Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

FRACCIONES CONTINUAS

Fernando José Mazariegos Camas
Asesorado por Pedro Fernando Morales-Almazán, PhD

Guatemala, octubre 2018

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

FRACCIONES CONTINUAS

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

FERNANDO JOSÉ MAZARIEGOS CAMAS
ASESORADO POR PEDRO FERNANDO MORALES-ALMAZÁN, PHD

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, OCTUBRE 2018

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	MSc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO	MSc. Edgar Anibal Cifuentes Anleu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR	MSc. Alan Gerardo Reyes Figueroa
EXAMINADOR	Licda. Mariela Lizeth Benavides Lázaro
EXAMINADOR	Lic. Hugo Allan García Monterrosa

Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ref. D.DTG. 010-2018
Guatemala 31 de octubre de 2018

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Matemática Aplicada, al trabajo de graduación titulado: **FRACCIONES CONTINUAS** presentado por el estudiante universitario **Fernando José Mazariegos Camas**, autoriza la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

MSc. Jorge Marcelo Ixquiac Cabrera
Director

/Pec

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a mi padre, quien en vida siempre me apoyó en los objetivos que me trazaba, al igual que a mi madre, que lo sigue haciendo. A mis amigos, por motivarme a continuar y terminar este último paso en el proceso de mi primer título de educación superior. A todos mis catedráticos, quienes me han dejado muchos conocimientos, en su mayoría de matemáticas, y en particular al Lic. José Carlos Bonilla, ya que gracias a una invitación suya para el programa de Olimpíadas internacionales durante la clausura de la Nacional del 2008, conocí el hermoso mundo de la matemática, y sin duda, sin esa invitación, no sería la persona que soy hoy. Por último, pero no menos importante, al Dr. Pedro Morales, quien asesoró este trabajo, por su paciencia y su motivación.

DEDICATORIA

Para todas las personas que se atreven a soñar lo imposible.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS III

LISTA DE SÍMBOLOS V

OBJETIVOS VII

INTRODUCCIÓN IX

1. Conceptos preliminares 1

1.1. ¿Qué es una fracción continua? 1

1.2. Propiedades de fracciones continuas simples 4

1.3. Convergencia de fracciones continuas 8

1.4. Propiedades de fracciones continuas generalizadas 9

2. Representación de números por medio de fracciones continuas 15

2.1. Representación de racionales 15

2.2. Representación de inversos 16

2.3. Representación de números algebráicos 20

2.4. Fracciones continuas periódicas 20

2.5. Representación de conjugados 25

2.6. Suma y producto de números a partir de su representación por fracciones continuas simples 28

2.7. Aproximaciones con racionales 32

2.8. Representación de algunos números interesantes 34

2.8.1. Número de Euler 34

2.8.2. Cocientes de cuadrados consecutivos 39

3. Biyección entre conjuntos de sucesiones de naturales y números reales por medio de fracciones continuas simples 41

3.1. Sucesiones equivalentes 41

3.2. Sucesión de números primos 44
3.3. Sucesión de números naturales 45
3.4. Sucesión de Fibonacci 46

CONCLUSIONES **49**

RECOMENDACIONES **51**

BIBLIOGRAFÍA **53**

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Coeficientes, numeradores y denominadores parciales de ϕ. 7

2.1. Cálculo de coeficientes de la fracción continua de $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$. 25
2.2. Cálculo convergentes del conjugado de ϕ. 28
2.3. Comparación de fracciones continuas que varían en el último coeficiente 32
2.4. Coeficientes, numerados y denominadores parciales de $\frac{5067}{21038}$. 34
2.5. Coeficientes, numerados y denominadores parciales de π. 34

3.1. Términos de Fibonacci y productos de denominadores parciales consecutivos 47

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$:=$	es definido por
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\varnothing$	conjunto vacío
$\forall$	para todo
$\Longrightarrow$	entonces
$\wedge$	y
$[a_0; a_1, a_2, \dots]$	$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$
$\exists$	existe
$\mathbb{N}$	conjunto de numeros naturales
$\mathbb{Q}$	conjunto de numeros racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de numeros reales
$\mathbb{C}$	conjunto de numeros complejos

OBJETIVOS

General

Estudiar propiedades generales, y algunas específicas, de las fracciones continuas.

Específicos

1. Estudiar las propiedades para la expresión de números racionales e irracionales en forma de fracciones continuas.
2. Exponer la aplicación de fracciones continuas para la aproximación de números irracionales.
3. Definir una biyección entre números reales y conjuntos de sucesiones de números naturales y estudiar sus propiedades.

INTRODUCCIÓN

Los objetos más elementales con los que una persona empieza el estudio de las matemáticas podrían considerarse los números. Por esto, han sido objeto de estudio los conjuntos numéricos como los naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$ y los reales $\mathbb{R}$. Los racionales se definen como cocientes de enteros, como por ejemplo: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$, etc. Civilizaciones tan antiguas como la egipcia y la griega descubrieron los números irracionales, números que no se podían expresar como el cociente de dos enteros, principalmente derivados de la geometría.

Además, una de las primeras definiciones que se nos dan en la primaria de un número irracional es un número cuya representación decimal es infinita, pero no es periódica, es decir, no es posible encontrar un patrón que se repita infinitas veces. Al tratar de aproximar un número irracional, por ejemplo π, de forma racional, podremos hacerlo poco a poco: $\frac{31}{10}, \frac{157}{50}, \frac{3141}{1000}$, etc., basándose en la representación decimal.

Lo primero que puede notarse es que los denominadores crecen exponencialmente: con un denominador de 1000, se tienen 3 decimales de exactitud. Esa es una gran ventaja de la representación por fracciones continuas. Por ejemplo la fracción $\frac{355}{113}$, con un denominador tan pequeño como 113, con la que se puede obtener una aproximación decimal de 5 decimales de exactitud.

A lo largo de la historia, además, se han utilizado fracciones continuas para realizar varias aproximaciones prácticas, como en el planetario de Huygens, e inclusive en la creación del calendario Gregoriano. En este trabajo de investigación se buscará estudiar las propiedades básicas de las fracciones continuas, así como explicar algunas de sus aplicaciones.

Por otro lado, uno de los misterios más grandes que ha intrigado a los matemáticos por siglos es el estudio de los números primos. Desde el principio se trató de encontrar una fórmula que produjera a todos los números primos, o por lo menos un patrón. Y de hecho, uno de los problemas del milenio, declarados por el Clay Mathematics Institute en el año 2000, es la Hipótesis de Riemann, la cual conjetura

que todos los ceros no triviales de la función Zeta de Riemann tiene parte real $\frac{1}{2}$. Tal resultado tendría muchísimas ramificaciones e implicaciones en temas importantes y conocidos de la matemática, específicamente para saber qué comportamiento tienen los números primos.

Bajo esa premisa, una idea planteada en este proyecto fue utilizar las fracciones continuas como una herramienta para el estudio de los números primos. Se define una biyección entre un subconjunto de todas las sucesiones de naturales hacia los números reales, por medio de su representación como fracciones continuas. Al definir tal sucesión, es interesante investigar cuál será la imagen de la sucesión $2, 3, 5, 7, \ldots, p_n, \ldots$, donde p_n es el n-ésimo primo. Esta imagen sería un número real que sintetizaría la información de todos los números primos. Luego, se calcula la imagen de algunas otras sucesiones importantes.

1. Conceptos preliminares

1.1. ¿Qué es una fracción continua?

Definición 1.1. Un campo de fracciones $Q(R)$ es el mínimo campo de un anillo conmutativo R que contiene a R. Una *fracción continua finita* es una representación

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{e_1}{a_1 + \cfrac{e_2}{a_2 + \cfrac{e_3}{\ddots \cfrac{e_n}{a_n}}}}$$

para un elemento p/q de un campo de fracciones $Q(R)$ de un anillo conmutativo R. Los a_i, e_i son elementos del anillo R. En este caso, el entero no negativo n se llamará *longitud* de la fracción continua.

Supóngase que el campo $Q(R)$ está dotado de una métrica y que $\bar{Q}$ es la completación de $Q(R)$ con respecto a esa métrica. Entonces se dice que

$$a_0 + \cfrac{e_1}{a_1 + \cfrac{e_2}{a_2 + \cfrac{e_3}{\ddots}}}$$

es una *fracción continua infinita* si para todo $n \geq 0$ la parte finita

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{e_1}{a_1 + \cfrac{e_2}{a_2 + \cfrac{e_3}{\ddots \cfrac{e_n}{a_n}}}}$$

es una representación de $\frac{p_n}{q_n}$ como fracción continua finita y además se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$$

existe como un elemento de $\bar{Q}$. Si ese límite es x, se dice que la fracción continua infinita representa a x. Esta fracción continua se representará usualmente como $[a_0; e_1/a_1, e_2/a_2 \dots]$, ó $a_0 + \dfrac{e_1}{a_1} + \dfrac{e_2}{a_2} + \cdots$. Y en el caso que todos los e_i sean 1, como $[a_0; a_1, a_2, \dots]$.

El tipo más común de fracciones continuas es en números reales: el caso en el que $R = \mathbb{Z}$ y $Q(R) = \mathbb{Q}$, con la métrica Euclideana usual, que genera el campo de números reales $\mathbb{R}$ como completación. A partir de ahora, nos referiremos a fracciones continuas en este conjunto.

Definición 1.2. Una *fracción continua generalizada* $[a_0; e_1/a_1, e_2/a_2 \dots]$ es un cociente

$$a_0 + \frac{e_1}{a_1} + \frac{e_2}{a_2} + \cdots$$

con a_i, e_i enteros positivos para todo $i \geq 1$.

Definición 1.3. Una *fracción continua simple finita* $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ es un cociente

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_n}}}}$$

con a_i enteros no negativos para todo $i \geq 1$ y $a_n \geq 2$. Los enteros a_i son llamados *coeficientes*.

Ejemplo 1.1. La fracción continua $[1; 2, 3, 4]$ representa la expresión

$$[1; 2, 3, 4] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{4}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{13}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{30}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}$$

Note que si la representación de fracciones continuas simples es finita, entonces x será un número racional, puesto que los racionales son cerrados con la suma. Recíprocamente, si $x \in \mathbb{Q}$, entonces su representación por fracciones continuas será finita; esto será demostrado en el siguiente capítulo, en la Sección 1.2.

Se definirá ahora cómo se trabajarán las fracciones continuas que representan números irracionales.

Definición 1.4. Una *fracción continua infinita simple* $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ es un cociente de la forma

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}.$$

Para hallar tal representación para algún $x \in \mathbb{R}$ se define recursivamente $\alpha_0 = x$ y $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$, si $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir de estos α, se definen los coeficientes de la fracción continua como $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$.

Nota 1.1. Si en algún punto $\alpha_n = a_n$, entonces la fracción continua será finita, y representará a un número racional, que concuerda con las definiciones anteriores.

Definición 1.5. Sea $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Sean $p_n \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{Z}^*$ con $m.c.d.(p_n, q_n) = 1$ tales que $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n], n \geq 0$. Esta fracción $\dfrac{p_n}{q_n}$ es llamada el n-ésimo *convergente* de la fracción continua de x.

Ahora, se procederá a observar un ejemplo de cómo una sucesión definida como en la definición 1.3, genera un número irracional. Cabe mencionar, que más adelante se discutirá, en general, la convergencia de las fracciones continuas simples infintas.

