrones cuando el campo magnético B disminuye. Estos electrones en n se sitúan de forma preferencial en los valles de la distribución de potencial, que son justamente las regiones donde las líneas equipotenciales están más cercanas entre sí y las cuales generan los valles en el paisaje de la distribución del potencial.

Los electrones en el nivel n se encuentran localizados en algún lugar del cúmulo y no afectan las características globales de transporte medidas por las resistencias, debido a que no interactúan con los contactos de la muestra. Por lo tanto la resistencia de Hall permanece sin alterar y la resistencia longitudinal sigue siendo cero a pesar de la variación en el campo magnético dando así origen a las plataformas características en la resistencia de Hall [4].

Si se continúa con la disminución del campo magnético, las regiones de la distribución de potencial en el nivel de Landau n ocupado por electrones aumentan, eventualmente estos electrones son rodeados por líneas equipotenciales que pasan a través del cúmulo de potencial y que conectan ambos bordes opuestos. En este caso, un electrón que ingresa en el contacto izquierdo y que viaja cierta distancia en el borde superior puede saltar a un estado asociado a esta línea equipotencial y por lo tanto puede alcanzar el borde inferior. Debido a este fenómeno, el electrón es retro dispersado al contacto izquierdo, el cual resulta en un incremento en la resistencia longitudinal [3].

Si se mide la resistencia entre los dos contactos en el borde inferior, una caída de potencial es producida. Es esta caída de potencial la que causa la resistencia

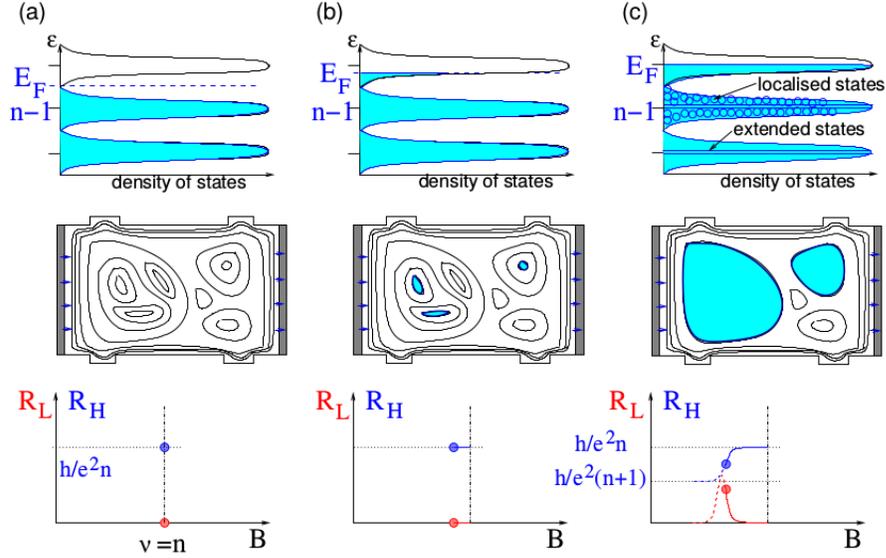


Figura 1.6. Localización y comportamiento de los electrones en un sistema de Hall. La franja superior muestra la densidad electrónica en los niveles de Landau en términos de la energía de Fermi E_F . La franja en el centro muestra el comportamiento del paisaje de la distribución de potencial electrostático en el sistema de Hall. Finalmente la franja inferior ejemplifica el comportamiento de las resistencias de Hall en azul y la resistencia longitudinal en rojo; ambas en función de la variación del campo magnético. Fuente: Goerbig [3]

longitudinal distinta de cero. Al mismo tiempo la resistencia de Hall ya no está cuantizada y salta a la siguiente plataforma más baja, un fenómeno conocido como transición de plataforma [4].

Esta situación es la que líneas equipotenciales llenas de electrones que conectan los bordes opuestos de la muestra son los estados extendidos mostrados en la primera franja de la figura 1.6. Esta situación es opuesta a la de los estados localizados en el cúmulo que ocurre cuando el nivel de Landau n está lleno aproximadamente a la mitad. Estos estados extendidos, los cuales se encuentran en el centro de los picos de la densidad de estados, parte superior de la figura 1.6, son estados que se encuentran en el cúmulo de potencial [3].

En la transición de una plataforma, el potencial químico en los bordes ya no es constante debido a la retrodispersión de los electrones y la resistencia ya no está cuantizada. Por lo que se observa el pico en la resistencia asociado con la resistencia longitudinal. Como consecuencia, en la transición de plataforma, se mide la superposición de la resistencia longitudinal y la resistencia de Hall [4, 3]

Si se incrementa aún más el llenado del nivel de Landau n se puede aplicar el mismo argumento, pero ahora en términos de los estados agujero. La resisten-

cia de Hall está cuantizada de la forma $R_H = h/e^2(n + 1)$ y los agujeros, que son los electrones faltantes con respecto al nivel de Landau completamente lleno $n + 1$, se encuentran localizados en los estados cercanos a las líneas equipotenciales alrededor de los sumideros de potencial. Como consecuencia, la resistencia longitudinal cae a cero nuevamente [3].

2. EFECTO HALL EN EL GRAFENO

En este capítulo se estudiará el caso especial del efecto Hall observado de forma experimental en el grafeno [22], el cual tiene la particularidad de que los electrones en este material muestran un comportamiento relativista. Es necesario comenzar con el estudio de la red hexagonal y la estructura de banda electrónica en el grafeno; con estas herramientas se obtendrá el hamiltoniano que describe a las partículas en este sistema. Con el hamiltoniano del sistema se procederá a obtener los niveles de Landau relativistas que describen el efecto Hall observado en el grafeno.

2.1. Red hexagonal del grafeno

Los átomos de carbono en el grafeno se condensan en una red hexagonal debido a su hibridación sp^2 [10, 7]. La red hexagonal no es una red de Bravais debido a que dos sitios vecinos no son equivalentes [40]. La figura 2.1 (a) muestra que un sitio en la subred A tiene sus vecinos más cercanos en las direcciones nororiente, noroccidente y sur; mientras que un sitio en la subred B tiene vecinos más cercanos en las direcciones norte, suroccidente y suroriente.

Sin embargo, ambas subredes A y B son redes de Bravais triangulares y se puede considerar la red hexagonal como una red de Bravais triangular con una base de dos átomos, para lo cual cobra importancia el estudio de la dualidad panel de abeja-estrella en el que se puede obtener soluciones exactas a algunos modelos [37]. La distancia entre los vecinos más cercanos de los átomos de carbono es de 0.142 nm, la cual es el promedio de los enlaces covalentes σ [10]. Los tres vectores que conectan un sitio en la subred A con un vecino más cercano en la subred B están dados por

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \frac{a}{2} (\sqrt{3}\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \frac{a}{2} (-\sqrt{3}\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \boldsymbol{\delta}_3 = -a\mathbf{e}_y \quad (2.1)$$

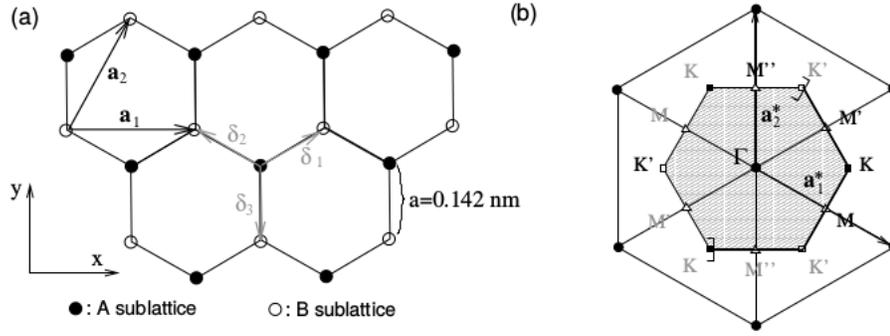


Figura 2.1. (a) Red hexagonal. Los vectores δ_1 , δ_2 y δ_3 conectan átomos de carbono separados por una distancia a . Los vectores \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son los vectores base de la red de Bravais triangular. (b) Red recíproca de la red triangular con sus vectores primitivos \mathbf{a}_1^* y \mathbf{a}_2^* . La región sombreada representa la primera zona de Brillouin con su centro Γ y sus dos esquinas no equivalentes K y K' . La parte gruesa del borde de la primera zona de Brillouin representa a aquellos puntos que se encuentran de tal manera que ninguno de los puntos sea contado dos veces. Como complemento se muestran los tres puntos cristalográficos M , M' y M'' . Fuente: Fuchs-Goerbig [10]

y la red de Bravais triangular está trazada por los vectores base

$$\mathbf{a}_1 = \sqrt{3}a\mathbf{e}_x \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{3}a}{2} (\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y), \quad (2.2)$$

el módulo de los vectores base se encuentra en el espaciado de la red $\tilde{a} = \sqrt{3}a = 0.24$ nm, y el área de la celda unitaria es $A_{cu} = \sqrt{3}\tilde{a}^2/2 = 0.051$ nm². Por lo tanto la densidad de los átomos de carbono está dada por $n_C = 2/A_{cu} = 39$ nm⁻² = 3.9×10^{15} cm⁻².

Debido a que existe solo un electrón π por átomo de carbono que no se involucra en un enlace covalente σ , hay tantos electrones de valencia como átomos de carbono, y su densidad es por lo tanto, $n_\pi = n_C = 3.9 \times 10^{15}$ cm⁻² [10]. Sin embargo, esta densidad no es igual a la densidad de portadores de carga en el grafeno, que se pueden obtener en mediciones de transporte eléctrico.

La red recíproca, que está definida con respecto a la red triangular de Bravais se muestra en el inciso (b) de la figura 2.1 y es trazada por los vectores

$$\mathbf{a}_1^* = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a} \left(\mathbf{e}_x - \frac{\mathbf{e}_y}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_2^* = \frac{4\pi}{3a} \mathbf{e}_y, \quad (2.3)$$

físicamente, todos los sitios de la red recíproca representa vectores de onda equivalente [10]. Cualquier onda, ya sea una excitación vibracional en la red o un paquete

de onda electrónico cuántico, que se propaga en la red con un vector de onda que difiere por un vector de red recíproca tiene de hecho la misma fase multiplicado por 2π debido a la relación

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* = 2\pi\delta_{ij}, \quad (2.4)$$

para valores $i, j = 1, 2$ de los vectores base y recíprocos de la red. La primera zona de Brillouin, sombreada en el hexágono de la figura 2.1 (b), representa un conjunto de puntos no equivalentes en el espacio recíproco. Las excitaciones de longitudes de onda grandes se sitúan en las regiones cercanas al punto Γ en el centro de la primera zona de Brillouin. Además se pueden distinguir las seis esquinas de la primera zona de Brillouin, la cual consiste en los puntos K y K' representados por los vectores

$$\pm \mathbf{K} = \pm \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} \mathbf{e}_x, \quad (2.5)$$

en el que las cuatro esquinas restantes, que se muestran en la figura 2.1 (b), se pueden conectar a uno de estos puntos a través de una traslación de un vector de la red recíproca. Estos puntos cristalográficos juegan un rol esencial en las propiedades electrónicas del grafeno, debido a que sus excitaciones de baja energía se centran alrededor de los puntos K y K' [10].

2.2. Banda electrónica del grafeno

Como se analizó en la sección anterior, la red hexagonal del grafeno consiste en dos subredes A y B, la función de onda electrónica

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = a_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}^{(A)}(\mathbf{r}) + b_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}^{(B)}(\mathbf{r}), \quad (2.6)$$

es una superposición de dos funciones de onda, correspondientes a las subredes A y B respectivamente, donde $a_{\mathbf{k}}$ u $b_{\mathbf{k}}$ son funciones complejas del cuasimomentum \mathbf{k} . Las funciones $\psi_{\mathbf{k}}^{(A)}(\mathbf{r})$ y $\psi_{\mathbf{k}}^{(B)}(\mathbf{r})$ son funciones de Bloch [40], cuya forma general está dada por

$$\psi_{\mathbf{k}}^j(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}_l} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_l} \phi^{(j)}(\mathbf{r} + \delta_j - \mathbf{R}_l), \quad (2.7)$$

en términos de la función de onda $\phi^j(\mathbf{r} + \delta_j - \mathbf{R}_l)$ centrada alrededor de la posición $\mathbf{R}_l - \delta_j$, donde δ_j es el vector que conecta los sitios \mathbf{R}_l de la red de Bravais con el sitio del j -ésimo átomo en la celda unitaria. Con la ayuda de estas funciones de

onda, se pueden buscar las soluciones de la ecuación de Schrödinger

$$H\psi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}, \quad (2.8)$$

donde H es el hamiltoniano de los electrones en una red, el cual es del tipo de la forma (1.11). Si se multiplica la ecuación de Schrödinger por $\psi_{\mathbf{k}}^*$ del lado izquierdo se obtiene la ecuación $\psi_{\mathbf{k}}^*H\psi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}^*\psi_{\mathbf{k}}$, lo cual se puede escribir en su forma matricial con utilizando las ecuaciones (2.6) y (2.7)

$$(a_{\mathbf{k}}^*, b_{\mathbf{k}}^*)\mathcal{H}_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \epsilon_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}^*, b_{\mathbf{k}}^*)\mathcal{S}_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ b_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

aquí, la matriz del hamiltoniano se define como

$$\mathcal{H}_{\mathbf{k}} \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})*} H \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})} & \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})*} H \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})} \\ \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})*} H \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})} & \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})*} H \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})} \end{pmatrix} = \mathcal{H}_{\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.10)$$

y la matriz transpuesta, que tiene la forma

$$\mathcal{S}_{\mathbf{k}} \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})*} \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})} & \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})*} \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})} \\ \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})*} \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})} & \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})*} \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})} \end{pmatrix} = \mathcal{S}_{\mathbf{k}}^\dagger \quad (2.11)$$

toma en cuenta la no ortogonalidad de las funciones de onda de prueba. Los valores propios $\epsilon_{\mathbf{k}}$ de la ecuación de Schrödinger dan origen a las bandas de energía [10], y se pueden obtener de la ecuación

$$\det[\mathcal{H}_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}}^\lambda \mathcal{S}_{\mathbf{k}}] = 0, \quad (2.12)$$

la cual se necesita satisfacer por una solución distinta de cero de las funciones de onda, en donde $a_{\mathbf{k}} \neq 0$ y $b_{\mathbf{k}} \neq 0$. El índice λ denota las bandas de energía de las cuales existen un número igual al de soluciones de la ecuación (2.12) [7].

Para el caso de dos átomos por celda unitaria, hay dos soluciones y por lo tanto dos bandas [10]. Si se desprecian la superposición de las funciones de onda en sitios vecinos, la matriz (2.11) se reduce a una matriz unitaria ∞ multiplicado por el número de partículas N debido a la normalización de las funciones de onda.

