



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

**IRREVERSIBILIDAD DE FLUJO DEL GRUPO
RENORMALIZACIÓN EN UNA TEORÍA DE CAMPOS
DE 2 DIMENSIONES**

Luis Benjamín Rodríguez Aguilar

Asesorado por el Dr. Álvaro Véliz Osorio

Y

el Dr. Giovanni Ramírez García

Guatemala, noviembre de 2017

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**IRREVERSIBILIDAD DE FLUJO DEL GRUPO
RENORMALIZACIÓN EN UNA TEORÍA DE
CAMPOS DE 2 DIMENSIONES**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

LUIS BENJAMÍN RODRÍGUEZ AGUILAR
ASESORADO POR EL DR. ÁLVARO VÉLIZ OSORIO
Y
EL DR. GIOVANNI RAMÍREZ GARCÍA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, NOVIEMBRE DE 2017

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADORA Dra. Maria Eugenia Cabrera
EXAMINADOR Dr. Enrique Pazos
EXAMINADOR Lic. Freddy Rodríguez



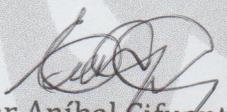
Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



Ref. D.DTG. 007-2017
Guatemala 13 de noviembre de 2017

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **IRREVERSIBILIDAD DE FLUJO DEL GRUPO RENORMALIZACIÓN EN UNA TEORÍA DE CAMPOS DE 2 DIMENSIONES** presentado por el estudiante universitario **Luis Benjamín Rodríguez Aguilar**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.


MsC. Edgar Aníbal Cifuentes
Director

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas



AGRADECIMIENTOS

A mi familia

En especial a mis amados padres Rosita y Porfirio, cuyo invaluable esfuerzo e incondicional apoyo han sido indispensables en mi vida. A mis hermanos Angélica y Vio, eternos amigos y compañeros de vida. A mis abuelos papa Güicho y mama Cruz, risueños, fuertes y fuente interminable de alegría e inspiración. A mis primos Nido y Chito.

A mi asesor

Alvarito, por brindar tan gratamente su conocimiento, tiempo y apoyo desinteresado, por su paciencia y por la fé ciega que tuvo en mí.

A mis asesores

Giovanni y Juan Diego, por brindar abiertamente su conocimiento, tanto a mí como a el resto de estudiantes entusiastas. Por su amistad, sus consejos y apoyo en cada momento.

A los matemáticos de la ECFM

En especial a Chuby, a Mapache y a Alan Reyes, genios sin los cuales mi trabajo de graduación hubiese sido más duro.

A mis amigos

En primer lugar a Peludo, Mostro, Milo, Dardo y Andresito cuyos caminos en este viaje están fuertemente correlacionados, cuya amistad es indescriptiblemente valiosa. A Marianito, Brayatán, Mabelita, Vettito, Ludwing y Saraí, queridos guerreros y camaradas. A Peter, amigo y hermano. A Medrano y Julito, cuya espera eterna en oriente resultaba cálida hasta la Patagonia. A Marvin y Sebastián, especiales y entrañables amigos.

A mis profesores

Por su pasión y compromiso con el desarrollo de la ciencia en la región. A Edgar Cifuentes, por sus consejos, apoyo y esfuerzo por alzar la ciencia y educación de la región. A Héctor y Cabo, por su cálida amistad. A Jorge Arreaga, por su inspiración y compromiso por mejorar las condiciones de vida de los guatemaltecos a quienes a diario violan sus derechos, por ese amor a los desprotegidos que tanta falta hace en estos días. A Luis Diaz Almengor, quien con su excentrica elocuencia me ayudó a comprender la triste y miserable sociedad actual. A David Marín, por la cruda honestidad y autenticidad. A Rodolfo Samayoa, por su invaluable apoyo y confianza.

A mis compañeros del departamento de física de ingeniería

Compañeros y amigos con quienes nunca faltaron las risas. A los entusiastas estudiantes a los que tuve el honor de orientar en los laboratorios. A los encargados del fisilab S11, por su excelente trabajo y apoyo a los estudiantes de física.

A las secretarías de la ECFM

Claudia, Vicky, Paola e Irene, quienes siempre ofrecen su apoyo muy amablemente.

DEDICATORIA

A los pobres, olvidados y explotados.
A los campesinos trabajadores,
a los valientes estudiantes.
A los mártires olvidados.
A las niñas de Guatemala.
A quienes no tuvieron la fortuna,
la oportunidad de vivir y estudiar con libertad
como yo sufriendamente lo hago.

*Como yugo de apretado
tengo el puño esperanzado
porque todo cambiará.*

Victor Jara

*La cultura es la verdad
que el pueblo debe saber
para más nunca perder
su amor por la libertad.
José Martí*

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	III
LISTA DE SÍMBOLOS	V
OBJETIVOS	VII
INTRODUCCIÓN	IX
1. EL ÁLGEBRA CONFORME	1
1.1. Transformaciones conformes infinitesimales	1
1.2. Transformaciones conformes especiales y el álgebra conforme	3
1.3. El grupo conforme	4
2. TEORÍAS CONFORMES EN 2 DIMENSIONES	7
2.1. Transformaciones conformes para $d = 2$	7
2.2. Transformaciones conformes globales	8
2.2.1. Las álgebras de Witt y de Virasoro	9
3. OPERADORES PRIMARIOS Y CORRELADORES	13
3.1. Tensor de momentum-energía	14
3.2. Cuantización radial	15
3.3. Funciones de correlación	19
3.3.1. Identidades de Ward	21
4. “c” ES POR CARDY, “c” ES POR CASIMIR	25
4.1. “c” es por Casimir	25
4.2. “c” es por Cardy	26
5. FLUJOS DEL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN	29
5.1. Grupo de Renormalización	29
5.2. Flujo de Grupo de Renormalización	30

5.3. Física sobre diferentes escalas espaciales	31
5.4. Relevante, irrelevante y marginal	32
6. EL TEOREMA C DE ZAMOLODCHIKOV	35
6.1. Decrecientemente monótona	36
6.2. Función C y la carga central	37
7. EL TEOREMA C A LA CASINI-HUERTA	39
7.1. Entrelazamiento cuántico	39
7.2. Entrelazamiento en teoría cuántica de campos	42
7.3. Entropía de entrelazamiento en teoría conforme de campos	46
7.4. El teorema C - revisitado	49
7.4.1. Intervalos en dos dimensiones del espacio-tiempo	49
CONCLUSIONES	53
RECOMENDACIONES	55
BIBLIOGRAFÍA	57

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1.	Compactificación de la dirección del espacio euclideo sobre un cilindro	16
3.2.	Representación gráfica de una integral de contorno	17
3.3.	Deformación de contornos	23
5.1.	Ejemplo del flujo de grupo de renormalización en el espacio de dos acoplamientos	33
7.1.	Representación gráfica de la integral de camino de la función de onda como la amplitud para una evolución desde un estado inicial $ \phi(x)\rangle$ al estado de vacío $ 0\rangle$ del sistema	43
7.2.	Topología de un cilindro con un corte	44
7.3.	Dos intervalos A y B de tamaño \sqrt{rR} cuyos puntos finales se encuen- tran en el cono de luz	50

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
\equiv	es equivalente
\cong	es isomorfo a
\rightarrow	se transforma a
$g_{\mu\nu}$	métrica
$\eta_{\mu\nu}$	métrica de Minkowski
\square	D'Alembertiano
$[A, B]$	conmutador de A y B
ϕ	campo escalar
\mathcal{C}	contorno o camino
$\langle AB \rangle$	correlación entre A y B
c	carga central
\mathcal{L}	densidad lagrangiana
ρ	matriz densidad
δ_0	medida de Dirac, función δ de Dirac o δ -función
\mathcal{H}	espacio de Hilbert
$ \psi\rangle$	vector <i>ket</i>
$\langle\psi $	funcional <i>bra</i>
$\langle\varphi \psi\rangle$	<i>braket</i>

OBJETIVOS

General

Explicar el comportamiento de flujo del grupo de renormalización y teorías conformes en dos dimensiones desde la perspectiva de las identidades de Ward y la entropía de entrelazamiento.

Específicos

1. Entender las propiedades generales de las teorías conformes de campos que corresponden a las simetrías asociadas a las transformaciones conformes.
2. Deducir el álgebra de Virasoro para teorías conformes de campos en dos dimensiones y explicar el significado de la carga central.
3. Demostrar la irreversibilidad de flujo del grupo de renormalización en dos dimensiones a partir del desarrollo de las identidades de Ward y del tensor de momentum energía.
4. Aprender a calcular la entropía de entrelazamiento para intervalos espacio-temporales en teorías conformes en dos dimensiones.
5. Mostrar que el teorema de renormalización de Zamolodchikov puede ser demostrado de forma alternativa utilizando la entropía de entrelazamiento.

INTRODUCCIÓN

En la naturaleza, diferentes fuerzas toman importancia a diferentes escalas de longitud. Mientras se fluye de una aproximación en el límite ultravioleta (UV) a una aproximación en el límite infrarrojo (IR) de la naturaleza, la importancia relativa de algunas fuerzas aumenta y la de otras disminuye [15] [24]. La interpretación física de la irreversibilidad es que esta transición ocurre sólo una vez [15] [24]. Después de alejarse con un factor arbitrario, las interacciones nunca volverán a su fuerza original al mismo tiempo. Incluso si se añaden perturbaciones infinitesimales a los acoplamientos durante el flujo [15] [24] [14].

El teorema C o teorema de irreversibilidad da información sobre la reversibilidad del flujo del grupo de renormalización de muchas teorías cuánticas de campo [23]. En este trabajo se estudian también algunas de las condiciones y consecuencias del teorema.

El teorema C es válido para todas las teorías cuánticas de campo que satisfacen tres condiciones [23] [7]. Primero, la teoría debe ser tal que los campos estén definidos en un espacio-tiempo de dos dimensiones. Segundo, el lagrangiano de la teoría necesita ser invariante bajo traslaciones y rotaciones. Y, finalmente la teoría necesita ser positiva, es decir, se debe satisfacer la condición de que los diferentes términos en el lagrangiano estén correlacionados positivamente. El teorema C de Zamolodchikov indica que para cada teoría que satisface estas tres condiciones, existe una función escalar real positiva C en el conjunto de constantes de acoplamiento que tiene algunas propiedades interesantes [23] [7].

La primera propiedad de la función C es que es diferenciable y estrictamente monótona decreciente a lo largo del flujo del grupo de renormalización.

La segunda propiedad es que la función es estacionaria en los puntos fijos conformes. Generalmente toma diferentes valores para diferentes puntos fijos. Y finalmente estos valores coinciden con la carga central del álgebra de Virasoro asociada a la teoría. De esta propiedad es de donde viene el nombre de la función C . Lo anterior puede resumirse con la afirmación: la función C interpola entre los diferentes valores

de la carga central [23] [7].

En la demostración al estilo de Zamolodchikov se define C en función de los correladores de dos puntos de las componentes del tensor de momentum-energía en dos dimensiones $T_{zz}(z)$, $T_{zz}(0)$, $T_{z\bar{z}}(z)$ y $T_{z\bar{z}}(0)$. Bajo dicha definición se utiliza el hecho de que el tensor de momentum-energía es una corriente conservada y las simetrías sujetas a una teoría conforme de campos (CFT) implican que, en efecto, C es una función monotonamente decreciente [23] [14]. Además, el hecho de que la traza del tensor de momentum-energía se haga cero para una CFT de dos dimensiones implica directamente que C es precisamente la carga central [23].

Se analiza también una demostración del teorema C de manera entrópica, hecha por Casini y Huerta, la cual permitió demostraciones de teoremas de irreversibilidad en más de dos dimensiones espacio-temporales [7][9][10]. Para la demostración entrópica se calcula la entropía de entrelazamiento para dos intervalos *boosteados* y se utiliza el resultado de Holzhey, Larsen y Wilczek [15], luego replicado por Calabrese y Cardy [2] de entropía de entrelazamiento en CFTs en dos dimensiones junto con la propiedad de subaditividad fuerte para demostrar el teorema C de manera alterna [7].

En el capítulo 1 se estudia el grupo conforme para $d \geq 3$ dimensiones [14]. El análisis central está en las transformaciones conformes infinitesimales, el álgebra conforme, el grupo conforme y las representaciones del grupo conforme [14]. Muchos de los conceptos desarrollados en este capítulo también son importantes en $d = 2$ dimensiones, por lo que este capítulo también sirve como una introducción para la teoría conforme de campos en $d = 2$ dimensiones.

En el capítulo 2 se considera el grupo conforme en $d = 2$ dimensiones. En este caso especial, se muestra que el álgebra conforme tiene infinitos generadores [14]. Esta estructura adicional permite un análisis con más propiedades en consideración que para el caso de $d \geq 3$ [14]. Se comienza con transformaciones conformes antes de discutir las álgebras de Witt y Virasoro [14] [22] [19]. Luego, el interés del capítulo 3 es discutir brevemente los campos primarios y la cuantización radial en dos dimensiones antes de considerar el tensor de momentum-energía y las expansiones del producto de operadores [14] [13] [24]. Luego se consideran las funciones de correlación para dichos operadores y las limitaciones relacionadas a la invariancia conforme introduciendo las identidades de Ward [14] [19].

El capítulo 4 está enfocado en mostrar una interpretación de la carga central. Se relaciona la carga central de Virasoro con el estado fundamental para ciertos sistemas. Se demuestra que la carga central también establece la densidad de estados

de altas energías [14] [22]. En este capítulo se observa la relación de la carga central con los grados de libertad de un sistema.

En el capítulo 5 se presentan las ideas clave del grupo de renormalización. Estas ideas implican las transformaciones de escala de un sistema y sus implementaciones en el espacio de las constantes de acoplamiento [4][15][24]. A partir de este análisis, se llega a la importante noción de operadores relevantes, irrelevantes y marginales[15][24]. En este capítulo se evidencia la importancia de las teorías de campo conformes como teorías cuánticas de campos. Se encuentra que dado un conjunto de campos, cualquier punto en el espacio de parámetros se puede considerar como un flujo perturbado lejos de un punto fijo, es decir, un punto invariante de escala, una CFT [14][19][24].

El capítulo 6 está enfocado en reproducir la demostración hecha por Zamolodchikov para el teorema C. Se reproduce la definición de la función C de Zamolodchikov [23], esta definición utiliza funciones de correlación del tensor de momentum-energía, que es un caso especial de una corriente de Noether [24]. Luego se demuestra que dicha función cumple con los enunciados del teorema C de Zamolodchikov [23].

Por último, en el capítulo 7 se introducen las herramientas necesarias para construir una función C entrópica. Se inicia con la definición de entropía de entrelazamiento, para luego desarrollar su importancia y uso en teoría cuántica de campos y teorías conformes [13]. Finalmente se demuestra el teorema C utilizando la combinación de la simetría de Lorentz y la desigualdad de subaditividad fuerte para la entropía de entrelazamiento para intervalos espacio-temporales en una teoría de campos [13] [24] [23] [7].

