



Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

ECUACIONES DE ESTADO PARA ESTRELLAS DE NEUTRONES

Anayansi Krimhilde Ramírez Pérez

Asesorado por Dr. Eduardo Rubio y Dr. Rodrigo Sacahui

Guatemala, Julio 2018

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

**ECUACIONES DE ESTADO PARA ESTRELLAS DE
NEUTRONES**

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POR

ANAYANSI KRIMHILDE RAMÍREZ PÉREZ
ASESORADO POR DR. EDUARDO RUBIO Y DR. RODRIGO SACAHUI

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, JULIO 2018

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR M.Sc. Jorge Marcelo Ixquiac-Cabrera
SECRETARIO ACADÉMICO M.Sc. Edgar Aníbal Cifuentes Anléu

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR Dr. Rodrigo Sacahui
EXAMINADOR Dr. Juan Ponciano
EXAMINADOR Lic. Freddy Rodríguez

AGRADECIMIENTOS A

**Mis asesores,
Eduardo y Rodrigo,**

por su paciencia, ayuda y amistad.

Mi familia,

por su cariño.

Mis profesores,

por sus enseñanzas.

Mis compañeros,

por su ayuda y amistad.

**La Universidad de
San Carlos de Guatemala
y la Escuela de Ciencias
Físicas y Matemáticas**

por permitirme el desarrollo como profesional.

DEDICATORIA A

Mi madre, Ana Marina, por su apoyo y abnegación.

Mi abuelo, Víctor, por su apoyo incondicional.

Jorge, por tu amor y comprensión.

Anahí y Anaelsee, por ser un ejemplo para mí.

**Mi abuela Elsa y
mi bisabuela María Julia,** por ser unas madres para mí.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	III
ÍNDICE DE TABLAS	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
OBJETIVOS	IX
INTRODUCCIÓN	XI
1. ESTRELLAS DE NEUTRONES	1
1.1. Objetos compactos	1
1.1.1. Correcciones a la gravedad Newtoniana	1
1.1.2. Clases de objetos compactos	3
1.2. Estrellas de neutrones	5
1.2.1. Contexto histórico	5
1.2.2. Propiedades y tipos de estrellas de neutrones	5
2. GRAVEDAD DE LOS OBJETOS COMPACTOS	9
2.1. Marco relativista	9
2.2. Tensor energía-momento	12
2.3. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)	14
3. ECUACIONES DE ESTADO	19
3.1. Ecuación de estado para el interior de una estrella formada por un gas ideal	19
3.1.1. Equilibrio hidrostático	19
3.1.2. Distribución de masa	20
3.1.3. Principio de energía	21
3.1.4. El Modelo de densidad constante	25

3.1.5. Teorema del Virial	25
3.2. Ecuación de estado fría por debajo del <i>Neutron Drip</i>	27
3.2.1. Conceptos preliminares de Termodinámica	27
3.2.2. Ecuación de estado para un gas ideal completamente degenerado de Fermi	30
4. MÉTODO NUMÉRICO	37
4.1. Método de Runge Kutta	37
4.2. Algoritmo empleado	39
5. RESULTADOS	43
5.1. Estrella de neutrones compuesta por un gas ideal	43
5.2. Mediciones recientes de masas de estrellas de neutrones	44
5.2.1. Púlsares de milisegundos	45
5.2.2. Estrellas de neutrones en binarias de rayos-X	46
5.3. Estrella de neutrones compuesta por un gas completamente degenerado de Fermi no relativista	46
5.4. Estrella de neutrones compuesta por un gas completamente degenerado de Fermi extremadamente relativista	48
5.5. Trabajo actual de ecuaciones de estado para estrellas de neutrones . . .	50
CONCLUSIONES	51
RECOMENDACIONES	53
A. Apéndice: Código fuente para gas degenerado de Fermi no relati- vista	59