Ejemplo 1.2. Se tratará de encontrar el valor $x \in \mathbb{R}$ que representa la fracción continua dada por

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Note que es posible reescribir la expresión de la forma

$$x = 1 + \frac{1}{x} \iff x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática, se obtiene $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Claramente, x debe tener un valor positivo, por lo que de hecho, se ha obtenido la representación por fracciones continuas de la proporción aurea:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Ejemplo 1.3. Es posible generalizar el ejemplo anterior para encontrar el valor $x \in \mathbb{R}$ que representa la fracción continua dada por

$$b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Al aplicar el procedimiento anterior, se obtiene la ecuación cuadrática

$$x^2 - bx - 1 = 0.$$

Tomando las consideraciones anterioes, se concluye que $x = \frac{b + \sqrt{b^2+4}}{2}$.

Cabe mencionar también, que puede generalizarse aún más el concepto de fracción continua, utilizando siempre números conocidos:

1.2. Propiedades de fracciones continuas simples

Ahora, con estas definiciones básicas, se probarán algunos resultados importantes. Se trabajará en el campo de los números reales, para obtener resultados más generales.

Proposición 1.1. *Dada una sucesión $t_0, t_1, t_2, \cdots \in \mathbb{R}$ tal que $t_k > 0$, para todo $k \geq 1$, se definen las sucesiones (x_m) y (y_m) de la siguiente forma: $x_0 = t_0, y_0 = 1, x_1 = t_0 t_1 + 1, y_1 = t_1, x_{m+2} = t_{m+2} x_{m+1} + x_m, y_{m+2} = t_{m+2} y_{m+1} + y_m$ para todo $m \geq 0$. Entonces se tiene que:*

$$[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n] = t_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{t_3 + \ddots + \cfrac{1}{t_n}}}} = \frac{x_n}{y_n} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Además de eso, $x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n$, *para todo* $n \geq 0$.

Demostración. La prueba será por inducción en n. Para $n = 0$ se tiene que

$$[t_0] = t_0 = \frac{t_0}{1} = \frac{x_0}{y_0}.$$

Suponga que la afirmación es válida para n. Para $n+1$ en lugar de n, se tiene:

$$\begin{aligned}
[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}] &= \left[t_0; t_1, t_2, \ldots, t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right] \\
&= \frac{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right) x_{n-1} + x_{n-2}}{\left(t_n + \frac{1}{t_{n+1}}\right) y_{n-1} + y_{n-2}} \\
&= \frac{t_{n+1}(t_n x_{n-1} + x_{n-2}) + x_{n-1}}{t_{n+1}(t_n y_{n-1} + y_{n-2}) + y_{n-1}} \\
&= \frac{t_{n+1}x_n + x_{n-1}}{t_{n+1}y_n + y_{n-1}} = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Ahora se demostrará la segunda afirmación, de nuevo por inducción. Se tiene que $x_1y_0 - x_0y_1 = (t_0t_1 + 1) - t_0t_1 = 1 = (-1)^0$. Y si la afirmación es válida para algún n, entonces

$$\begin{aligned}
x_{n+2}y_{n+1} - x_{n+1}y_{n+2} &= (t_{n+2}x_{n+1} + x_n)y_{n+1} - (t_{n+2}y_{n+1} + y_n)x_{n+1} \\
&= -(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}) \\
&= -(-1)^n = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.1. *Sea* $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ *un número real y sea* $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *la sucesión de convergentes de la fracción continua de x. Las sucesiones* (p_n) *y* (q_n) *satisfacen las recurrencias*
$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n$ *y* $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$ *para todo* $n \geq 0$,
con $p_0 = a_0, p_1 = a_0a_1 + 1, q_0 = 1$ *y* $q_1 = a_1$.
Además de eso, $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, *para todo* $n \geq 0$.

Además de eso, $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$

Nota 1.2. Note que ahora, al hablar específicamente de la expansión por fracciones continuas del número x, los $a_n, n \in \mathbb{N}$ son naturales.

Demostración. Las sucesiones (p_n) y (q_n) cumplen, por la proposición 1.1, que

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n], p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \forall n \geq 0$$

Como se cumple que $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, los p_n y q_n dados deben ser primos relativos. Además de eso, se sigue de la recurrencia que $q_n > 0, \forall n \geq 0$. Eso implica que $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de convergentes de x.
Ahora, note que si se divide entre $q_n q_{n+1}$ de ambos lados de $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, se tiene

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}.$$ □

Corolario 1.2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

y

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}$$

donde los α_n *son los de la definición 1.3.*

Demostración. La primera igualdad sigue de la proposición 1.1, pues

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n].$$

La segunda igualdad es consecuencia directa de la primera. □

Ahora se mostrará un ejemplo que exponga el primer colorario demostrado, que además prueba una propiedad interesante de los convergentes de la fracción continua de la proporción aurea:

Ejemplo 1.4. Se presentan a continuación los primeros coeficientes, numeradores y denominadores parciales de la proporción aurea

Se conjetura entonces que los convergentes de la proporción aurea son, de hecho, cocientes de números de la sucesión de Fibonacci consecutivos. Aplicando el corolario

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
q_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tabla 1.1. Coeficientes, numeradores y denominadores parciales de ϕ.

1.1, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&p_0 = 1 = F_1,\\
&p_1 = a_1 p_1 + 1 = 1 + 1 = 2 = F_2,\\
&p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n = 1 \cdot F_{n+1} + F_n = F_{n+2}\\
&q_0 = 1 = F_0,\\
&q_1 = a_1 = 1 = F_1,\\
&q_{n+2} = a_{n+2}qn + 1 + q_n = 1 \cdot F_n + F_{n-1} = F_{n+1},
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

Proposición 1.2. *Se cumple que* $x - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$,
donde $\beta_{n+1} = \dfrac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1]$.
En particular, $\dfrac{1}{(\alpha_{n+1}+2)q_n^2} < \left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| = \dfrac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2} < \dfrac{1}{a_{n+1}q_n^2}$.

Demostración. Por el corolario 1.2, se cumple:

$$\begin{aligned}
x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}\\
&= \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}\\
&= \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + q_{n-1}/q_n)q_n^2} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2}
\end{aligned}$$

En particular, $\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| = \dfrac{1}{(\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})q_n^2}$, y como $\lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1}$ y $0 < \beta_{n+1} < 1$ se sigue que $a_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2$, lo que implica la última afirmación. La expansión de β_{n+1} como fracción continua sigue de: $\dfrac{q_{n-1}}{q_n} = \dfrac{q_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \implies \dfrac{q_{n-1}}{q_n} = \dfrac{1}{a_n + \dfrac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}$, que se aplica recursivamente. □

Proposición 1.3. *Para todo $k \geq 0$, se cumple que*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

Demostración. Primero, note que

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})}{q_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_{n+2}q_n}$$

es una expresión positiva mientras n sea par, pero negativa cuando n sea impar. Además, note que, para todo $n \geq 0$, se tiene que $x - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}$ es positivo para un n par y negativo para un n impar. □

1.3. Convergencia de fracciones continuas

Ahora se discutirán las condiciones necesarias para que una fracción continua converja. Primero se considerarán las fracciones continuas simples.

Proposición 1.4. *Sea $c_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ el n-ésimo convergente de la fracción continua de algún x. Entonces se cumple que $c_n - c_{n-1} = \dfrac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$. Es decir, el valor absoluto de la diferencia entre dos convergentes consecutivos c_n y c_{n-1}, debe ser $\dfrac{1}{q_{n-1}q_n}$.*

Demostración. Se tiene por el corolario 1.1 que $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^n$. Al dividir entre $q_{n-1}q_n$ en ambos lados de la expresión, se obtiene:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n} \implies c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}.$$ □

Ahora se necesita saber algunos conceptos del análisis de variable real, tomados de [1].

Definición 1.6. Una sucesión $X = (x_n)$ en $\mathbb{R}$ se llama *sucesión de Cauchy* si para cualquier real $\epsilon > 0$ existe algún natural $M(\epsilon)$ tal que si $m, n > M(\epsilon)$, entonces $|x_m - x_n| < \epsilon$.

Teorema 1.3.1 (Criterio de Convergencia de Cauchy)**.** *Una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ es convergente $\iff$ (x_n) es una sucesión de Cauchy.*

Basta entonces demostrar que la sucesión de convergentes de una fracción continua simple siempre será una sucesión de Cauchy para demostrar la convergencia.

Proposición 1.5. *La sucesión de convergentes c_n de una fracción continua simple es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Por la proposición 2.1 se tiene que $|c_n - c_{n-1}| = \dfrac{1}{q_{n-1}q_n}$. Cabe también recordar que la sucesión de denominadores parciales q_n está definida por la recurrencia $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, según el corolario 1.1, por lo que es una sucesión monótona creciente. Se quiere probar que para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}, 0 < \epsilon$, existe $M(\epsilon)$ tal que para cualesquiera $m, n > M(\epsilon), |c_m - c_n| < \epsilon$.
Sin pérdida de la generalidad, suponga que $m > n$. Sea $\epsilon > 0$ un número real cualquiera y $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Considere

$$\begin{aligned}
|c_m - c_n| &= |c_{n+k} - c_n| \\
&< |c_{n+k} - c_{n+k-1}| + |c_{n+k-1} - c_{n+k-2}| + \cdots + |c_{n+1} - c_n| \\
&< \frac{1}{q_{n+k}q_{n+k-1}} + \frac{1}{q_{n+k-1}q_{n+k-2}} + \cdots + \frac{1}{q_{n+1}q_n} \\
&< \frac{k}{q_{n+1}q_n} \\
&< \frac{k}{q_n^2}
\end{aligned}$$

Note que en el corolario 1.1 se dieron las recurrencias para p_n y q_n. Específicamente, $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$ para todo $n \geq 0$,
con $q_0 = 1$ y $q_1 = a_1$. Note que los $a_n \geq 1, n \geq 1$, así que $q_2 \geq 2$ y entonces $q_n > n$ para todo $n > 1$. Por la propiedad arquimediana en los números reales, debe existir algún N tal que $N > \sqrt{\dfrac{k}{\epsilon}}$. Entonces es posible, para cualquier $0 < \epsilon$, tomar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_N > N > \sqrt{\dfrac{k}{\epsilon}}$. Se tiene entonces

$$q_N > \sqrt{\frac{k}{\epsilon}} \implies |c_{N+k} - c_N| < \frac{k}{q_N^2} < \epsilon$$

que es lo que se quería probar. □

1.4. Propiedades de fracciones continuas generalizadas

Ahora, se probará que es posible generalizar algunos resultados obtenidos en el estudio de las fracciones continuas simples. Considerense a_k, b_k enteros.

Teorema 1.4.1 (Teorema de Euler-Wallis). *Sea* $\alpha = b_0 + \dfrac{a_1}{b_1} + \cdots + \dfrac{a_n}{b_n} + \dfrac{a_{n+1}}{\alpha_{n+1}}$ *una fracción continua generalizada con convergentes* $\{P_n/Q_n\}_{n\geq 1}$. *Sea* $P_{-1} = 1, P_0 = b_0$, $Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$.
Entonces $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *y* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *satisfacen las fórmulas de Euler-Wallis:*

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \tag{1.1}$$

$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \tag{1.2}$$

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} a_1 \dots a_n, \tag{1.3}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}}{\alpha_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}}. \tag{1.4}$$

Note que estos resultados coinciden en el caso particular que todos los numeradores parciales son 1, con los resultados anteriores de fracciones continuas simples.

Demostración. Se procederá por inducción para demostrar la primera parte.
Caso base: Se sabe que $\frac{P_0}{Q_0} = b_0$ y $b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} = \frac{P_1}{Q_1}$, entonces $P_1 = b_1 b_0 + a_1 = b_1 P_0 + a_1 P_{-1}$ y $Q_1 = b_1 = b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}$.

