



Universidad de San Carlos de Guatemala  
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Física

# **SIMULACIÓN COMPUTACIONAL, DESARROLLO TEÓRICO Y COMPARACIÓN EXPERIMENTAL DE UN PÉNDULO ELÁSTICO**

**Lorena Alejandra Contreras Lemus**  
Asesorado por Dr. Enrique Pazos Ávalos

Guatemala, mayo de 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**SIMULACIÓN COMPUTACIONAL, DESARROLLO  
TEÓRICO Y COMPARACIÓN EXPERIMENTAL DE  
UN PÉNDULO ELÁSTICO**

TRABAJO DE GRADUACIÓN  
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
POR

**LORENA ALEJANDRA CONTRERAS LEMUS**  
ASESORADO POR DR. ENRIQUE PAZOS ÁVALOS

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
**LICENCIADA EN FÍSICA APLICADA**

GUATEMALA, MAYO DE 2019

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



**CONSEJO DIRECTIVO**

DIRECTOR M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera  
SECRETARIO ACADÉMICO M.Sc. Edgar Cifuentes Anleu

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

EXAMINADOR Dr. Rodrigo Sacahuí  
EXAMINADOR Dr. David Marín  
EXAMINADOR Ing. Walter Álvarez



UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



Ref. D.DTG. 005-2019  
Guatemala 20 de mayo de 2019

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **SIMULACIÓN COMPUTACIONAL, DESARROLLO TEÓRICO Y COMPARACIÓN EXPERIMENTAL DE UN PÉNDULO ELÁSTICO** presentado por la estudiante universitaria **Lorena Alejandra Contreras Lemus**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.

MSc. Marcelo Ixquiac  
Director

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



## AGRADECIMIENTOS

A mis papás, Ricardo y Lorena, por apoyarme siempre y ser un gran ejemplo de esfuerzo, dedicación y amor. Porque despertaron en mí una enorme curiosidad por entender el universo. Y por enseñarme, entre tantas cosas, a dar siempre lo mejor y a creer en mí.

A Ricky mi hermanito, sin ti no sería lo mismo, me ayudas muchísimo.

A mis abuelitos, por su cariño y apoyo incondicional todos estos años.

A mis amigas y amigos, por compartir conmigo desde risas hasta lágrimas, porque parte del viaje es disfrutar el camino y las amistades sinceras son invaluable.

A mis profesores, por compartir sus conocimientos durante todos estos años, en especial a todos aquellos que transmiten con tanto entusiasmo y gusto temas de ciencia, el mundo necesita más como ustedes.

A mi asesor, Enrique Pazos, por todos sus consejos, tiempo, y orientación en la elaboración de este trabajo.

## DEDICATORIA

A todas las niñas curiosas,  
a todos los que cuestionan el mundo,  
y a todos los que más de alguna vez  
se han sentido fuera de lugar.

.All our science, measured against reality,  
is primitive and childlike-and yet it is  
the most precious thing we have."  
- Albert Einstein

.And will you succeed?  
Yes! You will, inded!  
(98 and 3/4 percent guaranteed.)"  
«Oh, the places you'll go!»  
- Dr. Seuss.

# ÍNDICE GENERAL

<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>III</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>V</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	<b>VII</b>
<b>OBJETIVOS</b>	<b>IX</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>XI</b>
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA</b>	<b>1</b>
1.1. Péndulo simple . . . . .	1
1.2. Péndulo elástico . . . . .	5
1.3. Espacio de configuración, espacio de fase y grados de libertad . . . . .	6
1.4. Sistema Coordinado . . . . .	7
1.5. Energía del Sistema . . . . .	8
<b>2. SOLUCIÓN TEÓRICA</b>	<b>9</b>
2.1. Método 1: Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	9
2.2. Método 2: Principio de la mínima acción de Hamilton . . . . .	11
2.3. Análisis teórico de las ecuaciones . . . . .	13
<b>3. SIMULACIÓN COMPUTACIONAL</b>	<b>15</b>
3.1. Solución numérica . . . . .	15
3.2. Detalles del modelo . . . . .	15
3.3. Desarrollo del código . . . . .	16
3.4. Resultados: variaciones angulares . . . . .	20
3.5. Resultados: variaciones en velocidades iniciales . . . . .	25
3.6. Energía del sistema . . . . .	29

<b>4. MODELO EXPERIMENTAL Y COMPARACIÓN</b>	<b>33</b>
4.1. Modelo experimental . . . . .	33
4.2. Resultados experimentales y simulados . . . . .	35
<b>5. ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO</b>	<b>37</b>
5.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales . . . . .	37
5.2. Implicación de la no linealidad . . . . .	40
5.3. Períodos de oscilación . . . . .	40
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>43</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>45</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>47</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>49</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Péndulo simple. . . . .	1
1.2. Diagrama de fase del péndulo simple. . . . .	3
1.3. Péndulo elástico . . . . .	5
1.4. Sistema de coordenadas polares . . . . .	7
3.1. Simulación a $(30^\circ, 0, l, 0)$ . . . . .	20
3.2. Simulación a $(45^\circ, 0, l, 0)$ . . . . .	21
3.3. Simulación a $(60^\circ, 0, l, 0)$ . . . . .	22
3.4. Simulación a $(90^\circ, 0, l, 0)$ . . . . .	23
3.5. Simulación a $(135^\circ, 0, l, 0)$ . . . . .	24
3.6. Simulación a $(45^\circ, 2, l, 0)$ . . . . .	25
3.7. Simulación a $(45^\circ, 0, l, 2)$ . . . . .	26
3.8. Simulación a $(45^\circ, 2, l, 2)$ . . . . .	27
3.9. Simulación a $(45^\circ, -2, l, 2)$ . . . . .	28
3.10. Energía del sistema: simulación a $(30^\circ, 0, l, 0)$ . . . . .	29
3.11. Energía total del sistema: variaciones angulares . . . . .	30
3.12. Energía total del sistema: variaciones en velocidades iniciales . . . . .	31
4.1. Montaje experimental . . . . .	33
4.2. Regresión lineal para determinar constante k . . . . .	34
4.3. Comparación experimental y simulación a $25.8^\circ$ . . . . .	35
4.4. Comparación experimental y simulación a $34.1^\circ$ . . . . .	36
4.5. Comparación experimental y simulación a $40.9^\circ$ . . . . .	36
5.1. Variaciones de trayectorias a diferentes condiciones iniciales . . . . .	38
5.2. Simulaciones a diferentes condiciones iniciales y datos experimentales . . . . .	39
5.3. Simulación de un período completo para largas amplitudes . . . . .	41



## ÍNDICE DE TABLAS

5.1. Condiciones iniciales para la figura 5.1. . . . .	38
5.2. Condiciones iniciales: simulación . . . . .	47
5.3. Condiciones iniciales: simulación con datos experimentales . . . . .	47
5.4. Medición de magnitudes experimentales . . . . .	47
5.5. Equipo utilizado en montaje experimental . . . . .	48



## LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$l$	longitud
$m$	masa constante
$\theta$	desplazamiento angular
$\theta_0$	desplazamiento angular inicial
$g$	aceleración gravitacional
$t$	tiempo
$T$	período de oscilación
$\phi_0$	ángulo de fase
$E$	energía total del sistema
$F_t$	fuerza de tensión
$F_r$	fuerza elástica
$\Delta x$	cambio en el desplazamiento
$n$	número de grados de libertad
$M$	espacio de configuración
$\Gamma$	espacio de fase
$T$	espacio tangente
$\gamma$	número de restricciones holonómicas
$\nu$	dimensión del espacio de configuración
$v$	velocidad
$r$	distancia radial
$l_0$	longitud inicial
$h$	altura
$U$	energía potencial general
$U_e$	energía potencial elástica
$U_p$	energía potencial gravitacional
$K$	energía cinética
$k$	constante de elasticidad del resorte

Símbolo	Significado
$L$	lagrangiano
$q$	coordenada generalizada
$P_r$	momentum canónico conjugado radial
$P_\theta$	momentum canónico conjugado angular
$\mathcal{S}$	acción de un sistema físico
$\delta$	variación infinitesimal
$\omega_r$	frecuencia de oscilaciones radiales
$\omega_\theta$	frecuencia de oscilaciones angulares

# OBJETIVOS

## General

Analizar la trayectoria que describe un péndulo elástico por medio de métodos teóricos, experimentales y de simulación computacional.

## Específicos

1. Desarrollar soluciones teóricas del movimiento de un péndulo elástico utilizando distintos métodos de la mecánica clásica.
2. Resolver mediante métodos numéricos las ecuaciones que describen el movimiento del péndulo elástico.
3. Realizar una simulación del sistema masa resorte utilizando los resultados numéricos obtenidos.
4. Realizar un montaje experimental y comparar las trayectorias del péndulo.
5. Analizar los tipos de movimientos presentes en el sistema masa resorte.



# INTRODUCCIÓN

El péndulo elástico es un sistema mecánico simple, el cual está compuesto por un resorte elástico ideal sostenido desde un pivote en uno de sus extremos y unido a un objeto de masa constante en el otro. Este se mueve libremente y su movimiento es producido únicamente por la gravedad. Las ecuaciones que describen el movimiento son sencillas de plantear, sin embargo son un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales altamente acopladas, lo que resulta en un sistema que no posee una solución analítica exacta. Pareciera un problema sencillo de resolver pero la complejidad dinámica dificulta obtener una función que describa la posición del objeto para cualquier tiempo.

El interés por el estudio del péndulo elástico surgió en 1933, año en que aparece el primer artículo sobre el péndulo elástico, escrito por Vito y G. Gorelik[8]. En su trabajo estudiaron las oscilaciones planares del péndulo elástico considerando únicamente dos grados de libertad, el principal interés era estudiar el caso específico en que la relación de la frecuencia vertical del movimiento es el doble de la frecuencia horizontal. Esto los llevo a investigar la resonancia del sistema acoplado que se manifiesta cuando cierta cantidad de energía se transfiere de un tipo de oscilación a otro y viceversa. Este experimento ayudó a dar una clásica descripción para el fenómeno cuántico de la división de las líneas espectrales en la molécula del  $CO_2$  ya que la razón de resonancia 2:1 del péndulo proporcionó una buena analogía la resonancia cuántica de la molécula.

Se han realizado múltiples aplicaciones, similares a la descrita anteriormente, en las que el péndulo elástico como modelo matemático brinda una buena analogía a distintos fenómenos físicos. Tales como óptica no lineal, la física de plasma [9] y modelar el fenómeno atmosférico El Niño.[7]

El interés en el péndulo elástico se mantiene a través de los años por su variedad de soluciones y casos específicos. Para pequeñas amplitudes las técnicas de pequeñas perturbaciones son válidas ya que el sistema es integrable y es posible obtener soluciones analíticas aproximadas. En cambio, para amplitudes mayores el sistema se comporta de forma caótica.

En los cursos de la Licenciatura en física se estudian problemas similares dependientes del tiempo utilizando mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana pero en su mayoría estos poseen soluciones analíticas. Este trabajo de graduación busca explorar el problema del péndulo elástico desarrollando soluciones teóricas por distintos métodos de la mecánica clásica, simular el sistema masa resorte por medio de métodos numéricos y comprobar los resultados teóricos y numéricos con un montaje experimental.

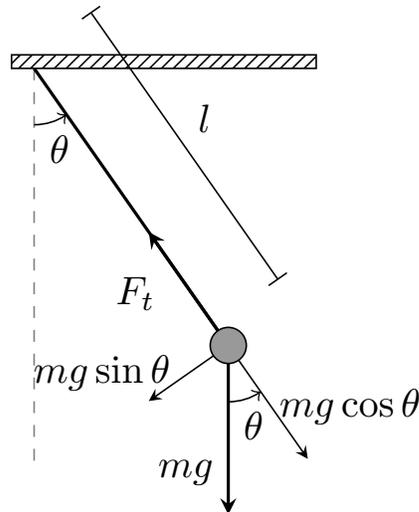
La complejidad de realizar una comparación teórica, experimental y una simulación numérica se encuentra en: resolver correctamente el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, llevar a cabo de forma rigurosa el experimento de un movimiento caótico y elegir correctamente los parámetros de la simulación. Se espera que este documento sea de utilidad para estudiantes que se encuentren en cursos de mecánica y deseen conocer métodos y herramientas para la solución de problemas sin solución analítica.

# 1. PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA

A continuación se presenta el planteamiento del problema dinámico a resolver: la ecuación de movimiento del péndulo elástico. Para ello se describe brevemente el caso más sencillo, el péndulo simple, y luego el péndulo elástico. También se indican las implicaciones al utilizar un sistema ideal masa resorte, el espacio de fase, el espacio de configuración, los grados de libertad y la energía del sistema.

## 1.1. Péndulo simple

El caso más sencillo del sistema masa resorte es el péndulo simple o péndulo matemático. Este consiste en una barra de masa despreciable y longitud  $l$  que se sujeta desde uno de sus extremos a un pivote fijo sin fricción. Y desde el otro de sus extremos se cuelga una masa puntual  $m$  como se muestra en la fig. 1.1.