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Evolución estelar según su composición	2
1.2. Evolución Estelar	4
2.1. Transporte paralelo en espacio euclideo	10
2.2. Transporte paralelo en superficie esférica	11
3.1. Equilibrio Hidrostático	20
4.1. Método de Euler	38
4.2. Método del punto intermedio	38
4.3. Método Runge Kutta de cuarto orden	39
5.1. Figura de masa vs radio para un gas ideal	44
5.2. Figura de presión vs radio para un gas ideal	44
5.3. Figura de masa vs radio para un gas degenerado no relativista	47
5.4. Figura de densidad vs radio para un gas degenerado no relativista	47
5.5. Figura de masa vs radio para un gas degenerado extremadamente relativista	48
5.6. Figura de densidad vs radio para un gas degenerado extremadamente relativista	48

ÍNDICE DE TABLAS

2.1. Símbolos de Christoffel métrica con simetría esférica	14
2.2. Condiciones de frontera para ecuaciones TOV	17
5.1. Datos experimentales de masas de estrellas de neutrones	46
5.2. Datos obtenidos para una estrella de neutrones compuesta de un gas completamente degenerado de Fermi no relativista	47
5.3. Datos obtenidos para una estrella de neutrones compuesta de un gas completamente degenerado de Fermi extremadamente relativista . . .	49

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
x	coordenada covariante
x	coordenada local
G	constante de gravitación universal ($6.674 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 = kg^2$)
\hbar	constante de planck reducida ($1.054571 \cdot 10^{-34} J \cdot s$)
	densidad del gas
$f_{;}$	derivada de f respecto a
E	energía cinética
U	energía interna
W	energía total
R	escalar de Ricci
m_n	masa de un neutrón
M_r	masa en un radio $r \notin R$
M_{Ch}	masa límite de Chandrasekhar
M	masa solar
M	masa total de la estrella
	producto tensorial
R	radio total de la estrella
$\overset{k}{ij}$	símbolo de Christoffel (conexión afín)
T	temperatura del gas
G	tensor de campo de Einstein
R	tensor de curvatura de Riemann
T	tensor de energía-momento
R	tensor de Ricci
g_{ij}	tensor métrico
c	velocidad de la luz ($299792458 m=s$)

Símbolo	Significado
<i>K</i>	Kelvin
<i>kg</i>	kilogramo
<i>km</i>	kilómetros (se utiliza esta escala ya que es muy útil para los radios de las estrellas)
<i>m</i>	metro
<i>s</i>	segundo
<i>T</i>	tesla

OBJETIVOS

General

Modelar estrellas de neutrones por medio de ecuaciones de estado partiendo de la condición de equilibrio hidrostático, asumiendo que la estrella tiene simetría esférica y que están compuestas por un fluido isotrópico, estático y sin fuerzas de corte.

Específicos

1. Resolver el comportamiento de las variables termodinámicas para el caso hipotético de una estrella compuesta por un gas ideal
2. Extender al caso de una estrella compuesta por un gas degenerado, descrito por las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.
3. Implementar modelos numéricos de ecuaciones de estado para describir una estrella compuesta por materia degenerada de primer orden, utilizando el caso del gas ideal como comparación para validar el método.
4. Modelar el comportamiento de la presión en función del radio y de la masa en función del radio con el fin de obtener los valores críticos de masa y radio para el caso de una estrella compuesta por materia degenerada de primer orden.
5. Comparar los valores teóricos obtenidos para cada ecuación de estado con valores experimentales provenientes de observaciones.

INTRODUCCIÓN

Los objetos compactos —enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros— son la fase final de la evolución estelar y se puede referir a ellos como remanentes de estrellas, es decir que “nacen” cuando estrellas normales “mueren”, que es cuando casi todo su combustible nuclear se ha consumido [35].

Todas las especies de objetos compactos difieren de las estrellas normales en dos formas fundamentales:

Primero, ya que no consumen combustible nuclear, no soportan el colapso gravitacional debido a la presión térmica; las enanas blancas lo soportan debido a la presión de electrones degenerados, mientras las estrellas de neutrones lo soportan mayormente debido a la presión de neutrones degenerados y los agujeros negros en cambio, son estrellas que han colapsado completamente — lo que significa que la estrella no halló algún método para soportar la gravedad que actúa hacia el centro de la estrella y por lo tanto colapsó a una singularidad.