1. EL ÁLGEBRA CONFORME

Se define un mapeo diferenciable φ como una transformación conforme si el tensor métrico se transforma como

$$\varphi : g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x), \quad (1.1)$$

para una función $\Lambda(x)$ positiva, llamada factor de escala. Cuando $\Lambda(x) = 1$ corresponde al grupo de Poincaré el cual consiste de traslaciones y rotaciones de Lorentz. Para el caso en el que $\Lambda(x)$ es una constante cualquiera, corresponde a las transformaciones de escala globales. Esto será mostrado en el transcurso de este capítulo.

Las componentes de la métrica dependen del sistema de coordenadas elegido [14], por lo tanto, bajo una transformación de coordenadas $x \rightarrow x'$, el tensor métrico se transforma de la forma

$$g_{\rho\sigma}(x) \rightarrow g'_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g_{\mu\nu}(x). \quad (1.2)$$

De estas definiciones, las transformaciones conformes son transformaciones de coordenadas que preservan el ángulo entre vectores.

1.1. Transformaciones conformes infinitesimales

Considerando un espacio de dimensión d con una métrica plana (de Minkowski) $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, una transformación conforme obedece la ecuación

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x)\eta_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Y considerando también una transformación de coordenadas infinitesimal

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \epsilon^{\rho}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (1.4)$$

se tiene que el lado izquierdo de la ecuación (1.3) se transforma como

$$\begin{aligned}\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} &= \eta_{\rho\sigma} \left(\delta_{\mu}^{\rho} + \frac{\partial \epsilon^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \left(\delta_{\nu}^{\sigma} + \frac{\partial \epsilon^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right), \\ &= \eta_{\mu\nu} + \left(\frac{\partial \epsilon_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \epsilon_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\quad (1.5)$$

Para que esta transformación sea conforme, se debe cumplir que

$$\partial_{\nu} \epsilon_{\mu} + \partial_{\mu} \epsilon_{\nu} = k(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

donde $k(x)$ es una función cualquiera y se utiliza la notación $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$. Contrayendo la ecuación anterior con $\eta^{\mu\nu}$, se obtiene que $k(x) = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon)$, donde $\partial \cdot \epsilon \equiv \partial^{\mu} \epsilon_{\mu}$. Por lo tanto, la ecuación (1.6) se transforma a

$$\partial_{\nu} \epsilon_{\mu} + \partial_{\mu} \epsilon_{\nu} = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) \eta_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Por lo que el factor de escala para esta transformación puede escribirse como

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon). \quad (1.8)$$

Aplicando ∂^{ν} sobre la ecuación (1.6) se obtiene

$$\partial_{\mu}(\partial \cdot \epsilon) + \square \epsilon_{\mu} = \frac{2}{d} \partial_{\mu}(\partial \cdot \epsilon), \quad (1.9)$$

donde se utiliza la notación $\square \equiv \partial^{\mu} \partial_{\mu}$ para el D'Alembertiano. Luego, aplicando ∂^{μ} sobre (1.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\square(\partial \cdot \epsilon) + \square(\partial \cdot \epsilon) &= \frac{2}{d} \square(\partial \cdot \epsilon), \\ d \square(\partial \cdot \epsilon) - \square(\partial \cdot \epsilon) &= 0, \\ (d-1)(\square(\partial \cdot \epsilon)) &= 0.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Considerando una dimensión $d > 2$, según la ecuación anterior, ϵ_{μ} debe ser a lo máximo cuadrática para la coordenada x^{ν} , de tal manera que

$$\epsilon_{\mu} = a_{\mu} + b_{\nu} x^{\nu} + c_{\mu\nu\rho} x^{\nu\rho}, \quad (1.11)$$

donde los coeficientes $a_{\mu}, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho} \ll 1$ son constantes.

Analizando individualmente cada término de la ecuación (1.11), se observa que el término a_μ corresponde a una traslación infinitesimal $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, cuyo correspondiente generador es el operador de momentum $P_\mu = -i\partial_\mu$.

Evaluando el término lineal en la ecuación (1.7) se obtiene que

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}\eta^{\rho\sigma}b_{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu}. \quad (1.12)$$

Separando b en su parte simétrica y antisimétrica, se obtiene que la parte simétrica es proporcional a la métrica, por lo tanto, b se puede escribir como

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \alpha\eta^{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

donde m es la parte antisimétrica y α es la constante de proporcionalidad de la parte simétrica. La parte antisimétrica corresponde a una rotación de Lorentz infinitesimal (rotaciones y boost), $x'^\mu = x^\mu + m_\nu^\mu x^\nu$, cuyo generador correspondiente es el operador de momentum angular $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$.

La parte simétrica de la ecuación (1.13) corresponde a una *transformación de escala infinitesimal* o *dilatación*, $x'^\mu = (1 + \alpha)x^\mu$, cuyo generador es $D = -ix^\mu\partial_\mu$. Una demostración de que estos son los generadores para dichas transformaciones puede encontrarse en [20]

1.2. Transformaciones conformes especiales y el álgebra conforme

El término cuadrático de ϵ es un caso especial para las transformaciones conformes. Para analizar dicho término, se opera ∂_ρ a la ecuación (1.7) y se permutan los índices ρ, μ y ν , obteniendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} \partial_\rho\partial_\nu\epsilon_\mu + \partial_\rho\partial_\mu\epsilon_\nu &= \frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho(\partial \cdot \epsilon), \\ \partial_\mu\partial_\rho\epsilon_\nu + \partial_\nu\partial_\rho\epsilon_\mu &= \frac{2}{d}\eta_{\rho\mu}\partial_\nu(\partial \cdot \epsilon), \\ \partial_\nu\partial_\mu\epsilon_\rho + \partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho &= \frac{2}{d}\eta_{\nu\rho}\partial_\mu(\partial \cdot \epsilon). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Sumando las últimas dos ecuaciones de (1.14) y restando la primera se obtiene

$$\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho = \frac{1}{d}(\eta_{\nu\rho}\partial_\mu + \eta_{\rho\mu}\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho), \quad (1.15)$$

evaluando el término cuadrático de ϵ , ecuación (1.11), en la ecuación (1.15), se obtiene que

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}\beta_\nu + \eta_{\mu\nu}\beta_\rho - \eta_{\nu\rho}\beta_\mu, \quad (1.16)$$

donde $\beta = \frac{1}{d}c'_{\nu\mu}$. Esta transformación es llamada *transformación conforme especial*, de donde se obtiene la transformación infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot \beta)x^\mu - (x \cdot x)\beta^\mu, \quad (1.17)$$

cuyo generador es [14]

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - (x \cdot x)\partial_\mu). \quad (1.18)$$

Todos estos generadores: los generadores de Poincaré, el generador de escala y el generador conforme especial, son los generadores del *grupo conforme*,

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i\partial_\mu, \\ L_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu), \\ D &= -ix^\mu\partial_\mu, \\ K_\mu &= -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - (x \cdot x)\partial_\mu). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Estos generadores obedecen las reglas de conmutación,

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= iP_\mu, \\ [D, K_\mu] &= -iK_\mu, \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \\ [K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \\ [P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

que definen el álgebra asociada al grupo conforme.

1.3. El grupo conforme

Contando el número de generadores de esta álgebra, se tiene que hay d traslaciones, d transformaciones especiales, 1 dilatación y $\frac{d(d-1)}{2}$ rotaciones, es decir,

hay $\frac{(d+2)(d+1)}{2}$ generadores, que es exactamente la misma cantidad de generadores de $SO(d, 2)$, por lo que se puede definir un mapeo biyectivo entre ambos grupos, por lo tanto, el álgebra conforme es isomorfa a $SO(d, 2)$.

Denotando los generadores de $SO(d, 2)$ por J_{mn} , con los índices $m, n \in \{-1, 0, 1, \dots, d\}$. Los generadores (1.19) pueden ser representados como

$$\begin{aligned}
J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu}, \\
J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \\
J_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \\
J_{-1,0} &= D,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

donde la coma entre los índices únicamente se utiliza como separación. En este caso, los índices griegos pertenecen a $\{1, \dots, d\}$. Se puede notar que $J_{\mu\nu}$ cumple exactamente el mismo conmutador que el último mostrado en las ecuaciones (1.20). Al conmutar las demás componentes de J_{mn} se obtiene

$$\begin{aligned}
[J_{-10}, J_{-1\mu}] &= iJ_{0\mu}, \\
[J_{-10}, J_{0\mu}] &= iJ_{-1\mu}, \\
[J_{-1\mu}, J_{-1\nu}] &= iJ_{\mu\nu}, \\
[J_{0\mu}, J_{0\nu}] &= iJ_{\mu\nu}, \\
[J_{0\rho}, J_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}J_{0\nu} - \eta_{\rho\nu}J_{0\mu}), \\
[J_{-1\rho}, J_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu}J_{-1\nu} - \eta_{\rho\nu}J_{-1\mu}), \\
[J_{-1\mu}, J_{-1\nu}] &= iJ_{\mu\nu}, \\
[J_{-1,\mu}, J_{0\nu}] &= i\eta_{\mu\nu}D.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Donde se muestra que cada componente de J_{mn} cumple con la ecuación

$$[J_{mn}, J_{pq}] = i(\eta_{mq}J_{np} + \eta_{np}J_{mq} - \eta_{mp}J_{nq} - \eta_{nq}J_{mp}). \tag{1.23}$$

Esto es equivalente al grupo de isometrías del espacio Anti de Sitter (AdS) [13]. Para un espacio euclideo, la diagonal de la métrica η_{mn} es $diag(-1, 1, 1, \dots, 1)$. Mientras que para una métrica de Minkowski, la diagonal es $diag(-1, -1, 1, \dots, 1)$ [24].

2. TEORÍAS CONFORMES EN 2 DIMENSIONES

2.1. Transformaciones conformes para $d = 2$

En dos dimensiones, la restricción de que $\epsilon(x)$ es, como máximo, de segundo orden en x no aplica, ver ecuación (1.11). Esto puede verse escribiendo por componentes la ecuación (1.7). En una métrica euclidea de dos dimensiones se encuentra que

$$\partial_0 \epsilon_0 = \partial_1 \epsilon_1, \quad \partial_0 \epsilon_1 = -\partial_1 \epsilon_0, \quad (2.1)$$

donde se reconoce que tales ecuaciones son las ecuaciones de Cauchy-Riemann e inmediatamente se concluye que sobre el plano complejo $\epsilon(x)$ es una función holomorfa sobre una región abierta. Esto motiva a utilizar las variables complejas z y \bar{z} , definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \epsilon^0 + i\epsilon^1, & z &\equiv x^0 + ix^1, \\ \bar{\epsilon} &\equiv \epsilon^0 - i\epsilon^1, & \bar{z} &\equiv x^0 - ix^1, \\ \partial_z &\equiv \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), & \partial_{\bar{z}} &\equiv \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Es notable que en estas coordenadas el tensor métrico es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

donde los índices corren sobre z y \bar{z} . Se introduce la notación $\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ de acá en adelante.

Usando las definiciones anteriores, se puede notar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que

$$\bar{\partial}\epsilon(z, \bar{z}) = 0, \quad \partial\bar{\epsilon}(z, \bar{z}) = 0. \quad (2.4)$$

La solución general a estas condiciones es aquella en la cual ϵ es una función arbi-

traria de z (no depende de \bar{z}) y $\bar{\epsilon}$ es una función arbitraria de \bar{z} . El resultado de lo anterior es que cualquier mapeo analítico sobre el plano complejo en sí mismo es conforme. Dicho de otra manera, el grupo conforme en dos dimensiones es el conjunto de todos los mapeos analíticos en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Este conjunto es dimensionalmente infinito, correspondiente a los coeficientes de las series de Laurent necesarios para especificar una función analítica en una vecindad [14].

Considerando una transformación conforme infinitesimal $f(z) = z + \epsilon(z)$, ya que ϵ es una función holomorfa, $f(z)$ también lo es. Lo mismo es válido para una transformación $f(\bar{z})$. Este hecho implica que una transformación del tensor métrico es de la forma

$$ds^2 = dzd\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z}. \quad (2.5)$$

Donde es posible ver que el factor de escala para dos dimensiones es $\Lambda = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$.

2.2. Transformaciones conformes globales

Las transformaciones conformes de dos dimensiones deben ser invertibles y mapear el espacio completo en sí mismo, incluyendo el punto en el infinito para estar bien definidas. Las transformaciones que cumplen esto, son llamadas *transformaciones conformes globales*, y el conjunto de todas ellas forman el llamado *grupo conforme especial* [14].

Sea $f(z)$ un elemento del grupo conforme especial, $f(z)$ no debe tener ningún punto de ramificación o singularidades esenciales ya que los mapeos no son definidos de manera única al rededor de un punto de ramificación, mientras que en cualquier vecindad, una singularidad esencial de f barre el plano complejo entero, por lo que no es invertible. De tal manera, las únicas singularidades posibles son los polos [17], por lo tanto, f puede escribirse como

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (2.6)$$

Si $P(z)$ tiene varios ceros distintos, entonces la imagen inversa de cero no está definida de manera única, por lo que f no es invertible. Además, si $P(z)$ tiene un cero z_0 de multiplicidad de orden $n > 1$, entonces la imagen de una pequeña vecindad de z_0 está envuelta n veces alrededor de 0, y por lo tanto, f no es invertible [17]. Los mismos argumentos se aplican para $Q(z)$ cuando se analiza el comportamiento de $f(z)$ cerca del punto en el infinito. Por lo tanto, $P(z)$ y $Q(z)$ pueden ser únicamente

funciones lineales

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.7)$$

donde a, b, c y d son números complejos.

Además, ya que la transformación debe ser invertible, el determinante $ad - bc$ debe ser distinto de cero. Por conveniencia, se toma la condición de normalización, $ad - bc = 1$, donde por definición, el reescalamiento de las constantes no afecta la transformación.

En general, estos mapeos son conocidos como *transformaciones proyectivas*, pero en el plano complejo son llamados *transformaciones de Möbius* [17]. A cada transformación de estas se le puede asociar una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Se puede verificar que la composición de dos mapeos $f_1 \circ f_2$ corresponde a la multiplicación de matrices $A_2 A_1$. Es decir, el grupo conforme global en dos dimensiones es isomorfo al grupo de matrices complejas de dos dimensiones con determinante unitario, $SL(2, \mathbb{C})$. Pero el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ es isomorfo al grupo de Lorentz de cuatro dimensiones $SO(3, 1) \sim SO(2, 2)$, es decir, es equivalente al grupo de isometrías de AdS_3 [14] [13].