**Figura 1.1.** Péndulo simple. *Fuente: elaboración propia.*

Al desplazar la masa puntual desde la posición vertical de equilibrio un ángulo  $\theta$ , el péndulo oscila con una amplitud constante sin detenerse; ya que el peso  $w$  del objeto  $w = mg$  proporciona un torque restitutivo  $-mgl \sin \theta$ . La forma rotacional de la segunda ley del movimiento de Newton establece que este torque es igual al producto del momento de inercia  $ml^2$  por la aceleración angular del objeto  $d^2\theta/dt^2$ [5]. De esta manera se obtiene la ecuación del movimiento para el péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.1)$$

Para pequeños ángulos resulta conveniente realizar la aproximación  $\sin \theta \approx \theta$  de forma que (1.1) se reduce a la ecuación de un oscilador armónico simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (1.2)$$

Realizando separación de variables en (1.2) se obtiene la función de desplazamiento:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi_0). \quad (1.3)$$

Y la función de velocidad:

$$\dot{\theta} = \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0). \quad (1.4)$$

Donde  $\theta_0$  es la amplitud angular del péndulo,  $\phi_0$  es el ángulo de fase cuyo valor está determinado únicamente por las condiciones iniciales, y  $\omega$  es la frecuencia angular definida por la relación entre las constantes  $g$  y  $l$ :

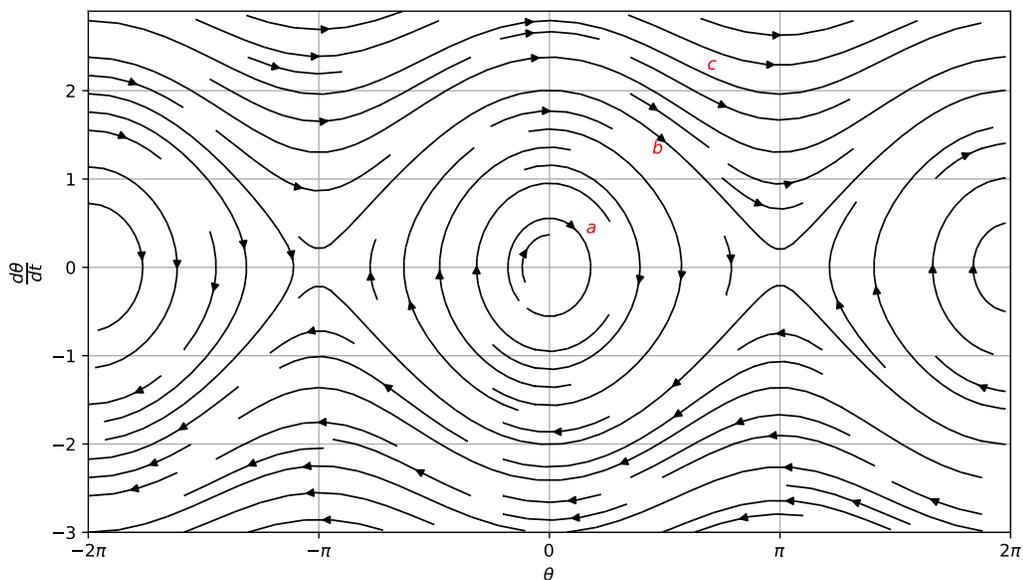
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.5)$$

El período del movimiento utilizando esta aproximación está dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.6)$$

La diferencia principal entre el péndulo simple y un oscilador armónico consiste en que el primero tiene un período que decrece a medida que la amplitud aumenta [5] y el segundo tiene una frecuencia de oscilación fija determinada por (1.5).

El desplazamiento angular (1.3) y la velocidad angular (1.4) son funciones de tiempo que se encuentran desfasadas 90 grados y por lo tanto, cuando una se encuentra en su valor absoluto máximo la otra es cero. Por ejemplo, la velocidad angular es máxima cuando el péndulo está en la posición vertical y su desplazamiento angular es cero. La relación entre estas dos cantidades se representa gráficamente mediante el siguiente diagrama de fase fig. 1.2.



**Figura 1.2.** Diagrama de fase del péndulo simple. Los puntos *a*, *b* y *c* representan las posibles trayectorias que puede tomar el péndulo dependiendo de la energía que contiene el sistema. *Fuente: elaboración propia.*

Las ecuaciones (1.3) y (1.4) pueden considerarse funciones paramétricas, cuyo parámetro es proporcional al tiempo; ya que a medida que el tiempo avanza, este punto describe una trayectoria de fase con órbitas elípticas o hiperbólicas. Reescribiendo (1.3) y (1.4) se obtiene la forma de estas trayectorias:

$$\frac{\theta^2}{\theta_0^2} + \frac{\dot{\theta}^2}{(\omega\theta_0)^2} = 1. \quad (1.7)$$

Debido a que el movimiento no presenta fricción, ni alguna otra fuerza externa, la energía se conserva para todas las trayectorias en el espacio de fase. Multiplicando la ecuación (1.1) por  $d\theta/dt$  e integrando se obtiene la expresión general para la energía del péndulo simple:

$$E = \frac{l^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + gl(1 - \cos \theta). \quad (1.8)$$

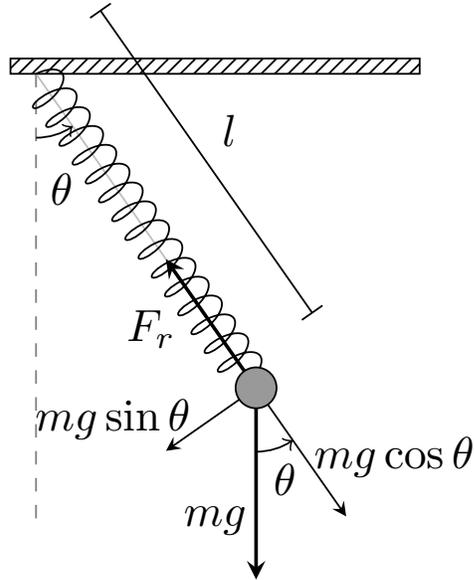
En (1.8) se escogieron las constantes de forma que la energía potencial del sistema sea cero en la posición vertical debajo del pivote, en  $\theta = 0^\circ$ .

Existe un valor crítico para la energía del sistema, este ocurre cuando el péndulo se encuentra en posición vertical a un ángulo de  $\theta = 180^\circ$  y únicamente posee energía potencial, por lo cual el primer término de (1.8) que determina la energía cinética es cero y la energía total es:  $E = 2gl$ . Respecto a este valor crítico existen tres posibles trayectorias en el diagrama de fase mostrado en la (fig. 1.2):

- **Caso I:**  $E < 2gl$ . Para energías menores al valor crítico se forman trayectorias elípticas en el espacio de fase. El péndulo no posee la energía necesaria para alcanzar la posición de equilibrio vertical  $\theta = \pi$ . Bajo esta condición la velocidad angular *omega* se hace cero para algunos ángulos, el péndulo se encuentra atrapado en uno de los puntos mínimos del pozo de potencial del coseno, realizando oscilaciones simples o vibraciones alrededor de la posición del mínimo movimiento. El centro de este diagrama fig. 1.2 donde  $d\theta/dt = \dot{\theta} = 0$  se conoce como punto elíptico fijo, ya que todas las trayectorias forman elipses.
- **Caso II:**  $E = 2gl$ . Cuando el péndulo tiene el valor crítico de energía este se encuentra en un punto de equilibrio inestable, a un ángulo  $\theta = \pi$ . Únicamente posee energía potencial y permanecerá en este equilibrio hasta que exista alguna perturbación a su energía cinética, resultando en trayectorias descritas en el Caso I o III. En este nivel de energía se encuentra una curva llamada separatriz:  $\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , que delimita los dos tipos de trayectorias.
- **Caso III:**  $E > 2gl$ . Si no existen restricciones para el ángulo  $\theta$  el péndulo tiene la energía suficiente para dar vueltas completas ya que supera la energía crítica para alcanzar la posición de equilibrio. Este es un punto fijo hiperbólico donde  $d\theta/dt = 0$  y  $\theta = \pi$  porque se describen trayectorias hiperbólicas en el espacio de fase.

## 1.2. Péndulo elástico

El péndulo simple contaba únicamente con un grado de libertad  $\theta$ , el péndulo elástico consiste en aumentar el número de grados de libertad sustituyendo la barra de longitud fija  $l$  por un resorte de longitud relajada  $l$  y con una constante de rigidez  $k$  como se muestra en la fig. 1.3.



**Figura 1.3.** Péndulo elástico. *Fuente: elaboración propia.*

Al definir un sistema masa resorte ideal se considera lo siguiente:

- El resorte es de masa despreciable, este no se puede torcer, doblar, ni colisionar consigo mismo, vuelve a su longitud de relajación natural luego de estiramientos o compresiones y ejerce una fuerza elástica restitutiva descrita por la Ley de Hooke: *Cuando un sólido se deforma, se resiste a la deformación con una fuerza proporcional a la cantidad que se deforma*[3]

$$F_r = -k\Delta x. \quad (1.9)$$

Si un sólido se deforma más allá de su límite elástico, quedará permanentemente deformado. Así que dentro de la idealización de este resorte está utilizar masas que no excedan este límite.

- No se toma en consideración la fricción del objeto de masa puntual, ni la del resorte al moverse en el medio. Tampoco las posibles fuerzas de fricción dentro del mismo resorte ya que este no entra en contacto consigo mismo.
- El resorte y el pivote no prohíben ni limitan el tipo de movimiento que describe el objeto, esto significa que idealmente el resorte no rebota consigo mismo ni con el pivote.
- El movimiento del objeto está dado únicamente por la fuerza del peso del objeto mismo y por la fuerza elástica que le ejerce el resorte.

### 1.3. Espacio de configuración, espacio de fase y grados de libertad

El péndulo elástico bidimensional cuenta con dos grados de libertad  $n = 2$ , que en coordenadas polares son: la posición del objeto puntual  $r$  y el desplazamiento angular desde la vertical  $\theta$ . El espacio de configuración es  $M = \mathbb{R}^v = \mathbb{R}^2$  compuesto por  $(r, \theta)$ . Y el espacio de fase es  $\Gamma = TM = T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ , que en coordenadas polares es  $(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$ .

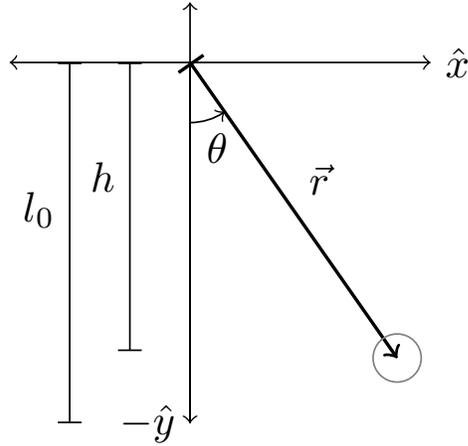
Se conocen como restricciones holonómicas a las condiciones de un sistema que pueden ser expresadas por medio de ecuaciones que involucran coordenadas espaciales y el tiempo, pero no derivadas superiores o momenta. El sistema planteado a resolver tiene una única restricción holonómica  $\gamma = 1$ , en la coordenada  $z = 0$ , la que confina al movimiento en 2 dimensiones, se opta por estudiar el caso bidimensional para poder realizar comparaciones experimentales para las oscilaciones planares. Esta restricción holonómica es la que determina el número de grados de libertad, ya que este está definido como la resta entre la dimensión del espacio de configuración y la cantidad de restricciones holonómicas[1], lo cual hace que el número de grados de libertad sea:

$$n = v - \gamma = 3 - 1 = 2. \quad (1.10)$$

A diferencia del péndulo simple plano, que tiene dos restricciones holonómicas ( $\gamma = 2$ ) las cuales son  $z = 0$  y la condición que determina a la longitud de la cuerda  $x^2 + y^2 = l^2$ , que hacen que el número de grados de libertad se restrinja a  $n = m - \gamma = 3 - 2 = 1$ .

## 1.4. Sistema Coordinado

Se plantea el sistema del péndulo elástico plano en coordenadas polares:



**Figura 1.4.** Sistema de coordenadas polares. *Fuente: elaboración propia*

La relación entre las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  y polares  $(r, \theta)$ :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Los vectores unitarios polares  $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Hallando las primeras derivadas de los vectores unitarios y utilizando la notación  $d\theta/dt = \dot{\theta}$  se obtiene:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}) \dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{1.13}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-\cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) \dot{\theta} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}}. \tag{1.14}$$

El vector de posición para la masa puntual:

$$\vec{r} = r \hat{\mathbf{r}}. \tag{1.15}$$

Hallando la primera derivada de (1.15) para obtener el vector de velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}. \quad (1.16)$$

Sustituyendo (1.13) y (1.14) en (1.16):

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (1.17)$$

Cuya magnitud es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}. \quad (1.18)$$

## 1.5. Energía del Sistema

La energía potencial del sistema depende únicamente de la altura a la que se encuentre el objeto puntal y se expresa en términos del ángulo  $\theta$  que se mide del eje  $\hat{y}$  negativo hacia la derecha en la fig. 1.4

$$h = l_0 - r \cos \theta. \quad (1.19)$$

Por lo cual la energía potencial  $U_p$  del sistema es:

$$U_p = mgh = mg(l_0 - r \cos \theta). \quad (1.20)$$

La energía potencial elástica depende del estiramiento del resorte de acuerdo a la ley de Hooke, por lo que integrando (1.9) se obtiene la magnitud de la energía potencial elástica  $U_e$ :

$$U_e = \int_0^{r-l_0} kx \, dx = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2. \quad (1.21)$$

La energía cinética del sistema será la energía que posee la masa puntal al estar en movimiento:

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (1.22)$$

Utilizando (1.20),(1.21) y (1.22) la energía total del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - l_0)^2 - 2g(l_0 - r \cos \theta) \right). \quad (1.23)$$

## 2. SOLUCIÓN TEÓRICA

A continuación se hallarán las ecuaciones dinámicas del péndulo elástico por medio de dos métodos equivalentes: mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange y a través del Principio de mínima acción de Hamilton.

### 2.1. Método 1: Ecuaciones de Euler-Lagrange

El lagrangiano es una función escalar de las coordenadas generalizadas, sus derivadas temporales y el tiempo, que contiene toda la información sobre la dinámica del sistema.[1]. De este se puede extraer la evolución temporal y las leyes de conservación de cualquier sistema. En su forma clásica para un sistema de una o varias partículas se define como:

$$L = K - U. \tag{2.1}$$

Donde  $T$  es la energía cinética total del sistema y  $U$  es el potencial generalizado que consiste en la suma de todos los potenciales de energía presentes en el sistema.