Hipótesis de inducción: Se asume que se cumplen las ecuaciones $P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}$ y $Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}$ para algún n. Se quiere entonces demostrar que se cumple también para n+1. Como $b_{n+1} \neq 0$, se sabe que

$$\frac{a_n}{b_n + \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}} = \frac{a_n b_{n+1}}{b_n b_{n+1} + a_{n+1}}.$$

Si se toma la notación auxiliar de $a'_n = a_n b_{n+1}, b'_n = b_n b_{n+1} + a_{n+1}$, entonces se puede considerar la fracción continua $[b_0; a_1/b_1, \dots, a'_n/b'_n]$. Por la definición de P_{n+1} y la hipótesis de inducción, se tiene:

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P'_n &= b' P_{n-1} + a'_n P_{n-2} \\ &= (b_n b_{n+1} + a_{n+1}) P_{n-1} + a_n b_{n+1} P_{n-2} \\ &= b_{n+1}(b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) + a_{n+1} P_{n-1} \\ &= b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1} \end{aligned}$$

Esto demuestra la ecuación 1.1. Análogamente, se demuestra que se cumple la ecuación 1.2.

De nuevo, la ecuación 1.3 se demostrará por inducción.
Caso base: $P_1Q_0 - P_0Q_1 = (b_0b_1 + a_1) \cdot 1 - b_0b_1 = a_1$.
Hipótesis de inducción: Se asume que $P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}a_1 \cdots a_n$ para algún n. Se quiere entonces demostrar que se cumple también para n+1. Note que al usar las ecuaciónes 1.1 y 1.2, que ya se han demostrado, y la hipótesis de inducción, se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} &= (b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1})Q_n - P_n(b_{n+1}Q_n + a_{n+1}Q_{n-1}) \\ &= b_{n+1}P_nQ_n + a_{n+1}P_{n-1}Q_n - b_{n+1}P_nQ_n - a_{n+1}P_nQ_{n-1} \\ &= a_{n+1}(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n)(-1) \\ &= (-1)^n \cdot a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1}. \end{aligned}$$

Esto demuestra la ecuación 1.3. Para demostrar la última ecuación, note que si $a'_{n+1} = a_{n+1}, b'_{n+1} = \alpha_{n+1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} P'_{n+1} &= (\alpha_{n+1})P_n + a_{n+1}P_{n-1}, \\ Q'_{n+1} &= (\alpha_{n+1})Q_n + a_{n+1}Q_{n-1}, \end{aligned}$$

por lo que $\alpha = \dfrac{P'_{n+1}}{Q'_{n+1}}$. □

Otra propiedad importante que se cumple es el

Teorema 1.4.2. *Los numeradores P_n y Q_n del teorema anterior, cumplen:*

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{P_{n+1}} &= b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}} + \cdots + \frac{a_1}{b_0}, \\ \frac{Q_n}{Q_{n+1}} &= b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{b_1}. \end{aligned}$$

Demostración. Se procederá por inducción.

Caso base:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{b_0b_1 + a_1}{b_0} = b_1 + \frac{a_1}{b_0}.$$

Hipótesis de inducción: Se cumple

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}} + \cdots + \frac{a_1}{b_0}$$

para algún n. Se quiere entonces demostrar que se cumple también para $n+1$. Note

que

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1}}{P_n} = b_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{P_n/P_{n-1}} \\ &= b_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{b_n} + \frac{a_n}{b_{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{b_0}\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba por inducción. Análogamente,

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}} = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{b_1}. \qquad \square$$

También importante es el siguiente teorema, que generaliza otro resultado notable de las fracciones continuas simples, que ayudará a hallar buenas aproximaciones.

Teorema 1.4.3. *Sea $\alpha = [b_0; a_1/b_1, \dots]$ una fracción continua generalizada. Entonces*

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}a_1 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

$$\frac{P_0}{Q_0} < \cdots < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \cdots < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} < \cdots < \frac{P_1}{Q_1}$$

Demostración. Al dividir la ecuación 1.3 entre Q_nQ_{n-1} de ambos lados, se obtiene precisamente: $P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^n a_1 \cdots a_n \to \dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}a_1 \cdots a_n}{Q_nQ_{n-1}}$
Por otro lado, al sumar la expresión anterior para subíndices consecutivos, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} &= \frac{(-1)^{n-1}a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}{Q_nQ_{n-1}} - \frac{(-1)^{n-2}a_1 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}}{Q_{n-1}Q_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^n a_1 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}}{Q_{n-1}} \left(\frac{1}{Q_{n-2}} - \frac{a_n}{Q_n}\right) \\ &= \frac{(-1)^n a_1 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}}{Q_{n-1}} \frac{Q_n - a_nQ_2}{Q_nQ_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^n a_1 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}}{Q_{n-1}} \frac{b_nQ_{n-1}}{Q_nQ_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^n a_1 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}b_n}{Q_nQ_{n-2}}\end{aligned}$$

De esto, se tiene que para los convergentes pares, la diferencia es positiva, por lo que los convergentes van aumentando, mientras que para los impares, la diferencia es negativa, por lo que los convergentes disminuyen. Además, al aplicar la primera

proposición del teorema con $n = 2k + 1$, se obtiene:

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{a_1 \cdots a_{2k+1}}{Q_{2k+1}Q_{2k}}.$$

Esto implica que los coeficientes impares siempre serán mayores que los coeficientes pares. □

2. Representación de números por medio de fracciones continuas

2.1. Representación de racionales

Se declaró en el capítulo anterior que la representación por fracciones continuas de $x \in \mathbb{Q}$ deberá ser una fracción continua simple finita. Sus coeficientes a_n vienen dados por el algoritmo de Euclides, de la siguiente forma: si $x = \frac{p}{q}, q > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} p &= a_0 q + r_1, \quad 0 \leq r_1 < q \\ q &= a_1 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= a_2 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= a_n r_n. \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$x = p/q = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = \dots$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Ejemplo 2.1. Para llegar a la notación por fracciones continuas de $\frac{502}{17}$ se procederá

primeramente por el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 502 &= 17(29) + 9, \\ 17 &= 9(1) + 8, \\ 9 &= 8(1) + 1, \\ 8 &= 8(1). \end{aligned}$$

Por tanto, se puede reescribir la fracción $\frac{502}{17}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{502}{17} &= \frac{17(29)+9}{17} = 29 + \frac{9}{17} \\ &= 29 + \frac{1}{\frac{17}{9}} = 29 + \frac{1}{\frac{9(1)+8}{9}} = 29 + \frac{1}{1+\frac{8}{9}} \\ &= 29 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{9}{8}}} = 29 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{8(1)+1}{8}}} = 29 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{8}}} \\ &= [29; 1, 1, 8]. \end{aligned}$$

2.2. Representación de inversos

La siguiente pregunta que se plantea es si existirá alguna relación entre la representación de un número como fracción continua, y la representación de sus inversos aditivos y multiplicativos. Estas se expondrán a continuación. Primero se analizará el inverso aditivo y se probará el siguiente

Teorema 2.2.1. *Representación de inversos aditivos*
Sea $x = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$ *y sea* $-x = [b_0; b_1, b_2, \dots]$. *Entonces* $b_0 = -a_0 - 1$ *y si* $\alpha_1 < 2$ *entonces* $b_1 = 1 + a_2$ *y* $b_n = a_{n+1}, n \geq 2$. *Pero si* $\alpha_1 > 2$, *entonces* $b_1 = 1, b_2 = a_1 - 1$ *y* $b_n = a_{n-1}, n \geq 3$.

Demostración. Sea $x = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$, se busca entonces una representación en fracción continua para $-x = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ en términos de los a_n. Anteriormente se definió recursivamente el proceso para hallar los coeficientes a_n de la representación por fracción continua de x:

$$\alpha_0 = x, \qquad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \qquad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}.$$

De esto, se tiene que $b_0 = \lfloor \beta_0 \rfloor = \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1 = -a_0 - 1$. Para calcular b_1 se obtiene primero β_1:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{\beta_0 - b_0} = \frac{1}{-\alpha_0 - (-a_0 - 1)} = \frac{1}{1 - (\alpha_0 - a_0})\\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_1}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} = 1 + \frac{1}{\alpha_1 - 1}\end{aligned}$$

Por propiedades de la función piso, se cumple que $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, por lo que $\alpha_n > 1$ para todo $n > 1, n \in \mathbb{N}$, y entonces $\alpha_1 - 1 > 0$ y entonces $\dfrac{1}{\alpha_1 - 1} > 0$. De ahí que $b_1 = \lfloor \beta_1 \rfloor = \left\lfloor 1 + \dfrac{1}{\alpha_1 - 1} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \dfrac{1}{\alpha_1 - 1} \right\rfloor$. Ahora, se separará en dos casos posibles distintos:

Caso 1: $\alpha_1 < 2$. Esto implica que $\alpha_1 - 1 < 1 \implies \dfrac{1}{\alpha_1 - 1} > 1$. Note, además, que $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1 \implies \alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - a_1} = \dfrac{1}{\alpha_1 - 1}$. Esto implica entonces que

$$\begin{aligned}&b_1 = 1 + \left\lfloor \frac{1}{\alpha_1 - 1} \right\rfloor = 1 + \lfloor \alpha_2 \rfloor = 1 + a_2 \implies\\ &\beta_2 = \frac{1}{\beta_1 - b_1} = \frac{1}{(\alpha_2 + 1) - (a_2 + 1)} = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \alpha_3 \implies\\ &\beta_n = \alpha_{n+1}, n \geq 2 \implies\\ &b_n = a_{n+1}, n \geq 2\end{aligned}$$

Caso 2: $\alpha_1 > 2$. Esto implica que $\alpha_1 - 1 > 1 \implies \dfrac{1}{\alpha_1 - 1} < 1$. Esto implica entonces que

$$\begin{aligned}&b_1 = 1 + \lfloor \frac{1}{\alpha_1 - 1} \rfloor = 1 \implies\\ &\beta_2 = \frac{1}{\beta_1 - b_1} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{\alpha_1 - 1}) - 1} = \alpha_1 - 1 \implies\\ &b_2 = \lfloor \beta_2 \rfloor = \lfloor \alpha_1 - 1 \rfloor = \lfloor \alpha_1 \rfloor - 1 = a_1 - 1 \implies\\ &\beta_3 = \frac{1}{\beta_2 - b_2} = \frac{1}{(\alpha_1 - 1) - (a_1 - 1)} = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \alpha_2 \implies\\ &\beta_n = \alpha_{n-1}, n \geq 3 \implies\\ &b_n = a_{n-1}, n \geq 3.\end{aligned}$$

□

Se obtiene entonces un procedimiento para siempre obtener la fracción continua de un número, en términos de los coeficientes de la fracción continua del inverso aditivo. Para considerar cuál de los dos algoritmos utilizar, simplemente se debe observar el valor de a_1. Si $a_1 = 1$, se realizará el primer procedimiento; en caso contrario, el segundo.

Ejemplo 2.2. Considere $x = [5; 8, 2, 7, 3] = \dfrac{1995}{398}$. Se quiere encontrar ahora la fracción continua de $-x = -\dfrac{2037}{398}$. Según el resultado anterior, debería cumplirse

$$\begin{aligned} b_0 &= -a_0 - 1 = -5 - 1 = -6 \\ b_1 &= 1 \\ b_2 &= a_1 - 1 = 8 - 1 = 7 \\ b_3 &= a_2 = 2 \\ b_4 &= a_3 = 7 \\ b_5 &= a_4 = 3. \end{aligned}$$

Esto entonces implica que $-x = [-6; 1, 7, 2, 7, 3]$. Al comprobrar, se obtiene que

$$-x = [-6; 1, 7, 2, 7, 3] = -6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{3}}}}} = -6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \frac{3}{22}}}}$$

$$= -6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \frac{22}{47}}} = -6 + \cfrac{1}{1 + \frac{47}{351}} = -6 + \frac{351}{398} = -\frac{2037}{98}.$$

Ahora bien, la relación con el inverso multiplicativo se describe en el siguiente

Teorema 2.2.2. *Representación de inversos multiplicativos*
Sea $x = [a_0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$ *y* $\dfrac{1}{x} = [b_0; b_1, b_2, \dots]$. *Entonces, si* $x < 1$, *se tiene que* $b_n = a_{n+1}, n \geq 0$. *Por otro lado, si* $x > 1$ *entonces* $b_0 = 0$ *y* $b_n = a_{n-1}, n \geq 1$.