La segunda característica distintiva de los objetos compactos es su tamaño extremadamente pequeño, de ahí su nombre. En comparación a las estrellas normales de masa similar, los objetos compactos tienen radio mucho más pequeño y por lo tanto, campos gravitacionales mucho más fuertes.

Los modelos actuales de estrellas enanas blancas toman en cuenta los efectos de la relatividad especial en la ecuación de estado de electrones degenerados que fue construida en 1930 por Subrahmanyan Chandrasekhar [12]. Él hizo el descubrimiento fundamental de la masa máxima de $1.4 M_{\odot}$ que puede tener una enana blanca (límite de Chandrasekhar) — el valor exacto depende de la composición química de la estrella.

La predicción de la existencia de las estrellas de neutrones como posible punto final a la evolución estelar fue independiente de las observaciones. Luego del descubrimiento del neutrón por Chadwick, se notó que a densidades muy altas, los electrones reaccionarían con los protones para formar neutrones por medio de decaimiento beta inverso. Sin embargo, para estos nuevos objetos también existía un límite superior de masa, lo cual fue evidencia de la existencia de objetos aún más exóticos —agujeros negros [10].

El modelo de una estrella que se resistía al colapso gravitacional debido a la presión de degeneración de neutrones fue inicialmente un modelo teórico propuesto por Oppenheimer, Volkoff y Tolman en 1939 [28]; sin embargo, este modelo fue confirmado en 1968 cuando se observó por primera vez una estrella de neutrones (radio púlsar) en la Nebulosa del Cangrejo [37].

Las estrellas de neutrones son objetos compactos que generalmente se forman de estrellas que tuvieron masas mayores a $6-8 M_{\odot}$; estas tienen dimensiones aproximadas de un diámetro de 20 km, masa entre $1.25-1.4 M_{\odot}$, un campo gravitacional aproximadamente $2 \cdot 10^{11}$ veces el campo gravitacional de la Tierra y un campo magnético en el rango de 10^4 a 10^{11} T [10].

Las estrellas de neutrones pueden aparecer en remanentes de supernovas como objetos aislados o en sistemas binarios. Cuando una estrella de neutrones se encuentra en un sistema binario los astrónomos son capaces de medir su masa, con radio telescopios o telescopios de rayos-X [35].

En el presente trabajo se describirá la formación de los objetos compactos así como sus propiedades, se hará énfasis en las propiedades cuantitativas de las estrellas de neutrones y la historia que conllevó a su descubrimiento.

A continuación se modelará el comportamiento de una estrella de neutrones partiendo de la condición de equilibrio hidrostático, utilizando diferentes ecuaciones de estado que describen la materia de la que está compuesta, para esto se asumirá que la estrella tiene una simetría esférica y que esta se encuentra en equilibrio.

La aproximación de primer orden utilizada para un gas ideal se puede modelar mediante un potencial newtoniano, ya que su campo gravitacional no afecta la cur-

vatura del espacio. Sin embargo, en la segunda aproximación, cuando se asume que la estrella está formada por un gas de materia degenerada con una alta densidad, los efectos de la gravedad serán importantes. Por tal razón se describirá el efecto que tienen en la curvatura del espacio-tiempo los objetos compactos que cuentan con una gran fuerza gravitacional que no puede ser descrita por la aproximación newtoniana con el fin de describir el comportamiento de los parámetros estelares de masa, presión y radio de una estrella de neutrones.

Con la información del comportamiento de los parámetros estelares descritos por la relatividad general se realizarán los modelos de estos en función del radio, para obtener los valores críticos de estos parámetros.

Finalmente se compararán los valores obtenidos de las diferentes ecuaciones de estado con las mediciones de masas críticas obtenidas de observaciones para determinar cuál es la ecuación que describe de mejor manera el comportamiento de la materia de la que está hecha una estrella de neutrones.