Para cualquier vector  $\vec{q}$  que sea un punto en el espacio de configuración de un sistema, la primera derivada temporal de cada coordenada generalizada se define como la velocidad generalizada:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}. \tag{2.2}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange o también llamadas ecuaciones de Lagrange de segundo tipo[1], se definen como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \tag{2.3}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.20), (1.21) y (1.22) en (2.1) se obtiene el lagrangiano del sistema.  $L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$ :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 - mg(l_0 - r \cos \theta). \quad (2.4)$$

Ya con el lagrangiano solo falta conocer los momenta canónicos conjugados para obtener las ecuaciones dinámicas del péndulo, estos corresponden al término entre paréntesis de la ecuación (2.3), la derivada parcial del lagrangiano respecto a cada velocidad generalizada. Para este sistema de coordenadas polares son:

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad (2.5)$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \quad (2.6)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para  $r$ :

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} (P_r) = 0. \quad (2.7)$$

Derivando (2.4) respecto  $r$  y sustituyendo  $P_r$  de (2.5) se obtiene la primera ecuación del movimiento:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - g \cos \theta + \frac{k}{m}(r - l_0) = 0. \quad (2.8)$$

Para obtener la segunda ecuación del movimiento se plantea Euler-Lagrange para  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} (P_\theta) = 0. \quad (2.9)$$

Derivando (2.4) respecto  $\theta$  y sustituyendo  $P_\theta$  de (2.6) se obtiene la segunda ecuación del movimiento:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0. \quad (2.10)$$

## 2.2. Método 2: Principio de la mínima acción de Hamilton

Sea  $\mathcal{S}$  la acción de un sistema físico, definida como la integral del lagrangiano  $L$  entre dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$ , la acción es el funcional de  $N$  coordenadas generalizadas  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  las cuales definen la configuración del sistema.

$$\mathcal{S}[\vec{q}_1, \vec{q}_2, q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}, t) dt. \quad (2.11)$$

Por lo anterior la acción  $\mathcal{S}$  describe el movimiento completo del sistema y a partir de ella se obtienen las ecuaciones del movimiento. Además no depende de la elección de coordenadas ya que el formalismo de Lagrange es invariante en las coordenadas[1].

El principio de mínima acción de Hamilton indica que para variaciones infinitesimales  $\delta$ , de todas las trayectorias posibles, la que hace mínima la acción  $\mathcal{S}$  es aquella que hace cero la variación de la integral temporal sobre el lagrangiano. [1]  $\delta\mathcal{S} = 0$  Esto es:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}, t) dt = 0. \quad (2.12)$$

El principio de mínima acción de Hamilton para el sistema de coordenadas utilizado resulta:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, t) dt = 0. \quad (2.13)$$

Sustituyendo la expresión para el lagrangiano de ecuación (2.4) en la ecuación (2.13) se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m(\dot{r}\delta\dot{r} + r\dot{\theta}^2\delta r + r^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}) - k(r - l_0)\delta r + mg \cos \theta \delta r - mg \sin \theta \delta \theta \right] dt = 0. \quad (2.14)$$

Teniendo en cuenta las siguientes notaciones para derivadas parciales de coordenadas y velocidades generalizadas:

$$\delta\dot{q}dt = d(\delta q), \quad (2.15)$$

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q). \quad (2.16)$$

Se procede a reescribir la ecuación 2.14 para el primer término. Utilizando 2.15:

$$m\dot{r}\delta\dot{r}dt = m\dot{r}d(\delta r), \quad (2.17)$$

y dado que:

$$d(m\dot{r}\delta r) = m\ddot{r}\delta rdt + m\dot{r}\delta\dot{r}dt, \quad (2.18)$$

se obtiene para el primer término:

$$m\dot{r}\delta\dot{r}dt = d(m\dot{r}\delta r) - m\ddot{r}\delta rdt. \quad (2.19)$$

De forma similar para el tercer término de la ecuación 2.14. Utilizando 2.15:

$$mr^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}dt = mr^2\dot{\theta}d(\delta\theta) = mr^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}dt, \quad (2.20)$$

y dado que:

$$d(mr^2\dot{\theta}\delta\theta) = 2mrr\dot{\theta}\delta\theta dt + mr^2\ddot{\theta}\delta\theta dt + mr^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}dt, \quad (2.21)$$

se obtiene para el tercer término:

$$mr^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}dt = d(mr^2\dot{\theta}\delta\theta) - \delta\theta(2mrr\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta})dt. \quad (2.22)$$

Sustituyendo la expresión para el primer y tercer término, ecuación (2.19) y ecuación (2.22), en la integral del lagrangiano (2.14) se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ d(m\dot{r}\delta r) - m\ddot{r}\delta rdt + mr\dot{\theta}^2\delta r + d(mr^2\dot{\theta}\delta\theta) - 2mrr\dot{\theta}\delta\theta - mr^2\ddot{\theta}\delta\theta dt - k(r - l_o)\delta r + mg \cos \theta \delta r - mgr \sin \theta \delta\theta \right] dt. \quad (2.23)$$

Ordenando los términos de la ecuación anterior por sus diferenciales:

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[ [m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r - l_0) - mg \cos \theta] \delta r + [2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} + mgr \sin \theta] \delta \theta \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[ d(m\dot{r}\delta r) + d(mr^2\dot{\theta}\delta r) \right]. \quad (2.24)$$

Asumiendo que  $\delta r$  y  $\delta \theta$  son cero en  $t_1$  y  $t_2$ , la segunda integral de la ecuación (2.24) es cero. Para la primera integral (2.24) se puede observar que  $\delta r$  y  $\delta \theta$  son completamente independientes, entonces para satisfacer el principio de la mínima acción de Hamilton (2.12), las expresiones que se integran respecto a  $\delta r$  y  $\delta \theta$  de la primera integral deben ser cero también, esto es:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - g \cos \theta + \frac{k}{m}(r - l_0) = 0, \quad (2.25)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0. \quad (2.26)$$

Las cuales son las ecuaciones del movimiento del sistema y son idénticas a las obtenidas por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange: (2.8) y (2.10).

### 2.3. Análisis teórico de las ecuaciones

Puesto que ya se encontraron por medio de dos métodos distintos las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento, es importante notar que la solución del péndulo elástico plano con dos grados de libertad (1.10) consiste en resolver simultáneamente un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales, acopladas entre sí: (2.25) y (2.26).

Encontrar una solución analítica explícita, una función que describa la posición del objeto o partícula en función del tiempo ( $r(t)$  y  $\theta(t)$ ), es poco frecuente en sistemas no lineales y que esté descrita en términos de funciones elementales es más raro aún. No existe un método analítico general que resuelva todo tipo de ecuaciones diferenciales [4].

Este sistema masa resorte presenta dos tipos de oscilaciones, angulares:

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad (2.27)$$

y radiales:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.28)$$

Reescribiendo (2.25) y (2.26) en términos de estas frecuencias de oscilación se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \omega_\theta^2 \sin \theta. \quad (2.29)$$

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 + g \cos \theta - \omega_r^2(r - l_0), \quad (2.30)$$

Es posible encontrar soluciones analíticas para ciertas configuraciones del sistema, tales como los casos triviales en los que hay equilibrio o cuando se anula un tipo de oscilación. Varios autores [7],[8],[10] se dedicaron a encontrar soluciones analíticas para casos específicos en los que los dos tipos de oscilaciones se encuentran a proporciones determinadas,  $\omega_r/\omega_\theta = 2, 1$  e.g. El motivo de resolver el sistema mediante métodos numéricos es obtener la solución más general para las trayectorias del péndulo elástico sin hacer aproximaciones a las ecuaciones (2.25) y (2.26).

También es importante notar que para sistemas linealmente acoplados la tasa de transferencia de energía no depende de las condiciones iniciales [7]. Por lo cual desde ya se puede intuir que el péndulo elástico es un sistema altamente dependiente a las condiciones iniciales por la naturaleza no lineal del acoplamiento de sus ecuaciones dinámicas.

## 3. SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

### 3.1. Solución numérica

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales se decidió realizar un código en Python y utilizar la función `scipy.integrate.odeint`.

Esta función utiliza tamaños de pasos variables y métodos de verificación de errores para obtener resultados precisos de manera eficiente.[6]. `odeint` recibe una función de derivada, un arreglo de condiciones iniciales y un arreglo de tiempos, en lugar de un tamaño de paso fijo; y regresa un arreglo con los valores de estado correspondiente a esos tiempos.

### 3.2. Detalles del modelo

Primero es necesario transformar el sistema de ecuaciones de segundo orden a uno de primer orden. Realizando los siguientes cambios de variable:

$$p_1 = \dot{\theta}, \quad (3.1)$$

$$p_2 = \dot{r}. \quad (3.2)$$

De manera que despejando para  $\ddot{r}$  y  $\ddot{\theta}$  las ecuaciones del movimiento (2.25) y (2.26) se obtiene:

$$\dot{p}_1 = \ddot{\theta} = -(2p_1p_2 + g \sin \theta)/r, \quad (3.3)$$

$$\dot{p}_2 = \ddot{r} = rp_1^2 - \frac{k}{m}(r - l_0) + g \cos \theta. \quad (3.4)$$

### 3.3. Desarrollo del código

```
1 from __future__ import division
2 import numpy as np
3 from scipy.integrate import odeint
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from matplotlib.patches import Circle
6 import csv
7
8 # Se definen las constantes
9 l = 0.36 # l-> longitud inicial del resorte 0.36[m]
10 k = 38.36 # k-> constante del resorte 38.36[Nm]
11 m = 0.5 # m-> masa puntual 0.5[kg]
12 g = 9.81 # g-> aceleración de la gravedad 9.8[m/s2]
13
14 # Se define la función derivada, devuelve las velocidades dr/dt y dθ/dt
15 def derivada(y, t, l, k, m):
16     theta, p1, r, p2 = y
17     # Se definen las nuevas variables p1 y p2 como las primeras derivadas
18     thetadot = p1
19     rdot = p2
20     # Se colocan las ecuaciones del movimiento en terminos de p1 y p2
21     p1dot = (-g*np.sin(theta) - 2*p1*p2) / r
22     p2dot = r*p1**2 - k*(r-l)*(1/m) + g*np.cos(theta)
23     return thetadot, p1dot, rdot, p2dot
24
25 # Intervalo total de tiempo y dt, t se define como arreglo de 0 a tmax[s]
26 tmax, dt = 20, 0.01
27 t = np.arange(0.00, tmax+dt, dt)
28
29 # Condiciones iniciales: (θ, dθ/dt, r, dr/dt)
30 y0 = [(1)*np.pi/(2), 0, l, 0]
31
32 # Se resuelve la ecuación diferencial usando odeint
33 y = odeint(derivada, y0, t, args=(l, k, m))
34 # Se regresa a las variables originales, ahora en funcion de t, r[t], θ[t]
```

```

35 theta, r = y[:,0], y[:,2]
36 thetadot, rdot = y[:,1], y[:,3]
37
38 # Se sacan las coordenadas cartesianas para generar la posición de la masa puntual
39 x = r * np.sin(theta)
40 y = -r * np.cos(theta)
41
42 # Se grafica la trayectoria de la masa puntual con un máximo de 2000 puntos
43 tray_t = 1
44 max_tray = 2000
45
46 # Se grafica el resorte
47 def plot_resorte(theta, r):
48     rs = 0.05 # Radio del resorte
49     ns = 25 # Numero de vueltas del resorte
50     Ns = 1000 # Numero de puntos el resorte [como helice]
51     punto1, punto2 = 100, 150 # Para que las vueltas no inicien desde el pivote
52     w = np.linspace(0, r, Ns) # Para la cantidadl de puntos Ns uniforme
53     radio = 0.05 # Radio de la masa puntual
54
55     # Se inicia un array de zeros del tamaño de puntos Ns en el eje x
56     xp = np.zeros(Ns)
57     xp[punto1:-punto2] = rs * np.sin(2*np.pi * ns * w[punto1:-punto2] / r)
58     # Se rotarlo para que coincida con el pendulo
59     R = np.array([[np.cos(theta), -np.sin(theta)],
60                  [np.sin(theta), np.cos(theta)]])
61     xs, ys = - np.matmul(R,np.vstack((xp, w)) )
62     ax.plot(xs, ys, c='k', lw=1)
63
64 # Se grafica la posición del péndulo durante el intervalo t
65 def make_plot(i):
66     plot_resorte(theta[i], r[i])
67     c0 = Circle((0, 0), radio/2, fc='k', zorder=10)
68     c1 = Circle((x[i], y[i]), radio, fc='#1C9DB9', ec='#1C9DB9', zorder=10)
69     ax.add_patch(c0)
70     ax.add_patch(c1)

```

```

71     # Se grafica la trayectoria de la masa puntual
72     nlinea = 2000
73     s = max_tray // nlinea
74     for j in range(nlinea):
75         imin = i - (nlinea-j)*s
76         if imin < 0:
77             continue
78         imax = imin + s + 1
79         a = (j/nlinea)**2
80         ax.plot(x[imin:imax], y[imin:imax],c='#9F3DEA',solid_capstyle='butt',lw=0.6)
81
82     # Se centra el punto fijo del pivote y se asegura que los ejes coincidan
83     ax.set_xlim(-np.max(r)-radio, np.max(r)+radio)
84     ax.set_ylim(-np.max(r)-radio, np.max(r)+radio)
85     ax.set_aspect('equal', adjustable='box')
86     plt.grid(True)
87     plt.axis()
88     plt.xlabel('distancia x [m]')
89     plt.ylabel('distancia y [m]')
90     plt.title('Pendulo elastico t= '+ str(i))
91     # Se guardan las imágenes.png en /cuadros
92     plt.savefig('cuadros/pic{:04d}.png'.format(i//di), dpi=72)
93     plt.cla()
94
95     # Se capturan puntos cada di intervalos de tiempo, ya que cada dt es muy extenso
96     fps = 10
97     di = int (1/fps/dt )
98
99     # Se coloca el tamaño de figura y de dpi para dar una imagen de 600x450
100    fig = plt.figure(figsize=(8.33333333, 6.25), dpi=72)
101    ax = fig.add_subplot(111)
102
103    # Se generan las imágenes y se muestran los valores de posición
104    for i in range(0, t.size, di):
105        print (i//di , t.size//di , x[i], y[i])
106        make_plot(i)