2.2.1. Las álgebras de Witt y de Virasoro

En física, muchas veces es útil empezar con las propiedades locales de una teoría para luego estudiar las propiedades globales. Por ello se empieza esta sección con el *el grupo conforme local*, que es el conjunto de todos los mapeos holomorfos no necesariamente invertibles. Anteriormente se encontró que las transformaciones conformes infinitesimales en dos dimensiones deben ser holomorfas en una región abierta. Sin embargo, es completamente concebible que $\epsilon(z)$ tenga singularidades aisladas fuera de dicha región [17]; por lo tanto, es natural asumir que $\epsilon(z)$ es en general una función meromorfa y permite una expansión de Laurent al rededor de $z = 0$

$$f(z) = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n (-z^{n+1}). \quad (2.9)$$

Lo mismo se cumple para \bar{z} . Los parámetros $\epsilon_n, \bar{\epsilon}_n$ son constantes infinitesimales. El efecto de la transformación asociada a dicho término sobre un campo sin spin y

adimensional es [14]

$$\delta\phi = \epsilon(z)\partial\phi + \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, el generador asociado con el m -ésimo término a tal transformación es

$$\ell_m = -z^{m+1}\partial_z. \quad (2.11)$$

El cual es válido para cualquier m , con un correspondiente $\bar{\ell}_m$ en términos de \bar{z} .

Teniendo los generadores, es posible construir el álgebra conforme asociada

$$\begin{aligned} [\ell_m, \ell_n] &= (m - n)\ell_{m+n}, \\ [\bar{\ell}_m, \bar{\ell}_n] &= (m - n)\bar{\ell}_{m+n}, \\ [\ell_m, \bar{\ell}_n] &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Estas ecuaciones son conocidas como el *álgebra de Witt*. Ya que existe una ecuación para z y para \bar{z} , estas variables son tratadas como variables independientes y no como una conjugada de la otra.

Utilizando la ecuación 2.11, se puede notar que la sub-álgebra generada por los operadores $\ell_{-1}, \bar{\ell}_{-1}, \ell_0, \bar{\ell}_0, \ell_1$ y $\bar{\ell}_1$ corresponde a los generadores de las transformaciones conformes mencionadas en el capítulo 1. A este conjunto de generadores se le conoce como *grupo conforme global*. Los generadores ℓ_{-1} y $\bar{\ell}_{-1}$ generan traslaciones en el plano complejo. De igual manera, con algunas manipulaciones, ℓ_1 y $\bar{\ell}_1$ generan traslaciones conformes especiales. Mientras que los operadores ℓ_0 y $\bar{\ell}_0$ generan dilataciones y rotaciones.

Sin embargo, el álgebra de Witt no es la historia completa. Esta álgebra admite lo que se conoce como una extensión central. Las extensiones centrales son un tema importante en la teoría de Lie de dimensión infinita. Las extensiones centrales son necesarias en física, ya que el grupo de simetrías de un sistema cuántico es usualmente una extensión central del grupo de simetrías clásico. De la misma manera, la correspondiente álgebra de Lie de un sistema cuántico es, en general, una extensión central del álgebra clásica [21].

Específicamente, las extensiones centrales en el álgebra permiten que las representaciones proyectivas se conviertan en representaciones reales. Es decir, una representación proyectiva es una representación con cierto factor de escala. En teoría cuántica de campos (QFT), con mayor frecuencia se encuentran representaciones proyectivas, el estado $|\phi\rangle$ es físicamente indistinguible de cualquier múltiplo escalar distinto de cero, $c|\phi\rangle$. Sin embargo, hay una equivalencia entre las representaciones

proyectivas y una representación real con cierta extensión central [21]. Por lo tanto, es útil estudiar esta extensión para poder considerar representaciones verdaderas del grupo conforme.

La extensión central del álgebra de Witt es el *álgebra de Virasoro*. Expresada en términos de sus elementos L, \bar{L} , es descrita por:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + cg(m, n), \quad c \in \mathbb{C}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m - n)\bar{L}_{m+n} + \bar{c}g(m, n), \\ [L_m, \bar{L}_n] &= 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Se puede observar que la función $g(m, n)$ es antisimétrica en sus argumentos. La constante c es conocida como *carga central* y va a ser de gran importancia en secciones posteriores de esta tesis. Sin pérdida de la generalidad, se hace solo un análisis utilizando $[L_m, L_n]$ con el fin de encontrar la función $g(m, n)$, ya que también se puede tomar $[\bar{L}_m, \bar{L}_n]$.

Para redefinir $L_n, n \neq 0$, y L_0 se puede considerar $g(1, -1) = 0$ y además $g(n, 0) = 0$. Para encontrar la función $g(m, n)$ debe utilizarse la identidad de Jacobi,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \tag{2.14}$$

ya que L_n reemplaza a ℓ_n , y porque ℓ_n es elemento de un álgebra de Lie, L_n debe cumplir dicha identidad.

Sustituyendo L_m, L_n y L_0 en (2.14) se muestra que $g(m, n) = 0$ si $m + n \neq 0$. Luego, sustituyendo en la identidad de Jacobi L_n, L_{-1} y L_{n-1} , se llega a la relación de recurrencia

$$(n - 2)g(n, -n) = (n + 1)g(n - 1, -(n - 1)). \tag{2.15}$$

Utilizando como condición de normalización por conveniencia para la constante c , $g(2, -2) = \frac{1}{2}$, e introduciendo la notación $g(n, -n) = g_n$, es posible factorizar dicha

recurrencia de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
g_n &= \binom{n+1}{n-2} g_{n-1} \\
&= \binom{n+1}{n-2} \binom{n}{n-3} \binom{n-1}{n-4} \cdots \binom{5}{2} \binom{4}{1} g_2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \\
&= \frac{1}{12} (n^3 - n).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Un análisis similar es posible para \bar{L}_n y \bar{c} . Por lo que el álgebra de Virasoro se reescribe como

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\
[\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{\bar{c}}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\
[L_m, \bar{L}_n] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Se puede notar que la extensión central no afecta la subálgebra finita de las transformaciones conformes.

3. OPERADORES PRIMARIOS Y CORRELADORES

En este capítulo se estudian los campos de interés para las teorías de campos conformes en dos dimensiones. Sobre el plano complejo, se consideran los campos $\phi(x^0, x^1) \rightarrow \phi(z, \bar{z})$. Un *campo quiral o holomorfo* (*anti-quiral o anti-holomorfo*) se define como un campo que depende sólo de z (\bar{z}).

Se define una *dimensión holomorfa*, h , y una *dimensión anti-holomorfa*, \bar{h} , cuando, bajo un escalamiento $z \rightarrow \lambda z$, un campo ϕ se transforma de acuerdo a

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \lambda^h \bar{\lambda}^{\bar{h}} \phi(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}). \quad (3.1)$$

Bajo una transformación $z \rightarrow f(z)$ generada por el álgebra de Virasoro, un campo que se transforma como

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})), \quad (3.2)$$

es conocido como un campo *primario*. Si las transformaciones son generadas solamente por transformaciones globales, entonces el campo es conocido como campo *cuasi-primario*. Se puede observar que todo campo primario es cuasi-primario.

Bajo una transformación conforme infinitesimal de coordenadas $z^\mu \rightarrow f(z) = z^\mu + \epsilon(z)^\mu$, la ecuación (3.2) se transforma como

$$\phi(z + \epsilon(z), \bar{z}) = \phi(z) + \epsilon(z) \partial_z \phi(z, \bar{z}) + O(\epsilon^2), \quad (3.3)$$

de donde se observa que el campo se transforma infinitesimalmente como

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi(z, \bar{z}) + (h \partial_z \epsilon + \epsilon \partial_z + \bar{h} \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \partial_{\bar{z}}) \phi(z, \bar{z}). \quad (3.4)$$

3.1. Tensor de momentum-energía

Para una teoría cuántica de campos, la variación de la acción S , considerando una transformación infinitesimal general de coordenadas, es de la forma

$$\delta S = \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu, \quad (3.5)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de momentum-energía. El tensor de momentum-energía es el responsable de las variaciones de curvatura en el espacio-tiempo. Por el teorema de Noether, para la simetría continua en la transformación infinitesimal general de coordenadas mencionada anteriormente, la corriente conservada es

$$j_\mu = T_{\mu\nu} \epsilon^\nu. \quad (3.6)$$

Para todo ϵ se cumple

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (3.7)$$

Sin embargo, en el caso particular en que ϵ es una constante, la corriente conservada es precisamente el tensor de momentum-energía, es decir, $\partial^\mu T_{\mu\nu}$. Para ϵ como una función en un álgebra conforme, se cumple

$$\begin{aligned} \partial^\mu j_\mu &= (\partial^\mu T_{\mu\nu}) \epsilon^\nu + T_{\mu\nu} (\partial^\mu \epsilon^\nu) \\ &= T_{\mu\nu} (\partial^\mu \epsilon^\nu). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ya que para teorías con invariancia de Lorentz el tensor de momentum-energía es simétrico, la ecuación (3.8) implica que

$$\partial^\mu j_\mu = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} (\partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu). \quad (3.9)$$

Luego, utilizando (1.7) y la ecuación anterior se obtiene

$$\partial^\mu j_\mu = \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \left(\frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) \eta^{\mu\nu} \right), \quad (3.10)$$

donde los términos $\frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon)$ siendo números reales no hacen cero la expresión, y la métrica $\eta^{\mu\nu}$ obtiene la traza de $T_{\mu\nu}$. Entonces, de lo anterior y (3.7), se tiene que para teorías conformes

$$T_\mu^\mu = 0. \quad (3.11)$$

Haciendo enfoque en el tensor de momentum-energía para CFTs euclidianas

en dos dimensiones, se procede a hacer un cambio de coordenadas complejo, bajo el cual $T_{\mu\nu}$ se transforma como

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\rho\sigma}. \quad (3.12)$$

Entonces, utilizando (2.2), se determina que

$$T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{00} - 2iT_{10} - T_{11}) = \frac{1}{2}(T_{00} - iT_{10}), \quad (3.13)$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{00} + 2iT_{10} - T_{11}) = \frac{1}{2}(T_{00} + iT_{10}), \quad (3.14)$$

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(T_{00} + T_{11}) = 0. \quad (3.15)$$

En teoría de campos se denota $T_{z\bar{z}} \equiv \Theta$. Usando la conservación de T ,

$$\partial_0 T_{00} + \partial_1 T_{10} = \partial_0 T_{01} + \partial_1 T_{11} = 0, \quad (3.16)$$

se muestra que

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0. \quad (3.17)$$

Y de la misma manera

$$\partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, las componentes que no desaparecen del tensor de momentum-energía son campos quirales, $T_{zz} = T(z)$, y antiquirales, $T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})$. El tensor T es holomorfo.

3.2. Cuantización radial

Es conveniente compactificar la dirección del espacio x^1 de la teoría euclídeana sobre un círculo de radio $R = 1$. Esta CFT vive sobre un cilindro infinito descrito por la coordenada compleja $w = x^0 + ix^1$. Para representar la cuantización radial en dos dimensiones, se mapea dicho cilindro a el plano complejo vía

$$z = e^{-iw}. \quad (3.19)$$

Esto mapea el infinito-pasado al origen del plano complejo y el infinito-futuro

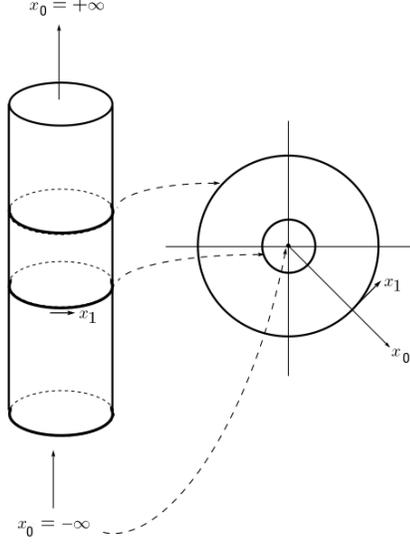


Figura 3.1. Compactificación de la dirección del espacio euclideo sobre un cilindro. Fuente: J. Qualls [19].

a el punto en el infinito. Las traslaciones de tiempo $x^0 \rightarrow x^0 + a$ se asignan a las dilataciones $z \rightarrow e^a z$, y las traslaciones espaciales $x^1 \rightarrow x^1 + b$ se asignan a rotaciones $z \rightarrow e^{ib} z$. En la figura 3.1 se puede ver un diagrama representativo de los mapeos en la cuantización radial. Teniendo en cuenta lo anterior, la carga asociada a la corriente conservada [14], (3.6), con una simetría conforme es

$$Q = \int dx^1 j_0. \quad (3.20)$$

Esta carga es el generador de transformaciones simétricas para el operador A

$$\delta A = [Q, A]. \quad (3.21)$$

En esta situación, el conmutador (3.21) está evaluado en tiempos iguales, en la cuantización radial, esto corresponde a $|z|$ constante. Por lo tanto, la integral (3.20) sobre las coordenadas reales se transforma en una integral de contorno en el plano complejo sobre un camino circular

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (dz T(z) \epsilon(z) + d\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) \bar{\epsilon}(\bar{z})). \quad (3.22)$$

Esto permite determinar la transformación infinitesimal de un campo ϕ , $\delta\phi = [Q, \phi]$,

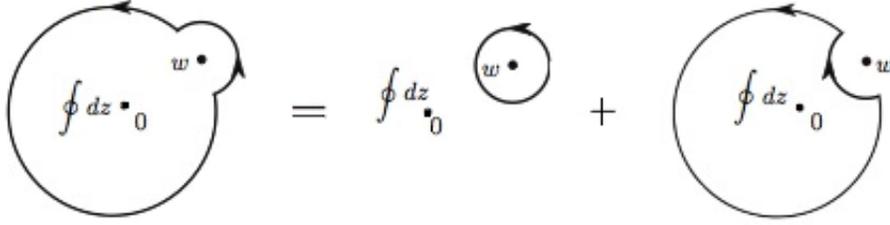


Figura 3.2. Suma de la integral de contorno representando la ecuación (3.25). Fuente: J. Qualls [19].

como

$$\delta_\epsilon \phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz [T(z)\epsilon(z), \phi(w, \bar{w})] + \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} [\bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}), \phi(w, \bar{w})]. \quad (3.23)$$

Sin embargo, las funciones de correlación en QFT están definidas en términos de un producto de ordenamiento temporal. Para la cuantización radial en cuestión, esto se traduce a un producto de ordenamiento radial

$$RA(z)B(w) = \begin{cases} A(z)B(w) & |z| > |w|, \\ B(w)A(z) & |w| > |z|. \end{cases} \quad (3.24)$$

Pero, usando el hecho de que

$$\begin{aligned} \oint dz [A(z), B(w)] &= \oint_{|z|>|w|} dz A(z)B(w) - \oint_{|z|<|w|} dz B(w)A(z) \\ &= \oint_{C(w)} dz RA(z)B(w), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde el contorno de la última integral se toma alrededor del punto w , (una idea clara y gráfica de (3.25) se muestra en la figura 3.2), se observa que (3.23) se reescribe como

$$\delta_\epsilon \phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(w)} dz \epsilon(z)RT(z)\phi(w, \bar{w}) + \text{parte anti-quiral}. \quad (3.26)$$

Para un campo primario sobre el espacio cilíndrico en consideración, (3.4) se escribe como

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi(w, \bar{w}) = ([h\partial_w \epsilon(w) + \epsilon(w)\partial_w] + [\bar{h}\bar{\partial}_w \bar{\epsilon}(w) + \bar{\epsilon}(w)\bar{\partial}_w]) \phi(w, \bar{w}). \quad (3.27)$$

Utilizando la fórmula integral de Cauchy,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (3.28)$$

para reescribir los términos tanto $h\partial_w\epsilon(w)\phi(w, \bar{w})$ y $\epsilon(w)\partial_w\phi(w, \bar{w})$ como sus equivalentes anti-quirales como integrales de contorno, se obtiene la expresión

$$RT(z)\phi(w, \bar{w}) = \frac{h}{(z - w)^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z - w}\partial_w\phi(w, \bar{w}) + \dots \quad (3.29)$$

donde se han omitido los términos no-singulares [14].