1. ESTRELLAS DE NEUTRONES

1.1. Objetos compactos

La clase de objetos astronómicos denominados objetos compactos incluyen enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros. Debido a que son la fase final de la evolución estelar, estos objetos son constituyentes fundamentales de las galaxias. En forma de agujeros negros súper masivos, estos objetos habitan prácticamente cada centro de las galaxias. Nuestra galaxia alberga un agujero negro de 3.8 millones de masas solares, pero en el centro de M87 en el cúmulo de virgo se encuentra un agujero negro de tres billones de masas solares. Estos agujeros negros súper masivos son los objetos más extremos que se encuentran en el Universo [10].

Mientras que las estrellas de neutrones y los agujeros negros son tema de investigación en términos de radio y emisión de rayos-X, las enanas blancas ya habían sido detectadas 100 años atrás por su emisión óptica.

1.1.1. Correcciones a la gravedad Newtoniana

Los objetos compactos fueron tema de debate por gran parte del siglo 20, se enfocaban principalmente en entender el estado final de estrellas masivas. Subrahmanyan Chandrasekhar, en su famoso viaje de India a Inglaterra en 1930, consideró la estructura de las enanas blancas y se percató que si estas fueran lo suficiente masivas, los electrones degenerados se convertirían en relativistas dejando a la estrella susceptible para su futuro colapso gravitacional. A pesar que fue arduamente rebatido por Arthur Eddington, Chandrasekhar dedujo correctamente que una enana blanca atravesaría un proceso de colapso gravitacional si su masa excediera $M_{Ch} \approx 1.4M_{\odot}$ (el límite exacto depende de la composición de la estrella, como se puede apreciar en la imagen 1.1) a este límite se le conoce como **Límite de Chandrasekhar** [12].

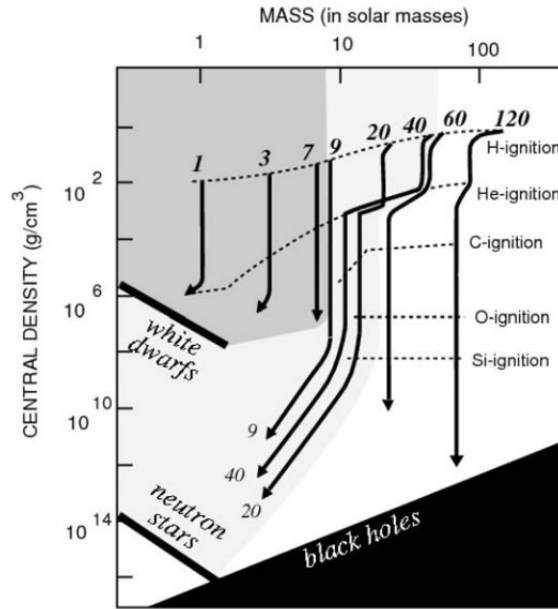


Figura 1.1. Las etapas finales de las estrellas dependiendo de su masa inicial y composición inicial convirtiéndose en enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros [10]

Una vez que la presión gravitacional supera la presión de electrones degenerados, aún perdura la presión de degeneración de los neutrones hasta que finalmente se alcanza el colapso gravitacional total. Los objetos en los cuales la fuerza gravitacional se encuentra en equilibrio con la presión ejercida por los neutrones degenerados son llamados estrellas de neutrones. A pesar de que se esperaba que las fuerzas nucleares fueran suficientes para resistir la gravedad, ahora se sabe que existe un límite de masa para las estrellas de neutrones que se cree se encuentra en el rango de $(1.5-2.2) M$ [10]. La incertidumbre acerca de las ecuaciones de estado para densidades supranucleares nubla la posibilidad de determinar la masa crítica, pero existe un límite superior absoluto de $3 M$ [10] que se obtiene de consideraciones muy generales, i.e. la validez de la relatividad general y el principio de causalidad. Se cree que el colapso gravitacional es inminente por encima de este valor de masa. En particular, los teoremas de la singularidad de Hawking demuestran que la formación de una singularidad de espacio-tiempo es inevitable (sin importar la distribución de masa/energía) una vez que el objeto se encuentra dentro de una superficie que atrapa la luz, el resultado es un agujero negro i.e. una región de espacio-tiempo delimitada por un horizonte de eventos y en su centro posee una singularidad espacio-tiempo.