```

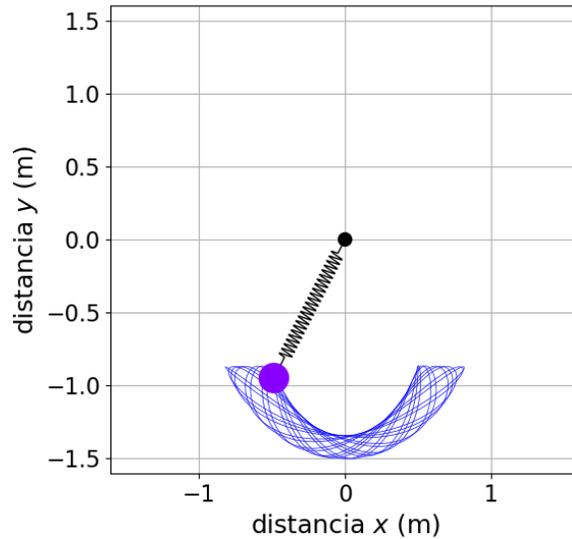
```

107
108 # Se exportan los datos de posición a un archivo csv
109 my_file = 'pos.csv'
110 file_obj = open(my_file, 'w')
111 outputWriter = csv.writer(file_obj)
112 for i in range(0, t.size, di):
113     outputWriter.writerow([i//di , i//di , x[i], y[i]])
114 file_obj.close()
115
116 # Se exportan los datos de velocidades a un archivo csv
117 posiciones = 'vel.csv'
118 file_obj = open(posiciones, 'w')
119 outputWriter = csv.writer(file_obj)
120 for i in range(0, len(t)):
121     outputWriter.writerow([theta[i] , r[i] , thetadot[i], rdot[i]])
122 file_obj.close()
123
124 # Se realizan las gráficas de los espacios de fase
125 plt.figure(2)
126 plt.figure(figsize=(8.33333333, 6.25), dpi=92)
127 plt.grid(True)
128 plt.xlabel(r'\theta$ [radianes]')
129 plt.ylabel(r'$d\theta/dt$ [radianes/s]')
130 plt.plot(theta, thetadot, 'r')
131 plt.savefig('t45.png', dpi=92)
132
133 plt.figure(3)
134 plt.figure(figsize=(8.33333333, 6.25), dpi=92)
135 plt.grid(True)
136 plt.xlabel(r'$r$ [m]')
137 plt.ylabel(r'$dr/dt$ [m/s]')
138 plt.plot(r, rdot, c='#08d824')
139 plt.savefig('r45.png', dpi=92)
140 plt.show()
141 # Fin

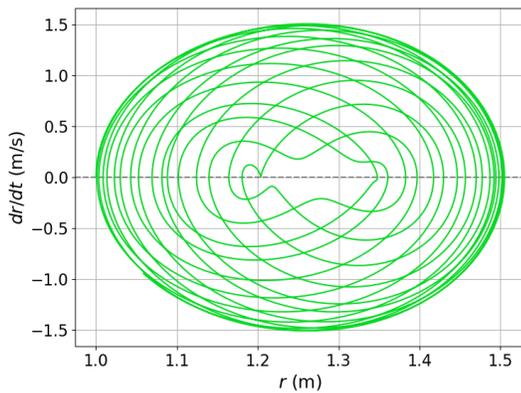
```

### 3.4. Resultados: variaciones angulares

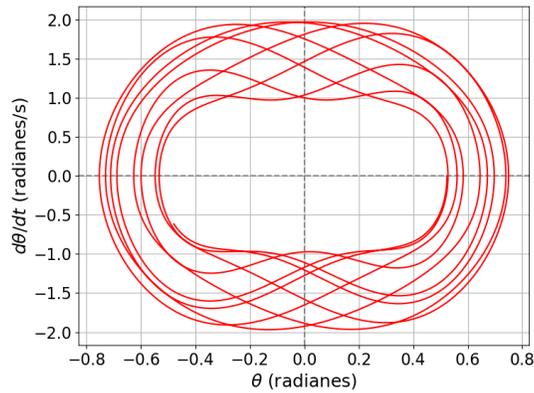
Todas las gráficas que se presentan a continuación fueron elaboradas con el código anterior simulando 20 segundos del movimiento. Las condiciones iniciales se indican de la siguiente forma:  $(\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r})$ . Se mantuvieron constantes las siguientes cantidades:  $l = 1$  m,  $k = 40$  Nm,  $m = 1$  kg,  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>, todas las condiciones iniciales y valores constantes utilizados se muestran en la tabla 5.2. Para  $(30^\circ, 0, l, 0)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



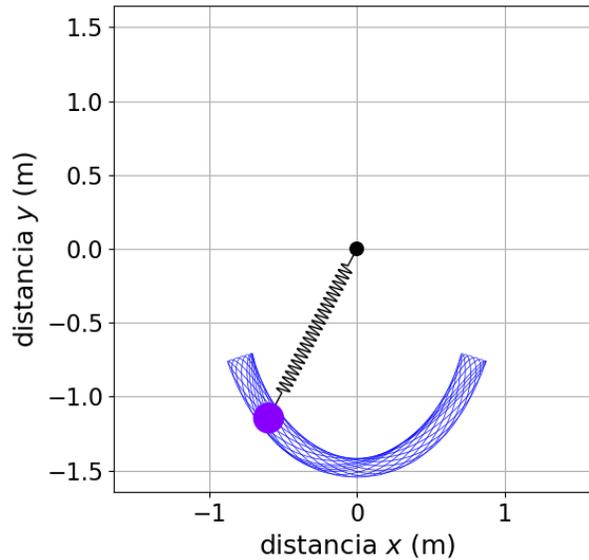
(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$



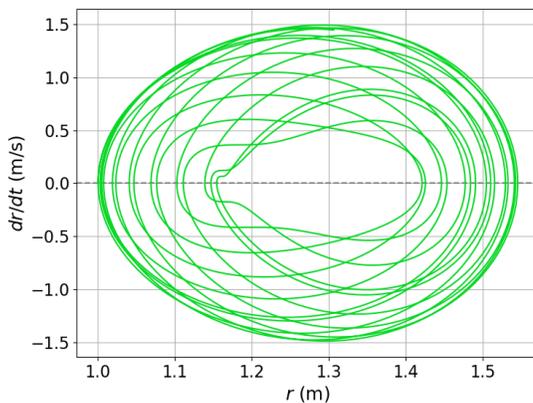
(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

**Figura 3.1.** Simulación a  $(30^\circ, 0, l, 0)$ . (a) Se describen movimientos circulares como un péndulo simple, y oscilatorios como el de un oscilador armónico simple de forma entrelazada. (b) Se obtienen curvas elípticas con valores positivos  $r > 0$ , ya que  $r$  debe ser mayor o igual a la longitud de compresión máxima del resorte.

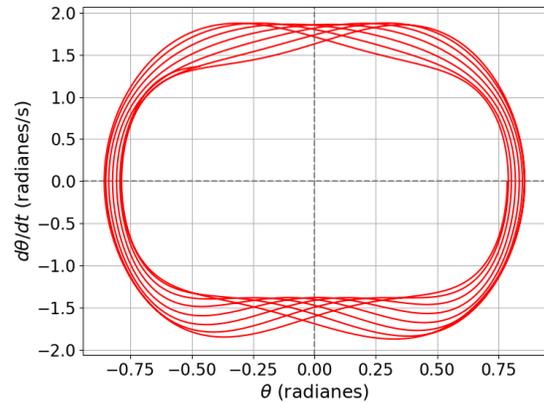
A continuación se muestran las gráficas con variaciones al ángulo inicial  $\theta_0$ . y las gráficas correspondientes a su espacio de fase  $(r, \dot{r})$  y  $(\theta, \dot{\theta})$ . Para  $(45^\circ, 0, l, 0)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



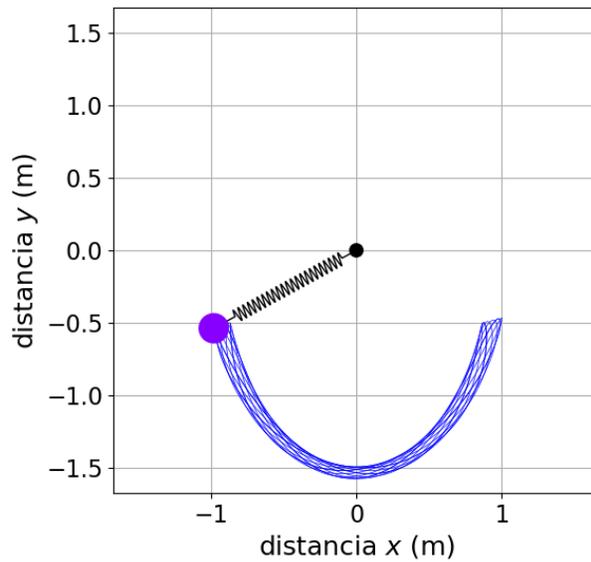
(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$



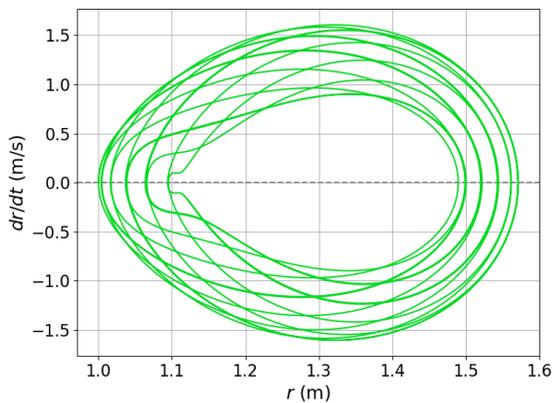
(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

**Figura 3.2.** Simulación a  $(45^\circ, 0, l, 0)$ . (a) Se obtuvieron recorridos más similares entre sí respecto a la fig.3.1a. (b) Se tienen varias curvas elípticas alrededor de distintos puntos elípticos fijos. Si este fuera el péndulo simple sería imposible que dos curvas se intersecan porque implicaría que el sistema puede saltar de un nivel de energía a otro sin tener fuerzas adicionales, pero para el caso elástico es posible porque el sistema puede tener las mismas coordenadas  $(r, \dot{r})$  para diferentes tiempos. (c) Las trayectorias se mantienen similares, el conjunto de coordenadas  $(\theta, \dot{\theta})$  se repiten a lo largo de tiempo.

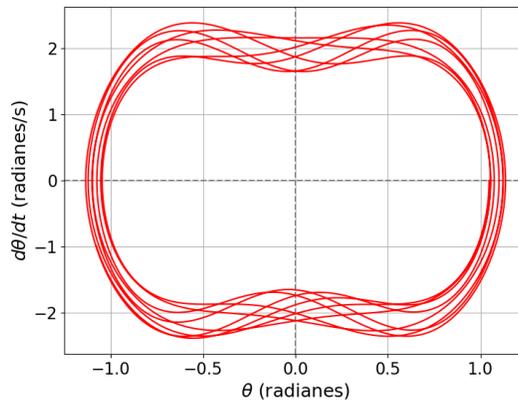
Para  $(60^\circ, 0, l, 0)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



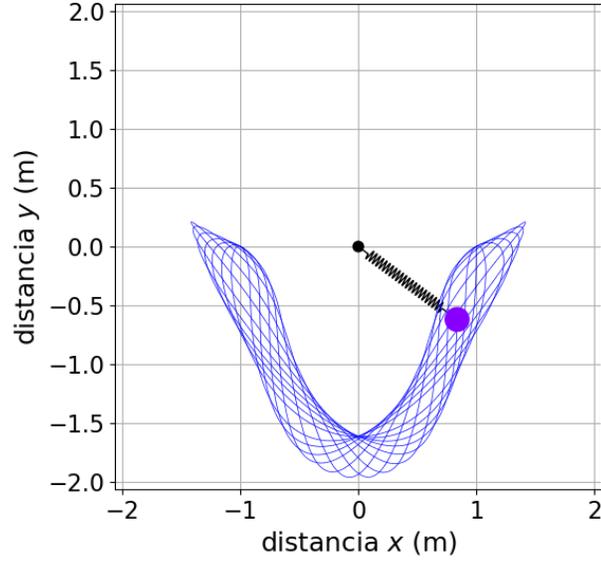
(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$



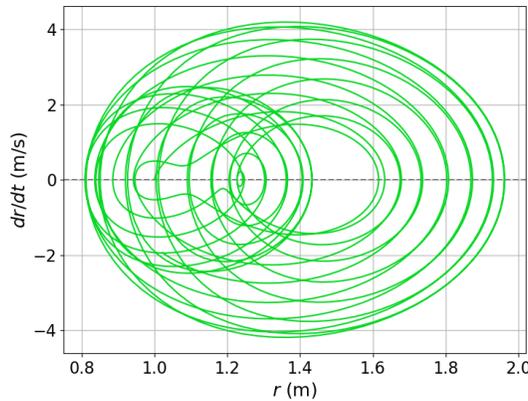
(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

**Figura 3.3.** Simulación a  $(60^\circ, 0, l, 0)$ . (a) Al aumentar el ángulo inicial y mantener el resto de condiciones, el péndulo elástico se comporta de forma similar a un péndulo simple: las oscilaciones verticales disminuyen. (b)(c) La mayoría de curvas en los diagramas de fase de las figuras de esta sección son cerradas, con formas elípticas para (b) y cíclicas debido a la naturaleza periódica del péndulo a ciertos intervalos de tiempo, pertenecen al equivalente caso I de la fig.1.2 para el péndulo elástico.