Demostración. Se trabajará solamente el caso cuando $x > 0$. Si x fuera negativo,

puede aplicarse primero el teorema para el inverso adivito. Ahora se procederá a separarse en los dos casos que menciona el teorema:

Caso 1. Si $x < 1$, claramente $\lfloor x \rfloor = 0$, por lo que $a_0 = 0$. Supóngase, entonces, que la representación estará dada por $x = [0; a_1, a_2, a_3, \cdots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$.

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} x^{-1} = \frac{1}{x} &= \cfrac{1}{\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}} \\ &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}} \\ &= [a_1; a_2, a_3, \dots]. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $x > 1$, sea $x = [a_1; a_2, a_3, \cdots] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}$.

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} x^{-1} = \frac{1}{x} &= \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} \\ &= [0; a_1, a_2, a_3, \dots]. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.3. Considere el ejemplo 2.1, se concluyó que $\frac{502}{17} = [29; 1, 1, 8]$. A partir del resultado anterior, se puede declarar que $\frac{17}{502} = [0; 29, 1, 1, 8]$. Al comprobar, se obtiene:

$$[0;29,1,1,8] = \frac{1}{29+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{8}}}} = \frac{1}{29+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{9}{8}}}}$$
$$= \frac{1}{29+\dfrac{1}{1+\dfrac{8}{9}}} = \frac{1}{29+\dfrac{1}{\dfrac{17}{9}}}$$
$$= \frac{1}{29+\dfrac{9}{17}} = \frac{1}{\dfrac{502}{17}} = \frac{17}{502}.$$

2.3. Representación de números algebráicos

Se ha estudiado por muchos años la posible forma que podrían tener los números algebráicos como una fracción continua, y aunque se han logrado estudiar algunos casos particulares, aún no hay un resultado general sobre este tema. Sin embargo, el resultado más sobresaliente debe ser cuando se cosidera un subconjunto particular de los números algebráicos: los irracionales cuadráticos.

2.4. Fracciones continuas periódicas

Definición 2.1. Sea $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \ldots]$ una fracción continua infinita simple. Si existen $m \in \mathbb{Z}^*$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que para cualquier $n \geq k$ se cumple que $a_n = a_{n+m}$, se dice que la representación como fracción continua de x es una *fracción continua periódica* de período m. En la expresión inicial se tendría: $a_k = a_{k+m}, a_{k+1} = a_{k+m+1}, a_{k+2} = a_{k+m+2}$, etc. Se denotará como $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m-1}}]$, que implica que el bloque de $a_k, \ldots, a_{k+m-1}$ se repetirá infinitamente.

Se procederá entonces a demostrar la siguiente

Proposición 2.1. *x es la solución de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros (i.e. x es un irracional cuadrático) $\iff$ x tiene una representación como fracción continua periódica.*

Demostración. La representación por fracciones continuas de algún $x \in \mathbb{R}$ se definió por

$$\alpha_0 = x, \qquad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \qquad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}.$$

Además, en la proposición 1.3 se llegó a que

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suponga ahora que x tiene una representación como fracción continua periódica, entonces por definición debe cumplirse que para algunos $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^*$ se tiene $\alpha_{n+k} = \alpha_n$. Al aplicar la proposición 1.3, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}} \iff \\
&(p_{n-2} - q_{n-2}x)(q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}) = (q_{n-1}x - p_{n-1})(p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x) \iff \\
&0 = (q_{n-1}x - p_{n-1})(p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x) - (p_{n-2} - q_{n-2}x)(q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}) \iff \\
&0 = (q_{n-q}q_{n+k-2} - q_{n-2}qn + k - 1)x^2 + (p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - \dots \\
&\cdots - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2})x + (p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1}).
\end{aligned}$$

Si se definen

$$\begin{aligned}
A &= q_{n-q}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1}, \\
B &= p_{n+k-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n+k-1} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2}, \\
C &= p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1},
\end{aligned}$$

se obtiene la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$. Note que $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ y $\frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ son fracciones irreducibles, por el corolario 1.1. Además, por las ecuaciones de recurrencia obtenidas en el mismo corolario 1.1, se sabe que $q_{n+k-2} > q_{n-2}$. Por lo anterior, se tiene que $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$, y de ahí que $0 \neq q_{n-q}q_{n+k-2} - q_{n-2}qn + k - 1 = A$. Esto es importante, pues demuestra que la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ es, de hecho, cuadrática. De forma inversa, suponga que x es una irracionalidad cuadrática, es decir un irracional de la forma $r \pm \sqrt{s}, r, s \in \mathbb{Q}, s > 0$. Ahora se probará que la fracción continua de x debe ser periódica, es decir, existen $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^*$ tales que $\alpha_{n+k} = \alpha_n$. Si x es una irracionalidad cuadrática, entonces existen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $ax^2 + bx + c = 0$, con $b^2 - 4ac > 0$ y $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ es un irracional. Como

$x = \dfrac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$ por la proposición 1.3, se obtiene:

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies a(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}})^2 + b(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}) + c = 0 \implies$$

$$a(p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2})^2 + b(p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2})(q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}) + c(q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2})^2 = 0 \iff$$

$$0 = (ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2)x^2 + [2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}]x + (ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2).$$

Si se define

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2, \end{aligned}$$

es posible reescribir la última ecuación como $A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha + C_n = 0$. Note, además, que $C_n = A_{n-1}$. Se va a demostrar que existe $M > 0$ tal que $0 < |A_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $0 < |C_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Note que

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = aq_{n-1}^2(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})(\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}),$$

donde x y $\bar{x}$ son las raíces de $aX^2 + bX + c = 0$. Además, por la proposición 1.2, se cumple $|x - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}| < \dfrac{1}{q_{n-1}^2}$. Esto, a su vez, implica que

$$\begin{aligned} |A_n| &= aq_{n-1}^2 \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \left|\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \leq a \left|\bar{x} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \\ &\leq a\left(|\bar{x} - x| + \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right) \leq a(|\bar{x} - x| + 1). \end{aligned}$$

Note que esta última expresión depende solamente de a, x y $\bar{x}$, que a su vez, dependen de a, b y c, por lo que esa es una cota mayor de la expresión. Si $M := a(|\bar{x} - x| + 1)$, se concluye lo que originalmente se buscaba:
$0 < |A_n| \leq M$ y $0 < |C_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Basta ahora probar que B_n también debe estar acotado.

Note que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$\begin{aligned} B_n^2 - 4A_nC_n &= (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac \\ &\implies B_n^2 = 4A_nC_n + b^2 - 4ac \leq 4M^2 + b^2 - 4ac \\ &\implies B_n \leq \sqrt{4M^2 + b^2 - 4ac}. \end{aligned}$$

Al igual que con A_n y C_n, la expresión $4M^2 + b^2 - 4ac$ depende sólamente de a, b y c, por lo que B_n también deberá estar acotado por esta. Aún más, se demostró que A_n, B_n y C_n están uniformemente acotadas, por lo que existe sólo una cantidad finita de valores que puedan tomar; esto implica que sólo existe una cantidad finita de ecuaciones $A_nX^2 + B_nX + C_n = 0$, y por ende, sólo una cantidad finita de valores que puede tomar α_n.

Esto implica que deben existir $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^*$ tales que $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, y como los α_i se generan recursivamente, se tiene que $\alpha_{n+k+1} = \alpha_{n+1}$, etc. Esto implica entonces que la fracción continua de x es periódica, y concluye la demostración. □

Se presentarán ahora dos ejemplos de la proposición 2.1

Ejemplo 2.4. Se busca encontrar el valor exacto de la fracción continua dada por

$$x = [1; 2, \overline{3, 4}] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \ddots}}}}.$$

Puede definirse la parte periódica como

$$y = [3; \overline{4, 3}] = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \ddots}}.$$

Note que al sustituir el mismo y se obtiene

$$y = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{y}} \tag{2.1}$$

Al sustituir y en x, se obtiene

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \ddots}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}} \iff$$

$$\frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{y} \iff \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 2} = y \iff \frac{x-1}{3-2x} = y.$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación 2.1 se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{3-2x} &= 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3-2x}{x-1}} && \iff \\
\frac{x-1}{3-2x} &= 3 + \frac{x-1}{2x-1} && \iff \\
\frac{x-1}{3-2x} &= \frac{7x-4}{2x-1} && \implies \\
(x-1)(2x-1) &= (7x-4)(3-2x) && \iff \\
0 &= 16x^2 - 32x + 13 && \implies \\
x &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.5. Se busca encontrar la fracción continua de $x = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Se utilizará la definición 1.4.

$$\alpha_0 = x = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}+4}{6}, \qquad a_0 = \left\lfloor \frac{3\sqrt{2}+4}{6} \right\rfloor = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{9\sqrt{2}+6}{7}, \qquad a_1 = \left\lfloor \frac{9\sqrt{2}+6}{7} \right\rfloor = 2.$$

Al continuar el procedimiento se siguen encontrando coeficientes. Los coeficientes se presentan en la siguiente tabla:
Note que como $\alpha_0 = \alpha_{10}$ y los coeficientes se calculan recursivamente, se repetirán

n	α_n	a_n
0	$\frac{3\sqrt{2}+4}{6}$	1
1	$\frac{9\sqrt{2}+6}{7}$	2
2	$\frac{9\sqrt{2}+8}{14}$	1
3	$\frac{3\sqrt{2}+2}{3}$	2
4	$\frac{9\sqrt{2}+12}{2}$	12
5	$\frac{3\sqrt{2}+4}{3}$	2
6	$\frac{9\sqrt{2}+6}{14}$	1
7	$\frac{9\sqrt{2}+8}{7}$	2
8	$\frac{3\sqrt{2}+2}{6}$	1
9	$9\sqrt{2}+12$	24
10	$\frac{3\sqrt{2}+4}{6}$	1

Tabla 2.1. Cálculo de coeficientes de la fracción continua de $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

los mismos coeficientes periódicamente. Se concluye entonces que

$$\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}=x=[1;\overline{2,1,2,12,2,1,2,1,24,1}].$$

2.5. Representación de conjugados

Hay un tipo especial de fracciones continuas periódicas que tienen una propiedad especial. Estas se definirán a continuación.

Definición 2.2. Sea $x=[a_0;a_1,a_2,\dots]$ una fracción continua periódica, de período n. Si se cumple que $a_k=a_{k+n}$ para todo $k\geq 0$, se dice que x es una *fracción continua puramente periódica.*

Ejemplo 2.6. La fracción continua $x=[3;\overline{3,6}]$ no es una fracción continua puramente periódica, pues su período es 2 y si se compara $a_0=3$ y $a_2=6$ no son iguales. La fracción continua $x=[3;\overline{6,3}]$ sí es una fracción continua puramente periódica, pues su período es 2 y se cumple que $a_{2k}=3$ y $a_{2k+1}=6$, para todo $k\geq 0$.

Ahora, para la siguiente proposición, es necesaria también la

Definición 2.3. Si un $x \in \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, con los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces se dice que x es un irracional cuadrático. Se sabe que x debe ser $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Decimos, además, que x_2 es la raíz conjugada de x_1 y que x_1 es la raíz conjugada de x_2.