Las expresiones como la ecuación (3.29) se llaman *expansiones de producto de operador* (OPE). En el desarrollo posterior se omitirá el símbolo R y se asumirá ordenamiento radial en un producto de operadores. Las OPE son la idea de que dos operadores locales insertados en puntos cercanos pueden ser aproximados por una cadena de operadores en uno de estos puntos. Aparte de la definición original, es posible definir un campo primario como uno cuyo OPE con el tensor de momentum-energía toma la forma (3.29).

Un hecho de interés para este texto es el estudiar si el tensor de momentum-energía es un operador primario. Para estudiar esto, se debe hacer el OPE del tensor de momentum-energía con si mismo, se puede demostrar del hecho de que el tensor de momentum-energía es holomorfo y que los operadores de Virasoro que generan las transformaciones conformes infinitesimales son los modos de Laurent de dicho tensor, es decir

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n, \quad L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z). \quad (3.30)$$

Para una transformación conforme particular $\epsilon(z) = -\epsilon_n z^{n+1}$, la carga asociada es

$$Q_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} T(z)\epsilon(z) = -\epsilon_n L_n. \quad (3.31)$$

También es posible encontrar el álgebra de Virasoro a partir de expandir el tensor de momentum-energía en series de Laurent, hacer el OPE del tensor de momentum-energía consigo mismo (TT OPE) y conmutar los modos de Laurent. Desde este punto de vista, se puede entender lo que significa la extensión central. Un desarrollo detallado se encuentra en [14]. El requisito de que estos modos obedezcan al álgebra

de Virasoro conduce al TT OPE

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots \quad (3.32)$$

Lo que este resultado de OPE significa es que, en general, el tensor de momentum-energía no es un campo primario. La única manera en que T sea un campo primario es si la carga central c es igual a cero. Sin embargo, $T(z)$ es un campo cuasi-primario de dimensión conforme $(h, h) = (2, 0)$.

Para determinar como T se transforma infinitesimalmente es necesario hacer la integral de contorno (3.26)

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon T(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z)} dw \epsilon(w) T(w) T(z) \\ &= \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z) + 2T(z) \partial_z \epsilon(z) + \epsilon(z) \partial_z T(z). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Con esto, puede mostrarse que bajo una transformación $f(z) = z + \epsilon(z)$, el tensor de momentum-energía se transforma como

$$T(z) \rightarrow T'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} S(f(z), z), \quad (3.34)$$

donde

$$S(w, z) = \frac{1}{(\partial_z w)^2} \left((\partial_z w)(\partial_z^3 w) - \frac{3}{2}(\partial_z^2 w)^2 \right), \quad (3.35)$$

la cantidad S es conocida como la derivada de Schwartz.

3.3. Funciones de correlación

En teoría cuántica de campos las funciones de correlación describen procesos de dispersión. En CFT su invarianza es de gran importancia porque es posible calcular la estructura exacta de las funciones de correlación de dos puntos y tres puntos hasta una constante que asume la invarianza conforme [14]. La definición de funciones de correlación puede ser derivada por medio del formalismo de la integral de camino

$$\langle \phi(t_1) \phi(t_2) \cdots \phi(t_N) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(t_1) \phi(t_2) \cdots \phi(t_N) \exp(iS\phi(t))}{\int \mathcal{D}\phi \exp(iS\phi(t))} \quad (3.36)$$

donde ya se asume un ordenamiento temporal en los operadores. Y en este caso, S es la acción.

Usando la invarianza de las transformaciones conformes se puede determinar la estructura de la función de correlación de dos puntos para una CFT. Sea entonces la función de dos puntos

$$\langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle = g(z, w), \quad (3.37)$$

donde $\phi_1(z)$ y $\phi_2(w)$ son campos primarios. La invarianza traslacional implica que $g(z, w)$ depende únicamente de la diferencia entre z y w ,

$$g(z, w) = g(z - w). \quad (3.38)$$

En el caso de las dilataciones o escalamientos, se sabe de la definición (3.2) que se debe cumplir

$$\langle \lambda^{h_1}\phi_1(\lambda z)\lambda^{h_2}\phi_2(\lambda w) \rangle = \lambda^{h_1+h_2}g(\lambda(z - w)) = g(z - w). \quad (3.39)$$

De donde la función de dos puntos debe cumplir

$$g(z - w) = \frac{d_{12}}{(z - w)^{h_1+h_2}} \quad (3.40)$$

donde d_{12} es una constante. Utilizando la invarianza de las transformaciones conformes especiales es posible restringir aún más $g(z, w)$. Estas transformaciones están compuestas de traslaciones e inversiones [14], y ya que las traslaciones ya restringieron en (3.38), se hace énfasis en las inversiones $f(z) = \frac{-1}{z}$

$$\langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle = \left\langle \frac{1}{z^{2h_1}} \frac{1}{w^{2h_2}} \phi_1\left(\frac{-1}{z}\right) \phi_2\left(\frac{-1}{w}\right) \right\rangle \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{z^{2h_1} w^{2h_2}} \frac{d_{12}}{\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{w}\right)^{h_1+h_2}} \quad (3.42)$$

$$= \frac{d_{12}}{(z - w)^{h_1+h_2}}, \quad (3.43)$$

donde la igualdad de (3.42) a (3.43) demanda que $h_1 = h_2$. Por lo que la función de correlación de dos puntos tiene la forma

$$\langle \phi_1(z)\phi_2(w) \rangle = \frac{d_{12}\delta_{ij}}{(z - w)^{2h_i}}. \quad (3.44)$$

De una manera más general, una función de correlación de dos puntos con

argumentos z y \bar{z} escrita como $G^{(2)} = \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle$ debe cumplir para cada campo con (3.2) y (3.27), por lo tanto

$$\begin{aligned} & \{[h_1 \partial \epsilon(z_1) + \epsilon(z_1) \partial_{z_1}] + [h_2 \partial \epsilon(z_2) + \epsilon(z_2) \partial_{z_2}] \\ & + [\bar{h}_1 \bar{\partial} \bar{\epsilon}(z_1) + \bar{\epsilon}(z_1) \bar{\partial}_{z_1}] + [\bar{h}_2 \bar{\partial} \bar{\epsilon}(z_2) + \bar{\epsilon}(z_2) \bar{\partial}_{z_2}]\} G^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nuevamente, la simetría traslacional requiere que $G^{(2)}$ dependa únicamente de $z_{12} = z_1 - z_2$ y $\bar{z}_{12} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$. La simetría rotacional, $\epsilon = z$ y $\bar{\epsilon} = \bar{z}$, requiere que $G^{(2)} = C_{12}/(z_{12}^{h_1+h_2} \bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2})$. Y finalmente, para $\epsilon = z^2$ y $\bar{\epsilon} = \bar{z}^2$, se requiere que $h_1 = h_2 = h$ y $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{h}$. El resultado es que la función de dos puntos para una CFT de dos dimensiones tiene la forma

$$G^{(2)} = \frac{C_{12}}{z_{12}^h \bar{z}_{12}^{\bar{h}}}. \quad (3.46)$$

Con la misma línea de razonamiento se puede encontrar una expresión para la función de correlación de tres puntos hasta una constante. Es decir, usando las simetrías para la traslación, el reescalado o dilatación y las inversiones, se obtiene

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h-2h_3} z_{23}^{h-2h_1} z_{13}^{h-2h_2}}. \quad (3.47)$$

Para cualquier función de correlación de número mayor no se tienen suficientes restricciones para escribirla de una manera similar a las de dos y tres puntos [19].

3.3.1. Identidades de Ward

Para concluir este capítulo, se discutirán las llamadas *identidades de Ward*, identidades de los correladores resultantes de las simetrías de la teoría. Primero, se consideran las condiciones sobre los correladores de n puntos para transformaciones conformes globales. Recordando que las transformaciones conformes globales corresponden a los generadores de Virasoro L_k, \bar{L}_k , con $k = 0, \pm 1$. Para estos correladores, los estados de vacío satisfacen [14]

$$\langle 0|L_k = 0, \quad L_k|0\rangle = 0, \quad (3.48)$$

y de la misma manera para \bar{L}_k . Para los campos cuasi primarios ϕ_i , se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon \langle 0|L_k \phi_1 \cdots \phi_n|0\rangle \\ &= \epsilon \langle 0|[L_k, \phi_1] \cdots \phi_n|0\rangle + \cdots + \langle 0|\phi_1 \cdots [L_k, \phi_n]|0\rangle \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde ϵ es un parámetro infinitesimal. Estos conmutadores en los que intervienen los generadores de Virasoro solo dan un cambio infinitesimal para los campos cuasi-primarios dados por la ecuación (3.27). Usando esta expresión para los $k = 0, \pm 1$ modos de ϵ , se encuentra que la ecuación (3.49) es equivalente a

$$\sum_i \partial_{z_i} \langle \phi_1(z_1) \cdots \phi_n(z_n) \rangle = 0, \quad (3.50)$$

$$\sum_i (z_i \partial_{z_i} + h_i) \langle \phi_1(z_1) \cdots \phi_n(z_n) \rangle = 0, \quad (3.51)$$

$$\sum_i (z_i^2 \partial_{z_i} + 2h_i z_i) \langle \phi_1(z_1) \cdots \phi_n(z_n) \rangle = 0. \quad (3.52)$$

Para derivar la *identidad de Ward conforme* se utilizará el álgebra conforme global. Se considera una colección de operadores localizados en los puntos w_i al rededor de algún contorno z (ver figura 3.3). Para realizar una transformación conforme dentro de esta región, se integra $\epsilon(z)T(z)$ dentro de este contorno. Este contorno único que abarca a todos los operadores se puede deformar a una suma de términos, cada término proviene de un contorno alrededor de un operador individual. Entonces

$$\begin{aligned} & \left\langle \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) T(z) \phi_1(w) \cdots \phi_n(w_n) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \phi_1(w) \cdots \left(\oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) T(z) \phi_i(w) \right) \cdots \phi_n(w_n) \rangle, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle \phi_1(w) \cdots \delta_\epsilon \phi_i(w) \cdots \phi_n(w_n) \rangle, \quad (3.54)$$

donde $\delta_\epsilon \phi$ está dada por la ecuación (3.4).

Utilizando de nuevo la integral de Cauchy para expresar $h \partial_w \epsilon(w) \phi(w, \bar{w})$ y $\epsilon(w) \partial_w \phi(w, \bar{w})$ en términos de una integral de contorno, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z) \left[\langle T(z) \phi_1(w) \cdots \phi_n(w_n) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i} \partial_{w_i} \right) \langle \phi_1(w) \cdots \phi_n(w_n) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Finalmente, esta expresión debe ser cierta para todo $\epsilon = -z^{n+1}$. Por lo que el

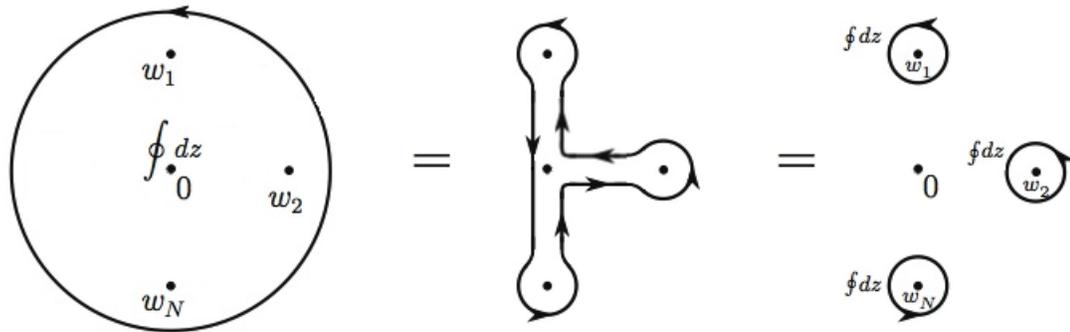


Figura 3.3. Deformación de contornos. Fuente: J. Qualls [19].

integrando debe hacerse cero, y así se encuentra la identidad de Ward conforme

$$\langle T(z)\phi_1(w)\cdots\phi_n(w_n)\rangle = \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i} \right) \langle \phi_1(w)\cdots\phi_n(w_n)\rangle. \quad (3.56)$$

4. “c” ES POR CARDY, “c” ES POR CASIMIR

4.1. “c” es por Casimir

Se puede notar que el término extra de la transformación (3.34) de T no depende de T en sí mismo. En particular, ese término es el mismo al ser evaluado sobre todos los estados. Este únicamente afecta el término constante o estado fundamental. En otras palabras, es la energía de Casimir del sistema [22].

Un ejemplo útil para la teoría de cuerdas [22] es considerar el cilindro euclidiado de la figura 3.1 bajo la parametrización $z = e^{-iw}$ mencionada en sección 3.2. Esta transformación ya se discutió en dicha sección, pero se retomará aquí por comodidad. El hecho de que el cilindro y el plano estén relacionados por un mapeo conforme significa que si se conoce una CFT dada sobre un cilindro, inmediatamente se puede entender sobre un plano y viceversa. La manera en que se transforma T para este caso puede verse al calcular la derivada de Schwartz, la cual da como resultado $S(z, w) = 1/2$. Por lo que

$$T_{cilindro}(w) = -z^2 T_{plano}(z) + \frac{c}{24}. \quad (4.1)$$

Suponiendo que el estado fundamental de energía se hace cero cuando la teoría se define sobre el plano, $\langle T_{plano} \rangle = 0$, es natural preguntarse lo que pasa en el cilindro. Para esto, se debe observar el hamiltoniano definido en términos del tensor de momentum-energía

$$H \equiv - \int dx^0 (T_{ww} + \bar{T}_{\bar{w}\bar{w}}). \quad (4.2)$$

De donde la transformación conforme muestra que el estado fundamental de energía sobre el cilindro es

$$E = - \frac{2\pi(c + \bar{c})}{24}. \quad (4.3)$$

Lo cual es, efectivamente, la energía de Casimir sobre un cilindro [22]. Para un campo escalar libre, se tiene que $c = \bar{c} = 1$ por lo que la densidad de energía $E/2\pi = -1/12$ [14] [22].