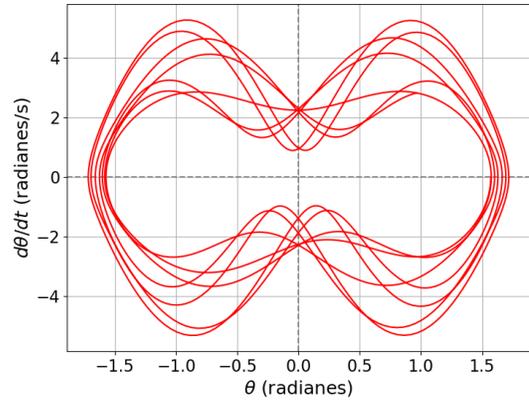
Para  $(90^\circ, 0, l, 0)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



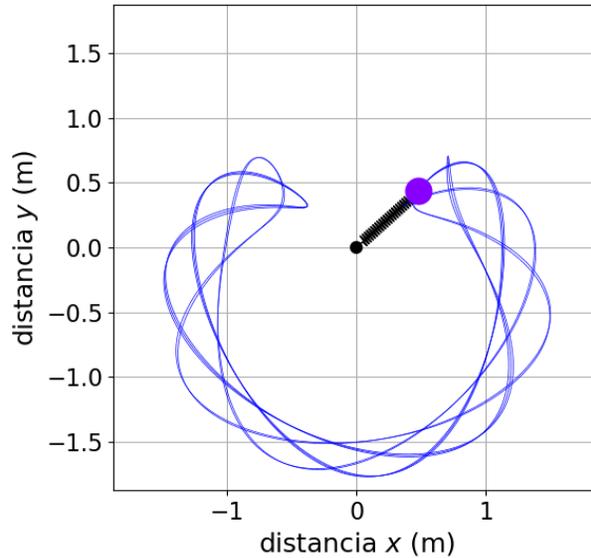
(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$



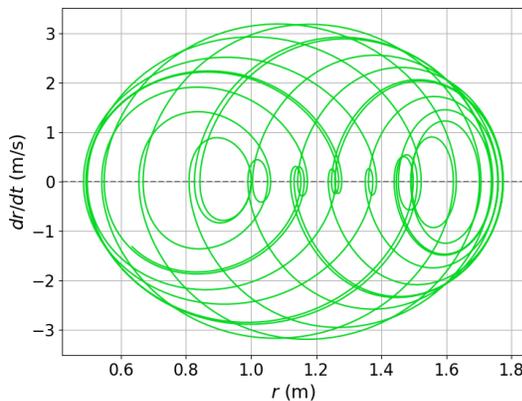
(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

**Figura 3.4.** Simulación a  $(90^\circ, 0, l, 0)$ . Al soltar el péndulo desde  $90^\circ$  éste alcanza ángulos mayores que inicial. (b) El diagrama de fase presenta trayectorias elípticas de dos tamaños distintos ya que posee dos amplitudes diferentes, una ocurre cuando en los extremos se describen curvas suaves y la otra cuando al retornar las curvas son cerradas e incluso se forman picos en sus extremos. (c) Las curvas de este diagrama se acercan al caso crítico II de la fig. 1.2. Se observan trayectorias que se asemejan a la separatriz de la fig. 1.2 por lo que es posible inferir que el valor crítico de energía para el péndulo elástico se encuentra cercano al de esta simulación.

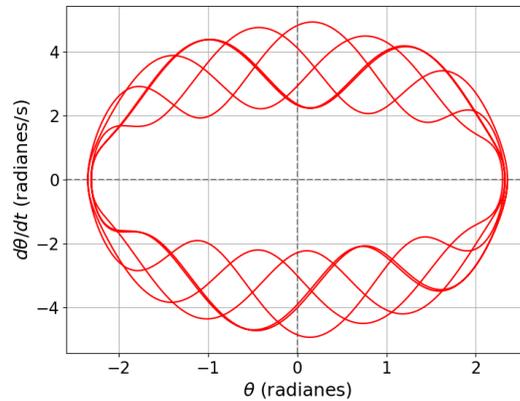
Para  $(135^\circ, 0, l, 0)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$

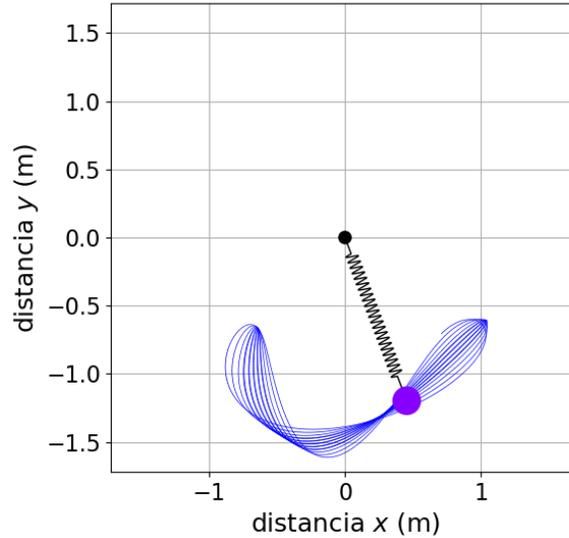


(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

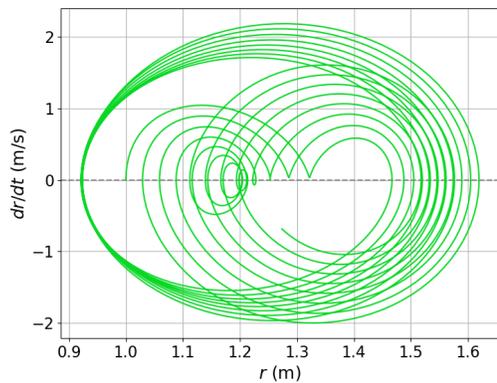
**Figura 3.5.** Simulación a  $(135^\circ, 0, l, 0)$  (a) Este es el único caso en que el péndulo elástico se lanza con un ángulo inicial superior a la horizontal, sin embargo este aún no cuenta con la energía suficiente para dar vueltas completas y sigue perteneciendo al caso I de la fig.1.2. En  $t = 8$  s el péndulo completa un período en su movimiento ya que se vuelve a repetir la misma trayectoria en el plano  $(x, y)$ . (b)(c) Los diagramas de fase son menos cíclicos, se observa que los puntos fijos se van moviendo respecto al tiempo, como en el plano  $(r, \dot{r})$  se observan varios puntos elípticos.

### 3.5. Resultados: variaciones en velocidades iniciales

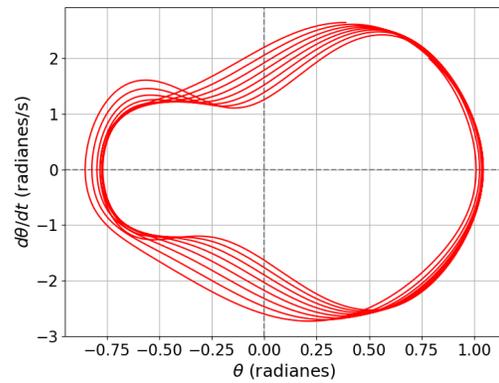
En las simulaciones anteriores las velocidades iniciales eran cero para todos los ángulos. Al realizar variaciones en las velocidades iniciales  $\dot{\theta}_0$  y  $\dot{r}_0$ , dejando fijo el ángulo inicial  $\theta_0 = 45^\circ$  y la longitud inicial de  $l = 1$  m se obtuvieron los siguientes resultados. Para  $(45^\circ, 2, l, 0)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



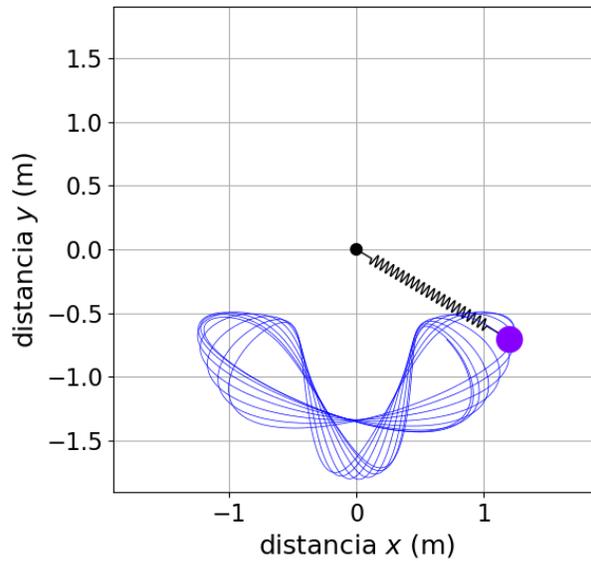
(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$



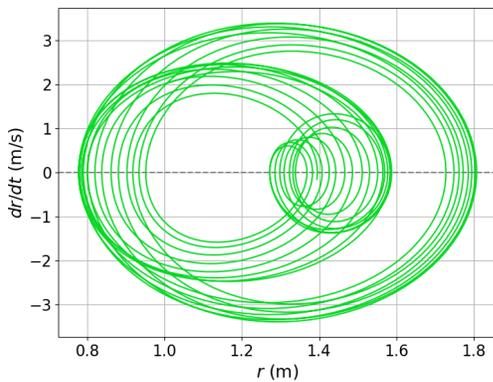
(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

**Figura 3.6.** Simulación a  $(45^\circ, 2, l, 0)$ . Al agregarle una velocidad angular inicial de 2 radianes/s en la dirección positiva se observa como las trayectorias del péndulo se desplazan hacia el lado negativo, haciendo que los recorridos se vuelvan asimétricos respecto al eje vertical en comparación de todas las trayectorias anteriores.

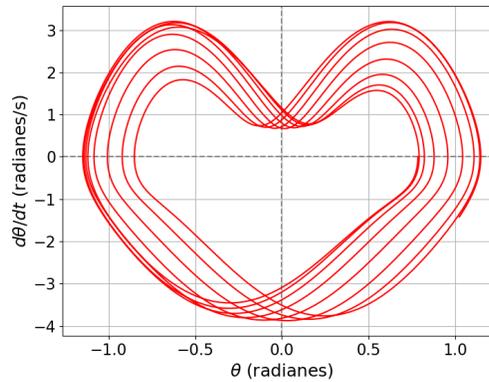
Para  $(45^\circ, 0, l, 2)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



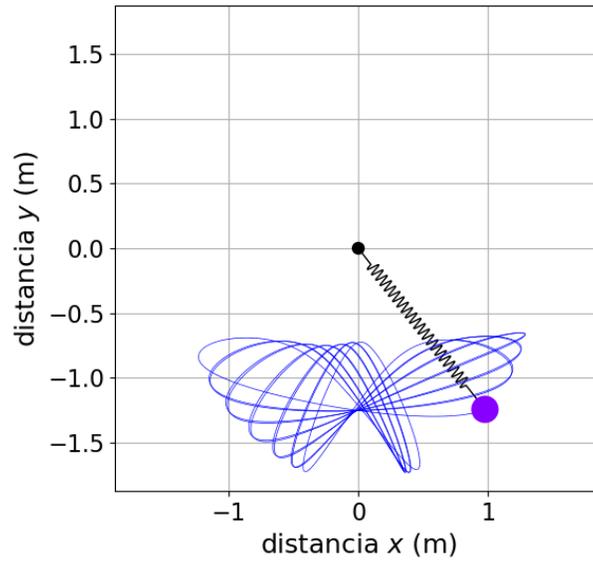
(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$



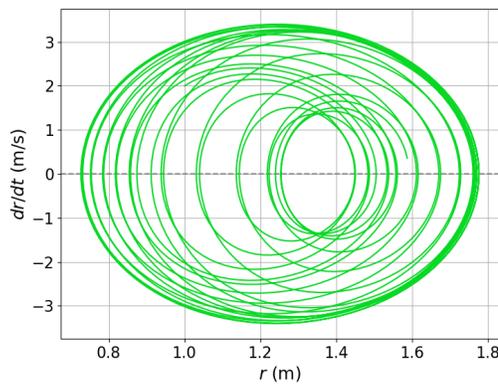
(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

**Figura 3.7.** Simulación a  $(45^\circ, 0, l, 2)$ . Al agregarle una velocidad inicial en la componente radial de  $\dot{r} = 2$  m/s se observa que el péndulo describe una oscilación horizontal hacia el lado negativo de  $x$  y al regresar este rebota teniendo un máximo en  $r$  cuando  $\theta = 0$ . (b) Se presentan tres puntos elípticos los cuales corresponden a: la oscilación en el plano, el retorno justo antes que  $r$  esté en su mínima posición y el rebote. (c) La trayectoria presenta formas elípticas para valores negativos de  $\theta$  y formas hiperbólicas similares al caso III de la fig.1.2 para valores de  $\theta$  positivos.

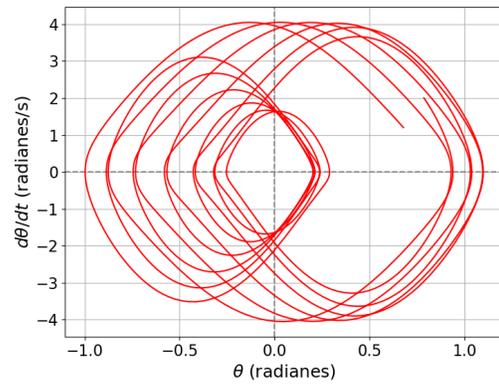
Para  $(45^\circ, 2, l, 2)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



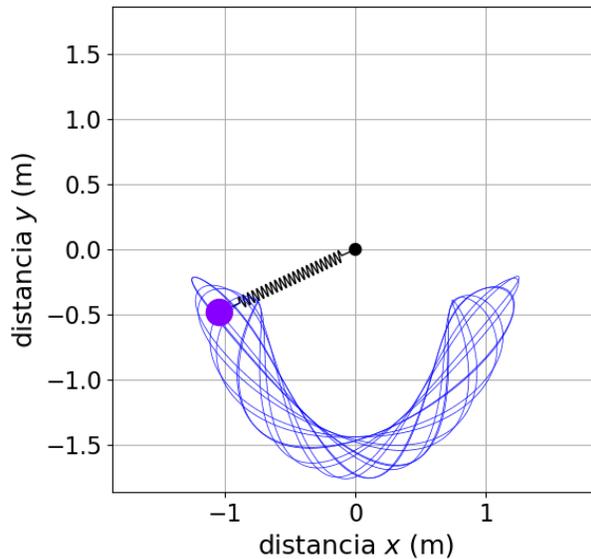
(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$



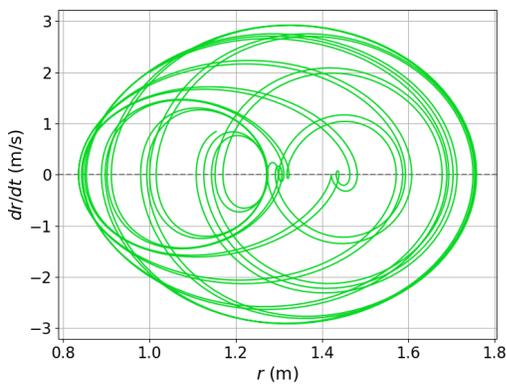
(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

**Figura 3.8.** Simulación a  $(45^\circ, 2, l, 2)$ . Para esta simulación se tienen ambas velocidades iniciales en las componentes radial y angular, lo que resulta en una combinación de las trayectorias en el plano  $(x, y)$ . Se observa una oscilación en el eje  $x$ , seguido de dos rebotes al momento que el péndulo regresa al punto de lanzamiento. (b)(c) Ambos diagramas de fase presentan un punto fijo, y elíptico para  $(r, \dot{r})$ , que se mueve en el eje horizontal a medida que se incrementa el tiempo.