La ecuación (2.12) establece que las bandas de energía son únicamente los valores propios de la matriz del hamiltoniano (2.10). Además, debido a que las dos subredes son equivalentes desde un punto de vista químico [3], se tiene $\psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})*} H \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{A})} = \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})*} \psi_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{B})}$, y por lo tanto los términos en la diagonal contribuyen únicamente una

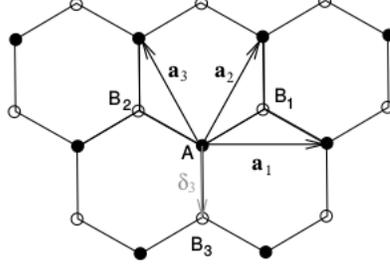


Figura 2.2. Modelo de enlace fuerte en el grafeno. Fuente: Fuchs-Goerbig [10]

variación constante a las bandas de energía que se pretenden reducir a cero. Por lo que los únicos términos relevantes son los términos fuera de la diagonal de la ecuación (2.10), $\mathcal{H}_{\mathbf{k}}^{AB} \equiv \psi_{\mathbf{k}}^{(A)*} H \psi_{\mathbf{k}}^{(B)} = N t_{\mathbf{k}}^{AB}$, con el término de salto [7] (en inglés *hopping*)

$$t_{\mathbf{k}}^{AB} = \sum_{\mathbf{R}_l} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} \int d^2r \phi^{(A)*}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_k) H \phi^{(B)}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_{AB} - \mathbf{R}_m), \quad (2.13)$$

donde $\boldsymbol{\delta}_{AB}$ es un vector que conecta un sitio A con un sitio B. Para obtener la estructura de bandas básica del grafeno, es suficiente con considerar únicamente los sitios de los vecinos más cercanos descritos por la amplitud de salto [7]

$$t = \int d^2r \phi^{A*}(\mathbf{r}) H \phi^B(\mathbf{r} \boldsymbol{\delta}_3), \quad (2.14)$$

ya que la geometría de la red se escogió $\boldsymbol{\delta}_{AB} = \boldsymbol{\delta}_3$, ver figura 2.2. Si se considera un sitio arbitrario a_i en la subred A (figura 2.2) se puede ver que el término de salto (2.13) consiste de tres términos correspondientes a el vecino más cercano B_1 , B_2 y B_3 , de los cuales todos tienen la misma amplitud de salto t [10]. Sin embargo, únicamente el sitio B_3 es descrito por el mismo vector de red que el sitio A, por lo tanto produce una fase cero de la matriz de salto. Los sitios B_1 y B_2 corresponden a los vectores de red respectivamente desplazados por

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{3}a}{2} (\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y) \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \frac{\sqrt{3}a}{2} (-\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y), \quad (2.15)$$

donde $a = |\boldsymbol{\delta}_3| = 0.142$ nm es la distancia entre el vecino más cercano de los átomos de carbono [10]. Por lo que contribuyen un factor de fase $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2)$ y $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_3)$

respectivamente. Con esto el término de salto (2.13) se puede reescribir como

$$t_{\mathbf{k}}^{AB} = t\gamma_{\mathbf{k}}^* = (t_{\mathbf{k}}^{BA})^*, \quad (2.16)$$

en la que se definió la suma de los factores de fase de los vecinos más cercanos

$$\gamma_{\mathbf{k}} = 1 + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_2} + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_3}. \quad (2.17)$$

Con estos elementos, la banda de dispersión se puede obtener fácilmente al resolver la ecuación (2.12)

$$\epsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) = \lambda|t_{\mathbf{k}}^{AB}| = \lambda t|\gamma_{\mathbf{k}}|, \quad (2.18)$$

y su solución se muestra en la figura 2.3. La banda de dispersión tiene una simetría partícula-agujero [7], mientras que la banda de valencia, la cual se denota como $\lambda = -$, toca la banda de conducción λ en los puntos inequivalentes, los cuales se determinan estableciendo el valor $\gamma_{\pm\mathbf{K}} = 0$ y que coincide con las dos esquinas inequivalentes de la zona de Brillouin K y K' .

Debido a que la cantidad de electrones que hay en los orbitales π , los cuales determinan las propiedades de conducción del grafeno a baja energía, es proporcional a los sitios en la red; toda la estructura de bandas se encuentra a media ocupación. Esto es debido a las dos orientaciones del espín de los electrones, lo que permite que una ocupación doble para cada orbital π [10].

Como consecuencia, la energía de Fermi se encuentra justo en los puntos de contacto K y K' de las dos bandas, a menos que las hojas de grafeno sean alteradas al estar sometidas a un campo eléctrico externo; los puntos K están dados por [10]

$$\pm \mathbf{K} = \pm \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} \mathbf{e}_x \quad (2.19)$$

La figura 2.3 muestra la banda de dispersión en las vecindades de los puntos de contacto K y K' , y que por su linealidad es suficiente para describir las propiedades electrónicas del grafeno a baja energía [3], que es cuando todas las escalas de energías relevantes son mucho más pequeñas que todo el ancho de banda.

Con la forma cónica de las dos bandas es fácil recordar a las partículas relativistas [3], las cuales, en general tienen una dispersión de energía $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$, en términos de la velocidad de la luz, c , y de la masa de las partículas m . Si la masa es cero, se obtiene la forma $E = \pm c|\mathbf{p}|$, tal como es el caso de los electrones de

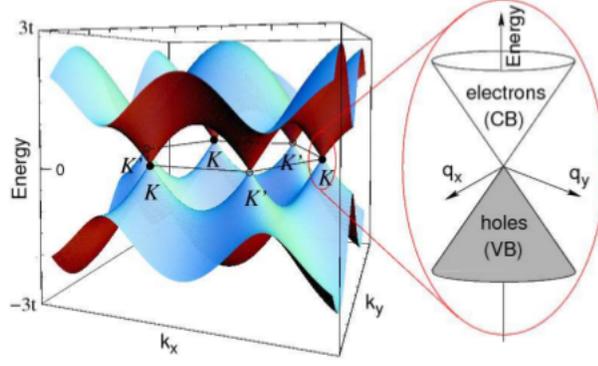


Figura 2.3. Bandas de energía del grafeno. La banda de valencia toca la banda de conducción en las dos esquinas de la zona de Brillouin K y K' . Fuente Fuchs-Goerbig: [10]

masa energía en el grafeno [10], [3] y que se muestra en la figura 2.3, por lo que los electrones en el grafeno pueden ser tratados como fermiones sin masa de Dirac [3].

Límite continuo

La analogía entre electrones en el grafeno y partículas relativistas sin masa se puede corroborar al analizar las propiedades electrónicas del grafeno a bajas energías, las cuales se pueden obtener expandiendo la estructura de bandas en las vecindades de los puntos K y K' [10]. Obteniendo así el hamiltoniano de baja energía al expandir la suma de los factores de fase (2.17) alrededor de K y K'

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{p}}^{\pm} = \gamma_{\mathbf{k}} = \pm \mathbf{K} + \mathbf{p} &= 1 + e^{\pm i \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_2} e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_2} + e^{\pm i \mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_3} e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_3} \\ &\simeq 1 + e^{\pm i 2\pi/3} [1 + i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_2] + e^{\mp i 2\pi/3} [1 + i \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_3] \quad (2.20) \\ &= \gamma_{\mathbf{p}}^{\pm(0)} + \gamma_{\mathbf{p}}^{\pm(1)}.\end{aligned}$$

Por definición de los puntos de Dirac y su posición en las esquinas de la zona de Brillouin K y K' , se tiene que $\gamma_{\mathbf{p}}^{\pm(0)} = \gamma_{\mathbf{K}} = 0$, por lo que se puede limitar la expansión al primer orden de $|\mathbf{p}|$ [10]. Por simplicidad se utilizó $\hbar = 1$, donde el momentum tiene las mismas unidades que el vector de onda, con esto, el término de primer orden está dado por

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{p}}^{\pm(1)} &= i \frac{\sqrt{3}a}{2} \left[(p_x + \sqrt{3}p_y) e^{\pm i 2\pi/3} + (-p_x + \sqrt{3}p_y) e^{\mp i 2\pi/3} \right], \quad (2.21) \\ &= \mp \frac{3a}{2} (p_x \pm ip_y),\end{aligned}$$

que se puede obtener sabiendo que $\sin(\pm 2\pi/3) = \cos(\pm\sqrt{3}/2)$ y que $\cos(\pm 2\pi/3) = -1/2$. Por lo tanto, se puede obtener el hamiltoniano efectivo de baja energía

$$H_{\mathbf{p}}^{\xi} = \xi v (p_x \sigma^x + \xi p_y \sigma^y), \quad (2.22)$$

en términos de la velocidad de Fermi, definida de la forma [43]

$$v = \frac{3ta}{2\hbar}. \quad (2.23)$$

El índice $\xi = \pm$ denota los valles K y K' , y se obtienen en los K el hamiltoniano de Dirac

$$H_D = v \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.24)$$

mientras que el hamiltoniano de baja energía en el punto K' es

$$H'_D = -v \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*, \quad (2.25)$$

con $\boldsymbol{\sigma}^* = (\sigma^x, -\sigma^y)$, en términos de las matrices de Pauli

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Es importante notar que en este caso, la velocidad de Fermi v juega el rol de la velocidad de la luz c , que es 300 veces mayor, $c \simeq 300v$. Para finalizar, se aplica la sustitución de Peierls (1.12) para que el hamiltoniano de Dirac (2.24) tome la forma

$$H_D^B = v [\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r})] \quad (2.27)$$

el cual representa a nuestras partículas relativistas cargadas en un sistema de dos dimensiones.

2.3. Niveles de Landau relativistas

El caso relativista (2.27) de electrones en el grafeno se puede tratar de la misma forma que el caso no relativista, en términos de los operadores escalera (1.24), el hamiltoniano se puede escribir como

$$H_D^B = v \begin{pmatrix} 0 & \Pi_x - i\Pi_y \\ \Pi_x + i\Pi_y & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \frac{\hbar v}{l_B} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

De donde se ve que la frecuencia característica $\omega' = \sqrt{2}v/l_B$ juega el rol de la frecuencia de ciclotrón en el caso relativista. Sin embargo, es importante tener cuidado de no escribir esta frecuencia de la forma eB/m_b , ya que la masa de banda en el grafeno es cero y esta frecuencia resultaría en una singularidad [3].

Para obtener los valores propios y los estados propios del hamiltoniano (2.28), se necesita resolver la ecuación de valores propios $H_D^B \psi_n = \epsilon_n \psi_n$, y que debido a que el hamiltoniano es una matriz de 2×2 , los estados propios son espinores con la forma [10]

$$\psi_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

por lo que la ecuación que se necesita resolver es el sistema de ecuaciones

$$\hbar\omega' av_n = \epsilon_n u_n \quad \text{y} \quad \hbar\omega' a^\dagger u_n = \epsilon_n v_n, \quad (2.30)$$

lo que nos da como resultado para la segunda componente del espinor

$$a^\dagger av_n = \left(\frac{\epsilon_n}{\hbar\omega'} \right)^2 v_n. \quad (2.31)$$

Esta componente es un estado propio del operador número $n = a^\dagger a$, con lo que se puede identificar, en forma de un factor numérico, la segunda componente del espinor v_n con el estado propio $|n\rangle$ del hamiltoniano no relativista (1.27), $v_n \sim |n\rangle$.

Por otro lado, el cuadrado de la energía es proporcional al número cuántico, $\epsilon_n^2 = (\hbar\omega')^2 n$. Esta ecuación tiene dos soluciones, positiva y negativa, respectivamente; y se necesita introducir otro número cuántico $\lambda = \pm$, el cual representan los estados de energía positiva y negativa. Este número cuántico también juega el mismo rol que el índice de banda [3], donde $\lambda = +$ para la banda de conducción y $\lambda = -$ para la banda de valencia en el caso de campo $\mathbf{B} = 0$, con lo que se puede obtener el espectro de energía

$$\epsilon_{\lambda,n} = \lambda \frac{\hbar v}{l_B} \sqrt{2n} \quad (2.32)$$

el cual se muestra en la figura 2.4. Estos niveles de Landau relativistas se dispersan como $\lambda\sqrt{Bn}$ en función del campo magnético.

Una vez que se conoce la segunda componente del espinor, la primera componente del espinor se obtiene con la ecuación (2.30), y se representa como $u_n \propto av_n \sim a|n\rangle \sim |n-1\rangle$. Seguidamente es necesario distinguir el nivel cero de energía de los niveles de Landau de los demás niveles de energía. El nivel cero de energía ocurre

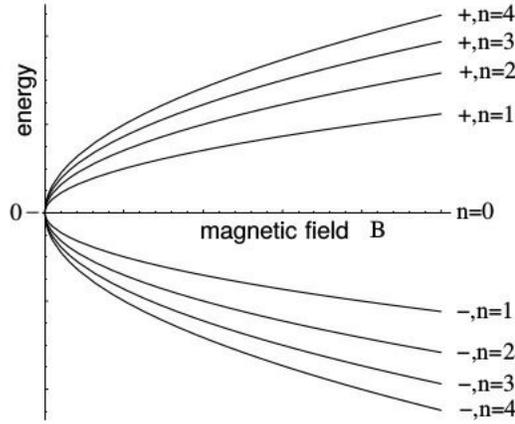


Figura 2.4. Niveles de Landau en función del campo magnético para el caso relativista, con $\epsilon_{\lambda,n} = \lambda(\hbar v/l_B)\sqrt{2n} \propto \sqrt{Bn}$. Fuente: Goerbig [3]

en $n = 0$, y para este caso la primer componente del espinor es cero, aplicando la ecuación (1.29). Por lo tanto, para este caso el espinor se escribe

$$\psi_{n=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ |n=0\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Para todos los demás casos, $n \neq 0$, se tienen soluciones de energía positivas y negativas, las cuales difieren entre sí por un signo en una de las componentes. Una representación conveniente de los espinores asociados se puede dar como [3]

$$\psi_{\lambda,n \neq 0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |n-1\rangle \\ \lambda |n\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

2.4. Efecto Hall en el grafeno

El efecto Hall relativista en el grafeno se puede entender bajo el mismo marco de la cuantización de los niveles de Landau y la localización de una partícula que el efecto Hall cuántico entero en un sistema electrónico de dos dimensiones no relativista, (ver sección 1.6).

De hecho los argumentos que se presentaron sobre el efecto Hall cuántico entero también aplican a los electrones relativistas en el grafeno, pero se necesitan tener en cuenta los dos distintos tipos de portadores de carga, electrones y agujeros, mismos que trasportan una carga distinta, que para el caso de los potenciales de impurezas no representan un problema, ya que en una transformación partícula-agujero, un valle se

transforma en un sumidero y viceversa [3]. Además, la dirección del desplazamiento de Hall cambia en este tipo de transformación.

Debido a la universalidad del efecto Hall cuántico, ambos tipos de distribuciones de impurezas relacionados por una simetría partícula-agujero nos proporciona la misma cuantización de la resistencia de Hall [3]. Por lo tanto, la aproximación de la localización semiclásica también aplica para los electrones relativistas en el grafeno.

La situación es distinta para el potencial de confinamiento. Un Ansatz de la forma $V(y)$ tiene el problema de que un incremento $V(y - y_{max/min}) \rightarrow \infty$ en el borde de la muestra confina al electrón pero no a los agujeros de la banda de valencia por lo que se necesitaría $V(y - y_{max/min}) \rightarrow -\infty$ para un confinamiento eficiente. Esto debido a que el hamiltoniano de los electrones relativistas del grafeno es una matriz de 2×2 que refleja las dos distintas subredes A y B. Por lo tanto un posible potencial de confinamiento puede formarse a partir de la matriz de Pauli σ^z ,

$$V_{conf}(y) = V(y)\sigma^z = \begin{pmatrix} V(y) & 0 \\ 0 & -V(y) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

el cual junto con el hamiltoniano (2.27) produce el hamiltoniano que corresponde al modelo no relativista (1.73). Para un término constante $M = V(y)$ la contribución de (2.35) representa la masa de una partícula relativista.

Por lo tanto, el potencial de confinamiento (2.35) también es llamado masa de confinamiento [3]. Si se examina el caso más simple, que es cuando se tiene un término constante de masa $M\sigma^z$ que necesita ser añadido al hamiltoniano de Dirac. El hecho de que este término sea realmente un término de masa se puede ver a partir del hamiltoniano de Dirac para $B=0$

$$H_D^m = v\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} + M\sigma^z = \begin{pmatrix} M & v(p_x - ip_y) \\ v(p_x + ip_y) & -M \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

cuya diagonalización nos proporciona el espectro de energía

$$\epsilon_\lambda(\mathbf{p}) = \lambda\sqrt{v^2|\mathbf{p}|^2 + M^2}. \quad (2.37)$$

Donde se reconoce inmediatamente que tiene la forma de la relación de dispersión de una partícula relativista con una masa m tal que $M = mv^2$. Cualitativamente se puede ver de la figura 2.5 por qué una masa de confinamiento es más eficiente que una barrera de potencial.

De hecho, cuando la partícula se aproxima al borde con $M(y) \neq 0$ se abre

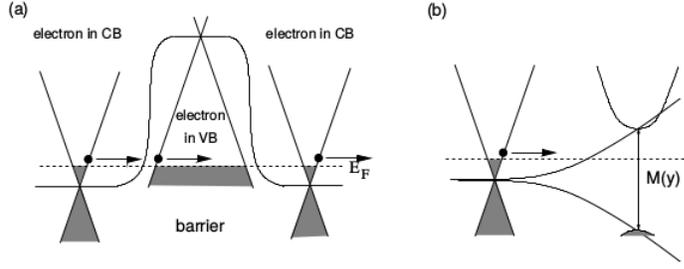


Figura 2.5. a) Efecto túnel de Klein, a través de una barrera. Un electrón incidente en la banda de conducción, CB por sus siglas en inglés; por encima de la energía de Fermi el cual se encuentra en el punto de Dirac antes de la barrera, atraviesa la barrera como lo haría un electrón por encima de la energía de Fermi en la banda de valencia. La banda de valencia está parcialmente vacía debido al desplazamiento del punto de Dirac hacia una energía más alta que la correspondiente a la altura de la barrera. (b) Masa de confinamiento, se abre una banda cuando la partícula se aproxima al borde el cual se convierte en una región prohibida donde no se pueden encontrar estados cuánticos en la energía correspondiente a la del electrón incidente. Fuente: Goerbig [3].

una banda. Un electrón que se encuentre encima del punto de Dirac solo se puede propagar en la región con $M = 0$, mientras que en el borde su energía se encuentra en la banda la cual es una región prohibida y el electrón es confinado.