Las fracciones continuas puramente periódicas son fracciones continuas periódicas, por lo que, según resultados anteriores, deben ser irracionales cuadráticos. Se procede entonces a demostrar la

Proposición 2.2. *Si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos, la fracción continua puramente periódica $\alpha = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0}]$ es mayor que 1. Además, si $\beta = [a_n; \overline{a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, a_n}]$ es la fracción continua de α con el período al revés, entonces $-\dfrac{1}{\beta} = \alpha'$ es la raíz conjugada de α, y además, $-1 < \alpha' < 0$.*

Demostración. Sea $\alpha = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0}]$ y sea $\dfrac{p_k}{q_k}$ su k-ésimo convergente. Primero hay que recordar que, según la proposición 1.2, $\dfrac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1]$. Análogamente a cómo se probó esto, se tiene que $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$. Sea $\dfrac{p'_k}{q'_k}$ el k-ésimo convergente de la fracción continua $[a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$. Entonces se tiene que

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = \frac{p'_n}{q'_n}$$
$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1] = \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}.$$

Por el corolario 1.1, se tiene que los convergentes está simplificados, por lo que se cumple

$$p'_n = p_n, p'_{n-1} = q_n,$$
$$q'_n = p_{n-1}, q'_{n-1} = q_{n-1}.$$

Como α es una fracción continua puramente periódica, se tiene que $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \alpha]$. Entonces, por la proposición 1.2, se tiene que

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} \iff$$
$$0 = q_n\alpha^2 - (p_n - q_{n-1})\alpha - p_{n-1}.$$

Análogamente, $\beta = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, \beta$ y entonces

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\beta p'_n + p'_{n-1}}{\beta q'_n + q'_{n-1}} \iff \\
\beta &= \frac{\beta p_n + q_n}{\beta p_{n-1} + q_{n-1}} \iff \\
0 &= p_{n-1}\beta^2 - (p_n - q_{n-1})\beta - q_n \iff \\
0 &= q_n(-\frac{1}{\beta})^2 - (p_n - q_{n-1})(-\frac{1}{\beta} - p_{n-1}).
\end{aligned}$$

Sea $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$. Como $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son enteros positivos, entonces

$$\begin{aligned}
&\beta > 1 \iff \\
&0 < \frac{1}{\beta} < 1 \iff \\
&-1 < -\frac{1}{\beta} < 0 \implies \\
&\alpha \neq \alpha'.
\end{aligned}$$

Ahora, al analizar la ecuación $0 = q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})x - p_{n-1}$, y como α y $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$, esas deben ser las dos raíces distintas de la ecuación cuadrática y, por lo tanto, α y $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$ son raíces conjugadas. □

La proposición 2.2 describe entonces una forma para obtener la fracción continua de un irracional cuadrático, en términos de su conjugada, mientras que esta sea puramente periódica. A continuación se muestra un ejemplo de este proceso.

Ejemplo 2.7. Se sabe, por el ejemplo 1.2, que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; \overline{1}]$. Ahora se busca encontrar la fracción continua de su conjugado $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Según el resultado anterior, sea $\beta = [1; \overline{1}]$. Por la sección 2.2, se sabe que $\frac{1}{\beta} = [0; \overline{1}]$. Ahora, por la misma sección, se cumple que $-\frac{1}{\beta} = [-1; 2, \overline{1}]$.
Por otro lado, al seguir el algoritmo dado en 1.4, se obtiene la representación de $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Los resultados se resumen en la tabla 2.2.

Note que como $\alpha_3 = \alpha_2$, será periódica de período 1, con $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = [-1; 2, \overline{1}]$, lo que verifica la proposición anterior.

n	α_n	a_n
0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	-1
1	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	2
2	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1
3	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1

Tabla 2.2. Cálculo convergentes del conjugado de ϕ.

2.6. Suma y producto de números a partir de su representación por fracciones continuas simples

Muchos matemáticos a lo largo de la historia se han planteado la pregunta ¿Existirá alguna relación entre los coeficientes de la representación por fracciones continuas simples de dos números, y los coeficientes de la representación por fracciones continuas de su suma, o su producto? Cabe mencionar que esto se busca para fracciones continuas infinitas, pues las finitas pueden calcularse exactamente por medio de sus convergentes. No se han encontrado resultados generales o simples que puedan responder esta pregunta, aunque hay algunos algoritmos, como el de Gosper [2], que permite hacer algunos cálculos. Algunos resultados se presentarán en esta sección.

Primero, se demostrarán algunas proposiciones, que serán necesarias para un resultado posterior.

Proposición 2.3. *Sea* $x = [0; a_1, a_2, \dots]$, *entonces* $1 - x = [0; a_2 + 1, a_3, a_4, \dots]$ *si* $a_1 = 1$ *y* $1 - x = [0; 1, a_1, a_2, a_3, \dots]$ *si* $a_1 > 1$.

Demostración. Si $a_1 = 1$, entonces

$$x = [0; 1, a_2, \alpha_3] = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\alpha_3}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha_3}{a_2\alpha_3 + 1}}$$

$$= \frac{a_2\alpha_3 + 1}{a_2\alpha_3 + 1 + \alpha_3}.$$

Por otro lado,

$$[0; a_2 + 1, \alpha_3] = \frac{1}{a_2 + 1 + \dfrac{1}{\alpha_3}} = \frac{\alpha_3}{a_2\alpha_3 + 1 + \alpha_3}$$
$$= 1 - x.$$

Análogamente, se demuestra el resultado inverso. □

Proposición 2.4. *Si* $x = [a_0; 1, \alpha_2]$ *entonces* $\{x\} > \frac{1}{2}$. *Recíprocamente, si* $x = [a_0; a_1, \alpha_2]$, *con* $a_1 > 1$, *entonces* $\{x\} < \frac{1}{2}$.

Demostración. Suponga, primero, que $\{x\} > \frac{1}{2}$.
Además, $\{x\} < 1 \implies 1 < \dfrac{1}{\{x\}} < 2 \implies \left\lfloor \frac{1}{\{x\}} \right\rfloor = 1$.
Entonces

$$\alpha_0 = \{x\} \implies a_0 = \lfloor \{x\} \rfloor = 0$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\{x\}} \implies a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\{x\}} \right\rfloor = 1.$$

Análogamente, si $\{x\} < \dfrac{1}{2} \implies \dfrac{1}{\{x\}} > 2 \implies a_1 > 1$. □

Ahora, sean $A = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, $B = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ y $A+B = C = [c_0; c_1, c_2, \dots]$. Entonces, se buscará encontrár una forma de calcular c_0 en términos de los coeficientes de A y B.

Proposición 2.5. *Sin pérdida de la generalidad, sea* $a_1 = 1$. *Si* $b_1 = 1$ *ó* $a_2 > b_1 - 1$, *entonces* $c_0 = a_0 + b_0 + 1$. *Si* $a_1, b_1 > 1$ *ó si, sin pérdida de la generalidad* $a_1 = 1, b_1 > 1$ *y* $a_2 < b_1 - 1$, *entonces* $c_0 = a_0 + b_0$.

Demostración. Si $a_1, b_1 > 1$, entonces $\{A\}, \{B\} < \dfrac{1}{2} \implies \{A\} + \{B\} < 1 \implies c_0 = \lfloor A + B \rfloor = \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor = a_0 + b_0$.
Suponga entonces, sin pérdida de la generalidad, que $a_1 = 1$. Si $b_1 = 1$, entonces

$$\{A\}, \{B\} > \frac{1}{2} \implies \{A\} + \{B\} > 1 \implies$$
$$c_0 = \lfloor A + B \rfloor = \lfloor A \rfloor + \lfloor B \rfloor + 1 = a_0 + b_0 + 1.$$

Ahora, suponga que $a_2 \geq b_1 - 1$. Para esto, se definirá también $G = 1 - \{B\} = [0; 1, b_1 - 1, b_2, ..]$, como se demostró anteriormente. Se llamarán δ_n a los reales a

partir de los cuales se obtienen g_n los coeficientes de G. Entonces se tiene que $g_0 = 0, g_1 = 1, g_2 = b_1 - 1$ y $g_n = b_{n-1}$ para $n \geq 2$.
En este caso, se hará un análisis inverso: se buscará qué condiciones deben cumplirse para que $c_0 = a_0 + b_0 + 1$ ó $c_0 = a_0 + b_0$. Supóngase que

$$c_0 = a_0 + b_0 + 1 \implies \{A\} + \{B\} \geq 1 \implies \{A\} \geq 1 - \{B\} \implies \frac{1}{\{A\}} \leq \frac{1}{1 - \{B\}}.$$

Note que $\alpha_1 = \dfrac{1}{\{A\}}$ y que $\delta_0 = 1 - \{B\}$ y $g_0 = 0$, entonces $\delta_1 = \dfrac{1}{1 - \{B\}}$. Entonces, $\alpha_1 \leq \delta_1$. Además, se sabe que $a_1 = g_1 = 1$, por lo que

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\alpha_1 - 1} \implies \alpha_1 - 1 = \frac{1}{\alpha_2} \implies \alpha_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_2},$$
$$\delta_2 = \frac{1}{\delta_1 - g_1} = \frac{1}{\delta_1 - 1} \implies \delta_1 - 1 = \frac{1}{\delta_2} \implies \delta_1 = 1 + \frac{1}{\delta_2}.$$

Y de hecho, en general, se cumple para cualquier α_n:

$$\alpha_n = \lfloor \alpha_n \rfloor + \frac{1}{\alpha_{n+1}} = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

(Este resultado será útil más adelante.)
Entonces, la desigualdad anterior implica que:

$$\alpha_1 \leq \delta_1 \implies 1 + \frac{1}{\alpha_2} \leq 1 + \frac{1}{\delta_2} \implies \frac{1}{\alpha_2} \leq \frac{1}{\delta_2} \implies \delta_2 \leq \alpha_2 \implies$$
$$\lfloor \delta_2 \rfloor \leq \lfloor \alpha_2 \rfloor \implies g_2 \leq a_2 \implies b_1 - 1 \leq a_2.$$

Por otro lado, si se asume que $c_0 = a_0 + b_0$, se tiene que $\{A\} + \{B\} \geq 1$, y con un procedimiento análogo, se concluye que $b_1 - 1 \geq a_2$. □

Esto define muy bien cómo calcular c_0 a partir de a_0 y b_0, pero hay un caso no considerado, y es qué ocurre cuándo $a_2 = b_1 - 1$. Entonces, la pregunta que se plantea es, si $a_2 = b_1 - 1$, ¿cuándo $c_0 = a_0 + b_0 + 1$? Siguiendo la demostración de la proposición anterior, si $a_2 = b_1 - 1 \implies a_2 = g_2 \implies \lfloor \alpha_2 \rfloor = \lfloor \delta_2 \rfloor$; además, se tenía que $a_1 = 1$ y que $\delta_2 \leq \alpha_2$. Entonces

$$\delta_2 \leq \alpha_2 \implies a_2 + \frac{1}{\alpha_3} \leq b_1 - 1 + \frac{1}{\delta_3} \implies \frac{1}{\alpha_3} \leq \frac{1}{\delta_3}$$
$$\implies \delta_3 \leq \alpha_3 \implies g_3 = \lfloor \delta_3 \rfloor \leq \lfloor \alpha_3 \rfloor = a_3 \implies b_2 \leq a_3$$

Análogamente, si se quiere que $c_0 = a_0 + b_0$, entonces se tiene que $b_2 \geq a_3$.
En resumen, si $c_0 = a_0 + b_0 + 1, a_1 = 1, b_1 > 1, a_2 = b_1 - 1$ entonces $b_2 < a_3$. Si $c_0 = a_0 + b_0, a_1 = 1, b_1 > 1, a_2 = b_1 - 1$ entonces $b_2 > a_3$, y se plantea una pregunta similar a la anterior: ¿qué sucede si $a_3 = b_2$? Siguiendo el procedimiento ya mostrado, se llegaría a que si $a_1 = 1, b_1 > 1, a_2 = b_1 - 1$ y $a_3 = b_2$, entonces $c_0 = a_0 + b_0 + 1$ si $b_3 > a_4$ y $c_0 = a_0 + b_0$ si $b_3 < a_4$. Es interesante notar que, si se sigue manteniendo la igualdad entre los coeficientes, dependerá de la paridad de la posición del primer coeficiente distinto para saber el valor de c_0. Es también interesante preguntarse qué pasaría si $a_n = b_{n-1}$ para todo $n \geq 3$. Si esto ocurre, entonces por la proposición 2.3, se tiene que $\{A\} + \{B\} = 1$ y entonces $c_0 = a_0 + b_0 + 1$.