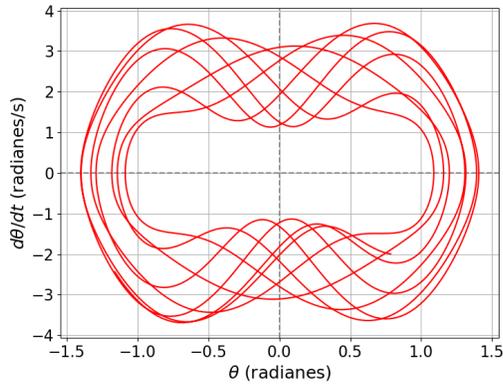
Para  $(45^\circ, -2, l, 2)$ :



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$

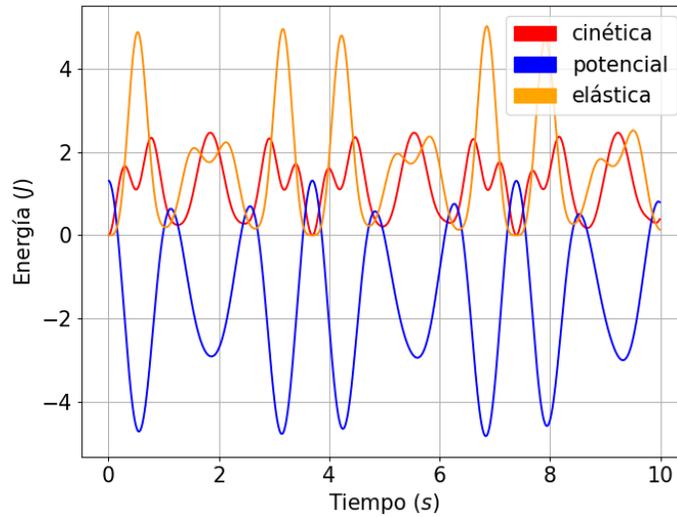


(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

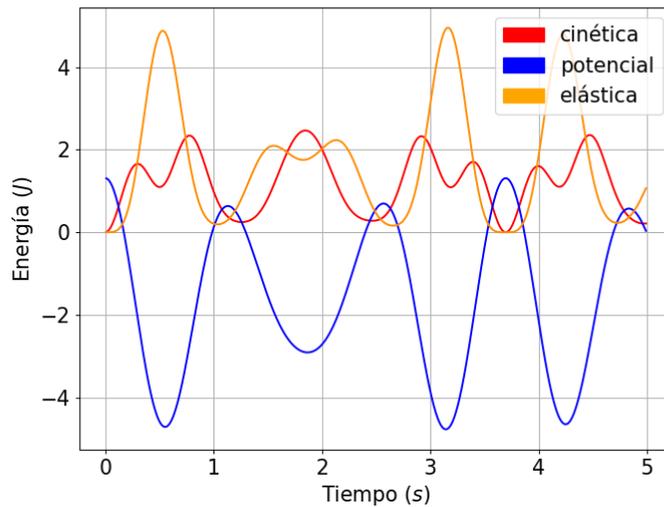
**Figura 3.9.** Simulación a  $(45^\circ, -2, l, 2)$  Para esta última simulación se decide invertir la dirección de la velocidad angular inicial, se obtuvieron trayectorias más periódicas que en la fig.3.8a. Se observa que el cambio de signo en  $\theta_0$  invierte la forma general de la curva volviéndola convexa, respecto a la forma cóncava de la fig.3.8a. (b)(c) Los diagramas de fase se asemejan a los de las fig.3.5b y fig.3.5b posiblemente se deba a que esta trayectoria posee un período completo el tiempo  $t = 7.7$  s, volviendo al punto de lanzamiento a través de la misma curva que recorrió en este tiempo y luego se desfasa.

### 3.6. Energía del sistema

Se realizaron las gráficas de la energía total del sistema (1.23) en función del tiempo. La siguiente figura muestra las energías cinética (1.22), potencial gravitatoria (1.20), y potencial elástica (1.21) para la simulación de la figura 3.1a.



(a) Energías del sistema hasta  $t = 10$  s.



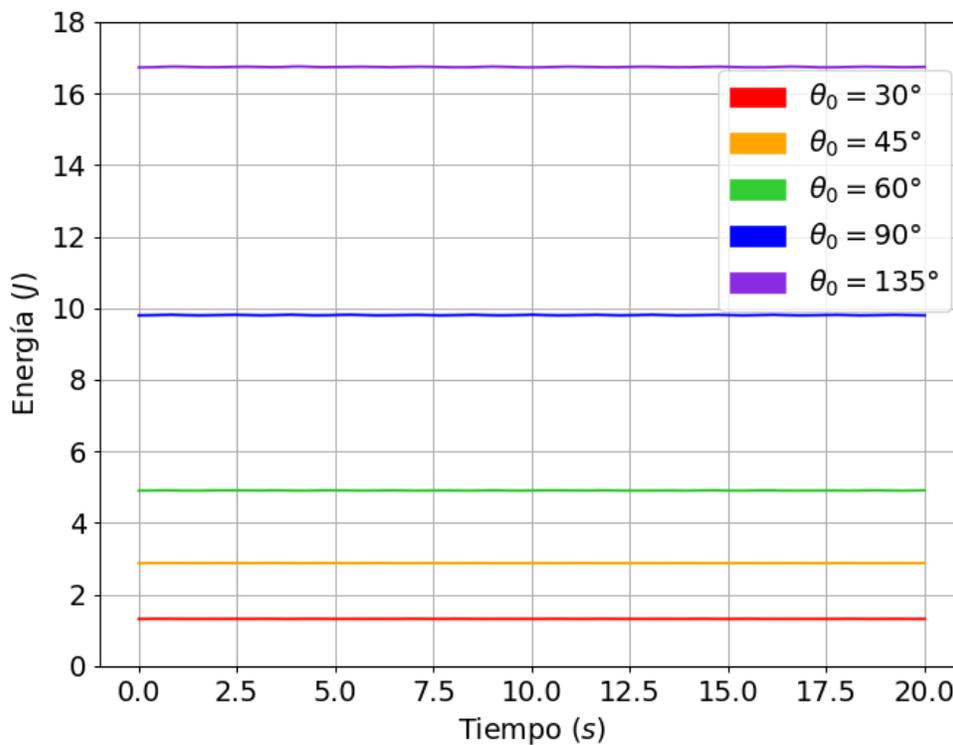
(b) Energías del sistema hasta  $t = 5$  s.

**Figura 3.10.** Energía del sistema: simulación a  $(30^\circ, 0, l, 0)$ .

En la figura 3.10b es posible observar intercambios entre la energía potencial elástica y la energía potencial gravitatoria, los puntos máximos coinciden con los

puntos mínimos de la otra, e.g. cuando el péndulo se encuentra en su altura máxima no posee energía elástica ya que el resorte no se estira e idealmente no se comprime, y cuando el péndulo se encuentra en su posición vertical su energía potencial gravitacional es cero pero el estiramiento del resorte es máximo. De la misma forma en la figura 3.10a se pueden visualizar patrones en los picos de energía del péndulo.

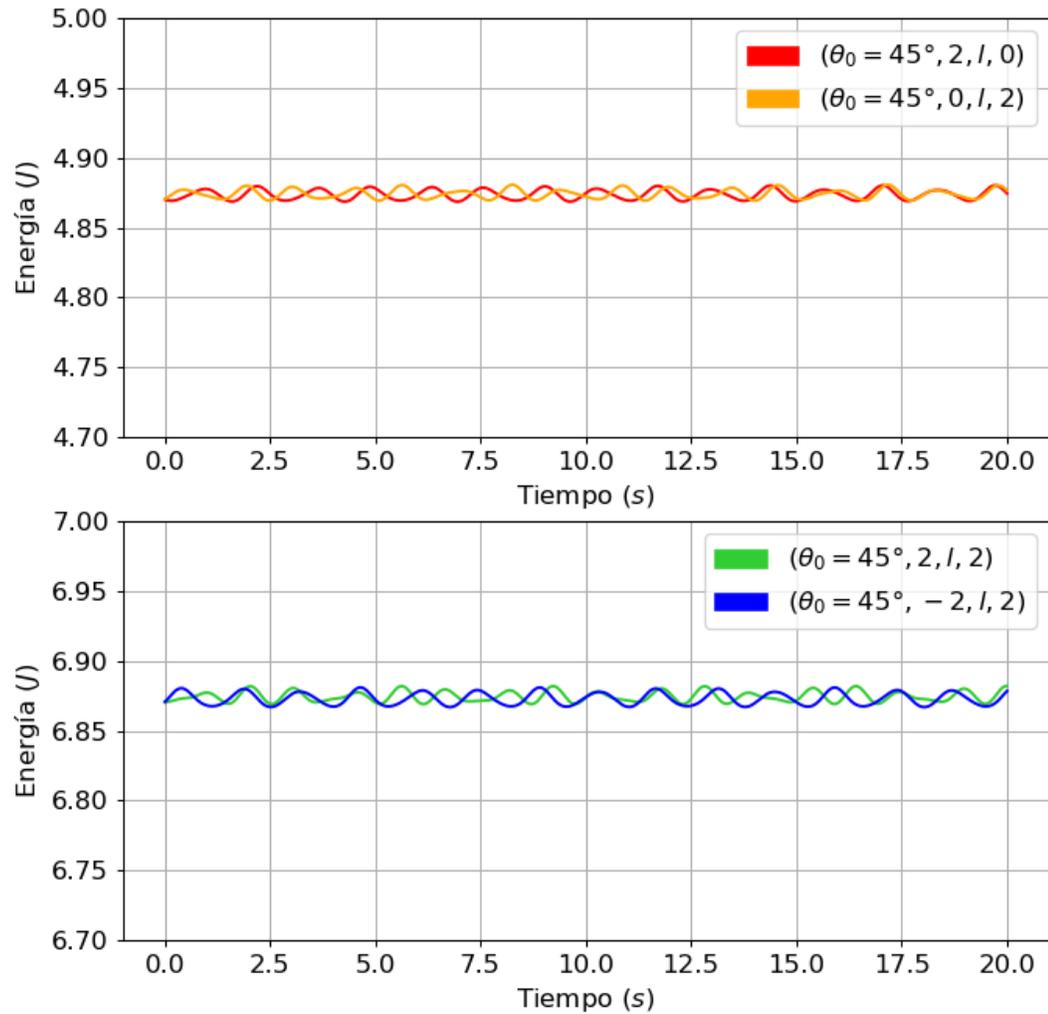
La siguiente figura muestra la energía total del sistema en función del tiempo para las simulaciones a diferentes variaciones angulares.



**Figura 3.11.** Energía total del sistema: variaciones angulares. Simulaciones 3.2a a la 3.5a.

La energía total es una magnitud constante, al sumar los tres tipos de energías presentes se observa que la cantidad se conserva y mientras más grande sea el ángulo inicial mayor será la energía total del sistema.

De la misma manera la siguiente gráfica muestra cómo la energía permanece constante al realizar variaciones en las velocidades iniciales.



**Figura 3.12.** Energía total del sistema: variaciones en las velocidades iniciales. Simulaciones 3.6a a la 3.9a.



## 4. MODELO EXPERIMENTAL Y COMPARACIÓN

Con el propósito de comparar la solución numérica de las ecuaciones dinámicas del péndulo elástico se realizó el siguiente montaje experimental.

### 4.1. Modelo experimental

La siguiente figura muestra el montaje experimental realizado en el laboratorio, la tabla 5.4 muestra una lista detallada del equipo utilizado con sus mediciones y la tabla 5.5 el resto del equipo utilizado.

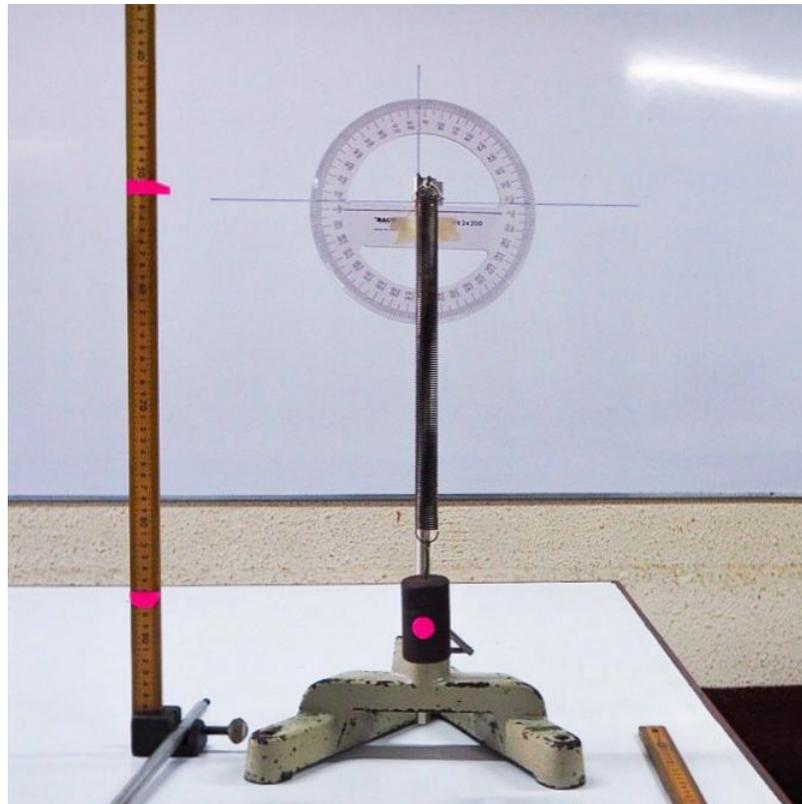
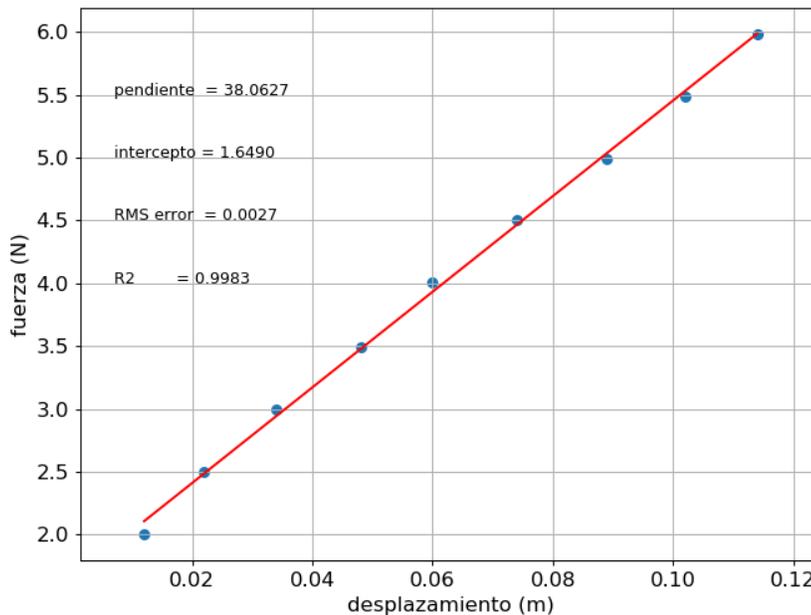


Figura 4.1. Montaje experimental

Debido a que el movimiento del péndulo elástico tiene una alta susceptibilidad a las condiciones iniciales y tiende a presentar movimientos caóticos, es necesario realizar el montaje con precisión evitando cualquier error sistemático. Las principales dificultades al momento de armar el experimento consisten en:

- Restringir el movimiento del péndulo al plano  $xy$ , para esto es necesario ajustar el resorte al pivote de manera que este no resbale ni obstruya el movimiento del resorte y sí restrinja los movimientos en  $z$ .
- Coincidir el plano de grabación con el plano de oscilación.
- Dejar caer el objeto evitando agregarle velocidades iniciales cuando esto no se desee o producirle fricción al dejarlo caer.
- Establecer una escala de medición para longitudes y ángulos que sea visible en las grabaciones.