De forma similar al caso en el que $\mathbf{B} = 0$, se puede encontrar el espectro de energía del hamiltoniano de Dirac masivo (2.36) sometido a un campo magnético perpendicular, el cual, en términos de los operadores escalera se escribe como

$$H_D^B = \begin{pmatrix} M & v(\Pi_x - i\Pi_y) \\ v(\Pi_x + i\Pi_y) & -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & \sqrt{2}\frac{\hbar v}{l_B}a \\ \sqrt{2}\frac{\hbar v}{l_B}a^\dagger & -M \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

cuyos valores propios se pueden calcular como se hizo para el caso en el que $M = 0$ y se obtiene, para el nivel de Landau relativista $n \neq 0$

$$\epsilon_{yn} = \lambda \sqrt{M^2 + 2\frac{\hbar^2 v^2}{l_B^2}n}. \quad (2.39)$$

Para el caso del nivel de Landau central, $n = 0$, que necesariamente se aleja del nivel de cero energía. El estado cuántico asociado (2.34) es cero en la primer componente u_0 , mientras que la segunda componente está dada por $v_0 = |0\rangle$. Para satisfacer la segunda línea en la ecuación de valores propios

$$H_D^B \psi_0 = \epsilon_0 \psi_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} M & \sqrt{2}\frac{\hbar v}{l_B}a \\ \sqrt{2}\frac{\hbar v}{l_B}a^\dagger & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ |0\rangle \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 0 \\ |0\rangle \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

donde se tiene que cumplir que

$$\sqrt{2}\frac{\hbar v}{l_B}a^\dagger u_0 = (\epsilon_0 + M)v_0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (\epsilon_0 + M)|0\rangle, \quad (2.41)$$

de tal forma que la única solución sea $\epsilon_0 = -M$. Así el nivel de Landau relativista $n = 0$ es desplazado hacia las energías negativas y deja de satisfacer la simetría partícula-agujero. Este efecto es llamado *anomalía de paridad* y depende del signo de la masa [3].

En el caso del grafeno, es necesario recordar que hay dos copias del espectro de energía, uno en el punto K y otro en el punto K' , como se discutió en la sección (2.2), el hamiltoniano (2.38) describe las propiedades a baja energía en el punto K mientras que se necesita intercambiar las subredes A y B en el punto K' y añadir un signo global en frente de los términos fuera de la diagonal de la matriz

$$H_D^{B'} = \begin{pmatrix} -M & -\sqrt{2}\frac{\hbar v}{l_B}a \\ -\sqrt{2}\frac{\hbar v}{l_B}a^\dagger & M \end{pmatrix} = -H_D^{B'}. \quad (2.42)$$

Como es de esperarse, los estados propios de este hamiltoniano son los mismos que los del hamiltoniano que se muestra en la ecuación (2.38) en el punto K ; con la diferencia de que los valores propios cambian de signo. Debido a la simetría partícula-agujero de los niveles (2.39), el signo global no afecta al espectro de energías para $n \neq 0$. Sin embargo, el nivel $n = 0$, que no respeta la simetría partícula-agujero, debe ser tratado por aparte; y la condición correspondiente a (2.41) se encuentra de la misma forma que para el punto K

$$-\sqrt{2}\frac{\hbar v}{l_B}a^\dagger u_0 = (\epsilon_0 - M)v_0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (\epsilon_0 - M)|0\rangle, \quad (2.43)$$

con esto se ve que el nivel $n = 0$ en el punto K' se desplaza hacia las energías positivas como función de la masa, de tal forma que el espectro para el grafeno, cuando se toma en cuenta ambos valles, cumple nuevamente la simetría partícula-agujero, pero el valle degenerado es subido por $n = 0$.

El caso de un término de masa que varía en la dirección \hat{y} , como el caso del potencial de confinamiento, es similar al caso tratado en la sección (1.6.1), el sistema permanece invariante ante traslaciones en la dirección \hat{x} , de tal forma que el gauge de Landau resulta ser el gauge apropiado para resolver el problema y el vector de onda \mathbf{k} en esta dirección es un número cuántico importante. Como este vector de onda determina la posición de los estados propios en la dirección de \hat{y} , se puede

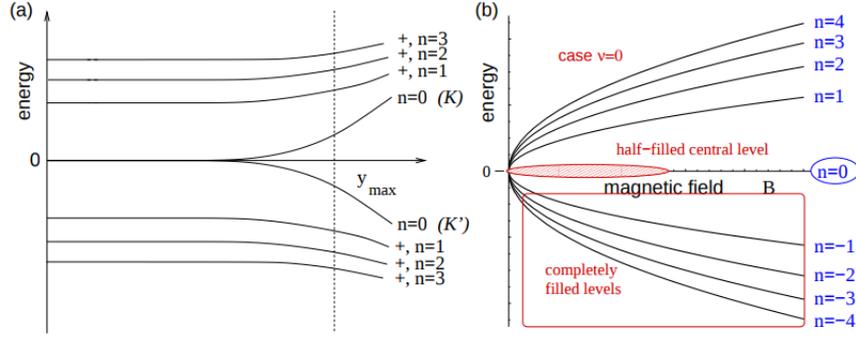


Figura 2.6. (a) Masa de confinamiento para los niveles de Landau relativistas. Se muestran los niveles de Landau tipo electrones, $\lambda = +$, que se doblan hacia arriba cuando se acercan a los bordes de la muestra, y_{max} , los niveles del tipo agujero, $\lambda = -$, que se doblan hacia abajo. La trayectoria en el nivel de Landau $n = 0$ depende del valle, debido a la anomalía de paridad, en el valle K , el nivel de energía disminuye mientras que en el otro valle K' aumenta. (b) Ocupación del cúmulo de niveles de Landau en $\nu = 0$. Todos los niveles de Landau tipo electrón, se encuentran desocupados mientras que los tipo agujero se encuentran totalmente llenos. El nivel $n = 0$ se encuentra a media ocupación. Fuente: Goerbig [3]

tomar $y_0 = kl_B^2$, y el espectro de energía está dado por la ecuación

$$\epsilon_{yn,y_0;\xi} = \lambda \sqrt{M^2(y_0) + 2 \frac{\hbar^2 v^2}{l_B^2} n}, \quad (2.44)$$

el cual se muestra en la figura 2.6; para $n \neq 0$ y ambos valles $\xi = \pm$, mientras que el nivel $n = 0$ se encuentra en

$$\epsilon_{n=0,y_0;\xi} = -\xi M(y_0), \quad (2.45)$$

la ecuación (2.44) es válida únicamente para el caso en el que $n \neq 0$, y para el caso en el que $n = 0$ el nivel adquiere una energía $M(y_0)$ distinta de cero, que resulta ser negativa. En el caso del grafeno, se tienen dos puntos de baja energía inequivalentes en la primera zona de Brillouin los cuales dan origen al espectro de energía relativista [10].

Los hamiltonianos (1.10), (2.24) y (2.27), para los casos de ausencia y presencia de campo magnético, aplican principalmente para sólo uno de los dos valles, mientras que para el otro valle se puede tomar $-H_D$ y H_D^B si se intercambian las componentes A y B.

Con esto, el potencial de confinamiento (2.35) tomaría la forma $-V_{conf}$ en el otro valle, lo cual implicaría una masa negativa. Por lo tanto el nivel $n = 0$ se dobla

hacia las energías positivas del segundo valle, y el nivel de degeneración de los valles se eleva en este nivel.

Con la ayuda de estas consideraciones, se puede llegar a entender el efecto Hall relativista en el grafeno. La localización semiclásica es la misma que para el caso no relativista, y el confinamiento, que es necesario considerar para poder tomar en cuenta la presencia simultánea de los niveles de Landau tipo electrón y tipo agujero, nos conduce a los estados en el borde, mismos que son responsables por el transporte cuántico y, por lo tanto, la cuantización de la resistencia.

El efecto Hall cuántico relativista fue descubierto por dos grupos distintos, [23], [27] cuyos resultados se pueden ver en la figura 2.7. La fenomenología del efecto Hall cuántico relativista es la misma que para el efecto Hall cuántico entero para los niveles de Landau no relativistas, en el que se pueden observar plataformas en la resistencia de Hall mientras que la resistencia longitudinal se desvanece.

Con este comportamiento, se puede variar el factor de ocupación ya sea cambiando el campo magnético con una densidad de portadores fijos, figura 2.7 (a), o se puede tener un campo magnético fijo mientras se varía la densidad de portadores de carga con la ayuda de una compuerta de voltaje, figura 2.7 (c). La última medición es más sencilla de realizar en el grafeno que en gases de electrones bidimensionales no relativistas. A pesar de la similitud entre la versión entera del efecto Hall, en la figura 2.7 muestra una diferencia, y es que el efecto Hall se observa para valores del factor de ocupación

$$\nu = \pm 2(2n + 1), \quad (2.46)$$

en términos del número cuántico n , mientras que el efecto Hall cuántico entero se observa a valores $\nu = n$, lo cual sucede ya que cada nivel de Landau relativista en el grafeno tiene una degeneración cuádruple, debido al doble espín y la degeneración de doble valle.

Esto debido a el hecho de que el factor de ocupación $\nu = 0$ no corresponde a portadores en el sistema, ya que la energía de Fermi se encuentra exactamente en el punto de Dirac. En este caso, se tiene una simetría electrón-agujero perfecta, y por lo tanto el nivel $n = 0$ debe estar parcialmente lleno, figura 2.6 (b), o también, deben haber tantos electrones como agujeros en el nivel $n = 0$ y, de acuerdo a las consideraciones presentadas en la sección 1.6.3 esto no corresponde a una situación donde se observe un efecto Hall debido a estados extendidos.

Ya que lo normal es esperar que emerja un efecto Hall cuántico cuando el nivel de Landau central $n = 0$ se encuentre completamente lleno, o completamente

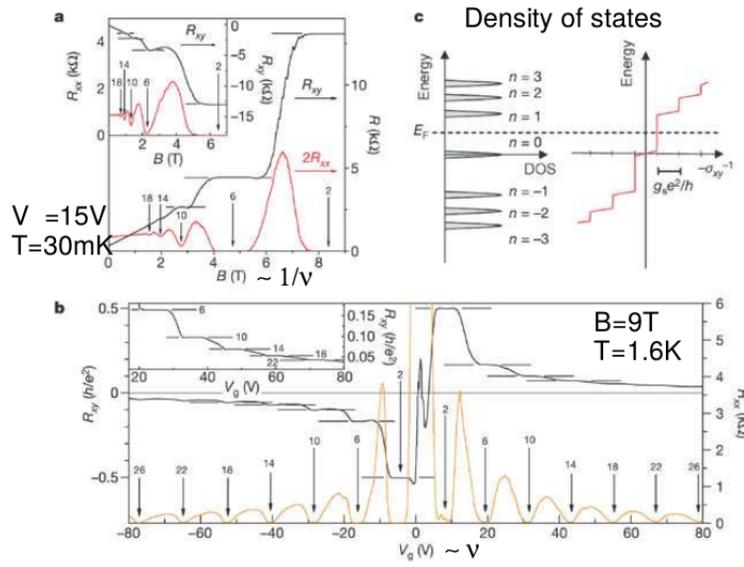


Figura 2.7. Resultados de la medición del efecto Hall relativista. Fuente: Zhang, Tan, Stormer y Kim[23]

vacío. Como consecuencia de la cuádruple degeneración en el grafeno, el efecto Hall cuántico ocurre en $\nu = \pm 2$, los cuales se observan en los experimentos [23], y se muestran en la figura 2.7, y que resultan ser el origen de la particular secuencia del factor de ocupación (2.46) del efecto Hall relativista en el grafeno.

3. EFECTO HALL CUÁNTICO FRACCIONARIO

En el capítulo 2, se explicaron los aspectos fundamentales del efecto Hall entero en términos la cuantización de Landau; con factores de ocupación enteros $\nu = n$, los cuales corresponden a n niveles de Landau completamente llenos. En estos niveles se fuerza un electrón a ocupar el siguiente nivel de Landau desocupado; esto como consecuencia del principio de exclusión de Pauli, ver figura 3.1 (a). Por lo que el electrón necesita perder una cantidad finita de energía $\hbar\omega_C$ y se localiza por medio de las impurezas en la muestra, debido al arrastre de Hall el cual fuerza al electrón a moverse cerca de las líneas equipotenciales.

Bajo éstas condiciones se interpreta al sistema como incompresible ya que no se puede variar el factor de ocupación y se pierde solamente una cantidad de energía infinitesimal. Para el caso de un número fijo de partículas se considera una disminución infinitesimal en el campo magnético el cual implica una carga infinitesimal en la superficie $2\pi l_B^2$ ocupada para cada uno de los estados cuánticos. Como la superficie total del sistema permanece constante, el aumento infinitesimal de $2\pi l_B^2$ no se puede acomodar en un cambio infinitesimal de energía. Esto se debe a la banda entre el nivel de Landau $n - 1$ y el nivel n donde al menos un electrón debe subir del nivel. Esto es lo que provoca que el sistema no se pueda comprimir [3].

Tomando en cuenta el comportamiento del efecto Hall cuántico entero, fue una gran sorpresa observar un efecto Hall cuántico fraccionario. El cual ocurre con un factor de ocupación $\nu = 1/3$, con su correspondiente cuantización de Hall $R_H = h/e^2\nu = 3h/e^2$. Este efecto fue descubierto tres años después del descubrimiento del efecto Hall cuántico entero en sistemas electrónicos de dos dimensiones, esta cuantización fraccionada de la resistencia de Hall fue descubierta por Tsui, Störmer y Gossard con un $n = 1/3$ [22].

En este capítulo se comenzará considerando las interacciones de Coulomb entre los electrones, seguidamente se estudiará la teoría de Laughlin para describir el efecto Hall cuántico fraccionario. Se presentará la estadística fraccionaria como herramienta para describir los *anyones* y se finalizará con una generalización de la función de

onda de Laughlin utilizando la teoría de fermiones compuestos.

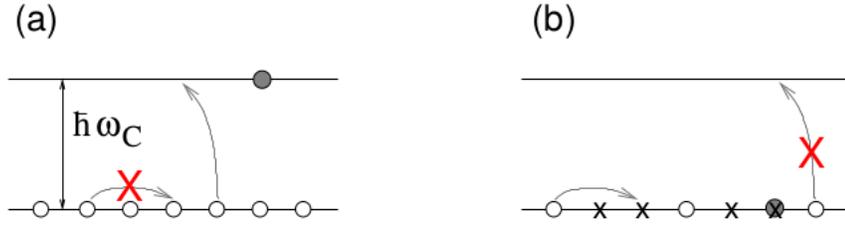


Figura 3.1. (a) Diagrama de un nivel de Landau totalmente lleno. El círculo gris representa un electrón adicional que es forzado a ocupar el siguiente nivel de Landau más alto debido al principio de Pauli. (b) Nivel de Landau parcialmente lleno. Debido a la presencia de estados desocupados en el nivel de Landau, el principio de Pauli no permite que un electrón adicional ocupe el siguiente nivel de Landau. Fuente: Goerbig [3]

3.1. El rol de las interacciones de Coulomb

Como se mencionó anteriormente, el efecto de un nivel de Landau parcialmente lleno es opuesto al de n niveles completamente llenos, en donde se observa la versión entera del efecto Hall cuántico. Esta diferencia se puede resumir en la figura 3.1 y también es el origen del diferente rol que tiene la repulsión de Coulomb entre los electrones.