Se puede generalizar en el siguiente resultado:

Proposición 2.6. *Sin pérdida de la generalidad, sea $a_1 = 1$. Sean además $b_1 > 1$ y $a_2 = b_1 - 1$.Se tiene que:*
si $a_n = b_{n-1}$ para todo $n \geq 3$, entonces $c_0 = a_0 + b_0 + 1$,
si $a_n = b_{n-1}$ para $k \geq n \geq 3$, $a_k > b_{k-1}$ y k es par, entonces $c_0 = a_0 + b_0$,
si $a_n = b_{n-1}$ para $k \geq n \geq 3$, $a_k > b_{k-1}$ y k es impar, entonces $c_0 = a_0 + b_0 + 1$,
si $a_n = b_{n-1}$ para $k \geq n \geq 3$, $a_k < b_{k-1}$ y k es par, entonces $c_0 = a_0 + b_0 + 1$,
si $a_n = b_{n-1}$ para $k \geq n \geq 3$, $a_k < b_{k-1}$ y k es impar, entonces $c_0 = a_0 + b_0$.

Ejemplo 2.8. Sea $A = \sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$ y $B = \sqrt{2} = [1; \overline{2}]$. Al utilizar la proposición 2.5, como $a_1 = 1, b_1 = 2 > 1, a_2 = 2$ y se tiene que $a_2 = 2 > 1 = b_1 - 1$, entonces se tiene que $c_0 = a_0 + b_0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.
Se puede calcular por medio de sus representaciones decimales que, de hecho, $c_0 = \lfloor A + B \rfloor = \lfloor \sqrt{2} + \sqrt{3} \rfloor = 3$.

La proposición 2.6 también da una noción de cómo comparar dos números A y B si se tiene solamente su represetanción como fracción continua. Claramente, sin pérdida de la generalidad, si $a_0 > b_0$, entonces se tendrá que $A > B$, por lo que la pregunta natural sería, si se tiene que $a_k = b_k$, para todo $0 \leq k < n$, entonces ¿qué relación deben tener a_n y b_n para que uno sea mayor que otro?
Igualmente que en la última proposición, $a_n < b_n$ y n es una posición impar, entonces $A > B$, pero si n es una posición impar, entonces $A < B$, y viceversa.

Ejemplo 2.9. Se compararán algunos valores de fracciones continuas finitas, con cada vez más coeficientes, que varían únicamente en el coeficiente final.

A	Aprox.		B	Aprox.
$[3;4]$	3.25	$<$	$[3;2]$	3.5
$[3;3,4]$	3.3076923076923075	$>$	$[3;3,2]$	3.2857142857142856
$[3;3,3,4]$	3.302325581395349	$<$	$[3;3,3,2]$	3.3043478260869565
$[3;3,3,3,4]$	3.3028169014084505	$>$	$[3;3,3,3,2]$	3.3026315789473686

Tabla 2.3. Comparación de fracciones continuas que varían en el último coeficiente

En cuanto a la multiplicación, sea $A \cdot B = D = [d_0; d_1, d_2, \dots]$. En este caso es mucho más complicado calcular d_0, sin mencionar los demás términos. La única cota que podemos dar es que:

$$\begin{aligned} & a_0 \leq A < a_0 + 1, b_0 \leq B < b_0 + 1 \\ \implies & a_0 b_0 \leq d_0 < (a_0 + 1)(b_0 + 1). \end{aligned}$$

2.7. Aproximaciones con racionales

Christiaan Huygens fue un científico que dejó grandes contribuciones en física, matemática y astronomía. En 1682 diseñó un planetario para la Académie Royale des Sciences, en París. Además de mostrar los planetas, el diseño indicaba la fecha, la hora, qué constelaciones estaban en el cielo y mucho más. Además de las dificultades técnias, Huygens se enfrentó a un problema matemático: construir engranajes que pudieran entrelazarse de tal forma que, con una sola fuente de poder, cada planeta pudiera tener un período aproximado al real. Ahí nace el problema de tratar de aproximar números (incluso racionales) por medio de racionales con denominadores «pequeños».

Como ya se ha estudiado, la sucesión de convergentes de una fracción continua simple converge a x, mientras p_n y q_n aumentan en cada recursión. Esto quiere decir que entre mayor sea n, se obtiene un valor más cercano al valor de la fracción continua. Esto da lugar a que se pueda aproximar entonces de dos formas distintas: la primera, tratando de que los numeradores y denominadores sean menores que cierta cota; o la segunda, tratando de obtener el menor denominador con el cual se pueda aproximar cierta cantidad de decimales.

Para llegar a estas aproximaciones por medio de fracciones continuas, es necesario primero demostrar la

Proposición 2.7. *Sea $x = [a_1; a_2, a_3, \dots]$ la fracción continua de algún real x. Sea*

c_n el n-ésimo convergente de la fracción continua de x. Entonces

$$|x - c_n| < |x - c_{n-1}|.$$

Es decir, cada convergente se acerca más al valor de x que el anterior.

Demostración. Sea $x = [a_1; a_2, a_3, \ldots, \alpha_{n+1}]$. Por el corolario 1.2, se tiene que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \iff \\
x(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}) &= \alpha_{n+1}p_n + p_{n-1} \iff \\
\alpha_{n+1}(xq_n - p_n) &= -xq_{n-1} + p_{n-1} = -q_{n-1}(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}) \iff \\
x - \frac{p_n}{q_n} &= (-\frac{q_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n})(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}) \iff \\
\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|-\frac{q_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n}\right| \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.
\end{aligned}$$

Como $q_n > q_{n-1}$ y $\alpha_{n+1} > 1, n \geq 2$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
|x - \frac{p_n}{q_n}| < |x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}| \iff \\
|x - c_n| < |x - c_{n-1}|.
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. □

Con este resultado, ahora se sabe que cada convergente que se calcule de $x = [a_0; a_1, \ldots]$ va siendo una mejor aproximación a x. Siguiendo con el ejemplo del planetario de Huygens, físicamente hay solo una cierta cantidad de dientes que pueden tener los engranajes que usaría. A Huygens le era imposible construir engranajes con menos de 7 dientes o con más de 200. Su problema entonces se resumía así: Dado $r \in \mathbb{Q}$, se deben encontrar dos naturales n, m, tales que $7 \leq n, m \leq 200$ y $\frac{n}{m} \approx r$, tal que no hay otros n', m', con $7 \leq n', m' \leq 200$ que cumplan $\left|r - \frac{n'}{m'}\right| < \left|r - \frac{n}{m}\right|$.

Ejemplo 2.10. Huygens midió que el cociente entre los períodos de Mercurio y la Tierra era $r = \frac{5067}{21038}$. Al calcular la fracción continua se obtiene $r = [0; 4, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 2]$. A continuación se presentan los coeficientes de r, junto a los numeradores y denominadores parciales:

Entonces el convergente más cercano que cumple las condiciones buscadas es $\frac{46}{191}$. Al comparar las expansiones decimales obtenemos que $r = \frac{5067}{21038} \approx 0.240849$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n		0	4	6	1	1	2	1	1	1	1	7	1	2
p_n	1	0	1	6	7	13	33	46	79	125	204	1553	1757	5067
q_n	0	1	4	25	29	54	137	191	328	519	847	6448	7295	21038

Tabla 2.4. Coeficientes, numerados y denominadores parciales de $\frac{5067}{21038}$.

y la aproximación $r \approx \dfrac{n}{m} \approx 0.240837$, que aproxima correctamente hasta cuatro decimales.

Ejemplo 2.11. Otro tipo de problema de aproximación es aproximar algún valor a cierta cantidad de decimales, con el menor denominador posible. En este ejemplo, se quiere hallar una aproximación a π a 8 decimales. Se calcula con la recursión $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ y $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$. Los cálculos se presentan en la siguiente tabla:

n	-1	0	1	2	3	4
a_n		3	7	15	1	292
p_n	1	3	22	333	355	103993
q_n	0	1	7	106	113	33102
Aprox.		3	3.142857	3.14150943	3.14159292	3.14159265

Tabla 2.5. Coeficientes, numerados y denominadores parciales de π.

2.8. Representación de algunos números interesantes

2.8.1. Número de Euler

Se ha encontrado ya la expansión en fraccines continuas de $\sqrt{2}$ (a saber $[2; 1, \bar{2}]$) y de ϕ (a saber, $[1; \bar{1}]$), pues son irracionales cuadráticos. Se buscará ahora representar otro número importante: e, el número de Euler, con el siguiente teorema.

Teorema 2.8.1. *La expansión por fracciones continuas del número de Euler e, es de la forma*

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots, 1, 2n, 1, \ldots].$$

Demostración. Aplicando el procedimiento visto con anterioridad, es posible encontrar los primeros coeficientes de la expansión, lo que da una idea del patrón que puede formarse. Sin embargo, la prueba será en el sentido inverso: se demostrará que

la fracción continua $[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots, 1, 2n, 1, \ldots]$ tiende a e. Para definir formalmente esta fracción continua, se tiene que, para todo $i \geq 1$ natural:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \\ a_1 &= 1, \\ a_{3i-1} &= 2i, \\ a_{3i} = a_{3i+1} &= 1. \end{aligned}$$

Ahora, por las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} p_{3n} &= p_{3n-1} + p_{3n-2}, & q_{3n} &= q_{3n-1} + q_{3n-2}, \\ p_{3n+1} &= p_{3n} + p_{3n-1}, & q_{3n+1} &= q_{3n} + q_{3n-1}, \\ p_{3n+2} &= 2(n+1)p_{3n+1} + p_{3n}, & q_{3n+2} &= 2(n+1)q_{3n+1} + q_{3n}. \end{aligned}$$

Se busca entonces probar que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{p_i}{q_i} = e$$

Para esto, se definen las integrales:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx, & B_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx, \\ C_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x dx. \end{aligned}$$

Primero, se busca probar que una forma cerrada de estas integrales es, para $n \geq 1$ natural:

$$\begin{aligned} A_n &= q_{3n-2}e - p_{3n-2}, \\ B_n &= p_{3n-1} - q_{3n-1}e, \\ C_n &= p_{3n} - q_{3n}e. \end{aligned}$$

En base a la recurrencia anterior, se quiere demostrar también :

$$\begin{aligned} A_n &= -B_{n-1} - C_{n-1}, \\ B_n &= -2nA_n + C_{n-1}, \\ C_n &= B_n - A_n. \end{aligned}$$

Por integración directa, es posible calcular los valores:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^1 e^x dx = e - 1, \\
B_0 &= \int_0^1 x e^x dx = e^1(1-1) - e^0(0-1) = 1, \\
C_0 &= \int_0^1 (x-1)e^x dx = \int_0^1 xe^x - e^x dx = 1 - [e^1 - e^0] = 2 - e.
\end{aligned}$$

Ahora, note que por la regla de derivación del producto, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x = \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x.$$

Al integrar desde 0 hasta 1 de ambos lados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x dx + \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x dx + \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x \\
&= C_{n-1} + B_{n-1} + A_n \implies A_n = -B_{n-1} - C_{n-1}.
\end{aligned}$$

Análogamente, note que

$$\frac{d}{dx}\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x = \frac{x^{n-1}(x-1)^{n+1}}{(n-1)!}e^x + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}(n+1)e^x + \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x.$$

Al integrar desde 0 hasta 1 de ambos lados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \frac{d}{dx}\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^{n+1}}{(n-1)!}e^x dx + \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}(n+1)e^x dx + \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{(n-1)!}e^x dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x dx + \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{(n-1)!}e^x dx \\
&+ \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x dx - \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x dx + \int_0^1 2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x dx \\
&= B_n + 2nA_n - C_{n-1} \implies B_n = -2nA_n + C_{n-1}.
\end{aligned}$$

Además, note que por definición, se tiene que

$$\begin{aligned} C_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x dx - \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x dx \\ &= B_n - A_n. \end{aligned}$$

Ahora se procederá con inducción matemática.