Se realizaron mediciones del desplazamiento del resorte respecto a su longitud relajada para 10 distintas masas en un rango de 150 g a 600 g. Posteriormente, mediante una regresión lineal de la ecuación 1.9 se halló el valor de la constante  $k$  del resorte.



**Figura 4.2.** Regresión lineal para determinar la constante  $k$ . Fuente: elaboración la propia.

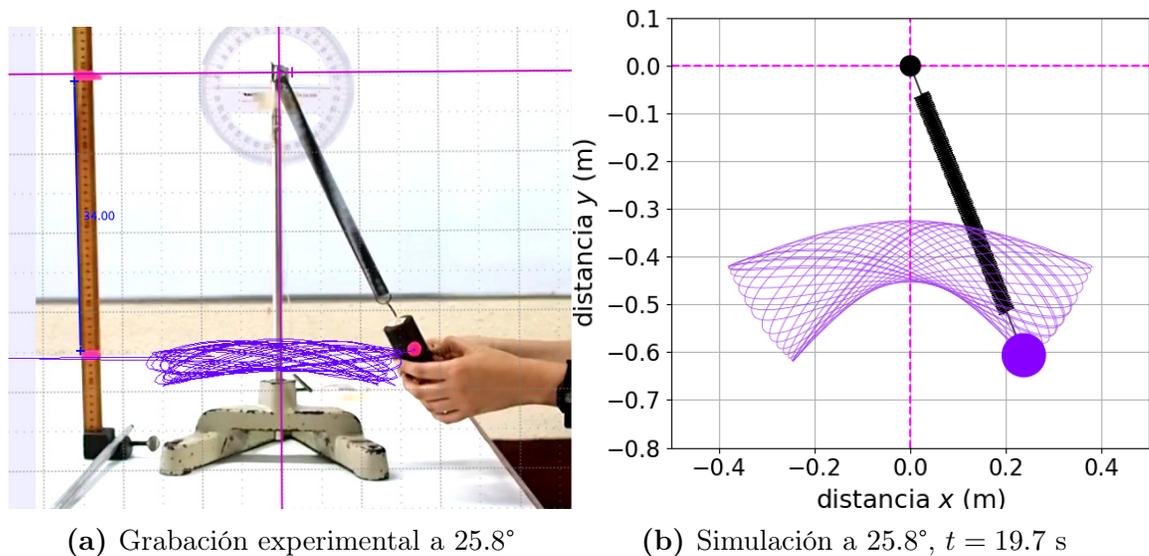
El valor encontrado para la constante elástica de resorte:  $k = 38.1 \pm 0.8 \text{ Nm}$ .

Se realizaron 4 grabaciones del movimiento del péndulo elástico a distintos ángulos. Para ángulos menores de  $30^\circ$  la energía potencial inicial no era suficiente para generar oscilaciones ni movimiento por más de 5 segundos y para ángulos mayores a  $45^\circ$  la energía potencial inicial era tal que el movimiento no era como el comportamiento del péndulo elástico planteado ya que el resorte rebotaba consigo mismo y con el pivote.

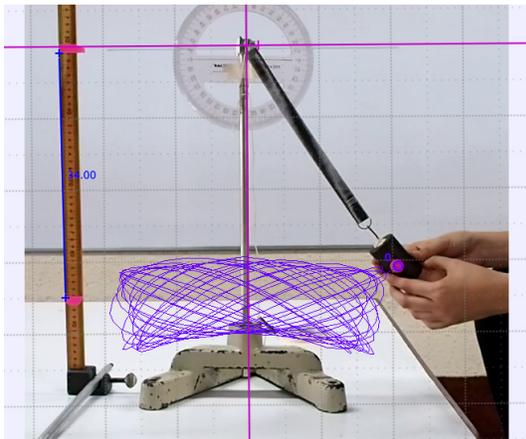
No se realizaron variaciones de masa entre las grabaciones, únicamente se utilizó la masa de 500 g, ya que utilizando masas menores no se producía suficiente estiramiento para poder observar oscilaciones. Tampoco se utilizaron dos o más masas unidas, ya que la segunda masa generaba un torque y el objeto ya no se podía considerar como una masa puntual. En la siguiente sección se detallan los resultados y se comparan con las simulaciones respectivas.

## 4.2. Resultados experimentales y simulados

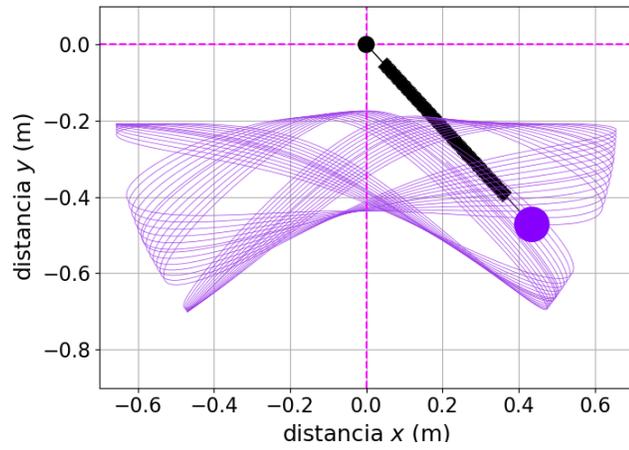
Las grabaciones fueron analizadas utilizando Tracker [11], programa para modelar trayectorias a partir puntos de referencia. A continuación se muestran las capturas de las grabaciones del movimiento. Todas las condiciones iniciales utilizadas y constantes del experimento se detallan en la tabla 5.3.



**Figura 4.3.** Comparación experimental y simulación a  $25.8^\circ$

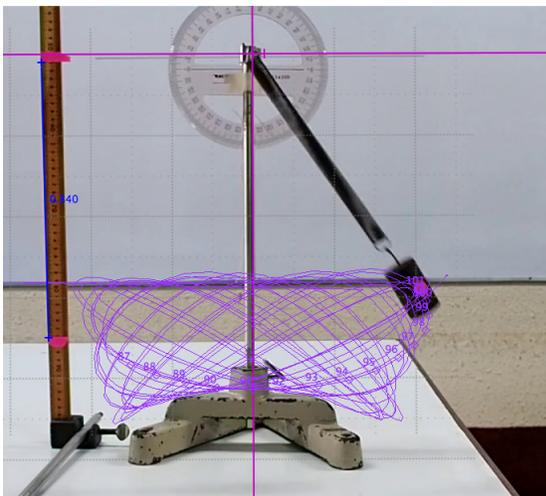


(a) Grabación experimental a  $34.1^\circ$

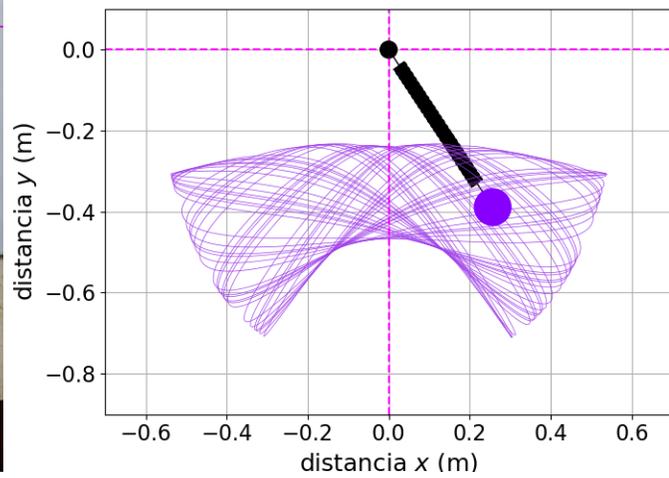


(b) Simulación a  $34.1^\circ$ ,  $t = 29.8$  s

**Figura 4.4.** Comparación experimental y simulación a  $34.1^\circ$



(a) Grabación experimental a  $40.9^\circ$



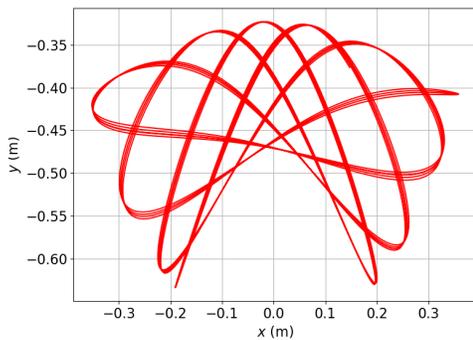
(b) Simulación a  $40.9^\circ$ ,  $t = 29.3$  s

**Figura 4.5.** Comparación experimental y simulación a  $40.9^\circ$

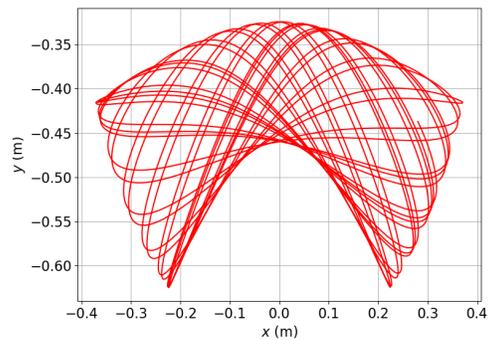
## 5. ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO

### 5.1. Sensibilidad a las condiciones iniciales

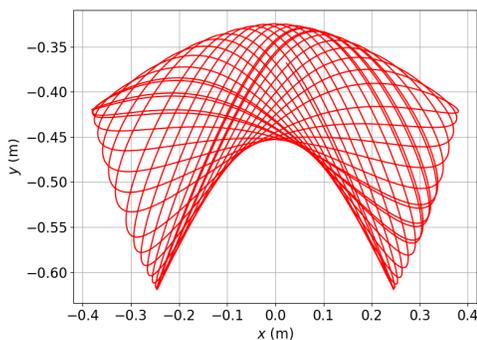
A continuación se muestran las trayectorias en el plano  $(x, y)$  para la simulación de la figura 4.3a. Las gráficas fueron realizadas tomando las condiciones iniciales con un tiempo de 0.033 segundos de diferencia entre sí, y la figura 5.1f son los datos de posición extraídos de la grabación.



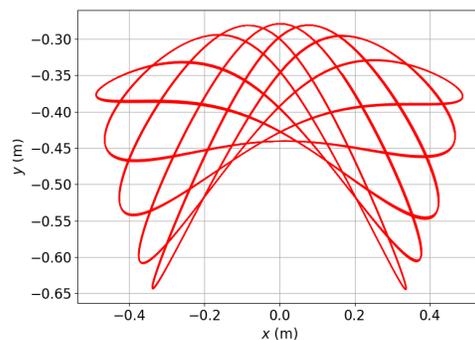
(a) cuadro 18,  $t = 0.36$  s



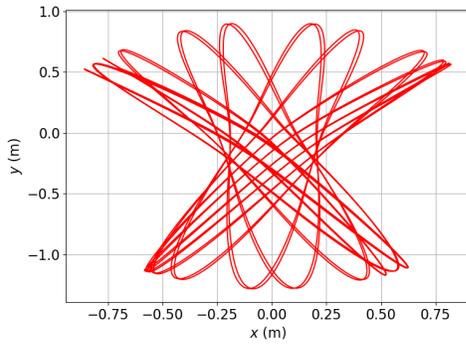
(b) cuadro 19,  $t = 0.39$  s



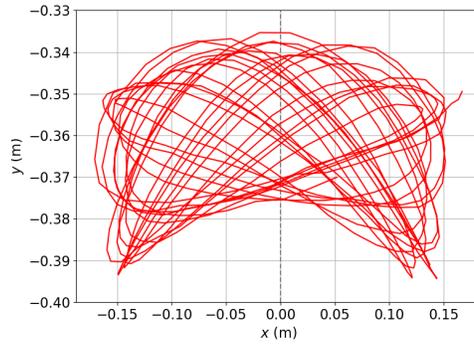
(c) cuadro 20,  $t = 0.43$  s



(d) cuadro 21,  $t = 0.46$  s



(e) cuadro 22,  $t = 0.50$  s



(f) datos tracker

**Figura 5.1.** Variaciones de trayectorias a diferentes condiciones iniciales para la figura 4.3

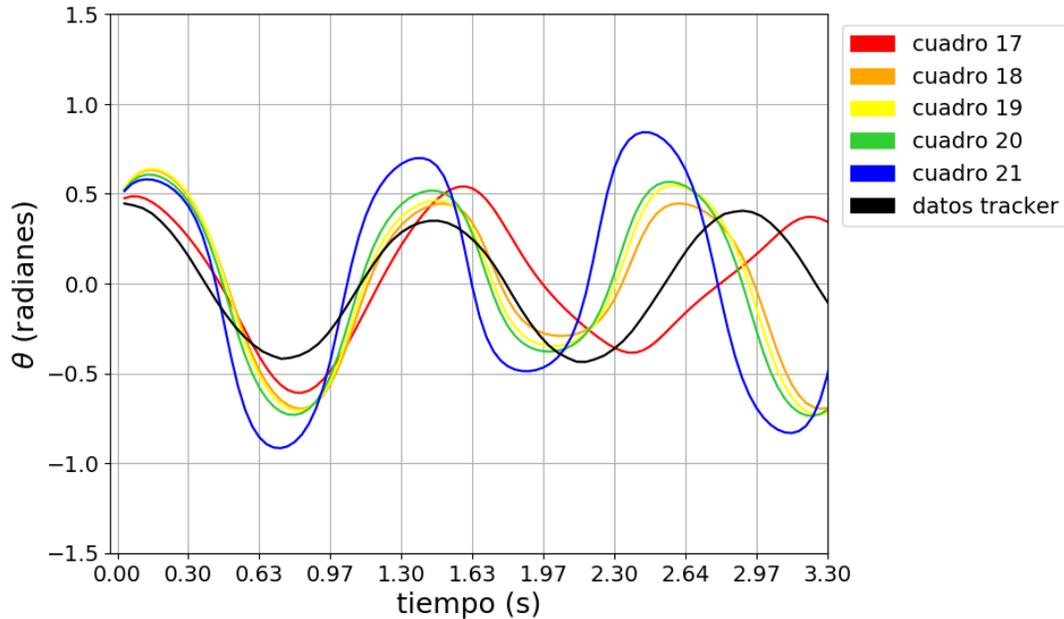
Para obtener estas condiciones iniciales se utilizó Tracker [11], al igual que para extraer los datos de posición graficados en la fig.5.1f. Todos los cuadros tienen la misma duración de  $t = 33.37$  ms y la numeración de estos inicia desde el momento que comienza la grabación. La dificultad del análisis consistió en tomar justo el instante de tiempo en que el péndulo iniciaba a moverse y las condiciones iniciales con las que lo hacía. La siguiente tabla muestra todas las condiciones utilizadas en la fig.5.1.