En el caso de n niveles de Landau completamente llenos, se tiene un estado fundamental no degenerado similar a un líquido de Fermi, donde las interacciones se pueden tratar con una aproximación perturbativa. De hecho, cualquier tipo de excitación involucra una transición entre dos niveles de Landau adyacentes que están separados por una banda de energía $\hbar\omega_C$, ver figura 3.1 (a), y se necesita comparar la energía de Coulomb en la escala de la longitud característica $R_C = l_B\sqrt{2n+1}$ y esta banda [4, 3]

$$\frac{V_C}{\hbar\omega_C} \sim \frac{me^{3/2}}{\epsilon\hbar^{3/2}} (Bn)^{-1/2}, \quad (3.1)$$

lo cual resulta ser la constante de acoplamiento adimensional usual y además se tiene que para el gas de Coulomb bidimensional en la teoría del líquido de Fermi [12]

$$r_s = \frac{me^2}{\epsilon\hbar^2} n_{el}^{-1} \quad (3.2)$$

La última expresión se obtiene identificando la energía de Fermi $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$, en términos del vector de onda de Fermi k_F , con la energía del último nivel de Landau ocupado $\hbar\omega_C n$. La aproximación en términos de perturbaciones permite un estado fundamental no degenerado, como el que describe las excitaciones de los electrones en el efecto Hall cuántico entero.

En el caso de un nivel de Landau n parcialmente lleno la situación es contraria, para una excitación electrónica hay suficientes estados desocupados en el nivel de Landau n para un electrón del mismo nivel al cual saltar [4]. Desde el punto de vista de la energía cinética, no hay costo de energía asociado con tal excitación, mientras que una excitación al siguiente nivel de Landau más alto tiene un costo energético de $\hbar\omega_C$. La degeneración macroscópica puede ser aumentada por el fenómeno debido a otras escalas de energía, tal como aquellas asociadas con las impurezas en la muestra o las interacciones electrón-electrón [3]. De hecho, la jerarquía de escalas de energía en el efecto Hall cuántico fraccionario se puede caracterizar por la sucesión

$$\hbar\omega_C \gtrsim V_C \gg V_{imp}, \quad (3.3)$$

y por lo tanto es importante considerar la repulsión de Coulomb, la cual gobierna las propiedades electrónicas a baja energía en un nivel de Landau parcialmente lleno [12]. Se debe notar que se obtiene un sistema de electrones fuertemente correlacionados para la descripción para la cual todas las aproximaciones perturbativas que empiezan con el líquido de Fermi empiezan a fallar. Por lo que la mejor manera de describir el efecto Hall cuántico fraccionario es tener una buena descripción del estado fundamental [3, 4].

La suposición mas natural sería que los electrones en un nivel de Landau parcialmente lleno se comportan como partículas cargadas clásicas que forman un estado cristalino para minimizar la repulsión mutua que existe entre ellos. Este estado es el que se conoce como cristal de Wigner [40]. Sin embargo, el cristal de Wigner es un estado que rompe una invarianza ante traslaciones, y tal estado no tiene bandas de energía para excitaciones a longitudes de onda largas. Por lo que se puede comprimir el cristal de Wigner cambiando la superficie ocupada de una forma infinitesimal o también añadiendo un electrón sin cambiar las superficie macroscópica y pagar únicamente una cantidad infinitesimal de energía. Es por ello que el estado fundamental sería compresible, lo cuál significa que no está separado por una banda de energía; lo cuál no es el caso para el efecto Hall cuántico fraccionario.

3.2. Función de onda de Laughlin

Como consecuencia de las consideraciones que se mencionaron anteriormente para el cristal de Wigner, es necesario buscar otra alternativa para describir el estado fundamental que no rompa ninguna simetría espacial y que tenga una banda de energía. Este estado es el que se conoce como líquido incompresible cuántico que fue propuesto por Laughlin en 1983 [20]. Se considera por simplicidad únicamente el efecto Hall cuántico fraccionario en el nivel más bajo de Landau. Como se vio en la sección 1.5.1, una función de onda para una partícula en el nivel más bajo de Landau es descrita en términos de una función analítica por una Gaussiana

$$\psi \sim z^{m'} e^{-|z|^2/4}, \quad (3.4)$$

en términos del entero $m' = 0, \dots, N_B - 1$, en donde la definición de la longitud magnética fue absorbida en la definición de la posición compleja $z = (x - iy)/l_B$.

Como segundo paso se considera una función de onda arbitraria de dos partículas. Esta función de onda debe ser una función analítica para ambas posiciones z_1 y z_2 de la primera y segunda partícula respectivamente, y puede ser una superposición de polinomios, tal que para los estados fundamentales

$$\psi^2(z, Z) \sim Z^M z^m e^{-(|z_1|^2 + |z_2|^2)/4}, \quad (3.5)$$

donde se definió la coordenada del centro de masa $Z = (z_1 + z_2)/2$ y la coordenada relativa $z = (z_1 - z_2)$. El número cuántico m juega el rol del momentum angular relativo entre las dos partículas, y M está asociado con el momentum angular total del par. Debido a que las funciones de onda del nivel más bajo de Landau deben ser analíticas, m debe ser un entero, y el intercambio de las posiciones z_1 y z_2 implica que m tiene que ser un impar debido a la naturaleza fermiónica de los electrones. La función de onda de Laughlin se puede generalizar para N partículas a partir de la función de onda para dos partículas, ecuación (3.5),

$$\psi_m^L(\{z_j, z_j^*\}) = \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_j |z_j|^2/4}, \quad (3.6)$$

por simplicidad en la notación se omitieron las constantes de normalización y donde todos los índices van de 1 al número total de partículas N . Se puede ver que no existe dependencia del centro de masa, sino que únicamente de las coordenadas relativas entre los pares de partículas.

3.2.1. Parámetro varacional

El parámetro varacional en la función de onda de Laughlin (3.6) es el exponente m , con respecto al cual se necesita optimizar la función de onda para aproximar el estado fundamental del sistema. Sin embargo, debido a que se tienen funciones analíticas y estadística fermiónica, el exponente se restringe a enteros impares, $m = 2s + 1$, en términos del entero s . Además, este parámetro varacional resulta ser totalmente determinado por el factor de ocupación ν . Esto se puede demostrar si se considera la función de onda de Laughlin como una función de la posición z_k de algún electrón arbitrario k que esté fijo. Hay $N - 1$ factores del tipo $(z_k - z_l)^m$, uno para cada uno de los $N - 1$ electrones remanentes l , que ocurren en el Ansatz (3.6), como el de la potencia más alta de z_k la cual resulta ser $m(N - 1)$

$$\prod_{k < l} (z_k - z_l)^m \sim z_k^{m(N-1)}. \quad (3.7)$$

De la sección 1.5.1, en la ecuación (1.63), se tiene que la potencia más alta de la posición compleja de la partícula es fijada por el número de estados N_B en cada nivel de Landau. Lo cual nos lleva a la relación entre el número de partículas N y el número de flujo cuántico N_B que atraviesa el sistema

$$mN - \delta = N_B. \quad (3.8)$$

En esta ecuación δ es una variación del orden de la unidad y que no juega un rol en el límite termodinámico $N, N_B \rightarrow \infty$. Debido a que la relación entre el número de partículas y el flujo cuántico no es el factor de ocupación del nivel de Landau (1.53), $\nu = N/N_B$, se puede notar que es un candidato para la función de onda del estado fundamental en el límite termodinámico, el parámetro varacional está completamente definido por el factor de ocupación, y toma la forma

$$m = 2s + 1 = \frac{1}{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \nu = \frac{1}{m} = \frac{1}{2s + 1}; \quad (3.9)$$

y por lo tanto la función de onda de Laughlin es una función de onda candidata del estado fundamental para factores de relleno

$$\nu = 1, 1/3, 1/5, \dots \quad (3.10)$$

Es importante recordar que el valor impar $m = 2s + 1$ es requerido por la naturaleza fermiónica de los electrones. Formalmente, se puede dejar esta restricción y

generalizar la función de onda de Laughlin para bosones, simplemente escogiendo un exponente par $2s$. Si se considera la función de onda de Laughlin para un valor de $\nu = 1$ para un nivel de Landau completo, se puede describir en términos de la función de onda de Laughlin utilizando un valor $m = 1$, de tal forma que el estado descrito por la función de onda

$$\psi(\{z_j\}) = f_N(\{z_j\})e^{-\sum_j |z_j|^2/4}, \quad (3.11)$$

es un estado no degenerado y se puede describir en términos del determinante de Slater [3],

$$\psi(x_i) = \begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \cdots & \psi_1(x_N) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \cdots & \psi_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(x_1) & \psi_N(x_2) & \cdots & \psi_N(x_N) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

el cual al aplicarlo a nuestra función de onda de Laughlin se obtiene la forma de la función $f_N(\{z_j\})$, y que se le conoce como determinante de Vandermonde [12],

$$f_N(\{z_j\}) = \det \begin{pmatrix} z_1^0 & z_1^1 & \cdots & z_1^{N-1} \\ z_2^0 & z_2^1 & \cdots & z_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N^0 & z_N^1 & \cdots & z_N^{N-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j); \quad (3.13)$$

donde se debe tener en cuenta que la j -ésima línea en este determinante corresponde a todos los niveles de Landau mas bajos de la j -ésima partícula descrita en términos del los polinomios z_j^m , además, el determinante toma en cuenta todas las permutaciones de las N partículas sobre las N posiciones z_1, \dots, z_N , el cual vemos que es el prefactor de la función de onda de Laughlin 3.6 para el caso en el que $m=1$.

3.2.2. Pseudopotencial de Haldane

Para describir las propiedades energéticas de la función de onda de Laughlin (3.6), se considera nuevamente la función de onda para dos partículas (3.5). Esta función de onda es un estado propio exacto para cualquier interacción con potencial central que depende únicamente de la coordenada z entre el par de partículas, como es el caso de la interacción de Coulomb, $V = V(|z|)$. Por lo que se puede descomponer la interacción del potencial en los números cuánticos asociados al momentum angular

relativos m , de la siguiente forma

$$v_m \equiv \frac{\langle m, M|V|m, M\rangle}{\langle m, M|m, M\rangle}, \quad (3.14)$$

donde el denominador toma en cuenta el hecho que no se ha normalizado apropiadamente las funciones de onda para dos partículas (3.5), $\psi^{(2)}(z, Z) = \langle z, Z|m, M\rangle$. El hecho de que no hay dependencia de M es una consecuencia directa de la suposición de que se lidia con una interacción de un potencial central, esto es $\langle z, Z|V|z', Z'\rangle = V(|z|)\delta_{z,z'}\delta_{Z,Z'}$. Además no hay términos en la antidiagonal de la forma $\langle m, M|V|m', M\rangle$, con $m' = m$. Esto se puede demostrar de forma explícita en la representación polar $z = \rho e^{i\phi}$,

$$\langle m, M|V|m', M\rangle \propto \int_0^{2\Pi} d\phi \int_0^\infty d\rho \rho^{m+m'+1} V(\rho) e^{-i(m-m')\phi} \propto \delta_{m,m'}, \quad (3.15)$$

debido a la integración del ángulo polar. El potencial v_m que se obtuvo de la descomposición en los estados del momentum angular relativo también se le conoce como pseudopotenciales de Haldane [3]. Los cuales caracterizan completamente el espectro de energías de las dos partículas, ya que la energía cinética es la misma para los estados de las dos partículas $\langle m, M|$ como se mencionó anteriormente, ya que se debe a un caso especial, normalmente cualquier potencial de interacción repulsiva da como resultado estados no ligados con un espectro de energía continuo. El espectro de energía es discreto incluso si la interacción es repulsiva, debido a la presencia de un campo magnético cuantizado.

Los pseudopotenciales de Haldane son una imagen de la forma del espacio real del potencial de interacción [12]. De hecho, si un par de electrones está en un estado cuántico con un momentum angular relativo m , la distancia promedio entre los electrones está dada por $|z| \sim l_B \sqrt{2m}$. Por lo tanto el pseudopotencial de Haldane v_m es aproximadamente el valor del potencial de interacción original en la distancia relativa $l_B \sqrt{2m}$,

$$v_m \simeq V\left(|z| = l_B \sqrt{2m}\right), \quad (3.16)$$

además las componentes m del pseudopotencial de Haldane corresponden a las componentes de la interacción original de corto alcance.

Los pseudopotenciales de Haldane también son útiles en la descripción del estado para N partículas. De hecho, el hamiltoniano para la interacción de N partículas V

se puede reescribir en términos de pseudopotenciales

$$V = \sum_{i < j} V(|z_i - z_j|) = \sum_{i < j} \sum_{m'=0}^{\infty} v_{m'} \mathcal{P}_{m'}(ij), \quad (3.17)$$

donde el operador $\mathcal{P}_{m'}(ij)$ proyecta el par de electrones ij en el estado de momentum angular relativo m' . Debido al factor $\prod_{k < l} (z_k - z_l)^m$ en la función de onda de Laughlin 3.6, ningún par de partículas se encuentra en un estado de momentum angular relativo $m' < m$. Si se escogen todos los pseudopotenciales con $m < m$ positivos y los demás cero,

$$v'_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m' < m \\ 0 & \text{si } m' \geq m, \end{cases} \quad (3.18)$$

se puede obtener $V\psi_m^L = 0$, lo que define a la función de onda de Laughlin como el auto estado de energía cero del modelo (3.18).

Como el modelo describe una interacción repulsiva, todos los estados posibles deben tener una energía $E \geq 0$. Por lo tanto, la función de onda de Laughlin es exactamente el estado fundamental del modelo (3.18). Además, es el único estado en el que la energía es igual a cero debido a que si se mantienen el flujo y el número total de partículas fijos, cualquier otro estado distinto al que describen las funciones de onda de Laughlin involucra un par de partículas en un estado con un número de momentum angular distinto de m .

Si el momentum angular es más pequeño que m , este par de partículas es afectado por el pseudopotencial asociado distinto de cero m' y por lo tanto cuesta una energía del orden de $v_{m'} > 0$. En cambio, si el par de partículas está en un estado de momentum con $m' > m$, existe al menos otro par de partículas con $m'' < m$ para mantener el factor de ocupación fijo, y este par de partículas aumenta la energía. Con estos argumentos generales se muestra que cualquier estado excitado involucra una cantidad finita de energía dada por el pseudopotencial $v_{m'}$, con $m' < m$, la cual juega el rol de una banda de energía.

En este sentido, el estado que describe la función de onda de Laughlin es de hecho un estado incompresible que se acerca a la posibilidad de un efecto Hall cuántico al momento de identificar la cuasi-partícula correcta de este estado de N partículas que se convierte en un estado localizado por la impurezas de la muestra [3].

3.3. Cuasi-partículas y cuasi-agujeros con carga fraccionaria

Hasta ahora, se han discutido algunas propiedades del estado fundamental de la función de onda de Laughlin. Se ha visto que el estado de Laughlin en $\nu = 1/m$ es insensible para las componente de corto alcance del potencial de interacción descrito por el pseudopotencial de Haldane $v_{m'}$ con $m' < m$, mientras que estados excitados deben estar separados del estado fundamental por una banda de energía caracterizada por estos pseudopotenciales de corto alcance. Sin embargo aún no se ha caracterizado la naturaleza de esta excitación.

Existen dos tipos de excitaciones, el primera son excitaciones elementales: cuasi-partículas o cuasi-agujeros que se obtienen añadiendo o removiendo carga del sistema, y el segundo: excitaciones colectivas con una carga fija.

3.3.1. Cuasi-agujeros

Las excitaciones elementales que se obtienen al desplazar el factor de ocupación de su valor $\nu = 1/m$. Al tomar en cuenta que se puede variar el factor de ocupación, ya sea, añadiendo carga al sistema cambiando la densidad electrónica; como también, añadiendo o removiendo el flujo, cambiando el campo magnético. Además al tomar en cuenta que existe una relación entre el flujo del campo con el número de ceros en la función de onda de Laughlin, se debe empezar por proponer un Ansatz para un estado excitado, es decir, que describa la función de onda de un cuasi-agujero y se considera el siguiente [3],

$$\psi_{qh}(z_0, \{z_j, z_j^*\}) = \prod_{j=1}^N (z_j - z_0) \psi_m^L(\{z_j, z_j^*\}). \quad (3.19)$$

Cada una de las posiciones de los electrones tiene como vecino un cero adicional en la posición z_0 . Para verificar que en realidad esta función de onda le agrega un flujo al sistema, se puede expandir la función de onda de Laughlin (3.6) formalmente en un polinomio de la forma,

$$\psi_m^L(\{z_j, z_j^*\}) = \sum_{\{m_i\}} \alpha_{m_1, \dots, m_N} z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N} e^{-\sum_j |z_j|^2/4},$$

en donde α_{m_1, \dots, m_N} describen los coeficientes de expansión. Si se escoge la posición z_0 en el centro del disco, en el cual la función de onda (3.19) se simplifica a la forma

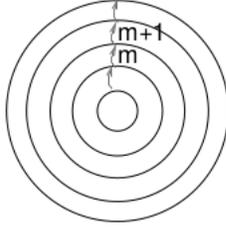


Figura 3.2. Esquema de una excitación de un cuasi-agujero. Cada electrón salta de un estado m hacia el siguiente estado de momento angular superior $m + 1$. Fuente: Goerbig [3]

$$\psi_{qh}(\{z_j, z_j^*\}) = \sum_{\{m_i\}} = \alpha_{m_1, \dots, m_N} z_1^{m_1+1} \dots z_N^{m_N+1} e^{-\sum_j |z_j|^2/4},$$

en la que cada m_i se incrementa por uno, y esto se puede describir de la siguiente manera. Cada electrón salta de un estado de momentum angular m a un estado en el que el momentum angular se incrementa por uno, tal como se muestra en la figura 3.2, dejando un espacio vacío en el estado $m = 0$. Y es a esta excitación a la que se le conoce como *cuasi-agujero* [4]. Esto también afecta el estado cuántico con el momentum angular más alto M , ya que se ha incrementado el tamaño de la muestra por la superficie ocupada en el flujo mientras que el número de electrones se mantiene fijo.