1.1.2. Clases de objetos compactos

El estudio de objetos compactos empezó con el descubrimiento de las enanas blancas y la descripción exitosa de sus propiedades mediante la estadística de Fermi-Dirac, asumiendo de que soportan el colapso gravitacional por la presión de degeneración de los electrones, idea que fue propuesta inicialmente por Fowler en 1926 [14]. Luego Chandrasekhar en 1930 determinó que existe una masa máxima para enanas blancas debido a los efectos relativistas [12]. En 1932 Chadwick descubrió el neutrón. Por lo que inmediatamente después las ideas de Fowler para electrones se generalizaron a neutrones. Se predijo la existencia de una nueva clase de estrellas compactas, con un gran núcleo de neutrones degenerados — Las estrellas de neutrones (NS por sus siglas en inglés). El primer modelo de estrellas de neutrones fue propuesto por Oppenheimer y Volkoff [28] y Tolman [39] en 1939, describiendo la materia en la estrella como un gas degenerado de neutrones. Sus cálculos también demostraron la existencia de una masa máxima, como en el caso de las enanas blancas, sobre este valor la estrella no es estable y colapsa en un agujero negro. La masa máxima estable que hallaron fue de $0.75 M_{\odot}$. Únicamente 30 años después, en 1967 se observó la primera estrella de neutrones — de hecho, era un objeto en el rango del radio (radio pulsar), que fue identificada como una estrella de neutrones que rota a alta velocidad. En 1964 se propuso que los agujeros negros son la fuente de energía de los cuásares. Actualmente, se establece un gran rango de masas para los agujeros negros que abarcan desde tres masas solares hasta diez billones de masas solares en el centro de galaxias elípticas. [10]

En 1974, se observó por primera vez el púlsar PSR 1913+16 por Hulse y Taylor [38]. Esto permitió que se pudiera realizar una medida precisa de masa, la cual se determinó que era $1.44 M_{\odot}$. Por lo tanto, esta medición de masa afirmó la idea de una estrella conformada con un gas ideal de neutrones y demostró que las interacciones entre los núcleos deben de tomarse en cuenta.

Las estrellas de la secuencia principal evolucionan de acuerdo a su masa inicial (como se observa en la Figura 1.2) y el estudio de objetos compactos inicia cuando finaliza esta evolución. Todos estos objetos difieren de las estrellas normales en los siguientes aspectos:

No consumen combustible nuclear y la presión térmica no es la que impide que sucumban ante el colapso gravitacional. En cambio, las enanas blancas

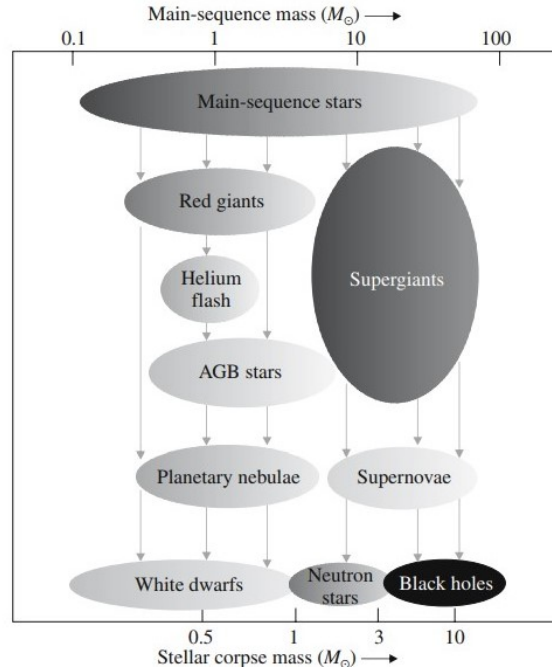


Figura 1.2. Los objetos compactos son el punto final de la evolución estelar, en función de la masa inicial [10]