Caso base:

$$\begin{aligned} A_1 &= -B_0 - C_0 = e - 3 = q_1 e - p_1, \\ B_1 &= -2A_1 + C_0 = 8 - 3e = p_2 - q_2 e, \\ C_1 &= B_1 - A_1 = 11 - 4e = p_3 - q_3 e. \end{aligned}$$

Paso inductivo: supóngase que, para algún k natural:

$$\begin{aligned} A_k &= q_{3k-2}e - p_{3k-2}, & B_k &= p_{3k-1} - q_{3k-1}e, \\ C_k &= p_{3k} - q_{3k}e. \end{aligned}$$

Se quiere probar que:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= q_{3(k+1)-2}e - p_{3(k+1)-2}, & B_{k+1} &= p_{3(k+1)-1} - q_{3(k+1)-1}e, \\ C_{k+1} &= p_{3(k+1)} - q_{3(k+1)}e. \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones por recurrencias ya encontradas, se tiene:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= -B_k - C_k = -p_{3k-1} + q_{3k-1}e - p_{3k} + q_{3k} \\ &= (q_{3k-1} + q_{3k})e - (p_{3k-1} + p_{3k}) \\ &= q_{3(k+1)-2}e - p_{3(k+1)-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= -2(k+1)A_{k+1} + C_k \\ &= -2(k+1)(q_{3(k+1)-2}e - p_{3(k+1)-2}) + p_{3k} - q_{3k}e \\ &= (-2(k+1)p_{3k+1} + p_{3k}) - (2(k+1)q_{3k+1} + q_{3k})e \\ &= p_{3(k+1)-1} - q_{3(k+1)-1}e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= B_{k+1} - A_{k+1} \\ &= p_{3k+2} - q_{3k+2}e + p_{3k+1} - q_{3k+1}e \\ &= (p_{3(k+1)-1} + p_{3(k+1)-2}) - (q_{3(k+1)-1} + q_{3(k+1)-2} \\ &= p_{3(k+1)} - q_{3(k+1)}e. \end{aligned}$$

Ahora, se calculará independientemente

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 0, \lim_{n\to\infty} B_n = 0 y \lim_{n\to\infty} C_n = 0.$$

Primero, note que (en el contexto que se está trabajando, $n \in N, 0 \leq x \leq 1$):

$$\begin{aligned} x^n \leq 1, |(x-1)^n| \leq 1, 1 \leq e^x \leq e \\ \implies |x^n(x-1)^n e^x| \leq e. \end{aligned}$$

Entonces al considerar la gráfica de la función $x^n(x-1)^n e^x$, según las desigualdades anteriores, debe estar encerrada en el rectángulo que va de $x = 0$ a $x = 1$ en el eje x y de $y = -e$ a $y = e$ en el eje y. Dicho rectángulo tiene un área de $2e$, por lo que

$$\int_0^1 x^n(x-1)^n e^x dx \leq 2e.$$

Al considerar el límite completo, se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx &= \frac{\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n(x-1)^n e^x}{\lim_{n\to\infty} n!} dx \\ &\leq \frac{\lim_{n\to\infty} 2e}{\lim_{n\to\infty} n!} = 0. \end{aligned}$$

Análogamente, cuando $n \to \infty$, $B_n \to 0$ y $C_n \to 0$. Al generalizar los resultados de las 3 sucesiones distintas, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} p_n - q_n e = 0.$$

Y como $q_n \geq 1$, se puede concluir que:

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots]. \quad \square$$

Como menciona H. Cohn en [6], Hermite (quien realizó una demostración en base al razonamiento mencionado con anterioridad) pudo haber encontrado la idea

del patrón de esta expansión por fracciones continuas simples de e por medio de aproximantes de Padé. Hermite pudo haber notado que los convergentes de e son de hecho las primeras formas de aproximar a e con sus aproximantes de Padé. (Prácticamente, se puede decir que los aproximantes de Padé son una generalización de una serie de Taylor, donde en lugar de tratar de aproximar una función por medio de un polinomio, se aproxima por medio de una fracción algebraíca.)

2.8.2. Cocientes de cuadrados consecutivos

Ahora se quiere encontrar la representación de cocientes de cuadrados consecutivos. Se analizará cuando el numerador es mayor que el denominador. Si se quisiera que el numerador fuera mayor que el denominador, se puede obtener el inverso multiplicativo. Dependiendo de la paridad del denominador, se pueden obtener dos resultados distintos; se analizarán ambos casos.

Caso 1: Denominador par. Ahora, se analizará la representación por fracciones continuas simples de los números de la forma $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2, n \in \mathbb{N}^*$. En primer lugar, note que $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2 = 1 + \frac{4n+1}{4n^2}$, por lo que el primer coeficiente de la fracción siempre será 1. Además

$$\begin{aligned}
\frac{4n+1}{4n^2} &= \cfrac{1}{n-1+\cfrac{3n+1}{4n+1}} \\
&= \cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{n}{3n+1}}} \\
&= \cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{n}}}} \\
&= [0; n-1, 1, 3, n].
\end{aligned}$$

Entonces $\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2 = [1; n-1, 1, 3, n]$.

Caso 2: Denominador impar. Ahora, se buscará la representación de los núme-

ros de la forma $(\frac{2n+2}{2n+1})^2$. Se tiene entonces que

$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = 1 + \frac{4n+3}{4n^2+4n+1} = 1 + \cfrac{1}{n + \cfrac{n+1}{4n+3}} = 1 + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{3 + \cfrac{n}{n+1}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{n}}}} = [1; n, 3, 1, n].$$

Entonces $\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = [1; n, 3, 1, n]$.

Esto demuestre el

Teorema 2.8.2. *La fracción continua de un cociente de cuadrados perfectos consecutivos, cuyo numerador es un número impar y es mayor que el denominador, está dada por*

$$\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2 = [1; n-1, 1, 3, n].$$

La fracción continua de un cociente de cuadrados perfectos consecutivos, cuyo numerador es un número par y es mayor que el denominador, está dada por

$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = [1; n, 3, 1, n].$$

Ejemplo 2.12. Según el resultado anterior, $[1; 6, 3, 1, 6]$ debería representar la fracción continua de $\frac{196}{169}$. Precisamente,

$$[1; 6, 3, 1, 6] = [1; 6, 3, \frac{6}{7}] = [1; 6, \frac{7}{27}] = [1; \frac{169}{27}] = \frac{196}{169}.$$

3. Biyección entre conjuntos de sucesiones de naturales y números reales por medio de fracciones continuas simples

3.1. Sucesiones equivalentes

Según la definición 1.3, para cualquier sucesión (a_n) de naturales, es posible calcular $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$. A x le llamaremos el número real asociado a la sucesión a_n. De nuevo, recordando la definición 1.3, se sabe que x será un número irracional, pues la representación por fracciones continuas simples de x es infinita. Entonces quisieramos que existiera una biyección entre el conjunto de las sucesiones de naturales y el conjunto de los irracionales. Ya hemos demostrado que para cualquier número real, su representación por fracciones continuas es única (Sección 2.1). El problema es que en la otra vía no se cumple siempre la proposición. Considere el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 3.1. Sean $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $b_0 = 1, b_1 = b_2 = 0$ y $b_n = 1, n \geq 3$ y $A = [a_0; a_1, a_2, \dots], B = [b_0; b_1, b_2, \dots]$. Se sabe que $A = [1; \overline{1}] = \phi$. Note que

$$B = [b_0; b_1, b_2, A] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{A}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{A}}} = 1 + \frac{1}{A} = A.$$

Esto quiere decir que pueden existir dos sucesiones distintas, cuyo número real asociado sea A.

Este problema inspira la definición

Definición 3.1. Se dirá que a_n y b_n sucesiones de naturales serán *equivalentes* si el número real asociado a ambas es el mismo.

Ahora, es natural plantearse qué criterios pueden existir para que dos sucesiones sean equivalentes. Es fácil notar que el problema es generado por las sucesiones que cumplen $a_i = 0$ para algún $1 \leq i \in \mathbb{N}$. Rectifica esta aseveración el hecho de que es imposible obtener algún coeficiente 0 al momento de obtener la representación por fracciones continuas simples de cualquier número real, utilizando el algoritmo presentado anteriormente. Se quiere entonces poder encontrar una sucesión equivalente a cualquier sucesión con ceros en ella. Para esto se prueba la siguiente proposición:

Proposición 3.1. *Si a_n es una sucesión de naturales que cumple que $a_k = 0$ para algún $1 \leq k \in \mathbb{N}$, entonces será equivalente a la sucesión b_n definida por:*

$$\begin{aligned} b_n &= a_n, n < k-1 \\ b_n &= a_n + a_{n+2}, n = k-1 \\ b_n &= a_{n+2}, n > k-1 \end{aligned}$$

Demostración. Sea a_n una sucesión de naturales que cumple que $a_k = 0$ para algún $1 \leq k \in \mathbb{N}$, y b_n una sucesión de naturales como la definida en la proposición. Se procederá a demostrar que el número real asociado a ambas es el mismo.
Sean A el número real asociado a a_n y B el número real asociado a b_n. Si además se define a $X = [a_{k+2}; a_{k+3}, a_{k+4}, \dots]$, entonces se tiene que $A = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k+1}, X]$ y $B = [b_0; b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, X]$. Más aún, como $b_n = a_n$ si $n < k-1$, se tiene que $B = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, b_{k-1}, X]$. Ahora, note que

$$A = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{X}}}}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_{k+1} + \cfrac{1}{X}}}}}}.$$

Y como $a_{k-1} + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_{k+1} + \frac{1}{X}}} = a_{k-1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{X}} = a_{k-1} + a_{k+1} + \frac{1}{X}$, entonces se concluye que

$$\begin{aligned} A &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{(a_{k-1} + a_{k+1}) + \cfrac{1}{X}}}} \\ &= [a_0; a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1} + a_{k+1}, X] \\ &= [a_0; a_1, \ldots, a_{k-2}, b_{k-1}, X] = B, \end{aligned}$$

que es lo que se buscaba probar. □

Al aplicar la proposición a cualquier sucesión a_n de naturales con algún $a_k = 0, k \in \mathbb{N}$, se obtiene una nueva sucesión sin ese término 0. Si se repite el proceso para todos los ceros que tenga la sucesión, se llegará a una sucesión b_n tal que $a_k \neq 0$ para cualquier k natural. O lo que es lo mismo, se puede considerar la biyección planteada al principio del capítulo entre el conjunto $S_I = \{(a_n) | a_n \in \mathbb{N}, a_k \neq 0, k \geq 1\}$ y los números irracionales. Ahora, se puede tratar de expandir aún más la biyección, y no considerar solamente números irracionales, sino también números racionales, para encapsular a todos los números reales. Ya se sabe que al aplicar el algoritmo definido en la sección 2.1, se obtendrá una fracción continua finita. Esto podría traducirse a todas las sucesiones de naturales, tales que existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_k = 0$ para todo $k > n$, pero $a_k \neq 0$ para todo $0 \leq k \leq n$. De nuevo, fácilmente notamos que no existe una biyección, pues puede haber dos representaciones distintas para los números racionales, como se expone en el siguiente contraejemplo:

Ejemplo 3.2. Por medio del algoritmo definido en 1.2, se tiene que la representación por fracciones continuas de $\frac{10}{7}$ es $[1; 2, 3]$. Pero, de hecho, si se calcula el número real asociado a la fracción continua dada por $[1; 2, 2, 1]$, se tiene que

$$[1; 2, 2, 1] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}} = [1; 2, 3],$$

por lo que ambas sucesiones son equivalentes.