Con las consideraciones anteriores, se establece que es posible crear un cuasi-agujero en la posición z_0 al introducir flujo cuántico del tipo $NB \rightarrow N_B + 1$, el cual tiene como consecuencia inmediata de que el factor de ocupación se reduce una cantidad muy pequeña, el siguiente paso es determinar la carga asociada a esta excitación; la cual es posible calcular al considerar un factor de ocupación fijo, al que se le agrega carga eléctrica para compensar el flujo cuántico extra en el sistema. De la ecuación (3.8), se puede notar que la relación entre el flujo extra ΔN_B y la carga eléctrica extra que compensa ese flujo ΔN está dado por

$$m\Delta N = \Delta N_B \quad \Leftrightarrow \quad \Delta N = \frac{\Delta N_B}{m}. \quad (3.20)$$

Este resulta ser de bastante importancia y se puede entender de la siguiente forma: para compensar el flujo cuántico adicional $\Delta N_B = 1$, se necesita agregar la m -ésima fracción de un electrón. Por lo tanto el déficit de carga eléctrica causado por la excitación del cuasi-agujero está dado por

$$e^* = \frac{e}{m}. \quad (3.21)$$

Este resultado se puede interpretar como que es la carga que porta el cuasi-agujero y por lo tanto es una *carga fraccionaria*, que para nuestro sistema es una fracción de la carga fundamental del electrón.

3.3.2. Cuasi-partículas

Hasta ahora se han considerado las interacciones que conducen a la existencia de los cuasi-agujeros los cuales se obtienen introduciendo un flujo cuántico adicional al sistema, lo cual se traduce en términos matemáticos en agregarle un cero adicional a la función de onda mostrada en la ecuación (3.19). Por lo tanto, si se puede aumentar el flujo no existe ningún impedimento para que también se pueda reducir en uno el flujo cuántico, generando así una cuasi-partícula, la cual tiene una *vorticidad* contraria a la que se genera con los cuasi-agujeros que se mencionan anteriormente.

Esta vorticidad opuesta hace que se pueda utilizar el factor $\prod_{j=1}^N (z_j^* - z_0^*)$ en lugar del factor $\prod_{j=1}^N (z_j^* - z_0^*)$ que se utilizó en la ecuación (3.19), esto se hace para poder crear una cuasi-partícula en la posición z_0 . Sin embargo es importante indicar que es posible que los resultados de esta función de onda muestre componentes que violan las condiciones de analíticas de la función de onda de Laughlin para los niveles más bajos de Landau, que se mencionan en la sección 3.2. Por lo tanto, para corregir esta expresión de una cuasi-partícula, es posible hacer una proyección de la función (3.19) en los niveles más bajos de Landau,

$$\psi_{qp}(z_0, \{z_j, z_j^*\}) = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{j=1}^N (z_j^* - z_0^*) \psi_m^L(\{z_j, z_j^*\}). \quad (3.22)$$

Para ver la forma en que se trabaja con la proyección \mathcal{P}_{LLL} es necesario obtener una generalización de la función de onda de Laughlin para fermiones compuestos, antes de obtener esta generalización es importante explorar las propiedades de la estadística fraccionaria que se presentan en la siguiente sección.

3.4. Estadística Fraccionaria

Una consecuencia de la fraccionalización de la carga en un sistema cuántico bidimensional, como los que se mostraron con las cuasi-partículas de Laughlin, es el origen de lo que se conoce como *estadística fraccionaria* [3]. Desde un punto de vista

mecánico estadístico, las partículas de un sistema cuántico en tres dimensiones se sabe que pueden clasificarse como bosones o fermiones [43], sin embargo en un sistema bidimensional es posible encontrar una estadística distinta a la de las partículas bosónicas y fermiónicas. A las partículas asociadas a esta nueva estadística se le conoce como anyones [3].

Para ilustrar las propiedades estadísticas distintas entre dos partículas que están en un sistema tridimensional y uno bidimensional se puede empezar considerando una partícula A que se mueve de modo adiabático en una trayectoria cerrada \mathcal{C} en un plano xy alrededor de otra partícula B que tiene las mismas características. Se elige una trayectoria lo suficientemente alejada de la partícula B y las dos partículas están bien localizadas de tal forma que se pueden ignorar la superposición entre las dos funciones de onda.

Este proceso \mathcal{T} es equivalente a dos procesos sucesivos \mathcal{E} , en el que se intercambian las posiciones de A y B . De forma algebraica estos procesos se pueden expresar en términos de los operadores \mathcal{T} y \mathcal{E} como un módulo de traslación

$$\mathcal{E} = \pm\sqrt{\mathcal{T}}. \quad (3.23)$$

Al hacer el mismo análisis para el caso tridimensional, debido a la presencia de una tercera dirección, se puede elevar la trayectoria cerrada en esta dirección mientras que la posición de la partícula A se mantiene fija en el plano xy . A esta trayectoria elevada se le denota como \mathcal{C}' .

Además, se puede encoger la trayectoria cerrada \mathcal{C}' en un punto en la posición A sin pasar por la posición de la partícula B la cual permanece en el plano xy . Esta trayectoria se comporta como un punto, y se le llama \mathcal{C}'' . A pesar de que este procedimiento pueda parecer formal, un proceso de intercambio cuántico en principio no especifica la trayectoria del intercambio de tal forma que sea posible definir si la partícula es un bosón o un fermión, únicamente especifica sus propiedades topológicas [12].

Desde un punto de vista topológico, todas las trayectorias que pueden ser deformadas de forma continua entre sí mismas definen una clase homotópica [21], de tal forma que la ecuación (3.23) puede ser vista como una ecuación para clases homotópicas en la que una simple traslación y una deformación simple son irrelevantes. Como consecuencia de estas consideraciones, la trayectoria \mathcal{C}'' en la posición de la partícula A ; la cual puede ser descrita formalmente por $\mathcal{C}'' = 1$, existe en la misma clase homotópica que la trayectoria original \mathcal{C} , con lo que se puede garantizar que

los procesos asociados a estas trayectorias son los mismos y se tiene que

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C}'') = \mathbb{1}, \quad (3.24)$$

en donde se ve que $\varepsilon = \sqrt{\infty}$. Esto lo que indica es que ε es un operador cuántico que corresponde al intercambio de partículas que tienen dos valores propios y al mismo tiempo son dos raíces de la unidad, $e_B = \exp(2\pi i) = 1$ y $e_F = \exp(i\pi) = -1$. A esto se le conoce como regla de superselección [4], en la que todas las partículas cuánticas en tres dimensiones pueden ser únicamente bosones $e_B = 1$ o fermiones $e_F = -1$.

En un sistema de dos dimensiones, como es en el que ocurre el efecto Hall cuántico, este argumento topológico nos conduce a un resultado completamente distinto. En el que no es posible la trayectoria \mathcal{C} y encerrar la segunda partícula B en un punto del sistema en la posición de la partícula A sin que la trayectoria pase también por la posición B [4].

La posición de B debe ser un elemento de la trayectoria en algún momento del proceso de encogimiento, el cual no se beneficia de una tercera dimensión para elevar el ciclo en el que se mueve por encima del plano xy . El punto todavía representa una clase homotópica de trayectorias, sin embargo estas trayectorias no encierran otra partícula, y por lo tanto la trayectoria \mathcal{C} es un elemento de otra clase homotópica y es la única de todas las trayectorias que empiezan del punto A y encierran únicamente la partícula en B [3]. Si existen más de de dos partículas presentes, las clases homotópicas son descritas por el número entero de partículas encerradas por las trayectorias en esta clase.

Desde un punto de vista algebraico, el proceso de intercambio ya no se describe por las dos raíces de la unidad, como en el caso tridimensional, sino que se describen por el llamado grupo de trenzado [12, 3], y la clasificación de bosones y fermiones deja de ser válida. En el caso más simple de la estadística Abelianas [3, 4], para bosones y fermiones es necesario generalizar la relación de conmutación

$$\psi(\mathbf{r}_1)\psi(\mathbf{r}_2) = \pm\psi(\mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_1), \quad (3.25)$$

en la forma

$$\psi(\mathbf{r}_1)\psi(\mathbf{r}_2) = e^{i\alpha\pi}\psi(\mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_1), \quad (3.26)$$

en donde a α se le conoce como ángulo estadístico [4] y se tiene que $\alpha = 0$ para bosones, $\alpha = 1$ para fermiones y todos los demás valores de α en el intervalo entre 0 y 2 para anyones, a la que también es común llamarla *estadística fraccionaria*, de hecho todas las cuasi-partículas físicas, tienen un ángulo que es un número fraccionario.

Para terminar es importante hacer énfasis en algunos aspectos de estas consideraciones estadísticas. Se sabe que los fermiones están obligados a satisfacer el principio de Pauli, el cual impide una doble ocupación en un estado cuántico, mientras que el número de bosones para un estado cuántico no presenta ninguna restricción. Sin embargo, para los anyones, en el contexto de la teoría cuántica de campos [3], a través de la ecuación (3.25) el principio de Pauli indica que para $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$,

$$\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.27)$$

Para un ángulo estadístico arbitrario se obtiene de la misma forma que para la ecuación (3.26),

$$(1 - e^{i\alpha\pi}) \psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.28)$$

el cuál se puede ver como el principio de Pauli generalizado para anyones en un sistema bidimensional [15].

Propiedades estadísticas de las cuasi-partículas

Al aplicar las consideraciones estadísticas que se presentaron anteriormente para el caso de las cuasi-partículas, se puede describir el ángulo estadístico como una fase Aharonov-Bohm [12], la cual es un fenómeno cuántico en el que una partícula eléctricamente cargada es afectada por un potencial electromagnético a pesar de que la partícula se encuentra confinada en una región en la que tanto el campo magnético \mathbf{B} como el campo eléctrico \mathbf{E} son cero.

Debido a un campo gauge que es generado por el flujo asociado a las cargas inducidas en una curva cerrada $\partial\mathcal{S}$, esta curva cerrada alrededor de la cual una cuasi-partícula se mueve de forma adiabática encierra una superficie \mathcal{S} . Es importante no confundir el campo gauge con el que genera el verdadero campo magnético \mathbf{B} , sino que es más bien un campo ficticio \mathbf{A}_M , con $\mathbf{B}_M = \nabla \times \mathbf{A}_M$ y que genera el flujo asociado, como por ejemplo, el flujo asociado a los electrones en el líquido de Laughlin a través de la relación (3.8).

Si se considera el caso en el que la superficie S se llena con $N_{el}(\mathcal{S})$ electrones condensados en un líquido incompresible, tal como el descrito por la función de onda de Laughlin (3.6) y $N_{qh}(\mathcal{S})$ cuasi-agujeros (3.19), de tal forma que hay dos contribuciones para $B_M = |\mathbf{B}_M|$,

$$B_M(\mathcal{S}) = N_{flujo} \frac{\hbar}{e} = [mN_{el}(\mathcal{S}) + N_{qh}(\mathcal{S})] \frac{\hbar}{e}. \quad (3.29)$$

La correspondiente fase de Aharonov-Bohm, la cual toma la cuasi-partícula cuando rodea la superficie \mathcal{S} en el límite del camino $\partial\mathcal{S}$ está dado por [3]

$$\Gamma_{A-B} = 2\pi \frac{e^*}{\hbar} \oint_{\partial\mathcal{S}} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_M(\mathbf{r}) = 2\pi \frac{e^*}{\hbar} \int_{\mathcal{S}} d^2r B_M(\mathbf{r}),$$

en donde se debe recordar que $e^* = e/m$ es la carga de la cuasi-partícula y también que se utilizó el teorema de Stokes para convertir la integral de línea de \mathbf{A}_M en $\partial\mathcal{S}$ en una integral de superficie de B_M sobre el área \mathcal{S} . Por lo tanto la fase de Aharonov-Bohm tiene las contribuciones de los electrones condensados en el líquido de Laughlin Γ_{el} , y el de las cuasi-agujeros Γ_{qh} , por lo tanto se puede obtener a partir de la ecuación (3.29) que para los electrones

$$\Gamma_{el} = 2\pi \frac{e^*}{e} m N_{el} = 2\pi N_{el}, \quad (3.30)$$

se obtiene un 2π veces el entero N_{el} , esta contribución a la fase de Aharonov-Bohm no se debe interpretar en términos de un ángulo estadístico debido a que no describe un proceso de intercambio, ya que las partículas involucradas no son del mismo tipo [12]. Si ahora se observa la contribución de los cuasi-agujeros a la fase de Aharonov-Bohm se tiene que

$$\Gamma_{qh} = 2\pi \frac{e^*}{e} N_{qh} = 2\pi \frac{N_{qh}}{m}. \quad (3.31)$$

Al considerar un único cuasi-agujero en el área \mathcal{S} , $N_{qh} = 1$; con lo que se encuentra una situación en la que la fase de Aharonov-Bohm es una fracción de 2π y el ángulo estadístico es $\alpha = 1/m$. Lo cual muestra que los cuasi-agujeros que se obtienen a partir de la teoría de Laughlin son en realidad anyones con estadística fraccionaria, tal como se discutió en la sección anterior.

3.5. Generalización de la función de onda de Laughlin

A pesar de que la función de onda de Laughlin (3.6) puede describir el efecto Hall cuántico fraccionario, para los valores de $\nu = 1/3$ y $1/5$, esta función no es capaz de describir todos los demás estados del efecto Hall cuántico fraccionario [4].

De hecho los estados asociados a los valores $\nu = 2/5, 3/7, 4/9, \dots$ que corresponden a la serie $p/(2p+1)$, o también en su forma más general $p/(2sp+1)$ en términos de los enteros s y p , los cuales se pueden considerar dentro de la teoría de *fermiones compuestos*, que se presenta a continuación.

Fermiones Compuestos

Luego del descubrimiento del estado más prominente del efecto Hall cuántico fraccionario en $\nu = 1/3$, se observaron varios estados con distintos valores del factor de ocupación y tomaban la forma $p/(2sp+1)$. En una primera aproximación, se interpretaron estos estados desde un punto de vista de jerarquía [16, 17], en la que las cuasi-partículas de Laughlin consideradas el estado *padre*, tal como el estado en $\nu = 1/3$, se condensa a sí mismo en un estado hijo *hijo*, debido a la repulsión de Coulomb que existe en el sistema [3]. En este punto de vista el estado $2/5$ representaría el estado hijo formado a partir de la excitación de la cuasi-partícula en el estado $1/3$.

Una alternativa a este esquema de la jerarquía, fue propuesta por Jain en 1989 [18]. La idea consiste en darle a la función de onda (3.6) una reinterpretación. Si se considera únicamente la parte gaussiana del polinomio, $\exp(-\sum_j^N |z_j|^2/4)$, ya que es un factor que siempre está presente y cuya familia debe ser multiplicada con el polinomio de la función de onda,

$$\psi_m^L(\{z_j\}) = \prod_{k<l} (z_k - z_l)^{2s+1} = \prod_{k<l} (z_k - z_l)^{2s} \prod_{k<l} (z_k - z_l), \quad (3.32)$$

en donde en el último paso de esta ecuación, se dividió el producto en dos partes, la primera con el exponente $2s$ la cual recibe el nombre de vórtice [3], y la otra parte con es el término con exponente 1. Ahora antes de mencionar la generalización de Jain, se debe interpretar la función de onda anterior en términos de las propiedades estadísticas que se mostraron en la sección anterior.