4.2. “c” es por Cardy

En el efecto Casimir se muestra que la carga central provee una contribución extra a la energía. Además en la anomalía de Weyl, de igual manera, se encuentra que la carga central establece una contribución a la energía [22] En esta sección se demostrará una propiedad de la carga central: esta da información sobre la densidad de estados de alta energía.

Se considera una teoría conforme de campos sobre un toro. Donde nuevamente se considera $x^0 \in [0, 2\pi)$, pero ahora, la parte temporal también se hace periódica, $x^1 \in [0, \beta)$.

La función de partición de una teoría con tiempo euclídeo periódico tiene una interpretación natural, está relacionada a la energía libre de una teoría con temperatura $T = 1/\beta$, es decir, con función de partición [22] [24]

$$Z[\beta] = \text{tr } e^{-\beta H} = e^{-\beta F}. \quad (4.4)$$

A temperaturas muy bajas $\beta \rightarrow \infty$, la energía libre es dominada por el estado de menor energía. Los demás estados son suprimidos exponencialmente. Pero, como se observó anteriormente, el estado de energía del vacío sobre un cilindro tiene la energía de Casimir (4.3). En el límite de baja temperatura, la función de partición es entonces aproximada a

$$Z \rightarrow e^{c\beta/12}. \quad (4.5)$$

Ahora se considera un truco conveniente. En el espacio euclideano, ambas direcciones sobre el toro están en la misma condición. Por lo tanto, se tiene la libertad de decidir que x^0 es el “tiempo” y x^1 el “espacio”. Lo cual no afecta el valor de la función de partición. Tomando en cuenta este intercambio, para comparar a la función de partición original, se requiere que la dirección espacial esté dentro del rango $[0, 2\pi)$, lo cual se puede arreglar haciendo el reescalamiento

$$x^0 \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} x^0, \quad x^1 \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} x^1. \quad (4.6)$$

El caso es completamente igual al anterior, excepto que ahora x^0 toma valores entre $[0, 4\pi^2/\beta)$, esto establece el comportamiento a altas temperaturas para la función de partición

$$Z[\beta'] \rightarrow e^{c\pi^2/3\beta'}, \quad (4.7)$$

para $\beta' \rightarrow 0$. Pero, para el límite de temperaturas muy altas, la función de partición

es un muestreo de todos los estados. Sin embargo, este muestreo está dominado por los estados de mayor energía [22]. Por tanto, este cálculo establece cuantos estados con alta energía hay en el sistema.

Para ver esto de una manera más explícita, se hará un análisis con herramientas elementales de mecánica estadística. Cualquier sistema tiene una densidad de estados $\rho(E) = e^{S(E)}$, donde $S(E)$ es la entropía del sistema. La energía libre, F , está dada por

$$e^{-\beta F} = \int dE \rho(E) e^{-\beta E} = \int dE e^{S(E) - \beta E}. \quad (4.8)$$

En dos dimensiones, todos los sistemas tienen una entropía que escala a energías altas como

$$S(E) \rightarrow N\sqrt{E}, \quad (4.9)$$

donde el coeficiente N cuenta el número de grados de libertad. El hecho de que $S \sim \sqrt{E}$ es equivalente al hecho de que $F \sim T^2$, como corresponde a una densidad de energía en una teoría con una dimensión espacial [22]. Para ver esto, únicamente se necesita aproximar la integral para un punto silla $S'(E_*) = \beta$ [22]. Por (4.9), esto da la energía libre

$$F \sim N^2 T^2. \quad (4.10)$$

Se puede reformular lo anterior en términos de la carga central. En una teoría conforme de campos, la entropía estados de alta energía está dada por

$$S(E) \sim \sqrt{cE}, \quad (4.11)$$

esto se conoce como la fórmula de Cardy.

La conexión entre la carga central y los grados de libertad en una teoría de campos se observa en el resultado de Zamolodchikov conocido como el *teorema C* [23][7]. La idea del teorema C es condicionar el comportamiento del *flujo del grupo de renormalización* sobre el espacio de todas las teorías de campos. Este se explicará detalladamente en los siguientes capítulos.

5. FLUJOS DEL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN

5.1. Grupo de Renormalización

El grupo de renormalización (RG) es sin duda uno de los conceptos más importantes en la teoría cuántica de campos, en el sentido de que es una herramienta que describe el comportamiento de las distintas QFTs [24]. Las ideas básicas fueron desarrolladas simultáneamente la física de altas energías y en la física de materia condensada [24]. Sin embargo, en este documento únicamente se tomará el punto de vista de la física de altas energías.

En el estudio de la física, es posible notar que la descripción de un sistema físico depende mucho de la escala de energía, o equivalentemente, de la escala de longitud a la cual se desea analizar dicho sistema. En este capítulo se estudiará cómo la teoría conforme de campos es esencial para estudiar este tema en la teoría cuántica de campos. Por ejemplo, considerando un balde de agua. En la escala de centímetros, la mejor descripción para estudiar la física del sistema es en términos de las ecuaciones de hidrodinámica. Sin embargo, a escala de distancias atómicas esta descripción ya no es útil, ya que las ecuaciones de hidrodinámica son válidas para longitudes de onda mayores a los tamaños de las moléculas en cuestión. A dichas escalas, la descripción más acertada es hecha por medio de la mecánica cuántica y la física nuclear. Si se desea describir el sistema a escalas más pequeñas, por ejemplo, debe estudiarse por medio de la cromodinámica cuántica, QCD. Se puede concluir de esto que cada vez que se desea analizar un sistema físico, se debe establecer a qué escala de energía o longitud se está tratando de estudiar.

La situación es similar en teoría cuántica de campos. Una QFT viene equipada con algún *cutoff ultravioleta* Λ , es decir, la escala de energía después de la cual son necesarios nuevos grados de libertad [4]. En esta teoría, es imposible saber que pasa más allá de la energía Λ , o equivalentemente, a distancias menores que Λ^{-1} , ya que al considerarlas se encuentran divergencias [24]. Una de las características

destacables es que a pesar de que no se ha encontrado una teoría completa de la gravedad cuántica, aún así, es posible calcular resultados observables usando física de baja energía [24]. En algunas referencias, establecer un cutoff Λ es conocido como *regularizar* una teoría. La idea completa del RG en QFT es una manera de parametrizar esta *ignorancia* en términos de las constantes de acoplamiento o interacción que serán medidas en un experimento entre grados de libertad con energía menor a la del cutoff. Una vez se hace esta “calibración”, la teoría cuántica de campos es predictiva [24].

5.2. Flujo de Grupo de Renormalización

En el marco del RG, primero se deben enumerar los grados de libertad que se desean estudiar, es decir, el contenido del campo [4]. Considerando una teoría de campos libre con una acción S_0 . A continuación, se escribe la acción más general que involucra las interacciones de estos grados de libertad, compuesta de términos que incorporan las simetrías que se quieren estudiar, transformaciones de simetría global por ejemplo, o transformaciones \mathbb{Z}_2 discretas. Las interacciones locales se pueden encontrar en términos de

$$S_{int} = \int d^d x \sum g_i \mathcal{O}_i(\phi).$$

Estos términos consisten en operadores contruídos de campos de baja energía y constantes de acoplamiento g_i describiendo la fuerza relativa de las interacciones [24]. Para calcular estas cantidades, se usa la integral de camino

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{-S}. \quad (5.1)$$

Las variables de integración de la integral de camino son las componentes de Fourier ϕ_k del campo [24]. Para imponer un cutoff Λ se requiere que

$$\int \mathcal{D}\phi = \prod_{|k| < \Lambda} \int d\phi_k.$$

El interés principal de esto yace en relacionar las constantes de acoplamiento en una teoría con cutoff de energía Λ a las constantes de acoplamiento de una teoría con cutoff $b\Lambda$ con $b < 1$ [4]. Se redefine ahora $\phi \rightarrow \phi + \phi'$, donde ϕ' tiene modos de Fourier distintos de cero en $b\Lambda < |k| < \Lambda$ y ϕ tiene modos de Fourier distintos

de cero en $|k| < b\Lambda$. Integrando el campo ϕ (lo que significa integrar los modos de Fourier) da un resultado escrito en términos de ϕ . Sea cual sea el resultado, se incluye de nuevo cambiando el lagrangiano a uno nuevo, un lagrangiano *efectivo*, \mathcal{L}_{eff} . La desaparición explícita de los modos cuánticos de energía más alta se compensa con algún cambio en el lagrangiano [4].

En general, \mathcal{L}_{eff} contiene todos los términos posibles que involucran a ϕ y sus derivados. Esto incluye términos que ya estaban presentes en el lagrangiano original. La integración de estos modos tiene el efecto de cambiar los coeficientes de los términos en el lagrangiano. El lagrangiano efectivo está parametrizado por los coeficientes de estos términos, y el acto de integrar los modos se puede considerar como moverse dentro del espacio de todos los lagrangianos posibles [4].

Si se considera el caso en que b es infinitesimalmente menor que 1, \mathcal{L}_{eff} será infinitesimalmente cercano al original \mathcal{L} . Integrar repetidamente estas capas finas en el espacio de momento corresponde a un movimiento suave a través de este espacio lagrangiano, esto es lo que se conoce como *flujo de grupo de renormalización*. Un análisis más cuidadoso de una teoría particular llevaría a la función beta $\beta(g)$ que describe la dependencia de un parámetro de acoplamiento en una escala de energía μ [24]

$$\beta(g) = \frac{\partial g}{\partial \log(\Lambda)} = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \Lambda}. \quad (5.2)$$

Donde se observa que esto representa solo seleccionar el exponente de la dependencia energética en el acoplamiento. El interés de este texto está en describir el comportamiento de estas funciones β , mas no en en calcularlas para teorías específicas.

5.3. Física sobre diferentes escalas espaciales

En este punto, se puede observar que algunas teorías con invariancia conforme clásica no mantienen la invariancia conforme en una teoría cuántica. Por ejemplo, en la teoría ϕ^4 en $d = 4$ dimensiones se tiene un bucle en la función β [24]

$$\beta(g) = \frac{3}{16\pi^2} g^2.$$

El signo positivo en esta expresión significa que la constante de acoplamiento aumenta con la energía [4]. De la misma manera, para la electrodinámica cuántica

(QED) sin masa, se tiene un bucle en la función β [24]

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}.$$

Esto contrasta con el bucle para QCD [24],

$$\beta(g) = - \left(11 - \frac{2N_f}{3} \right) \frac{g^3}{16\pi^2}.$$

En virtud del hecho de que $N_f \leq 16$ en nuestro universo (en el último recuento [24]), Esta función β dice que el acoplamiento disminuye con la energía. Esto se conoce como *libertad asintótica*. Cada una de estas teorías, aunque es clásica, tiene escalas de longitud introducidas a través de efectos cuánticos [24].

5.4. Relevante, irrelevante y marginal

Las funciones β que controlan el flujo RG son de tipo gradiente; la topología del flujo RG está controlada por puntos fijos [24]. Los puntos fijos son aquellos puntos en el espacio de parámetros de acoplamiento que tienen la función β igual a cero. Si β es cero, el acoplamiento es una constante, es decir, es invariante de escala espacial y no cambia con la escala de energía. Un punto fijo g_* del RG corresponde, por lo tanto, a una QFT invariante de escala (y en lo que respecta actualmente, invariante conforme [14]). Por lo tanto, estos puntos fijos son cruciales para la comprensión de *todas* las QFTs.

Para aclarar la manera en que el flujo de RG es controlado por estos puntos fijos, se considera cómo es el flujo RG en la vecindad de un punto fijo. En el espacio de parámetros de las QFTs, una dirección particular puede ser *estable* o *inestable* [4]. Una dirección estable es atractiva, en el sentido de que un flujo a lo largo de esta dirección fluirá hacia el punto fijo. Una dirección inestable es repulsiva y fluye lejos de puntos fijos. También hay direcciones *marginales* correspondientes a flujos en los que el acoplamiento no cambia. Ejemplos de estos tipos de flujos se pueden ver en la figura 5.1, donde un flujo marginal podría corresponder, por ejemplo, al movimiento fuera de la página. Los flujos verdaderamente marginales son un poco inusuales en mecánica cuántica [19]. Un punto genérico en este diagrama corresponde a alguna teoría cuántica de campos general, por ejemplo, QCD en alguna escala de energía descrita por algún conjunto de acoplamientos. Las propiedades de esta QFT, sin embargo, están dictadas en gran medida por el punto fijo.

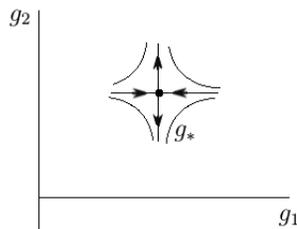


Figura 5.1. Ejemplo del flujo de grupo de renormalización en el espacio de dos acoplamientos. El punto g_* es un punto fijo, los flujos estables e inestables son visibles. La dirección de las flechas representa el flujo de altas energías a bajas energías. Fuente: J. Qualls [19].

Habiendo comprendido el flujo de RG, es posible caracterizar las interacciones que aparecen en las teorías. Las interacciones son *relevantes* si son inestables y se alejan del punto fijo, se dice que los operadores relevantes crecen en el *infrarrojo*. En términos generales, los operadores relevantes tienen la dimensión $\Delta < d$ [24]. Esto puede verse a partir de un conteo *ingenuo* de las potencias de energía en cada operador. Si un operador tiene $\Delta < d$, entonces para tener una acción adimensional, el acoplamiento asociado debe tener alguna dimensión de escala. Esta dimensión de escala determinará cómo fluye el acoplamiento, es decir, si el operador contribuye más o menos a bajas energías [24]. Las interacciones son irrelevantes si son atractivas en el diagrama de flujo RG. Los operadores irrelevantes no son importantes en el infrarrojo y generalmente tienen la dimensión $\Delta > d$ [24]. Finalmente, hay interacciones u operadores marginales. Los operadores marginales son invariantes bajo transformaciones de escala. En lugar de tener puntos fijos aislados, se puede tener una variedad completa de invariancia conforme [24]. Los operadores marginales ocurren cuando $\Delta = d$, de esta manera es posible ver por qué son inusuales en mecánica cuántica, la invariancia de escala se rompe y las dimensiones de escalamiento reciben correcciones anómalas [4] [24].

Es acá donde se evidencia la importancia de las teorías de campo conformes a la teoría cuántica de campos. Dado un conjunto de campos, el número de operadores relevantes (y marginales) es finito y pequeño [19][24]. A pesar de comenzar con lagrangianos generales con acoplamientos generales, solo unos pocos acoplamientos son importantes a bajas energías. Y dado que cualquier QFT vive en este “espacio de acoplamiento”, se puede pensar en cualquier teoría cuántica de campo como una perturbación de una teoría conforme de campos por parte de operadores relevantes. Es decir, cualquier punto en el espacio de parámetros se puede considerar como un flujo perturbado lejos de un punto fijo CFT [14][19][24].