Y de hecho, esto se presenta porque la última cifra de la fracción continua finita es 1. Esto, al igual que los 0's entre la representación de la fracción continua que podían aparecer en las sucesiones infinitas, es un suceso artificial: ocurre en las sucesiones, pero nunca se obtiene en el algorimto visto, de nuevo gracias al algoritmo de la división. La manera más sencilla es, entonces, de nuevo restringir nuestro conjunto de sucesiones asociadas a los números racionales, con la siguiente:

Definición 3.2. Sea $S_Q := \{(a_n) | a_n \in \mathbb{N}$ tales que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0, \forall n > m, a_n \neq 0$si $0 < n < m \wedge a_n \neq 1\}$.

Entonces hay una biyección entre el conjunto S_Q y $\mathbb{Q}$, definida de la siguiente manera: a cada sucesión de S_Q se le asigna su número real asociado, mientras que a todo racional se le asocia la sucesión cuyos términos son los coeficientes de su representación por fracciones continuas simples. Más aún, si se define a $S_R := S_I \cup S_Q$, se puede declarar el

Teorema 3.1.1 (Biyección con números reales)**.** *Existe una biyección entre el conjunto S_R y el conjunto $\mathbb{R}$, definida de la siguiente manera: a cada sucesión de S_R se le asigna su número real asociado, mientras que a todo número real se le asocia la sucesión cuyos términos son los coeficientes de su representación por fracciones continuas simples, obtenida por medio del algoritmo de la sección 2.1.*

Nota 3.1. En otras palabras, podríamos decir que en el conjunto S_R se encuentra la representación por fracciones continuas de todos los números reales, y esa representación es la única, en ese conjunto.

Ya se ha estudiado cómo obtener la representación por fracciones continuas simples de cualquier número real, por medio del algoritmo presentado con anterioridad. Es interesante, también, ahora estudiar la otra dirección de la biyección: tratar de encontrar el número real asociado a ciertas sucesiones interesantes, como por ejemplo la sucesión de primos, la sucesión de todos los números naturales, la sucesión de Fibonacci, etc.

3.2. Sucesión de números primos

En esta sección, se busca responder a qué número Pr le corresponde la sucesión de todos los números primos $Pr = [2; 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots]$. En su artículo de 2010

[7], Marek Wolf, por medio del PARI (librería del lenguaje de programación C, que permite cálculos rápidos) estimó, utilizando todos los 1229 primos entre 1 y 10000, que:

$$\begin{aligned} u &:= [0; 2, 3, 5, 7, \cdots, 9973] \\ &= \frac{3.38592889 \cdots \times 10^{4297}}{7.83177791 \cdots \times 10^{4297}} \\ &= 0.432332087185902868909253793241999963705110896 88 \ldots \end{aligned}$$

Para encontrar Pr, entonces, es posible aplicar el Teorema 2.2.2, y obtener:

$$\begin{aligned} Pr &= \frac{1}{u} \\ &= 2.313036736433582906383951602641782476396689771790690524129 \ldots \end{aligned}$$

Como se mencionó en la sección anterior, es interesante notar que en este número podría considerarse representado todos y cada uno de los números primos.

3.3. Sucesión de números naturales

En esta sección, se busca hallar una aproximación para $Na = [0; 1, 2, 3, \ldots]$. Este resultado se obtiene utilizando funciones de Bessel del primer tipo modificadas, que cumplen la recurrencia:

$$I_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2n}(I_{n-1}(\alpha) - I_{n-2}(\alpha)).$$

De esto, se puede concluir que:

$$\frac{I_n(\alpha)}{I_{n-1}(\alpha)} = \cfrac{1}{\frac{2}{\alpha}n + \cfrac{1}{\frac{2}{\alpha}(n+1) + \ddots}}$$

Al evaluar $\alpha = 2$ y $n = 1$, se obtiene:

$$0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ddots}}} = \frac{I_1(2)}{I_0(2)}.$$

Con el software Wolfram Alpha se ha hecho una aproximación de estos dos valores:

$$I_1(2) = 1.590636854637329063382254424999666247954478159495536647132287 9\ldots$$
$$I_0(2) = 2.279585302336067267437204440811533353285841102785459054070839 7\ldots$$

Al aproximar el valor de este cociente, se obtiene que

$$\begin{aligned} Na &= [0; 1, 2, 3, \ldots] \\ &= 0.697774657964007982006790592551752599486658262998\ldots \end{aligned}$$

3.4. Sucesión de Fibonacci

En esta sección, se busca hallar una aproximación para $Fib = [0; 1, 1, 2, 3, 5, \ldots]$. El primer enfoque que se dio para encontrar este número fue hacerlo de manera exacta, por medio de las fórmulas de recurrencia del Corolario 1.1, pero no se encontró ningún patrón al analizarlas. Luego, se procedió a realizar una aproximación numérica por medio del software Wolfram Alpha. Al ingresar 29 términos de la sucesión de Fibonacci y analizar 50 decimales, se obtuvo:

$$\begin{aligned} Fib &= [0; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \ldots, 317811] \\ &= 0.58887395254893350767123112124678738407999084839132\ldots \end{aligned}$$

Se trató de agregar el próximo término a la fracción continua, y de hecho el resultado volvió a ser

$$\begin{aligned} Fib &= [0; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \ldots, 514229] \\ &= 0.58887395254893350767123112124678738407999084839132\ldots \end{aligned}$$

Debido a esto surge la pregunta: ¿Cuántos términos debemos ingresar de la sucesión de Fibonacci para que empiece a repetir el mismo valor, con 50 decimales de exactitud? Se comprueba numéricamente que al ingresar solamente 18 términos de la sucesión, empiezan a obtenerse la misma aproximación con 50 decimales al ir agregando más términos.

Recordando el corolario 1.1, se tiene que $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$. Buscamos entonces la primera diferencia entre dos términos consecutivos que sea menor a 10^{-50}, para que al agregar un término al cálculo, siga dando la misma aproximación, es

decir:

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} < 10^{-50} \implies 10^{50} < q_n q_{n+1}.$$

Se puede observar en la siguiente tabla los coeficientes de Fib, además del producto $q_n q_{n+1}$:

n	a_n	q_n	$q_n q_{n+1}$
0	0	1	1
1	1	1	2
2	1	2	10
3	2	5	85
4	3	17	1530
5	5	90	66330
6	8	737	7127527
7	13	9671	1.97×10^{9}
8	21	203828	1.41×10^{12}
9	34	6939823	2.65×10^{15}
10	55	381894093	1.29×10^{19}
11	89	33995514100	1.66×10^{23}
12	144	4895735924493	5.58×10^{27}
13	233	1140740465920969	4.91×10^{32}
14	377	430064051388129806	1.13×10^{38}
15	610	262340212087225102629	6.79×10^{43}
16	987	2589302193941425644246 29	1.07×10^{50}
17	1597	413511822712657762611235142	4.42×10^{56}
18	2584	1068514808819727052729996031557	4.77×10^{63}
19	4181	446746082918710152012187601917 4959	1.35×10^{71}
20	6765	302223735779655506033515439997 14629192	1.00×10^{78}
21	10946	330814105651871746091387520742752350310591	1.94×10^{87}
22	17711	585904865542267407299011498322643087606550 6393	9.84×10^{95}
23	28657	167902757649261676561549471165707350358161567014792	1.31×10^{105}

Tabla 3.1. Términos de Fibonacci y productos de denominadores parciales consecutivos

Notamos, entonces, que precisamente a partir del decimoctavo término las diferencias son menores a 10^{-50}, lo que hace que, si se buscan solamente 50 decimales de exactitud, es necesario sólo incluir 18 términos en el cálculo de la aproximación. Además, al notar el rápido crecimiento se puede hasta considerar 100 decimales de exactitud utilizando solo 24 términos.

CONCLUSIONES

El presente trabajo se ha dedicado al estudio de las fracciones continuas (particularmente las simples), así como de sus aplicaciones. En el desarrollo del presente trabajo de investigación que ha dado lugar a la presente tesis se han alcanzado los objetivos inicialmente planteados en cuanto a

1. Se estudiaron las propiedades para expresar números reales en su representación en fracciones continuas, a partir de las definiciones planteadas, donde resaltan el algoritmo basado en el algoritmo de Euclides y la representación de inversos aditivos y multiplicativos, así como de raíces conjugadas .

2. Se expuso la aproximación de números irracionales, e incluso racionales con denominadores grandes, como aplicación de las fracciones continuas, además de ejemplos de esto.

3. Se definió una biyección entre los reales y un subconjunto de sucesiones de números naturales, que se puede considerar como el conjunto que contiene una única forma de representar a cada número real, como fracción continua.

En la investigación se han abordado las propiedades generales de fracciones continuas simples y generalizadas, trabajando principalmente las primeras. En el camino, además, se encontraron varias propiedades interesantes, como la estrecha relación que existe entre la proporción aurea y la sucesión de Fibonacci.

RECOMENDACIONES

Una vez concluida la tesis, se considera interesante investigar sobre:

1. Criterios de equivalencia entre fracciones continuas generalizadas.
2. Fórmulas cerradas para c_1 en términos de los a_n, b_n. (Luego c_2, c_3, etc.).
3. Algún algoritmo para obtener la fracción continua simple de un número, conociendo su fracción continua generalizada.
4. Investigar algún patrón para la fracción continua de π.
5. Investigar la trascendencia de los reales asociados a las sucesiones presentadas en el capítulo 3.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. G. Bartle. (1964) *The Elements of Real Analysis.* E.U.A.: John Wiley & Sons, Inc.

[2] P. Rotondo, B. Vallee y A. Viola. Analysis of the Continued Logarithm Algorithm. Consultado en agosto de 2018 en `https://arxiv.org/pdf/1801.10139v1.pdf`.

[3] W. Bosma, C. Kraaikamp y otros. (2012) *Continued Fractions.* Países Bajos: s.e.

[4] F. Brochero Martinez, C. Moreira, N. Saldana y E. Tengan. (2015) *teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.* Rio de Janeiro: IMPA.

[5] C.D. Olds. (1963) *Continued Fractions* E.U.A.: San Jose State College.

[6] H. Cohn.(2006) A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e. *American Mathematical Monthly 113 (2006), 57-62.*

[7] M. Wolf. Continued fractions constructed from prime numbers. Consultado en agosto de 2018 en `https://arxiv.org/pdf/1003.401`.