De forma general, se puede expresar cualquier función de onda de N partículas en el nivel más bajo de Landau ψ_{LLL} como un producto del factor de vórtice con otra función de onda residual ψ_{res} ,

$$\psi_{LLL}(\{z_j\}) = \prod_{k<l} (z_k - z_l)^{m'} \psi_{res}(\{z_j\}). \quad (3.33)$$

Si la función de onda original es fermiónica, las propiedades de simetría de ψ_{res} dependen de la paridad de m' . Si es impar, ψ_{res} debe ser una función de onda simétrica y por lo tanto bosónica. Por otro lado si es par, tanto la función de

onda original como la residual son anti-simétricas y por lo tanto son fermiónicas.

Ahora en términos del mencionado campo de gauge $\mathbf{A}_M(\mathbf{r})$, el ángulo estadístico asociado con el factor vórtice está simplemente dado por la paridad de m' el cual se puede ver como el número de flujo cuántico asociado a cada una de las partículas en las posiciones z_j .

En el caso de de la descomposición de la función de onda mostrada en la ecuación (3.32), la parte del vórtice añade una cantidad s de pares de flujo cuántico a cada una de las posiciones de las partículas y por lo tanto no afecta en las propiedades estadística de la función de onda. Además el segundo factor,

$$\chi_{\nu^*=1}(\{z_j\}) = \prod_{k<l} (z_{k-z_l}) \quad (3.34)$$

tiene un comportamiento fermiónico y corresponde a un nivel de Landau completamente lleno en un factor de ocupación virtual (Fermión Compuesto) $\nu^* = 1$, se le llama virtual ya que el verdadero valor del factor de ocupación sigue siendo $\nu = 1/(2s + 1)$ [4]. La generalización de Jain consiste en reemplazar el término $\prod_{k<l} (z_{k-z_l})$ por cualquier otro determinante de Slater $\chi_{\nu^*=p}(\{z_j, z_j^*\})$ de una cantidad p de niveles de Landau completamente llenos, con un fermión compuesto con factor de ocupación $\nu^* = p$,

$$\psi^J(\{z_j, z_j^*\}) = \mathcal{P}_{LLL} \prod_{k<l} (z_{k-z_l})^{2s} \chi_{\nu^*=p}(\{z_j, z_j^*\}), \quad (3.35)$$

en donde se debe tomar en cuenta la proyección de \mathcal{P}_{LLL} hacia el nivel más bajo de Landau como en el caso de la excitación de cuasi-partícula, ya que contrario al caso de $\nu^* = 1$, la función de onda $\chi_{\nu^*=p}(\{z_j, z_j^*\})$ tiene por construcción componentes no analíticas.

La ecuación de onda de Jain (3.35) se puede ilustrara través del factor $\prod_{k<l} (z_{k-z_l})^{2s}$, se tiene un flujo efectivo $2s$ a cada uno de los electrones. Este nuevo tipo de partícula, es a la que se le llama *fermiones compuestos*. El flujo residual o libre determina el número efectivo de los estados por cada nivel de Landau asociado a los fermiones compuestos, por lo tanto

$$N_B \rightarrow N_B^* = N_B - 2sN_{el},$$

lo cual corresponde a un campo magnético renormalizado

$$B \rightarrow B^* = B - 2s \left(\frac{h}{e} \right) N_{el}. \quad (3.36)$$

De forma similar el factor de ocupación de los fermiones compuestos se define con respecto al número renormalizado de flujo cuántico,

$$\nu^* = \frac{N_{el}}{N_B} \Rightarrow \nu^{*-1} = \nu^{-1} - 2s, \quad (3.37)$$

lo cual nos lleva a la siguiente relación entre el factor de ocupación de un fermión compuesto y el factor de ocupación usual ν

$$\nu = \frac{\nu^*}{2s\nu^* + 1}. \quad (3.38)$$

Utilizando las relaciones anteriores se puede ver que para niveles de Landau completamente llenos, $\nu^* = p$, esta relación con la serie que se ha mencionado, la cual genera los valores fraccionarios del valor de ocupación del efecto Hall cuántico fraccionario, los cuales se pueden interpretar como estados de fermiones compuestos del efecto Hall cuántico entero [3]

$$\nu = \frac{p}{2sp + 1}. \quad (3.39)$$

Para una mejor interpretación física de la teoría de los fermiones compuestos se puede argumentar lo siguiente: el estado fundamental se describe por la función (3.35), la cual como se vio, describe un líquido cuántico incompresible de la misma forma que la función de onda de Laughlin. La excitación elemental en la teoría de fermiones compuestos consiste en un fermión compuesto que asciende al siguiente nivel de Landau de un fermión compuesto, el cual se separa del estado fundamental creando una banda de energía prohibida [3], de forma análoga al electrón para n niveles de Landau completamente llenos que ocurre en el efecto Hall cuántico entero. Por lo tanto, estas excitaciones de los fermiones compuestos se convierten en estados localizados por las impurezas de la muestra, y de esta forma se obtienen las plataformas en la resistencia de Hall la cual están cuantizadas.

De forma numérica la función de onda de Jain para fermiones compuestos (3.35), ha sido exitosa en la descripción de la serie (3.39) la cual genera los esta-

dos en el efecto Hall cuántico fraccionario. Incluso si la coincidencia con los estados fundamentales exactos decae cuando el número p aumenta, la coincidencia es extremadamente alta [3]. Sin embargo, es importante resaltar que la interpretación física es más complicada si se compara con la función de onda de Laughlin, debido a que la proyección \mathcal{P}_{LLL} es más complicada de implementar en cálculos analíticos así como en simulaciones numéricas [6].

4. ORDEN TOPOLÓGICO

A partir del descubrimiento del efecto Hall cuántico fraccionario y la degeneración de su estado fundamental, surgió la necesidad de desarrollar el concepto de orden topológico para este nuevo tipo de estado de la materia. El concepto de orden topológico fue introducido por X.G. Wen en la década de 1990 [9, 34].

En este capítulo se comenzará por describir las ideas propuestas por Wen sobre como caracterizar y clasificar los órdenes topológicos. Posteriormente se hará un estudio del efecto Hall cuántico basándose en las propiedades topológicas del sistema para finalizar con la obtención de la degeneración del estado fundamental de la función de onda de Laughlin la cual es considerado como el orden topológico del sistema [35].

4.1. Caracterización y clasificación de los órdenes topológicos

4.1.1. Caracterización de los órdenes topológicos

El concepto de orden topológico normalmente se introduce a través de la función de onda del estado fundamental, sin embargo debido a que esta función de onda no necesariamente es universal se debe establecer un nuevo concepto: el orden topológico. Para estudiar este concepto es necesario encontrar características físicas o mediciones de órdenes topológicos. En otras palabras, es necesario encontrar números cuánticos universales que sean independientes de las interacciones, masas efectivas, etc [34]; pero que puedan tomar distintos valores para distintos tipos de líquidos cuánticos FQH, por lo que según lo establecido por Wen, la existencia de este tipo de número cuánticos implica la existencia de órdenes topológicos [9].

Una forma de mostrar la existencia de los órdenes topológicos en líquidos FQH, es estudiar si existe algún tipo de degeneración en el estado fundamental cuando

se aproxima al límite termodinámico. Los líquidos FQH tienen la propiedad de que sus estados fundamentales se encuentran degenerados [15, 34]. Por ejemplo, como se mostrará más adelante el estado $\nu = 1/m$ de la función de onda de Laughlin, tiene un estado fundamental degenerado m^g en una superficie de Riemann del tipo g [9]. La degeneración del estado fundamental en los líquidos FQH no es una consecuencia de la simetría del Hamiltoniano que le describe. Esta degeneración se mantiene ante perturbaciones arbitrarias [9], lo cual indica que las estructuras internas que dan origen a la degeneración del estado fundamental son universales y por lo tanto se demuestra la existencia de órdenes universales internos conocidos como órdenes topológicos.

La degeneración del estado fundamental se puede considerar como un nuevo número cuántico que caracteriza los órdenes topológicos en los estados de los líquidos FQH. De forma particular, en algunos estados jerárquicos con el mismo factor de ocupación fraccionario pueden tener distintos tipos de degeneración en su estado fundamental, lo cual indica órdenes topológicos en los estados jerárquicos. Por lo tanto, la degeneración del estado fundamental nos brinda nueva información adicional a la del factor de ocupación sobre las estructuras internas de los líquidos FQH. Tomando esto en cuenta, Wen [9, 34], sugiere que las jerarquías de los estados fraccionarios sean caracterizadas por los distintos órdenes topológicos en lugar de las propiedades de sus simetrías.

Adicionalmente un espacio compacto existe únicamente un número finito de excitaciones de baja energía [12], como el de los estados fundamentales degenerados, sin embargo la dinámica a bajas energías no es trivial ya que la degeneración del estado fundamental depende de la topología del espacio. Esta dinámica que depende únicamente de la topología del espacio, es campo de estudio de la teoría de campos topológicos la cual se desarrolla en física de altas energías [35]. Estas teorías topológicas son las que se utilizan para caracterizar los líquidos FQH.

4.1.2. Clasificación de los órdenes topológicos

Una vez establecido que los órdenes topológicos se caracterizan por la degeneración en el estado fundamental del sistema, se debe establecer una forma de clasificar los órdenes topológicos. De la misma forma que se pueden clasificar todos los cristales debido a que se conoce que los órdenes en los cristales se describen por el grupo de simetría [40], sin embargo para el caso de los líquidos FQH se puede empezar por

los llamados *líquidos FQH abelianos* [34]. Como se mencionó en la sección anterior, las estructuras internas que dan lugar a las degeneraciones en el estado fundamental es a lo que se conoce como orden topológico, estos fluidos se pueden caracterizar por una matriz simétrica K , un vector de carga \mathbf{t} y un vector de espín \mathbf{sm} [13, 34, 33]. A partir de las cuales se pueden determinar otras cantidades físicas las cuales incluyen la degeneración del estado fundamental, el número cuántico de las cuasi-partículas, la estructura de excitaciones en el borde; entre otras. Todas las cuasi-partículas de este tipo de líquidos FQH tienen una estadística abeliana.

Además, como se mostró en el capítulo anterior existen distintas formas de construir estados FQH con distintos valores fraccionarios $\nu = 1/m$. En general estas construcciones dan origen a distintas funciones de onda, incluso si tienen el mismo factor de ocupación con lo que se hace difícil determinar si los estados descritos por estas funciones de onda distintas pertenecen a la misma clase [9]. Con la caracterización de los órdenes topológicos que se mencionó anteriormente, utilizando las cantidades K , \mathbf{t} , \mathbf{s} ; se tiene la ventaja de que es independiente de como se construyen las funciones de onda y provee de una descripción universal de los líquidos FQH. Si dos distintas aproximaciones convergen en la misma matriz K , vector de carga \mathbf{t} y espín \mathbf{s} , entonces se puede concluir que ambas aproximaciones dan origen al mismo tipo de líquido FQH.

La interpretación de la matriz K se puede obtener utilizando la función de onda de Laughlin generalizada en la que los estados FQH están descritos por la matriz K . Por lo tanto esta matriz describe los ceros en la función de onda y determina la forma en la que los electrones se mueven entre sí. Y así como se mencionó en el capítulo anterior, estos ceros en la función de onda se pueden interpretar como el número de flujo cuántico asociado a cada electrón.

4.2. Orden topológico en el efecto Hall cuántico fraccionario

Como se ha visto hasta ahora, la idea de orden topológico surgió con las propiedades descubiertas en el efecto Hall cuántico fraccionario, como el orden de jerarquías y la degeneración en el estado fundamental. Como se mencionó en la sección anterior, la degeneración del estado fundamental constituye una forma de caracterizar los órdenes topológicos. Sin embargo hasta ahora no se ha presentado el razonamiento

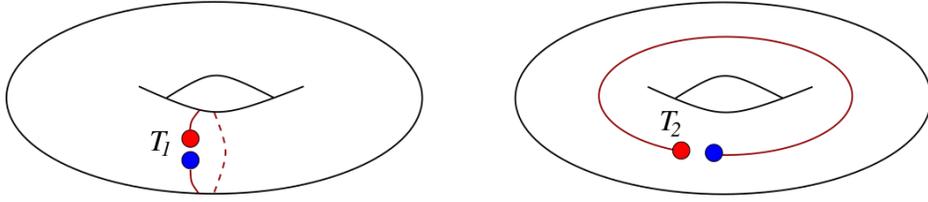


Figura 4.1. Esquema del cuasiagujero en rojo y la cuasi-partícula en azul en las trayectorias T_1 y T_2 alrededor del toro geométrico. Fuente: Tong [12]

detrás de estos conceptos.

Se empieza por estudiar los estados FQH en un manifold compacto en el que el número de estados fundamentales depende únicamente de la topología del manifold [12, 9]. Si se considera que el siguiente proceso sucede dentro de un toro geométrico, se empieza por crear un par de cuasi-partícula y cuasi-agujero, posteriormente se separa este par de excitaciones haciendo que vayan por las dos distintas trayectorias dentro del toro, como se ve en la figura 4.1, estos procesos antes de permitir que se aniquilen entre sí. Para finalizar se define el operador T_1 , como el operador que implementa el proceso de la primer trayectoria, y T_2 como el que implementa la segunda.

Si se permite que las partículas circulen a través de la primer trayectoria y luego a través de la segunda, debido a que estas partículas son anyones, el orden en el cual se realizan estos procesos es de importancia ya que existen diferencias topológicas en los caminos que se toman [3]. De hecho el proceso $T_1 T_2 T_1^{-1} T_2^{-1}$ es equivalente a tomar un anyon y hacerlo girar alrededor de otro, esto significa que los operadores T_i , deben obedecer el álgebra

$$T_1 T_2 = e^{2\pi i/m} T_2 T_1 \quad (4.1)$$

sin embargo estos operadores algebraicos no se pueden realizar en un único estado, por lo que se concluye que el estado fundamental debe estar degenerado [8]. Una representación de la ecuación (4.1) tiene una dimensión m , con la acción [12]

$$\begin{aligned} T_1 &= e^{2\pi n i/m} |n\rangle \\ T_2 &= |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

La generalización de este argumento nos lleva a obtener una superficie genus- g lo cual sugiere que el estado fundamental debe tener una degeneración del orden m^g y por lo tanto el número de estados fundamentales depende únicamente de la topología del sistema [35]. Sin embargo para tener un mejor entendimiento de estas ideas es necesario introducir algunos conceptos importantes en las siguientes secciones.

4.2.1. La topología en el efecto Hall cuántico

Hasta ahora se han expuesto ideas sobre la conexión del efecto Hall cuántico con la topología, pero no se ha mostrado esta conexión como tal. Para ilustrar esta conexión se puede empezar considerando un sistema de Hall en un toro geométrico T^2 , como el mostrado en la figura 4.1. Esto se puede ver como un rectángulo con lados opuestos de longitud L_x y L_y . Al considerar funciones de onda confinadas en el toro es necesario definir la periodicidad de estas funciones de onda, como una primera intuición se puede pensar que las funciones de onda obedezcan la relación

$$\psi(x, y) = \psi(x + L_x, y) = \psi(x, y + L_y), \quad (4.3)$$

sin embargo esta relación resulta muy restrictiva al momento de considerar un flujo magnético que atravesase el toro, por lo que se debe encontrar una mejor forma de describir el comportamiento de las funciones de onda en el toro [12]. Esto se puede lograr trabajando en regiones distintas en las que las funciones de onda se puedan relacionar por una transformación de gauge y que se logra si se introducen los operadores de traslación magnética

$$T(\mathbf{d}) = e^{-i\mathbf{d}\cdot\mathbf{p}/\hbar} = e^{-i\mathbf{d}(i\nabla + e\mathbf{A}/\hbar)}, \quad (4.4)$$

estos operadores trasladan un estado $\psi(x, y)$ a través del vector de posición \mathbf{d} . Las condiciones de frontera deben ser aquellas que permitan que cuando un estado sea trasladado alrededor del toro regrese a la misma posición, $T_x\psi(x, y) = \psi(x, y)$ y de la misma forma $T_y\psi(x, y) = \psi(x, y)$; en donde $T_x = T(\mathbf{d} = (L_x, 0))$ y $T_y = T(\mathbf{d} = (0, L_y))$.