6. EL TEOREMA C DE ZAMOLODCHIKOV

Como se introdujo en capítulos anteriores, en la naturaleza, diferentes fuerzas toman importancia a diferentes escalas de longitud. Mientras se fluye de una aproximación en el límite ultravioleta a una aproximación en el límite infrarrojo de la naturaleza, la importancia relativa de algunas fuerzas aumenta y la de otras disminuye [15] [24]. La interpretación física de la irreversibilidad es que esta transición ocurre sólo una vez [15] [24]. Después de alejarse con un factor arbitrario, las interacciones nunca volverán a su fuerza original al mismo tiempo. Incluso si se añaden perturbaciones infinitesimales a los acoplamientos durante el flujo [15] [24] [14].

Zamolodchikov puso una fuerte restricción al flujo del grupo de renormalización de una teoría cuántica de campos. Siempre que se cumplan algunas condiciones, descritas a continuación, mostró que el flujo a lo largo del grupo de renormalización es un proceso irreversible [23]. En un sentido más formal, el teorema C de Zamolodchikov establece que existe una función monotonamente decreciente sobre el conjunto de parámetros de masa y constantes de acoplamiento para todas las teorías cuánticas de campo que cumplan con ser positivas (correladores positivo definidos) bidimensionales e invariantes de Poincaré. Esta función tiene valores constantes únicamente en los puntos fijos en los cuales tiene el mismo valor que la correspondiente carga central del álgebra de Virasoro para la teoría conforme asociada.

En este capítulo, el teorema C de Zamolodchikov es probado por una construcción explícita de una función con las propiedades que exige dicho teorema. Esta función es llamada *función C* de Zamolodchikov. La función C está expresada en términos de funciones de correlación del tensor de momentum-energía. Las dos componentes del tensor de momentum-energía más utilizadas para la prueba T y $T_{z\bar{z}}$ serán representadas por la notación anteriormente introducida T y Θ para mayor comodidad.

Para estas dos componentes, es posible formar tres distintas funciones de correlación

$$\langle T(x)T(0) \rangle, \quad \langle T(x)\Theta(0) \rangle, \quad \langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle, \quad (6.1)$$

donde $x^2 = z\bar{z}$. Utilizando la ecuación (3.46), se tiene que para cada una de estas funciones de dos puntos

$$\langle T(x)T(0) \rangle = \frac{F}{z^4}, \quad (6.2)$$

$$\langle T(x)\Theta(0) \rangle = \frac{G}{z^2x^2}, \quad (6.3)$$

$$\langle \Theta(x)\Theta(0) \rangle = \frac{H}{x^2}. \quad (6.4)$$

Con lo cual es posible definir la función C de Zamolodchikov como:

$$C = 2F - 4G - 6H, \quad (6.5)$$

evaluada en $x = x_0$ en unidades tales que $|x_0| = 1$. Esta función está bien definida debido a la simetría de rotación y traslación de la teoría. La demostración se desglosará en las dos secciones siguientes.

6.1. Decrecientemente monótona

Para una teoría cuántica de campos renormalizable de dos dimensiones simétrica y positiva, se considera el tensor de momentum-energía, $T_{\mu\nu}$. Como se mencionó anteriormente, las simetrías en el lagrangiano implican que el tensor de momentum-energía es una corriente conservada, (3.7). En coordenadas complejas, esto implica que

$$\bar{\partial}T + \partial\Theta = 0. \quad (6.6)$$

Lo cual, bajo la definición de las funciones de correlación, lleva a las relaciones

$$\langle \bar{\partial}T(x)T(0) \rangle + \langle \partial\Theta(x)T(0) \rangle = 0, \quad (6.7)$$

$$\langle \bar{\partial}T(x)\Theta(0) \rangle + \langle \partial\Theta(x)\Theta(0) \rangle = 0. \quad (6.8)$$

Por la regla del producto y simetría traslacional, las relaciones anteriores junto con los correladores (6.2), (6.3) y (6.2) son equivalentes a

$$\bar{z}\bar{\partial}F + (z\partial - 3)G = 0 \quad (6.9)$$

y

$$(\bar{z}\bar{\partial} - 1)G + (z\partial - 2)H = 0, \quad (6.10)$$

respectivamente. Ahora bien, denotando $r = \sqrt{x^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, que implica que para cualquier función $f(r)$ que es independiente del ángulo y únicamente depende de el radio r , se cumple la relación

$$z\partial f(r) = \bar{z}\bar{\partial} f(r) = r \frac{\partial}{\partial r} f(r) \equiv \dot{f}(r). \quad (6.11)$$

En este punto, debe resaltarse la ecuación de Callan-Symanzik [24], en donde se relaciona la variación de escalas de energía (o espaciales) con las variaciones de las constantes de acoplamiento, es decir, el flujo del grupo de renormalización. Por lo tanto la notación $\dot{f}(r)$ es equivalente a $\sum_i \beta_i(g) \partial_{g_i} f$. En adelante se usará la notación $\dot{f}(r)$ para mayor comodidad.

Por lo tanto, (6.9) y (6.10) pueden reescribirse como

$$\dot{F} + \dot{G} = 3G, \quad (6.12)$$

$$\dot{G} + \dot{H} = G + 2H. \quad (6.13)$$

Con esto, aplicando el flujo del grupo de renormalización a la función C se obtiene que

$$\dot{C} = 2\dot{F} - 4\dot{G} - 6\dot{H} \quad (6.14)$$

$$= -12H. \quad (6.15)$$

La condición de positividad implica que el lado derecho de la última expresión es no negativa. Luego, la función C es monótona decreciente,

$$\dot{C} \leq 0. \quad (6.16)$$

6.2. Función C y la carga central

Como se demostró en (3.15), en los puntos fijos o puntos conformes, la traza del tensor de momentum-energía se hace cero, $\Theta = 0$. Por lo tanto, la función C en los puntos conformes se reduce a

$$C = 2z^4 \langle T(x)T(0) \rangle|_{x=x_0}. \quad (6.17)$$

Por el TT OPE (3.32) se deduce que, en efecto, c es la carga central asociada. Es de acá de donde viene el nombre de función C . En otras palabras, la función C interpola la carga central entre los diferentes puntos fijos. Por lo tanto, la función C propuesta por Zamolodchikov cumple con el teorema.

Esta demostración del teorema C hecha por Zamolodchikov fue publicada en 1986, sin embargo, hasta el año 2012 fue posible demostrar el teorema para $2 + 1$ dimensiones [9]. Este logro fue posible gracias a que se pudo construir una función C basada en *entropía de entrelazamiento*, primero, para $1 + 1$ dimensiones en el año 2006 [7], luego para $2+1$ y recientemente, a inicios del año 2017 se demostró para $3+1$ dimensiones [10]. Estas demostraciones *entrópicas* para teoremas de irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización para $1 + 1$ y $2 + 1$ fueron hechas por H. Casini y M. Huerta, mientras que para $3+1$ fue hecha por H. Casini, E. Teste y G. Torroba. Vale la pena mencionar que en el año 2011, Komargodski y Schwimmer demostraron la irreversibilidad del flujo del grupo de renormalización para $3 + 1$ dimensiones, de manera independiente a las funciones entrópicas [16]. En el siguiente capítulo se reproducirá la demostración para $1 + 1$ dimensiones, introduciendo en las primeras secciones la idea de la entropía de entrelazamiento.

7. EL TEOREMA C A LA CASINI-HUERTA

7.1. Entrelazamiento cuántico

La herramienta natural para investigar las propiedades no locales almacenadas en las funciones de onda del estado fundamental es el concepto de entrelazamiento cuántico y la entropía de entrelazamiento asociada [13]. En este capítulo se define qué se entiende por entrelazamiento cuántico y sus medidas, haciendo énfasis en la entropía del entrelazamiento. El concepto de entrelazamiento cuántico nació con la mecánica cuántica en sí misma, y precede a las motivaciones presentes por muchas décadas [12].

Históricamente, el concepto de entrelazamiento cuántico se formuló para describir cómo un sistema cuántico finito se acopla a su entorno esencialmente infinito [12]. El mejor ejemplo es la información no local almacenada en las funciones de onda de los sistemas de partículas idénticas. Considerando, por ejemplo, un sistema de dos partículas idénticas de espín-1/2, A y B. La función de onda para un singlete de espines con espín total $S = 0$ y $S_z = 0$ es $|0, 0\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}})(|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle)$ [20].

Como esta función de onda no contiene ninguna escala de longitud, el tamaño físico del espín singlete puede ser tan grande como pueda. Si se mide el espín de la partícula A, por ejemplo, en la Tierra, y se descubre que es \uparrow entonces, siempre que se sepa a priori que el estado es realmente un singlete de espín, se sabe que el espín de la partícula B es \downarrow , aun si la partícula se encuentre, por ejemplo, en Plutón. Por otro lado, si los dos espines están en un producto de estado, tal como $|1, \pm 1\rangle$, la medición del espín de la partícula encontrada en \uparrow implica que el espín de la partícula B es \uparrow únicamente si se sabe que $S = 1$ y $S_z = 1$. Por esta razón, se dice que los espines están entrelazados en un singlete, mas no en producto de estado [13].

Una medida del grado de entrelazamiento de un estado cuántico es la entropía de entrelazamiento de von Neumann, que se define de la siguiente manera [13]. Considerando una partición de un sistema físico Σ en dos subsistemas disjuntos

denotados como A y B , entonces $\Sigma = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Sean \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B los espacios de Hilbert de los estados con soporte separado en el sistema A y en el sistema B de modo que el espacio de Hilbert de los estados en Σ es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$. Sea $|\Psi\rangle$ un estado puro sobre el sistema $A \cup B$. Como tal, este puede ser descompuesto como

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} M_{m,n} |\psi_n^A\rangle |\psi_n^B\rangle, \quad (7.1)$$

donde $\{|\psi_A\rangle\}$ y $\{|\psi_B\rangle\}$ son bases ortonormales de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente, y $M_{m,n}$ son los elementos de una matriz rectangular general \mathbf{M} . Sin embargo, utilizando el teorema de descomposición de valores singulares, una matriz rectangular siempre se puede escribir como producto de una matriz unitaria \mathbf{U} , una matriz diagonal $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$, y una matriz rectangular \mathbf{V} , cuyas filas son vectores ortonormales [18]. Entonces, luego de cambiar a las nuevas bases $|\psi_n^A\rangle \rightarrow \mathbf{U} |\psi_n^A\rangle$ y $|\psi_n^B\rangle \rightarrow \mathbf{V} |\psi_n^B\rangle$, se encuentra la descomposición de Schmidt del estado $|\Psi\rangle$,

$$|\Psi\rangle = \sum_n^D \lambda_n |\psi_n^A\rangle |\psi_n^B\rangle, \quad (7.2)$$

donde $\mathbf{D} = \min\{d_A, d_B\}$, con d_A y d_B como las dimensiones de los respectivos espacios de Hilbert \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B . Si el estado $|\Psi\rangle$ está normalizado $\|\Psi\| = 1$, entonces el conjunto de números complejos $\{\lambda\}$ debe satisfacer

$$\sum_n^D |\lambda_n|^2 = 1. \quad (7.3)$$

Dado un estado puro $|\Psi\rangle$ de un sistema total $A \cup B$, su matriz densidad es

$$\rho_{A \cup B} = |\Psi\rangle \langle \Psi|. \quad (7.4)$$

Con esto, es posible definir la matriz densidad reducida para el subsistema A haciendo la traza parcial de $\rho_{A \cup B}$ sobre los grados de libertad de B ,

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho_{A \cup B}, \quad (7.5)$$

y similarmente para ρ_B . Si se observa únicamente el subsistema A , este está en un estado mixto definido por la matriz densidad ρ_A , y lo mismo para B .

La entropía de von Neumann, S_A para el subsistema A cuando el sistema total

está en el estado $|\Psi\rangle$ está definida en términos de la matriz densidad reducida de A

$$S_A \equiv -\text{tr}(\rho_A \ln \rho_A). \quad (7.6)$$

Por razones históricas, en la literatura sobre información cuántica, se suele escribir en términos de \log_2 mientras que en mecánica estadística se suele usar el logaritmo natural. Usando la descomposición de Schmidt, (7.2), se puede escribir la matriz reducida ρ_A como

$$\rho_A = \sum_n^D |\lambda_n|^2 |\psi_n^A\rangle \langle \psi_n^A|, \quad (7.7)$$

y de la misma manera para B . Por lo tanto, las cantidades $p_n \equiv |\lambda_n|^2$ representan la probabilidad de observar el sistema en el estado $|\psi_n^A\rangle$. De estas expresiones, se sigue que las matrices densidad reducidas ρ_A y ρ_B tienen los mismos eigenvalores distintos de cero y ambas tienen traza igual a la unidad, $\text{tr}_A \rho_A = \text{tr}_B \rho_B = 1$.

También se puede observar que la entropía de entrelazamiento de von Neumann puede ser escrita como

$$S_A = -\text{tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\sum_n^D |\lambda_n|^2 \ln |\lambda_n|^2 = -\text{tr}(\rho_B \ln \rho_B) = S_B. \quad (7.8)$$

En otras palabras, la entropía de entrelazamiento es simétrica en los dos subsistemas (entrelazados). Esta propiedad de simetría es una consecuencia de la suposición de que el sistema total $A \cup B$ está descrito por un estado puro. Por el contrario, la propiedad de simetría de la entropía de entrelazamiento no se cumple si el sistema total está en un estado mixto, por ejemplo, en un estado térmico definido por una matriz de densidad de Gibbs [13].

La expresión de la entropía de entrelazamiento de von Neumann en términos de las probabilidades $\{|\lambda|^2\}$ también evidencia que la entropía de entrelazamiento puede hacerse cero solo si la matriz de densidad reducida ρ_A (y, por lo tanto, también ρ_B) en sí misma representa un estado puro. Esto puede pasar únicamente si el estado $|\Psi\rangle$ del sistema $A \cup B$ es un estado producto. En este caso, la matriz de densidad reducida es diagonal e igual a $\rho_A = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$, que tiene una entropía igual a cero. Por lo tanto, la entropía de von Neumann es una medida del entrelazamiento de los dos subsistemas A y B en estado $|\psi\rangle$. El espectro de (Schmidt) valores propios $\{|\lambda_n|^2\}$ de la matriz de densidad reducida se conoce como el espectro de entrelazamiento.