Figura	Cuadro	$\theta_0$ (°)	$\dot{\theta}_0$ (rad/s)	$r_0$ (m)	$\dot{r}_0$ (cm/s)	$m$ (kg)	$k$ (Nm)
-	17	25.775	0.625	0.387	0.169	0.5	38.1
5.1a	18	25.778	-1.018	0.387	0.581	0.5	38.1
5.1b	19	25.718	-1.134	0.387	0.713	0.5	38.1
5.1c	20	25.708	-0.909	0.386	0.954	0.5	38.1
5.1d	21	25.627	-0.923	0.387	1.886	0.5	38.1
5.1e	22	25.525	-1.063	0.387	6.927	0.5	38.1
-	23	24.944	-1.281	0.388	15.195	0.5	38.1

**Tabla 5.1.** Condiciones iniciales para la figura 5.1.

Comparando la figura de datos experimentales fig.5.1f con el resto de figuras es posible observar que la trayectoria real se encuentra entre el cuadro 19 fig. 5.1b y el cuadro 20 fig.5.1c. Para cuadros anteriores fig.5.1a, y posteriores fig.5.1e, las diferencias decimales de las velocidades iniciales generan curvas distintas a las esperadas. Esta es la razón por la cual no se tomaron ángulos comunes como:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , sino los ángulos más cercanos a los cuales experimentalmente el objeto comenzaba su movimiento,  $25.8^\circ$ ,  $34.1^\circ$ ,  $40.9^\circ$ .

La siguiente gráfica muestra las variaciones angulares en el tiempo  $(t, \theta)$  comparando los cuadros del 17 al 21 con los datos experimentales.



**Figura 5.2.** Simulaciones a diferentes condiciones iniciales y datos experimentales

Se muestran las gráficas más cercanas a la experimental, de color negro, que son las que corresponden a los cuadros 18, 19 y 20. La gráfica experimental posee menores amplitudes que todas las simulaciones, esto se debe a la idealización del sistema y todas las condiciones descritas en la sección 1.2. En particular: no considerar la masa del resorte, la fricción de este al estar en movimiento y las fricciones internas del resorte, son factores que provocan pérdidas de energía que hacen que el péndulo no alcance la amplitud simulada.

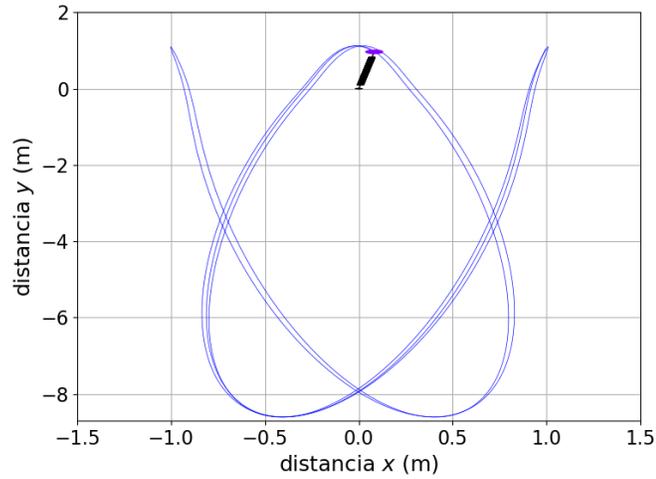
Por lo anterior es posible asegurar que el péndulo elástico es altamente sensible a variaciones en las condiciones iniciales y configuraciones del sistema, propiedad que se le atribuye a sistemas caóticos [5]. Cambios en las condiciones iniciales, especialmente en el sentido de las velocidades iniciales  $\dot{\theta}$  y  $\dot{r}$ , causan que en la simulación se obtengan trayectorias diferentes.

## 5.2. Implicación de la no linealidad

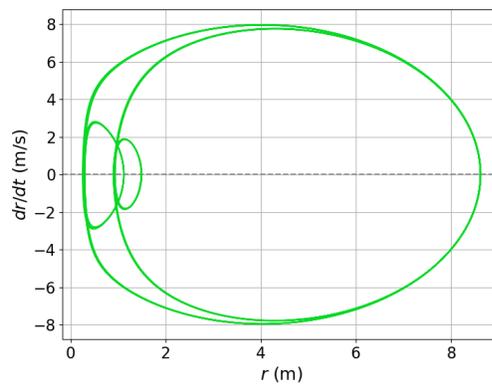
El péndulo elástico presenta oscilaciones verticales y horizontales, estos dos tipos de movimientos oscilatorios se encuentran acoplados entre sí por la naturaleza de las ecuaciones del movimiento (2.8) y (2.10) de forma que es posible observar intercambios entre los dos tipos de oscilaciones. El comportamiento de este péndulo puede ser descrito cualitativamente como dos tipos de movimiento diferentes causados por dos tipos de energías potenciales: la energía potencial gravitacional (1.20) y la energía potencial elástica (1.21). La primera produce un movimiento circular semejante al de un péndulo simple y la segunda produce oscilaciones verticales similares a las de un oscilador armónico simple.

## 5.3. Períodos de oscilación

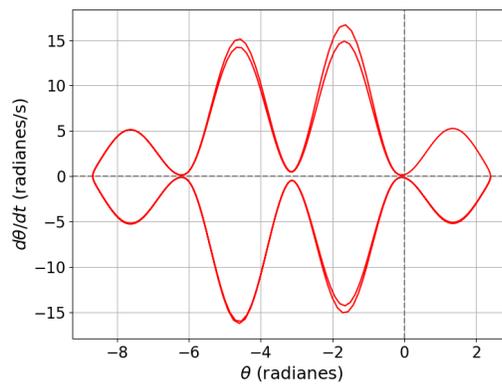
Una peculiaridad del péndulo elástico es que existen trayectorias para la masa puntual que están delimitadas por arcos cóncavos y convexos que eventualmente forman curvas similares a las figuras de Lissajous[1]. Esta es una configuración especial del péndulo elástico en la que presenta periodos de oscilación para largas amplitudes. Con las condiciones iniciales ( $137.7^\circ$ , 1.4866 m, 0 rad/s, 0 m/s) y cuando la frecuencia radial (2.27)  $\omega_r^2 = 3$  rad/s, es decir cuando la constante elástica es el triple de la masa como sugiere [8], se obtiene la siguiente trayectoria.



(a) Gráfica del movimiento en el plano  $(x, y)$ ,  $t = 20$  s.



(b) Espacio de fase  $(r, \dot{r})$



(c) Espacio de fase  $(\theta, \dot{\theta})$

**Figura 5.3.** Simulación de un período completo para largas amplitudes. ( $137.7^\circ$ ,  $1.4866$  m,  $0$  rad/s,  $0$  m/s). Se describen periodos de oscilación completos para el péndulo elástico a 16 segundos del movimiento.



## CONCLUSIONES

1. El péndulo elástico es un sistema físico que presenta alta complejidad dinámica como resultado de la no linealidad de las ecuaciones del movimiento, existen trayectorias caóticas junto a trayectorias alrededor de puntos fijos elípticos e hiperbólicos en su espacio de fase.
2. Las trayectorias de masas puntuales en movimiento en un péndulo elástico son altamente sensibles a las condiciones iniciales. Cualquier perturbación centesimal en las condiciones iniciales o en las configuraciones del sistema provocará trayectorias distintas.
3. El sistema presenta dos tipos de oscilaciones planares: horizontales semejantes a las de un péndulo simple, y verticales similares a las de un oscilador armónico simple. Estas oscilaciones se alternan y combinan entre sí, debido a los dos tipos de energía potencial presentes: potencial elástica y potencial gravitatoria.
4. Los espacios de fase son convenientes para extraer información del sistema, analizar trayectorias de movimientos periódicos y visualizar las posibles configuraciones de posiciones y velocidades.
5. Los métodos numéricos son una herramienta útil para la resolución de sistemas físicos cuyas ecuaciones no posean soluciones analíticas exactas.



## RECOMENDACIONES

1. Para experimentar con movimientos caóticos se debe trabajar con rigurosidad y precisión en la práctica de laboratorio, se sugiere: realizar grabaciones en el plano perpendicular del movimiento para garantizar que las oscilaciones son planares, conseguir masas puntuales de menor volumen y de forma esférica para minimizar la fricción, realizar pruebas que aseguren que el plano de grabación sea paralelo al del movimiento y tomar varios puntos de referencia para tener varias longitudes de calibración.
2. Para ampliar la línea de este trabajo se sugiere: analizar trayectorias con distintas masas puntuales, tomar en consideración la masa del resorte, experimentar con resortes de diversos materiales y constantes elásticas.
3. Estudiar sistemas físicos que no poseen solución analítica exacta es una alternativa interesante para abordar temas de mecánica clásica, se sugiere utilizar métodos numéricos para resolver este tipo de problemas como parte complementaria de esos cursos.



## ANEXOS

Figura	$\theta_0$ (°)	$\dot{\theta}_0$ (rad/s)	$r_0$ (m)	$\dot{r}_0$ (m/s)	$m$ (kg)	$k$ (Nm)
3.1a	30	0	1	0	1	40
3.2a	45	0	1	0	1	40
3.3a	60	0	1	0	1	40
3.4a	90	0	1	0	1	40
3.5a	135	0	1	0	1	40
3.6a	45	2	1	0	1	40
3.7a	45	0	1	2	1	40
3.8a	45	2	1	2	1	40
3.9a	45	-2	1	2	1	40

**Tabla 5.2.** Condiciones iniciales: simulación

Figura	$\theta_0$ (°)	$\dot{\theta}_0$ (rad/s)	$r_0$ (m)	$\dot{r}_0$ (m/s)	$m$ (kg)	$k$ (Nm)
4.3	25.8	3.0669	0.3868	0.0069	0.5	38.1
4.4	34.1	2.3902	0.3725	3.0782	0.5	38.1
4.5	40.9	2.0647	0.3621	5.9971	0.5	38.1

**Tabla 5.3.** Condiciones iniciales: simulación con datos experimentales

Medición	Magnitud	Unidad
masa del objeto	$499.1 \pm 0.5$	g
radio del objeto	$16.5 \pm 0.5$	mm
longitud del resorte	$34.0 \pm 0.5$	cm
radio del resorte	$45.75 \pm 0.05$	mm
número de vueltas	138	vueltas

**Tabla 5.4.** Medición de magnitudes experimentales

Cantidad	Descripción
1	Resorte de metal
1	Objeto de masa puntual
1	Soporte universal
1	Regla graduada
1	Transportador
1	Cámara de video
1	Cinta color fluorescente
1	Vernier
1	Balanza
1	Tripode

**Tabla 5.5.** Equipo utilizado en montaje experimental

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2<sup>da</sup> ed., Columbia University, Addison-Wesley Publishing Company, Inc Reading, Massachusetts, U.S.A. 1992.
- [2] Dare A. Wells, *Theory and Problems of Lagrangian Dynamics, Schaum's Outline* University of Cincinnati, McGraw-Hill Inc. U.S.A. 1967.
- [3] Symon, K.R., *Mechanics*, Wld. Student S, Addison-Wesley, 1971
- [4] Olver, P.J. *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer International Publishing, 2013.
- [5] Moshe, G. *The Chaotic Pendulum*, World Scientific Publishing Company, 2010.
- [6] Landau, R.H. and Páez, M.J. and Bordeianu, C.C., *Computational Physics: Problem Solving with Python*, Wiley, 2015.
- [7] No. H. N. (1933). *Oscillations of an elastic pendulum as an example of the oscillations of two parametrically coupled linear systems*. Journal of Technical Physics, 3(2-3), 294-307.
- [8] Lynch, P. (2002). *Resonant motions of the three-dimensional elastic pendulum*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 37(2), 345-367.
- [9] Cuerno, R., Ranada, A. F., & Ruiz-Lorenzo, J. J. (1992). *Deterministic chaos in the elastic pendulum: A simple laboratory for nonlinear dynamics*. American Journal of Physics, 60(1), 73-79.
- [10] Bathe, K. J. (2007). *Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: a simple implicit time integration scheme*. Computers & structures, 85(7-8), 437-445.
- [11] Douglas Brown, Open Source Physcis (2018) *Tracker*(5.0.6)[Programa] Consultado en Septiembre 2018 en <https://physlets.org/tracker/>