En la expresión anterior (4.4) se ve que los operadores de traslación dependen de la elección del potencial vectorial. Al elegir el gauge de Landau (1.37) con $A_x = y$ y $A_y = Bx$, las traslaciones en la dirección \hat{x} son las mismas que aquellas en las

que no existe un campo magnético mientras que las traslaciones en la dirección de \hat{y} toman una fase adicional. Aplicando estos operadores al estado $\psi(x, y)$ y trasladarlo alrededor de una de de las trayectorias posibles del toro se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} T_x \psi(x, y) &= \psi(x + L_x, y) = \psi(x, y), \\ T_y(x, y) &= e^{-ieBL_y x/\hbar} \psi(x, y + L_y) = \psi(x, y), \end{aligned} \tag{4.5}$$

en donde se aplicó el teorema adiabático, el cual sostiene que si se coloca un sistema en un autoestado energético no degenerado y se varían lentamente sus parámetros, el sistema buscará permanecer en este autoestado sin excitar los demás estados [12]. Al aplicar este principio al proceso en el que el sistema se encuentra en el estado fundamental y termina en el estado fundamental, como el proceso de la partícula moviéndose alrededor del toro, lo única diferencia que existe en el nuevo estado es la fase de la función de onda

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{i\gamma} |\psi\rangle, \tag{4.6}$$

en este caso $e^{i\gamma}$ representa la fase que identifica los estados después de haber aplicado el proceso, en la que contribuye la parte dinámica $e^{-iEt/\hbar}$ y es la conocida *fase de Berry* [12]. Otros trabajos también han estudiado la fase de Berry en sistemas de materia condensada usando herramientas del Álgebra Global conforme [11].

Al analizar nuevamente la ecuación (4.5) se puede notar en la última de estas ecuaciones que la función de onda no es periódica en la dirección \hat{y} , sino que coinciden únicamente al aplicarles una transformación gauge. Sin embargo estas ecuaciones no presentan una consistencia para un campo magnético arbitrario, esto se debe a que si se compara lo que sucede al hacer una traslación alrededor de la trayectoria en el eje x , seguido por una en la trayectoria del eje y ; el proceso estaría definido de la siguiente forma

$$T_y T_x = e^{-ieBL_x L_y/\hbar} T_x T_y, \tag{4.7}$$

como ambos procesos deben dar como resultados el mismo estado se tiene que

$$\frac{eBL_x L_y}{\hbar} \in 2\pi\mathbf{Z}. \tag{4.8}$$

La última ecuación, representa la que se conoce como condición de cuantización de Dirac asociada a la idea de *monopolos magnéticos de Dirac* [12], y en donde el término $2\pi\mathbf{Z}$ surge de la generalización de la curvatura de Berry \mathcal{F}_{ij} , en la que al tomar la integral de la curvatura con respecto a una superficie de campo magnético, esta curvatura está cuantizada en términos de 2π , de forma más específica

$$\int \mathcal{F}_{ij} dS^{ij} = 2\pi C, \quad (4.9)$$

el entero C el cual pertenece a los complejos, se le conoce como número de Chern y caracteriza esta cuantización [12]. De hecho un aspecto interesante de este análisis es que es posible justificar la cuantización en la resistencia de Hall en términos del número de Chern y la conexión de Berry y funciona para calcular la resistencia de Hall mostrada en el capítulo 1 para el efecto Hall cuántico entero. Sin embargo, el análisis que se hizo al inicio de esta sección en la ecuación (4.1) el cual se basó en estas ideas, muestra que las excitaciones de cuasi-partículas y cuasi-agujeros en un toro el cual surgen de las funciones que describen los líquidos FQH, muestran una degeneración en el estado fundamental. En esta sección se mostró el rol de la topología en el efecto Hall cuántico como primer paso, a pesar de que estas no aplican para estados fundamentales degenerados, sin embargo estas ideas son de utilidad para introducir las ideas de orden topológico.

4.2.2. Teoría de Chern-Simons

En la sección anterior se expuso la relación topológica con la cuantización de la resistencia de Hall, pero para los estados fundamentales degenerados de los líquidos FQH es necesario explorar la teoría de campos efectivos, conocidas como *teorías de Chern-Simons* [33, 35, 12]. Se puede comenzar considerando el potencial de gauge A_μ estudiado en la teoría electromagnética [39], como un parámetro que indica que campo eléctrico o magnético se está considerando. De la misma forma el potencial A_μ describirá únicamente las perturbaciones alrededor de un estado de Hall en específico, ya sea aplicando un campo eléctrico o perturbando el campo magnético, manteniendo el mismo estado cuántico.

En teoría de campos, el potencial A_μ siempre acopla el sistema a los grados de libertad a través de una corriente J_μ , de tal forma que la acción del sistema estaría dado por [12]

$$S_A = \int d^3x J^\mu A_\mu, \quad (4.10)$$

en donde se asume que la corriente existe en un espacio de dimensión $d = 2 + 1$ [8]. Además debido a la conservación de la corriente esta acción es invariante ante transformaciones gauge de la forma $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega$, de tal forma que se cumple

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.11)$$

Estas dos ecuaciones son el punto de partida para poder escribir la teoría de campos efectivos que describe la repuesta del sistema al ser sometidos a campos electromagnéticos. La función de partición asociada al potencial A_μ se puede escribir de la forma [12]

$$Z[A_\mu] = \int D(\text{campos}) e^{iS[\text{campos}; A]/\hbar}, \quad (4.12)$$

en donde el término $D(\text{campos})$ representa todos grados de libertad dinámicos del sistema [8], y el término de la acción S puede ser cualquier acción que satisfaga la condición que incluye el acoplo del potencial A_μ a través de la corriente que se muestra en la ecuación (4.10). Al realizar la integral sobre estos grados de libertad se obtiene la función de partición del estado fundamental [12]

$$Z[A_\mu] = e^{iS_{ef}[A_\mu]/\hbar}. \quad (4.13)$$

El término S_{ef} se refiere a *acción efectiva* [12], la cual depende únicamente de los parámetros del sistema; y de la que se puede obtener a partir de la ecuación (4.10) que

$$\frac{\delta S_{ef}[A]}{\delta A_\mu(x)} = \langle J^\mu(x) \rangle, \quad (4.14)$$

esta ecuación sugiere que la acción efectiva contiene información de la influencia de los campos magnéticos en la corriente [12]. Ya que no se sabe el lagrangiano microscópico que describe el sistema, no se puede realizar el cálculo completo de la integral (4.12), sin embargo se pueden tomar únicamente los términos que cumplan con las condiciones del sistema y enfocarse en estos términos. Una de las condiciones

es que la acción $S_{ef}[A]$ tiene que ser un invariante de gauge [8], una forma de garantizar esto es construirlo en base a los campos eléctricos y magnéticos de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\nabla\mathbf{A}_0 - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Los siguientes términos que se pueden tomar en cuenta son los que están restringidos por otras simetrías posibles del sistema, tal como invarianza rotacional y traslacional [12]. Finalmente, si se toman en cuenta únicamente distancias largas, la acción efectiva debería ser un funcional local [3], lo cual significa que se puede escribir el funcional de la forma general $S_{ef}[A] = \int d^d x \dots$; esta propiedad restringe aún más los términos que se pueden considerar para la acción efectiva del sistema, ya que al trabajar únicamente con distancias largas implica que existe una banda de energía ΔE en el espectro y para asegurar que esta banda de energía no se rompa se restringe el sistema a campos eléctricos y magnéticos pequeños [8].

En el caso específico del efecto Hall fraccionario, los grados de libertad a bajas energías pueden ser perturbados a pesar de la banda de energía que existen entre los estados [9]. A estos grados de libertad se les conocen como *grados de libertad topológicos* [12, 35], por lo que es necesario describir estos grados de libertad topológicos y como afectan al efecto Hall fraccionario, para ello al analizar otra vez la ecuación (4.12), se ve que si se retienen los grados de libertad topológicos al momento de realizar la integral se puede obtener una acción efectiva que describa la topología del sistema y se logra a través de la teoría de Chern-Simons.

4.2.3. Dinámica de Chern-Simons

En un sistema de dimensión $d = 2 + 1$, la teoría de campos topológicos requiere un campo gauge a_μ del grupo unitario $U(1)$ [12]. El campo a_μ surge del comportamiento colectivo de los electrones del sistema, de forma similar a la que surgen los fonones en una red cristalina [40]. La dinámica de un campo de gauge normalmente se puede describir por la acción de Maxwell dada por [39]

$$S_M[a] = -\frac{1}{4g^2} \int d^3x f_{\mu\nu} f^{\mu\nu},\tag{4.16}$$

en donde $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ y g^2 representa una constante de acoplamiento. Las ecuaciones de movimiento resultantes son $\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0$, de donde se pueden obtener soluciones de onda con la particularidad de que en una dimensión $d = 2 + 1$ solo puede existir un tipo de polarización, esto quiere decir que la teoría de Maxwell en el grupo unitario $U(1)$, describe un único grado de libertad sin masa [12].

Como se ha visto, la conductividad de Hall puede existir en un espacio de dimensión $d = 2 + 1$, descrito por el grupo unitario $U(1)$ en el que existe el conocido símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ con los subíndices $\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2$. Se puede escribir un nuevo término con invarianza rotacional, que cumple con las condiciones de la acción efectiva por lo que se cumple $S_{ef}[A] = S_{CS}[A]$ y está definido como [4]

$$S_{CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (4.17)$$

Este es el famoso término de Chern-Simons y al coeficiente k se le llama el nivel del término de Chern-Simons [12]. Una propiedad interesante del término de Chern-Simons es que es un invariante de gauge, ya que ante una transformación del tipo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega$, la acción cambia únicamente en una derivada total como se puede ver en la siguiente ecuación [8]

$$S_{CS}[A] \rightarrow S_{CS}[A] + \frac{k}{4\pi} \int d^3x \partial_\mu (\omega \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho). \quad (4.18)$$

Normalmente en la ecuación anterior se puede ignorar la derivada total y el término de Chern-Simons es un invariante de gauge, sin embargo existen situaciones en la que esta derivada no se puede despreciar. En este caso es necesario seguir estableciendo las restricciones necesarias para asegurar de que el término de Chern-Simons sea un invariante de gauge.

Como se mencionó anteriormente el término de Chern-Simons (4.17), respeta una invarianza rotacional, sin embargo rompe tanto la invarianza de paridad y temporal [12]. Al analizar la paridad, la cual en el grupo unitario $U(1)$ está definida como

$$x^0 \rightarrow x^0, \quad x^1 \rightarrow -x^1, \quad x^2 \rightarrow x^2, \quad (4.19)$$

y por lo tanto se cumple que $A^0 \rightarrow A^0$, $A^1 \rightarrow -A^1$, $A^2 \rightarrow A^2$. De esta forma el término $\int d^3x$ también es invariante ante paridad. Sin embargo, el integrando no es una cantidad invariante ya que $\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \rightarrow -\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho$ [12]. Esto significa

que la acción de Chern-Simons con un valor de $k \neq 0$ solo puede existir en sistemas que rompan la paridad y como se ha mencionado en los capítulos 2 y 3 los sistemas con una conductividad de Hall rompen la paridad, debido a los efectos del campo magnético externo.

Al utilizar el término de Chern-Simons en la ecuación (4.14), se puede determinar la corriente que surge del término de Chern-Simons de la siguiente forma

$$J_i = \frac{\delta S_{CS}[A]}{\delta A_i} = -\frac{k}{2\pi} \epsilon_{ij} E_j, \quad (4.20)$$

con lo cual se ve que la acción de Chern-Simons describe una conductividad de Hall en términos del nivel de Chern-Simons

$$\sigma_{xy} = \frac{k}{2\pi}. \quad (4.21)$$

Si se define el nivel de Chern-Simons como $k = e^2 \nu / \hbar$, la ecuación anterior coincide con la conductividad de Hall para niveles de Landau completamente llenos. Si ahora se toma la acción como la suma de la contribución de los dos términos (4.17) y (4.16)

$$S = S_M + S_{CS}, \quad (4.22)$$

la ecuación de movimiento de a_μ toma la siguiente forma

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} + \frac{kg^2}{2\pi} \epsilon^{\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma} = 0. \quad (4.23)$$

Esta ecuación ya no describe un fotón sin masa, en su lugar cualquier excitación tiene la propiedad de decaer de forma exponencial [8]. Al resolver las ecuaciones se puede ver que el término de Chern-Simons juega el papel de darle una masa M al fotón. De forma equivalente, el espectro de energía tiene una diferencia $\Delta E = Mc^2$ la cual está dada por

$$\Delta E = \frac{kg^2}{\pi}. \quad (4.24)$$

En el límite cuando $g \rightarrow \infty$, se puede ver que el fotón se vuelve muy masivo y se eliminan las excitaciones físicas. Esta situación es la que describe la acción de Chern-Simons (4.17) [8].

4.2.4. Teoría efectiva para estados de Laughlin

Para describir la teoría efectiva para los estados $\nu = 1/m$ de Laughlin, se ha mencionado en la sección anterior que estos estados tienen un campo de gauge asociado a_μ del grupo $U(1)$. Este es un campo que se debe mantener en la acción efectiva. Como se hizo en la sección anterior, se comienza escribiendo la función de partición que para este caso está definida como [12]

$$Z[A_\mu] = \int \mathbf{D}a_\mu e^{iS_{ef}[a;A]/\hbar}, \quad (4.25)$$

en donde $\mathbf{D}a_\mu$ representa las transformaciones necesarias para definir una integral de camino para el campo de gauge [8]. Para calcular $S_{ef}[a; A]$ se debe encontrar un acoplo entre los campos $A_{m\mu}$ y a_μ , para lo cual se necesita también encontrar una relación entre el campo a_μ y la corriente J^μ ; que se logra a través de la ecuación

$$J^\mu = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu a_\rho. \quad (4.26)$$

Esta relación establece que el flujo magnético de a_μ se interpreta como la carga eléctrica que se acopla al campo A_μ . La normalización se logra cuando se hace que la simetría gauge sea compacta, al acoplarse a partículas con la carga fundamental e [9]. En este caso, el flujo mínimo permitido está dada por la condición de cuantización de Dirac [12]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{S}^2} f_{12} = \frac{\hbar}{e}. \quad (4.27)$$

Al utilizar esta condición y la relación (4.26) se puede asegurar que la carga mínima sea $\int J^0 = e$, tal como se espera. Adicionalmente con esta relación, se puede postular la siguiente acción efectiva de la teoría de Chern-Simons[12, 9, 8]

$$S_{ef}[a; A] = \frac{e^2}{\hbar} \int d^3 \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu a_\rho - \frac{m}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho + \dots \quad (4.28)$$

En donde la primera expresión es un término mixto de Chern-Simons el cual surge del acoplo de $A_\mu J^\mu$; y la segunda expresión es el término más sencillo que se puede obtener para el sistema. Con esta ecuación y con con la ecuación de movimiento [12]

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{m} F_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

se puede obtener que $a_\mu = A_\mu/m$ y al aplicar ambas expresiones a la ecuación (4.28) se obtiene que

$$S_{ef}[A] = \frac{e^2}{2\pi} \int d^3x \frac{1}{4\pi m} \epsilon^{\mu\nu\rho}, \quad (4.30)$$

en donde se puede ver que esta acción toma la misma forma que la que se mostró en (4.10) y con el mismo análisis se puede obtener la conductividad de Hall la cual es

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{1}{m}, \quad (4.31)$$

expresión que es justamente la que se espera para un estado de Laughlin, tal como se mostró en el capítulo 3.