Finalmente, la entropía del entrelazamiento de von Neumann satisface las siguientes propiedades. Para dos regiones, A y B , la entropía de entrelazamiento es

subaditiva, es decir, cumple con $S_{AUB} \leq S_A + S_B$. Además, para tres regiones, A , B y C , la entropía de entrelazamiento de von Neumann satisface la condición de subaditividad fuerte [11]

$$S_{AUBUC} \leq S_{AUB} + S_{BUC} - S_B. \quad (7.9)$$

7.2. Entrelazamiento en teoría cuántica de campos

El resto de este capítulo está enfocado en la entropía del entrelazamiento, cómo se calcula y cómo se comporta en sistemas de interés. Se discutirá con cierto detalle las leyes de escala obedecidas por la entropía del entrelazamiento.

Se afrontará la cuestión de calcular la entropía del entrelazamiento en un sistema macroscópico extendido como una teoría cuántica de campos. En sistemas con pocos grados de libertad, es relativamente sencillo construir las matrices de densidad reducida directamente desde sus funciones de onda [11][13]. Sin embargo, a excepción de unos pocos casos, las funciones de onda de los sistemas con un número infinito de grados de libertad son, en casi todas las circunstancias, sumamente complejas. Existen algunos sistemas excepcionales en los que las funciones de onda se conocen explícitamente y tienen propiedades universales. Sin embargo, incluso para estos casos, el cálculo de la entropía de entrelazamiento no es trivial [13].

Para abordar el tema, se considera una teoría de campo con una acción euclidiana $S[\phi] = \int_{\Omega} d^D x \mathcal{L}[\phi]$, donde ϕ es un campo y \mathcal{L} es la densidad lagrangiana. Aquí Ω representa un manifold de un espacio-tiempo D dimensional.

En la teoría euclidiana, la coordenada temporal imaginaria τ es periódica (compactada) con un período $\beta = 1/T$, mientras que las direcciones espaciales son arbitrarias [13]. Por lo tanto, generalmente se suele referir al espacio-tiempo como un cilindro de circunferencia $\beta = 1/T$. Lo que sigue en el resto de esta sección no depende de si la teoría es relativista o no.

La matriz de densidad de Gibbs del sistema es $\rho = \exp(-\beta H)$, donde H es el hamiltoniano cuántico y $\beta = 1/T$. La función de partición es

$$Z = \text{tr } \rho = \text{tr } e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_{\Omega} d^D x \mathcal{L}[\phi]}. \quad (7.10)$$

En la métrica euclídea el generador de tiempo imaginario τ es $U(\tau) = \exp(-\tau H)$ [24]. Por lo tanto, la función de onda del estado fundamental $\Psi_0[\phi]$ se expresa en

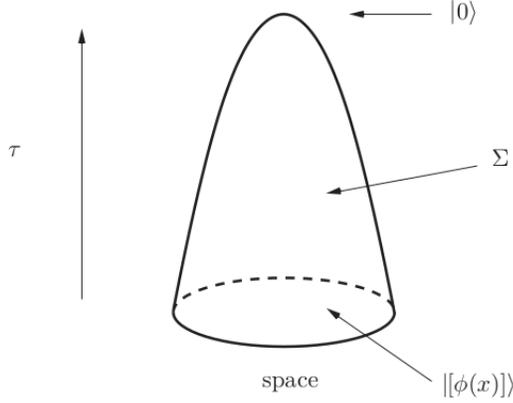


Figura 7.1. Representación gráfica de la integral de camino de la función de onda como la amplitud para una evolución desde un estado inicial $|\phi(x)\rangle$ al estado de vacío $|0\rangle$ del sistema. El estado inicial es una configuración de campo definida en el límite del manifold de espacio-tiempo abierto. La frontera es un manifold espacial en el segmento de tiempo imaginario inicial $\tau = 0$ de la evolución euclidiana. Fuente: E. Fradkin [13].

términos de una integral de camino mediante una expresión de aspecto similar, ver figura 7.1

$$\Psi_0[\phi] = \langle \phi | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_{\Omega} d^D x \mathcal{L}[\phi]}, \quad (7.11)$$

donde el manifold tiene una frontera en algún tiempo (imaginario) $\tau = 0$ donde se especifica que el estado viene dado por la configuración del campo, $|\Psi\rangle$, y donde se toma el límite de temperatura cero $T \rightarrow 0$. Este último paso se proyecta en el estado fundamental $|0\rangle$, suponiendo que sea único. Si el estado fundamental no es único, la evolución se proyectará en un estado que es la superposición lineal del vacío degenerado (estados fundamentales).

De manera similar, el elemento de la matriz de densidad ρ entre los estados $|\phi(x)\rangle$ y $|\phi'(x)\rangle$ es

$$\langle \phi(x) | \rho | \phi'(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \prod_x \delta(\phi(x, \tau = 0) - \phi(x)) \prod_x \delta(\phi(x, \tau = \beta) - \phi'(x)) e^{-S_E[\phi]}, \quad (7.12)$$

donde $S_E[\phi]$ es la acción euclidiana de la teoría de campo en un manifold que es una banda de ancho β con las condiciones de contorno especificadas.

Se puede usar el mismo enfoque para, al menos formalmente, encontrar una expresión integral de camino para la matriz densidad reducida. Por lo tanto, una vez más se considera una partición del manifold espacial en dos conjuntos disjuntos

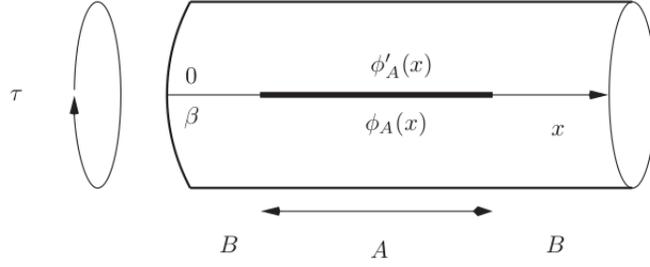


Figura 7.2. La integral de camino para la matriz de densidad reducida ρ_A se define en un manifold con la topología de un cilindro con un corte, la línea oscura que se muestra en la figura. Aquí $\phi_A(x)$ y $\phi'_A(x)$ son dos configuraciones del campo en la región A. El origen y el final del tiempo imaginario τ están en $\tau = 0$ y $\tau = \beta$. Fuente: E. Fradkin [13].

A y B. La matriz densidad reducida ρ_A se obtiene luego de aplicar la traza sobre los grados de libertad en su complemento, la región B. Por lo tanto, se exige que en la región B, los estados inicial y final sean los mismos y se acoplen, y la coordenada de tiempo imaginario sea periódica con período β . Por lo tanto, en la región B, la banda se envuelve en un cilindro de circunferencia β . Sean $|\phi_A(x)\rangle$ y $|\phi'_A(x)\rangle$ dos configuraciones del campo con soporte en la región A. Los elementos de la matriz de densidad reducida para la región A se obtienen calculando una traza de la matriz de densidad completa restringida a los estados en la región B. Sin embargo, en la región A los estados evolucionan del estado $|\phi_A(x)\rangle$ hacia $|\phi'_A(x)\rangle$. En otras palabras, el nuevo manifold es suave y periódico en la región B pero tiene un corte en la región A con una discontinuidad expresada en términos de las dos configuraciones especificadas por los estados $|\phi_A(x)\rangle$ y $|\phi'_A(x)\rangle$, ver figura 7.2,

$$\langle \phi_A(x) | \rho_A | \phi'_A(x) \rangle = \langle \phi_A(x) | \text{tr}_B \rho | \phi'_A(x) \rangle. \quad (7.13)$$

Para calcular la entropía de entrelazamiento se utilizará el *método de réplicas* [13]. Para este fin, se calcula primero

$$Z_n[A] = \text{tr} \rho_A^n, \quad (7.14)$$

que está definida para $n \in \mathbb{N}$. En términos del espectro de autovalores de la matriz reducida, $\{\lambda_k\}$, llamado también espectro de entrelazamiento, esto es

$$Z_n[A] = \sum_k^D \lambda_k^n. \quad (7.15)$$

El espectro de autovalores vive en el intervalo $[0, 1]$ y obedece la regla de normalización $\sum_k^D \lambda_k = 1$, por esto, dicha traza es absolutamente convergente y analítica en \mathbb{R} , $n > 1$. Por lo tanto, $Z_n[A]$ puede ser extendida por una continuación analítica a n planos complejos como $Z[n, A]$.

La entropía de entrelazamiento de von Neumann, S_A puede ser calculada tomando el límite [3] [1]

$$S_A = -\text{tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\lim_{n \rightarrow 1^+} \frac{\partial}{\partial n} -\text{tr} \rho_A. \quad (7.16)$$

Es conveniente acá definir también la entropía de Rényi S_A^n ,

$$S_A^n = \frac{1}{1-n} \ln \text{tr} \rho_A^n. \quad (7.17)$$

Ya que se toma la traza de productos de la matriz densidad, es posible observar que el estado final en la región A de un factor es el estado inicial del siguiente factor también en la región A . La traza general significa que el estado final del último factor se identifica con el estado inicial del primer factor. Esto significa que el manifold en el que se calcula la integral de camino se puede considerar como una superficie de Riemann de n -hojas en la región A con un intervalo de tiempo imaginario global $n\beta$ pegando a los cilindros definidos para la región B , cada uno con un intervalo de tiempo imaginario β [1].

Alternativamente, se puede pensar que este cálculo involucra n -copias idénticas de la teoría de campos y, por lo tanto, tiene n -copias o réplicas de los campos ϕ_i para $i = 1, \dots, n$, cada una con la misma acción tal que en la región B las réplicas obedecen condiciones de frontera periódicas en tiempo imaginario por separado, mientras que en la región A se identifican entre sí de forma secuencial y cíclica [13]. Específicamente, los campos replicados obedecen las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \phi_j(0^+, x) &= \phi_{j+1}(0^-, x), \text{ para } x \in A \\ \phi_j(0^+, x) &= \phi_j(0^-, x), \text{ para } x \in B. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Una consecuencia de las condiciones de contorno que especifica cómo las n -réplicas se pegan entre sí es que existe un conjunto de *operadores de giro* los cuales actúan sobre la teoría replicada e identifican las diferentes copias en los cortes [3][1]. En el límite común entre las regiones A y B , los campos tienen una singularidad cónica. Esta formulación se debe originalmente a Holzhay, Larsen y Wilczek [15], y fue desarrollada y extendida por Calabrese y Cardy entre los años 2004 y 2009 [1] [2].

Siguiendo a Calabrese y Cardy, se define una función de partición con n -copias del campo, obedeciendo las condiciones de contorno de la ecuación (7.18). La acción de los campos replicados es simplemente la suma de las acciones para cada copia,

$$S[\phi_1, \dots, \phi_n] = \sum_i^n S[\phi_i]. \quad (7.19)$$

La integral de camino, es decir, la función de partición está restringida por la condición de que los campos locales $\{\phi_i\}$ se peguen de acuerdo con las condiciones de contorno de la ecuación (7.18). La teoría replicada así definida ahora tiene una simetría global ya que es invariante bajo el intercambio de las réplicas. Los campos locales que obedecen estas condiciones se llaman *campos de giro*.

Con la estructura particular de las condiciones de contorno que se están utilizando, se denominan campos de giro de punto de ramificación, y se asocian con dos simetrías de permutación cíclica, $\sigma : j \rightarrow j + 1 \pmod{n}$ y $\sigma^{-1} : j + 1 \rightarrow j \pmod{n}$ con $j = 1, \dots, n$. Los *campos de giro de corte de ramificación* que mapean las diferentes copias a través de los cortes de ramificación se indican mediante $\mathcal{T}_n \equiv \mathcal{T}_\sigma$, asociados con la permutación $\sigma : j \rightarrow j + 1 \pmod{n}$, y $\tilde{\mathcal{T}}_n \equiv \mathcal{T}_{\sigma^{-1}}$, asociados con la permutación inversa. Por lo tanto, la matriz de densidad reducida, que se definió como la función de partición con un corte de ramificación en cada punto a lo largo del límite entre las regiones A y B , equivale a una función de partición en la teoría replicada con inserciones de los campos de giro límite entre las dos regiones.

Un tratamiento detallado de este enfoque se puede encontrar en el trabajo de Cardy y colaboradores [5]. Esta formulación es particularmente poderosa en dimensiones $1 + 1$, que es lo que se estudiará en las secciones restantes.

7.3. Entropía de entrelazamiento en teoría conforme de campos

El comportamiento de las entropías de entrelazamiento a distintas escalas puede ser determinado por argumentos de CFT. En esta sección se seguirán los resultados de Calabrese y Cardy [1] [2], los cuales son una generalización del trabajo de Holzhey, Larsen y Wilczek [15].

Por simplicidad, la región A será un segmento de longitud ℓ , y la región B será el complemento. Todo el sistema tiene longitud $L \gg \ell$. Se trabajará en el límite de largas distancias y, por lo tanto, se puede suponer que $\ell \gg a$, donde a es un cutoff

espacial.

En la formulación hecha con el método de réplicas, los campos considerados debían estar *girados* debido a las condiciones de contorno. Los campos están girados por el cambio de simetrías, que son representados por los campos locales \mathcal{T}_n y \mathcal{T}_n^{-1} . Estos campos locales actúan en el límite entre las dos regiones A y B , y sirven efectivamente para vincular las diferentes copias de la CFT entre sí [2]. En el caso de un solo intervalo con puntos finales en las coordenadas espaciales $x = u$ y $x = v$, con $\ell = |u - v|$, la función de partición debe calcularse en campos sobre una superficie de Riemann de n -hojas. En dos dimensiones, es posible calcular este objeto como una integral de camino para los campos replicados en el plano complejo \mathbb{C} , donde la superficie de Riemann se especifica mediante un conjunto de condiciones de contorno, (7.18). Para la superficie de Riemann de n -hojas a lo largo del intervalo A la función de partición $Z_n[A]$ se convierte a

$$Z_n[A] = \langle \mathcal{T}_n(u, 0) \mathcal{T}_n^{-1}(v, 0) \rangle, \quad (7.20)$$

donde el valor esperado se calcula a partir de la teoría de réplicas en el plano complejo. El papel de los operadores $\mathcal{T}_n(u, 0)$ y $\mathcal{T}_n^{-1}(v, 0)$ es hacer cumplir las condiciones de contorno de (7.18). De manera similar, el valor esperado de un operador en la hoja $i = 1, \dots, n$, $\mathcal{O}(x, \tau; i)$, en la superficie de Riemann de n -hojas es

$$\langle \mathcal{O}(x, \tau; i) \rangle = \frac{\langle \mathcal{O}(x, \tau; i) \mathcal{T}_n(u, 0) \mathcal{T}_n^{-1}(v, 0) \rangle}{\langle \mathcal{T}_n(u, 0) \mathcal{T}_n^{-1}(v, 0) \rangle}. \quad (7.21)$$