4.2.5. Cuasi-agujeros y Cuasi-partículas

Como se vio en la sección anterior la acción propuesta en (4.28), describe un estado cuántico de Hall con un factor de ocupación $\nu = 1/m$. Si ahora se acopla el campo de gauge a_μ a su propia corriente j^μ a través del término

$$\Delta S = \int d^3x a_\mu j^\mu, \quad (4.32)$$

en donde nuevamente se asegura la invarianza de gauge al cumplir con la conservación de la corriente $\partial_\mu j^\mu = 0$ [8]. La importancia de la corriente j^μ es que es capaz de describir cuasi-agujeros y cuasi-partículas en el sistema. Esto se logra al establecer que el campo A_μ sea igual a cero; ya que al hacerlo no se afecta el sistema pero sí un parámetro que podemos modificar según sea necesario. Aplicando estas ideas, la ecuación de movimiento para a_μ toma la siguiente forma

$$\frac{e^2}{2\pi\hbar} f_{\mu\nu} = \frac{1}{m} \epsilon^{\mu\nu\rho} j^\rho. \quad (4.33)$$

Esta corriente se logra al considerar carga estática colocada en el origen descrita por $j^1 = j^2 = 0$ y por $j^0 = e\delta^2(x)$. Recordar que el hecho de que estas partículas tengan un valor de carga e se estableció al utilizar la condición de cuantización de Dirac (4.27) con lo que la ecuación de movimiento queda como

$$\frac{1}{2\pi} f_{12} = \frac{\hbar}{em} \delta^2(x). \quad (4.34)$$

Este resultado muestra que el efecto del término de Chern-Simons es de fijar el flujo \hbar/em a cada una de las partículas con carga e . De esta forma se muestra que la partícula tiene una carga fraccionaria y por lo tanto se puede describir a través de

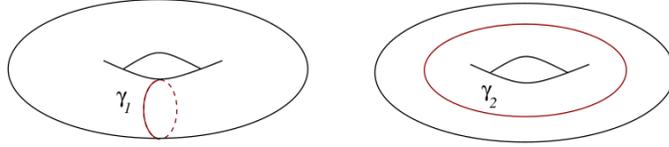


Figura 4.2. Trayectorias γ_1 y γ_2 en un toro geométrico. Fuente: Tong [12].

la estadística fraccionaria para anyones que se desarrolló en el capítulo 3. De hecho la carga fraccionaria se obtiene a través de aplicar la ecuación anterior a la relación (4.26);

$$J^0 = \frac{e^2}{2\pi\hbar} f_{12} = \frac{e}{m} \delta^2(x), \quad (4.35)$$

la cual es la corriente apropiada para una partícula con carga e/m , como es el caso de los anyones y por lo tanto se muestra que el término de Chern-Simons es otra forma de obtener los mismos resultados descritos por la teoría de Laughlin para el efecto Hall cuántico fraccionario.

4.2.6. Teoría de Chern-Simons en un toro geométrico

En la sección 4.2 se hizo una descripción básica de que al colocar un estado FQH en un manifold compacto, el número de estados fundamentales depende de la topología del manifold. Y se habló de forma general de que al considerar anyones en el sistema, este presentaba m estados fundamentales en un toro geométrico y de la misma forma m^g estados fundamentales degenerados en una superficie genus- g , y como se mostró también en la sección 4.1.1, este tipo de comportamiento es justamente lo que caracteriza a los órdenes topológicos. Si se coloca nuestro sistema en un toro geométrico \mathbf{T}^2 la ecuación (4.2) muestra que existe una degeneración en el estado fundamental.

Al tomar en cuenta únicamente la parte dinámica de la acción de Chern-Simons

$$S_{CS} = \frac{e^2}{\hbar} \int d^3x \frac{m}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \partial_\nu a_\rho, \quad (4.36)$$

de donde se puede obtener la ecuación de movimiento para a_0 , que resulta ser una forma análoga de la ley de Gauss [39]

$$f_{12} = 0. \quad (4.37)$$

Si se denota el radio de las trayectorias del toro $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ como R_1 y R_2 .

Y además a las trayectorias se les denota como γ_1 y γ_2 como se muestra en la figura 4.2. La forma más simple de construir un objeto invariante de gauge a partir de una conexión de gauge es a través de la integral [12]

$$w_i = \oint_{\gamma_i} dx^j a_j, \quad (4.38)$$

la cual es invariante ante la mayoría de transformaciones de gauge, pero no ante aquellas que hacen que se sigan las trayectorias γ_i . Para solventar esto, se puede aplicar una transformación el cual haga el cambio $a_j \rightarrow a_j + \hbar/eR_j$ y por lo tanto $w_i \rightarrow w_i + 2\pi\hbar/e$. Con esta corrección, es posible parametrizar las soluciones y se obtienen los llamados *ciclos de Wilson* [8]

$$W_i = \exp\left(i\frac{e}{\hbar} \oint_{\gamma_i} a_j dx^j\right) = e^{iew_i/\hbar}. \quad (4.39)$$

Debido a que la teoría de Chern-Simons solamente contiene derivadas en el tiempo de primer orden, estos ciclos de Wilson lo que hacen es parametrizar el espacio de fase de las soluciones y están en un espacio compacto ya que son números complejos de módulo unitario [12]. Si se utilizan las relaciones de conmutación y se aplican a la acción de Chern-Simons (4.36) se obtiene que

$$[a_1(x), a_2(x')] = \frac{2\pi i \hbar^2}{m e^2} \delta(x - x'), \quad (4.40)$$

lo cual genera la siguiente relación de conmutación

$$[w_1, w_2] = \frac{2\pi i \hbar^2}{m e^2}. \quad (4.41)$$

Con estas relaciones, es posible ejecutar la siguiente relación de *Baker-Campbell-Hausdorff* [8]

$$e^{iew_1/\hbar} e^{iew_2/\hbar} = e^{e^2[w_1, w_2]/2\hbar^2} e^{ie(w_1+w_2)/\hbar}, \quad (4.42)$$

con lo que finalmente se puede escribir en términos de los ciclos de Wilson (4.39) que

$$W_1 W_2 = e^{2\pi i/m} W_2 W_1. \quad (4.43)$$

El resultado de esta última ecuación es similar a la obtenida en la ecuación (4.1), en donde se consideraron anyones moviéndose en distintas trayectorias de un toro y además se concluyó que la representación de este tipo de álgebra tiene dimensión m .

A su vez; tal como se ve en la ecuación (4.43) este parámetro es el número de estados fundamentales en la teoría de Chern-Simons en un toro. Además la generalización de este cálculo a una superficie genus- g da origen al estado degenerado de m^g la cual de acuerdo con Wen, es la esencia de lo que se conoce como orden topológico [9, 12].

Para concluir este capítulo es importante mencionar que la importancia de la teoría de Chern-Simons es que permite una descripción más general del efecto Hall cuántico ya que, como se ha mencionado anteriormente, a partir de ella es posible obtener la cuantización de la resistencia de Hall tanto para el caso entero como para el caso fraccionario. También se pudo obtener a partir de la teoría de Chern-Simons la degeneración del estado fundamental en los estados de Laughlin la cual juega el rol de orden topológico de este sistema.

Todo esto fue posible sin hacer consideraciones del tipo de interacción entre las partículas del sistema, tampoco fue necesario incluir el análisis de los niveles de Landau para obtener los resultados mostrados en este capítulo. Incluso no fue necesario definir la naturaleza estadística de las partículas, es decir, que no se especificó si las partículas eran bosones, fermiones o anyones; sino que de los resultados se determinó la naturaleza de las partículas.

CONCLUSIONES

1. La cuantización de Landau representa la cuantización de la energía cinética de una partícula libre cargada en dos dimensiones, sometida a un campo magnético perpendicular. Esta cuantización se obtiene a partir de la aplicación de la sustitución de Peierls (1.12) al hamiltoniano que describe una partícula en las condiciones descritas anteriormente. Junto con la elección de la transformación gauge apropiada, es posible obtener el espectro de energías para el Hamiltoniano (1.16) y las funciones de onda asociadas a los estados que forman los niveles de Landau.
2. Con el concepto de niveles de Landau, se puede obtener la conductancia y la resistividad de los niveles de Landau, de donde se ve que la resistencia de Hall, a diferencia que en el caso clásico, está cuantizada y es esta cuantización la que da origen a las plataformas que se pueden observar en el comportamiento de la resistencia de Hall para el caso entero del efecto Hall cuántico entero. Además la existencia de las plataformas que se observan en la resistencia de Hall, está relacionada con el concepto de estados localizados y estados extendidos, los cuales indican las regiones donde la densidad de electrones puede ser mayor o menor.
3. Los niveles de Landau relativistas en el grafeno se pueden obtener de forma similar que se obtienen para la cuantización de Landau, y esto es aplicando la sustitución de Peierls al hamiltoniano de Dirac en los puntos K y K' , y resolver el hamiltoniano de Dirac se obtiene el espectro de energía que coincide con la relación de dispersión de energía para una partícula relativista.
4. A pesar de que la función de onda de Laughlin fue propuesta como un Ansatz, esta ha sido capaz de describir los estados de Hall $\nu = 1/m$ observados de forma experimental que dan origen a los valores del factor de ocupación fraccionarios para la resistencia de Hall. Además al excitar los estados asociados a la función onda de Laughlin es posible obtener cuasi-partículas y cuasi-agujeros

que tienen la característica de tener una carga fraccionaria.

5. Debido al comportamiento estadístico de las cuasi-partículas y los cuasi-agujeros, en el que muestran una estadística completamente distinta a la de los bosones y fermiones, es necesario desarrollar la estadística fraccionaria que caracteriza a estas cuasi-partículas y les otorga el nombre de anyones.
6. Con la estadística fraccionaria es posible desarrollar la teoría de fermiones compuestos, la cual permite obtener la función de onda de Jain y que es una generalización de la función de onda de Laughlin. Con esta función de onda generalizada es posible generar una serie con la que se obtienen aún más valores fraccionarios del factor de ocupación que no eran posibles obtener con la función de onda de Laughlin y permite tener una mejor descripción del efecto Hall cuántico fraccionario.
7. Las propiedades de degeneración del estado fundamental de la función de onda de Laughlin dan origen a un nuevo estado de la materia similar a un líquido cuántico y que se puede caracterizar a través del concepto de orden topológico.
8. La importancia de la teoría de Chern-Simons es de poder describir la física del efecto Hall cuántico de una forma más general aplicando únicamente los argumentos topológicos del sistema. En donde se pueden obtener las cuantizaciones de la resistencia de Hall tanto del caso entero como del fraccionario sin utilizar el concepto de niveles de Landau, sin importar la clasificación estadística de las partículas o las interacciones entre sí. Además con estas consideraciones topológicas es posible obtener el orden topológico del efecto Hall cuántico fraccionario.

RECOMENDACIONES

1. Se puede estudiar la dualidad del panel de abeja-estrella en el grafeno, el cual es otro modelo de interés, con el que se pueden obtener soluciones exactas a modelos, como el caso de dos redes cuadradas en el modelo de Ising [37].
2. El concepto de órdenes topológicos es un tema bastante amplio de las fases topológicas de la materia [34, 35], y es posible profundizar en su estudio en excitaciones en líquidos cuánticos FQH, utilizando la teoría efectiva para líquidos cuánticos, la obtención de nuevos órdenes topológicos utilizando vectores de espín y la aproximación algebraica de los líquidos FQH no abelianos [9]. Para una mejor comprensión en este tema, es necesario tener una buena base teórica en teoría efectiva de campos para lo cual recomiendo el estudio de las notas de clase de Edward Witten [8] y los artículos de X.G. Wen [9, 34, 33].
3. Una aplicación importante del concepto de orden topológico y que puede ser motivos de estudio, es la implementación de la computación cuántica topológica. Esto se logra al implementar el modelo de Kitaev [6] para anyones y su estadística fraccionaria, en este modelo se incluyen interacciones de cuatro cuerpos que se pueden estudiar utilizando simulación cuántica análoga junto con la teoría de átomos fríos en redes ópticas. Y de forma alternativa utilizando simulación cuántica digital en redes ópticas [26, 5].
4. Estudios más recientes han mostrado que se pueden obtener mediciones de entrelazamiento cuántico en órdenes topológicos, obteniendo una entropía de entrelazamiento cuántico en estos sistemas [1].

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. Chen, L.Y. Hung, Y. Li y Y. Wan. Entanglement entropy of topological orders with Boundaries. Consultado en julio de 2019 en <https://arxiv.org/abs/1804.05725>.
- [2] F.F. Fanchini, L.K. Castelano, M.F. Cornelio y M.C. de Oliveira. Locally inaccessible information as a fundamental ingredient to quantum information. Consultado en noviembre 2018 en <https://arxiv.org/abs/1106.0289v2>.
- [3] M. O. Goerbig. Quantum Hall effects. Consultado en marzo de 2019 en <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0210167>.
- [4] S. M. Girvin. The quantum Hall effect: Novel excitations and broken symmetries . Consultado en marzo de 2019 en <https://arxiv.org/abs/cond-mat/9907002v1>.
- [5] I.M. Georgescu, S. Ashhab, F. Nor. Quantum Simulation. Consultado en julio de 2019 en <https://arxiv.org/abs/1308.6253>.
- [6] A.Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. Consultado en junio de 2019 en <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9707021>.
- [7] R. Kundu. Tight binding parameters for graphene. Consultado en noviembre de 2018 en <https://arxiv.org/abs/0907.4264>.
- [8] E. Witten. Three lectures on topological phases of matter. Consultado en julio de 2019 en <https://arxiv.org/abs/1510.07698>.
- [9] X.G. Wen. Topological orders and edge excitations in fractional Hall systems. Consultado en junio de 2019 en <https://arxiv.org/abs/cond-mat/9506066>.
- [10] J. N. Fuchs, M.O. Goerbig, Introduction to the physics properties of graphene, lectures notes 2008. Consultado en junio 2019 en <https://www.equipes.lps.u-psud.fr/GOERBIG/CoursGraphene2008.pdf>

- [11] S. Figueroa, La fase de Berry en el álgebra global conforme y su isomorfismo con la precesión de Thomas. Consultado en julio de 2019 en <https://ecfm.usac.edu.gt/sites/default/files/2018-11/TesisAidaSaraiFigueroa.pdf>
- [12] D. Tong, The quantum Hall effect. Consultado en julio 2019 en <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe/qhe.pdf>
- [13] J. Frölich y A. Zee. *Nucl. Phys.* **B364**, 517, 1991.
- [14] S.M. Girvin y A.H.McDonald. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1252m 1987.
- [15] F.D.M. Haldane. *Phys. Rev. Lett* **51** 605, 1983.
- [16] F.D.M Haldane. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 937, 1991.
- [17] B.I. Halperin. *Phys. Rev. Lett.*, **52**, 1583, 1984.
- [18] J.K. Jain. *Phys. Rev. Lett.*, **63**, 199, 1989.
- [19] v. Klitzing, K. Dorda y M. Pepper. *Phys. Rev. Lett* **45** 494, 1980.
- [20] R.B. Laughlin. *Phys. Rev. Lett.* **50** 1395, 1983
- [21] N.D. Mermin. *Rev. Mod. Phys.*, **51**, 591, 1979.
- [22] D.C. Tsui, H.,Störmer, y A.C. Gossard. *Phys. Rev. Lett* **48** 1559, 1983.
- [23] Y. Zhang, Y. W. Tan, H.L. Stormer y P. Kim, *Nature* **438** 201, 2005.
- [24] K.S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morosov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva y A. A. Firsov. *Science* **306** 666, 2004.
- [25] J.C. Charlier, x. Blase y S. Roche. *Rev. Mod. Phys.* **79** 677, 2007.
- [26] M. Lewenstein, B. Kraus, P. Horodecki y J.I. Cirac. *Phys. Rev. A.* **63** 044304, 2001.
- [27] K.S. Novoselov, A. K. Geim, S.V. Morosov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos y A.A. Firosov. *Nature* **438** 198, 2005.
- [28] A.H. Castro Neto, F. Guinea y N.M.R. Peres. *Physics World* **19** 33. 2006
- [29] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki y K. Horodecki. *Rev. Mod. Phys.*, **81** 865, 2009.

- [30] M. Wilson. *Phys. Today*. **51** 21, 2006.
- [31] A. Peres y D.R. Terno. *Rev. Mod. Phys.* **76** 93, 2004.
- [32] M. Gmitra, S. Konschuh, C. Ertler, C. Ambrosch-Draxl y J. Fabian. *Phys. Rev. B* **82** 245412, 2009.
- [33] X.G. Wen y A. Zee. *Phys. Rev.* **B46**, 2290, 1992.
- [34] X.G. Wen. *Int. J. Mod. Phys.*, **B4** 239, 1990.
- [35] E. Witten. *Comm. Math. Phys.* **121**, 351, 1989.
- [36] S.C. Zhang, T.H. Hansson y S. Kivelson. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 82, 1989.
- [37] R.J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Elsevier, 2016.
- [38] D.C. Mattis. *Many-body Problem: The: An Encyclopedia Of Exactly Solved Models In One Dimensions*. World Scientific, 1993.
- [39] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 3ra. edición, 1999.
- [40] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 8va. edición, 2005.
- [41] R. Shankar. *Principles in Quantum Mechanics*. Plenum Press, 2da. edición, 1994.
- [42] G. Arfken, H.J. Webber, F.E. Harris. *Mathematical methods for Physicists*. Academic Press, 7ma. edición, 2012.
- [43] F- Schwabl. *Statistical Mechanics*. Springer, 2da. edición, 2006.