En el límite termodinámico en el cual el tamaño del sistema $L \rightarrow \infty$, el mapeo conforme

$$\zeta = \frac{w - u}{v - u}, \quad (7.22)$$

donde $w = x + i\tau$, mapea los puntos de ramificación a $(0, \infty)$. Mientras que el mapeo conforme

$$z = \zeta^{1/n} = \left(\frac{w - u}{v - u} \right)^{1/n}, \quad (7.23)$$

mapea la superficie de Riemann de n -hojas al plano complejo \mathbb{C} [17]. En el caso de una CFT, el tensor de momentum-energía se descompone en sus componentes holomorfas y antiholomorfas. La componente holomorfa del tensor de momentum-energía se transforma como la ecuación (3.34), que por comodidad, se vuelve a añadir acá

$$T(z) \rightarrow T'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} S(f(z), z), \quad (7.24)$$

Sin embargo, en el plano complejo $\langle T(z)_{\mathbb{C}} \rangle = 0$, donde el sistema es invariante ante rotaciones y traslaciones, por lo que el valor esperado del tensor de momentum-energía en la superficie de Riemann de n -hojas es

$$\langle T(w) \rangle = \frac{c}{24} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{(v-u)^2}{(w-u)^2(w-v)^2}. \quad (7.25)$$

Pero esto debe ser lo mismo al valor esperado del tensor de momentum-energía calculado por (7.21). En particular, si el tensor de momentum-energía en la superficie de Riemann de n -hojas para el lagrangiano replicado es n veces $\langle T(w) \rangle$, se debe cumplir la relación

$$\frac{\langle \mathcal{O}(x, \tau; i) \mathcal{T}_n(u, 0) \mathcal{T}_n^{-1}(v, 0) \rangle}{\langle \mathcal{T}_n(u, 0) \mathcal{T}_n^{-1}(v, 0) \rangle} = (n^2 - 1) \frac{(v-u)^2}{(w-u)^2(w-v)^2}. \quad (7.26)$$

Como se estudió en la sección 3.3.1, en CFT los campos obedecen un conjunto de identidades de Ward conformes que en este caso toman la forma

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(x, \tau; i) \mathcal{T}_n(u, 0) \mathcal{T}_n^{-1}(v, 0) \rangle = \\ \left(\frac{1}{w-u} \partial_u + \frac{h_{\mathcal{T}_n}}{(w-u)^2} + \frac{1}{w-v} \partial_v + \frac{h_{\mathcal{T}_n^{-1}}}{(w-v)^2} \right) \langle \mathcal{T}_n(u, 0) \mathcal{T}_n^{-1}(v, 0) \rangle, \end{aligned} \quad (7.27)$$

donde $h_{\mathcal{T}_n} = h_{\mathcal{T}_n^{-1}}$ es la dimensión de escala de \mathcal{T} y \mathcal{T}^{-1} . Usando esto, por la definición de dimensión de escala y la ecuación (3.46) se debe cumplir

$$\langle \mathcal{T}_n(u, 0) \mathcal{T}_n^{-1}(v, 0) \rangle = \frac{1}{|u-v|^{2h_n}}, \quad (7.28)$$

donde se usa la notación h_n para referirse a $h_{\mathcal{T}_n}$ y, por ende, a $h_{\mathcal{T}_n^{-1}}$. Con esto es posible identificar la dimensión de escala de los operadores de giro h_n ,

$$h_n = \frac{c}{12} \left(n - \frac{1}{n} \right). \quad (7.29)$$

De donde, para la función de partición

$$\text{tr } \rho_A^n = \frac{Z_n[A]}{Z_n} \quad (7.30)$$

que es equivalente a la función de dos puntos del campo de giro, ecuación (7.20). Esta debe transformarse de la misma manera bajo transformaciones conformes. Por

lo tanto, considerando una constante no universal C_n [2], se puede demostrar que

$$\text{tr } \rho_A^n = C_n \left(\frac{v-u}{a} \right)^{(c/6)(n-1/n)} \quad (7.31)$$

para a como un cutoff de longitud corta. Por lo cual, las entropías de Rényi y von Neumann deben obedecer las relaciones

$$S_A^n = \frac{c}{6} (1 + 1/n) \ln \left(\frac{\ell}{a} \right) + c_0, \quad (7.32)$$

$$S_A = \frac{c}{3} \ln \left(\frac{\ell}{a} \right) + c_0, \quad (7.33)$$

donde c_0 es una constante no universal.

7.4. El teorema C - revisitado

El teorema C de Zamolodchikov en dos dimensiones muestra que el flujo del grupo de renormalización solo puede conectar teorías de campo conformes en el punto fijo ultravioleta con carga central de Virasoro mayor que las CFT en el punto fijo infrarrojo. Esto establece un orden en las CFT en dos dimensiones, proporcionando una interpretación de la carga central como una medida de los grados de libertad del campo. Estos grados de libertad se pierden a lo largo del flujo de renormalización debido al desacoplamiento de modos masivos. La prueba de Zamolodchikov se basa en la positividad y la covarianza de las funciones de correlación. Una prueba alternativa del mismo teorema basado en la subaditividad fuerte de la entropía de entrelazamiento se discutirá en esta sección. En ambos casos, los elementos esenciales detrás de la validez del teorema son la unitariedad y la simetría relativista de las teoría cuánticas de campos [7].

7.4.1. Intervalos en dos dimensiones del espacio-tiempo

Como se discutió en la sección 7.1, para la entropía de entrelazamiento se cumple la relación de subaditividad fuerte, ecuación (7.9), lo cual es muy conveniente para el objetivo de demostrar el teorema C de manera entrópica. Es necesario definir regiones, en este caso, intervalos en 1 + 1 dimensiones. Para este fin, se debe cumplir que la entropía de entrelazamiento para regiones A y B , tales que se cumpla la relación de subaditividad fuerte, las intersecciones y uniones de dichos intervalos deben tener el mismo tipo de divergencia [7] [8]. Para ello, se consideran dos intervalos

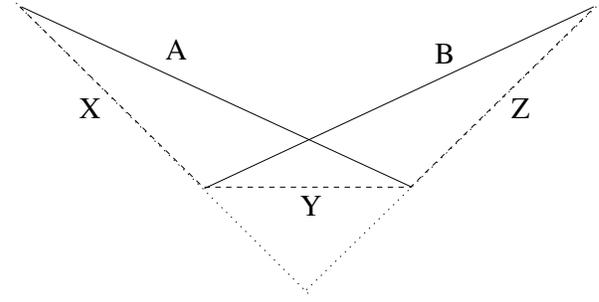


Figura 7.3. Dos intervalos A y B de tamaño \sqrt{rR} cuyos puntos finales se encuentran en el cono de luz. El tamaño de Y es r mientras que la distancia entre los puntos finales superiores de A y B es R . Fuente: H. Casini y M. Huerta [9].

boosteados en $1 + 1$ dimensiones con sus puntos finales sobre un cono de luz, ver figura 7.3.

Aplicando la relación de subaditividad fuerte a las regiones espaciales en las líneas punteadas de la figura 7.3, se tiene

$$S(XY) + S(YZ) \geq S(Y) + S(XYZ). \quad (7.34)$$

Para mayor comodidad, se elige el tamaño de A y B como \sqrt{rR} , para cualesquiera $r < R$, y el tamaño de Y igual a r , por lo que $S(Y) = S(r)$. Donde se denota $S(l)$ como la entropía de entrelazamiento de un intervalo de longitud l . Dado que por causalidad la matriz de densidad de una región coincide con la de cualquier otra región espacial con el mismo dominio causal de dependencia [6], se tiene que $S(XY) = S(A) = S(\sqrt{rR}) = S(B) = S(YZ)$. Además, la región XYZ es equivalente a un intervalo de tamaño R , por lo tanto $S(XYZ) = S(R)$. Usar esto en (7.3) lleva a

$$2 S(\sqrt{rR}) \geq S(R) + S(r). \quad (7.35)$$

Considerando $R = r + \varepsilon$ y expandiendo para pequeños ε se obtiene

$$rS''(r) + S'(r) \leq 0. \quad (7.36)$$

Esto es equivalente a $C'(r) \leq 0$ para la cantidad $C(r) = rS'(r)$. Esta función es entonces adimensional y siempre está disminuyendo. En el punto crítico, la entropía tiene una forma general dada por (7.32)

$$S(r) = \frac{c}{3} \log(r/\epsilon) + c_0, \quad (7.37)$$

donde c_0 es una constante no universal, ϵ es un cutoff de corta distancia y c es la carga central de Virasoro de la teoría conforme. En este caso, se tiene que $C(r) = c/3$. Por lo tanto, la desigualdad anterior establece una forma entrópica del teorema C de Zamolodchikov [23][7]: la carga central del punto fijo ultravioleta es siempre mayor que la del punto fijo infrarrojo.

CONCLUSIONES

1. Una teoría conforme de campos es una teoría cuántica de campos que es invariante bajo transformaciones conformes. Las transformaciones conformes están compuestas por el grupo de Poincaré más dilataciones y transformaciones conformes especiales. En dos dimensiones, hay un álgebra de dimensiones infinitas de transformaciones conformes locales. En $d > 2$ dimensiones, el grupo conforme es localmente isomorfo a $SO(d+1, 1)$ en un espacio euclidiano, e isomorfo a $SO(d, 2)$ en el espacio de Minkowski, este grupo es equivalente al grupo de isometrías en un espacio AdS.
2. El álgebra de Virasoro puede ser deducida como una extensión central del álgebra del grupo conforme local, el álgebra de Witt, e imponiendo la condición que debe cumplir la identidad de Jacobi, por ser también un álgebra de Lie. Sin embargo, también puede ser deducida a partir de una expansión del tensor de momentum-energía en series de Laurent, utilizando la expansión del producto de operador de dicho tensor y conmutar los modos de Laurent. Desde este punto de vista, se puede entender lo que significa la extensión central.
3. El flujo del grupo de renormalización únicamente puede conectar teorías conformes de campos en el punto fijo ultravioleta con una carga central de Virasoro mayor que la CFT en el punto fijo en el infrarrojo. Esto establece un orden en la CFT en dos dimensiones, proporcionando una interpretación de la carga central como una medida de los grados de libertad del campo.
4. El comportamiento del flujo de grupo de renormalización puede ser descrito con la existencia de una función adimensional universal de las constantes de acoplamiento $C(\{g_i\})$ en el espacio de las teorías de campo de dimensión $1+1$, que cumplan con ser positivas, bidimensionales e invariantes de Poincaré. Esta función debe ser monotonamente decreciente a lo largo de las trayectorias del grupo de renormalización y debe ser estacionaria en los puntos fijos, donde toma un valor finito proporcional a la carga central de Virasoro c . Esto es

conocido como el teorema C .

5. El teorema C puede ser probado por una construcción explícita de una función con las propiedades que exige dicho teorema. La función C , propuesta por Zamolodchikov, está expresada en términos de funciones de correlación del tensor de momentum energía. De la misma manera, la combinación de la simetría de Lorentz y la propiedad de subaditividad fuerte de la entropía conduce a un teorema C para la entropía de entrelazamiento para intervalos de dimensión $1 + 1$.
6. La demostración del teorema C de manera entrópica permitió demostrar teoremas de irreversibilidad para $2 + 1$ y $3 + 1$ dimensiones.

RECOMENDACIONES

1. Estudiar la relación entre la función C de Zamolodchikov y la función C entrópica.
2. Buscar una función C distinta a la de Zamolodchikov y a la entrópica o demostrar que éstas dos *familias* son únicas.
3. Definir un *espacio de funciones* C , en caso de que existan únicamente las dos familias mencionadas en este texto o existan varias familias, y estudiar las implicaciones de la existencia y propiedades del mismo.
4. Demostrar la existencia de teoremas de irreversibilidad para d dimensiones arbitrarias.
5. En caso de existir teoremas de irreversibilidad para d dimensiones, generalizar la demostración de teoremas de irreversibilidad en dichas dimensiones.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Calabrese, P., y Cardy, J. “Entanglement entropy and quantum field theory”. *J. Statist. Mech.: Theor. Exp.* 04, P06002, 2004.
- [2] Calabrese, P., y Cardy, J. “Entanglement entropy and conformal field theory”. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42, 504005, 2009.
- [3] Callan, C. G., y Wilczek, F. “On geometric entropy”. *Phys. Lett. B*, 333, 55, 1994.
- [4] J. Cardy. (1996). *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. University of Oxford, Cambridge University Press, Great Britain,
- [5] Cardy, J. L., Castro-Alvaredo, O. A., and Doyon, B. (2007). “Form factors of branch-point twist fields in quantum integrable models and entanglement entropy”. *J. Stat. Phys.*, 130, 129.
- [6] H. Casini, “Geometric entropy, area, and strong subadditivity,” *Class. Quant. Grav.* 21, 2351, 2004 [[hep-th/0312238](#)].
- [7] H. Casini and M. Huerta, “A Finite entanglement entropy and the c-theorem,” *Phys. Lett. B* 600, 142, 2004. [[hep-th/0405111](#)].
- [8] H. Casini and M. Huerta, “A c-theorem for the entanglement entropy,” *J. Phys. A* 40, 7031, 2007. [[cond-mat/0610375](#)].
- [9] H. Casini and M. Huerta, “On the RG running of the entanglement entropy of a circle”, *Phys. Rev. D* 85 125016, 2012. [[hep-th/1202.5650](#)].
- [10] H. Casini, E. Teste, and G. Torroba, “The a-theorem and the Markov property of the CFT vacuum,” *Phys. Rev. Lett* 118 261602, 2017. [hep-th/1704.01870](#).
- [11] Nielsen, M. A., and I. L. Chuang (2010), *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*, 10th ed. (Cambridge University Press).

- [12] Einstein, A., Podolsky, P., and Rosen, N. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Phys. Rev.*, 47, 777. 1935.
- [13] E. Fradkin (2013) *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Second Edition, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [14] Di Francesco, P., P. Mathieu, and D. Sénéchal. (1997) *Conformal Field Theory*, 1st ed. Springer..
- [15] Holzhey, C., F. Larsen, and F. Wilczek. (1994). “Geometric and renormalized entropy in conformal field theory”, *Nuclear Physics B* 424 (3), 443.
- [16] Z. Komargodski and A. Schwimmer, “On Renormalization Group Flows in Four Dimensions”, *JHEP* 12 099, 2011, [[hep-th/1107.3987](#)].
- [17] S. Lang. (1999). *Complex Analysis*, Fourth Edition, Springer New York.
- [18] S. Lang. (2004). *Linear Algebra*, Third Edition, Springer New York,
- [19] Joshua D. Qualls, (2015), “Lectures on conformal field theory”, [[hep-th/1511.04074v2](#)]
- [20] J.J. Sakurai and J. Napolitano. (1994) *Modern Quantum Mechanics*. 2nd Edition, Addison-Wesley, San Francisco CA.
- [21] Schottenloher, M. (2008) [1997]. *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory* (2nd ed.). Berlin
- [22] D. Tong. (2009), *String Theory*. University of Cambridge, Part III, Mathematical Tripos, 2009.
- [23] A. B. Zamolodchikov, “Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory,” *JETP Lett.* 43, 730 1986 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 43, 565 1986].
- [24] A. Zee. (2010) *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Second Edition, Princeton University Press.