soportan el colapso gravitacional debido a la presión de los electrones degenerados, mientras que en las estrellas de neutrones es la presión de neutrones degenerados y quarks la que impide que estas estrellas colapsen. Únicamente los agujeros negros son estrellas completamente colapsadas, que se mantienen juntas únicamente gracias a sus propias fuerzas gravitatorias. Estos objetos pueden ser considerados como una especie de excepción a la solución de las ecuaciones de Einstein (una singularidad).

Otra característica de estas estrellas compactas es su tamaño, son mucho más pequeñas que las estrellas normales (10 a 20 km de radio en el caso de las estrellas de neutrones) [35] y por lo tanto tienen campos gravitacionales mucho más fuertes sobre su superficie.

Usualmente, estos objetos también tienen campos magnéticos fuertes, mucho más fuertes que las estrellas normales (10^6 - 10^7 T para objetos compactos centrales) [20].

1.2. Estrellas de neutrones

1.2.1. Contexto histórico

Estas estrellas fueron propuestas, previo a su descubrimiento, como un modelo teórico. Los cálculos para el primer modelo para Estrellas de Neutrones fueron hechos por Oppenheimer, Volkoff y Tolman en 1939 [28], en estos describieron la materia en dicha estrella como un gas ideal de neutrones degenerados. Sus cálculos también demostraron que existe un límite superior de masa sobre el cual la estrella no es estable y colapsa en un agujero negro, siendo el valor de esta masa $0.75 M_{\odot}$.

Posteriormente, en 1968, se observó la primera estrella de neutrones -en realidad fue un objeto extraño pulsando en el rango del radio, que rápidamente fue identificado como una estrella de neutrones rotando rápidamente (radio púlsar) [37].

Los descubrimientos casi simultáneos de los púlsares Cangrejo y Vela a finales de 1968, ambos situados en remanentes de supernova, proveyeron evidencia de la formación de estrellas de neutrones en explosiones supernova. La nebulosa del cangrejo, por ejemplo, es el remanente de una explosión supernova observada por los astrónomos chinos en 1054 e. c. [35].

1.2.2. Propiedades y tipos de estrellas de neutrones

Las estrellas de neutrones tienen radios que se encuentran en el rango de $9.9 - 11.2 \text{ km}$ [30] y una masa entre 1.4 y $3 M_{\odot}$ [8]. Son el resultado de una explosión supernova de una estrella masiva, combinada con el colapso gravitacional, que comprime el núcleo pasando la densidad de las enanas blancas. Una vez formadas, las estrellas ya no generan calor y se enfrían al pasar el tiempo; sin embargo, aún pueden evolucionar mediante colisiones o acreción. Los modelos más básicos para estos objetos implican que las estrellas de neutrones están compuestas mayormente por neutrones, los electrones y protones presentes en la materia se combinan para producir neutrones. Las estrellas de neutrones soportan el colapso debido a la presión de neutrones degenerados, esto significa que los neutrones se compactan a un volumen finito tan limitado que solo pueden tomar valores discretos de energía, llamados estados cuánticos. El principio de exclusión de Pauli indica que fermiones idénticos ocupan el mismo estado cuántico. En la energía total más baja, todos los niveles más bajos de energía están llenos y se refiere a este estado como degenerado [40].

Las estrellas de neutrones que pueden ser observadas usualmente tienen una temperatura en su superficie $\approx 6 \cdot 10^5 \text{ K}$ [24]. A la vez, debido a su pequeño tamaño y alta densidad, una estrella de neutrones posee un campo gravitacional en su superficie de $\approx 2.0 \cdot 10^{12} \text{ m/s}^2$ [17]. El campo magnético en la superficie está en un rango de 10^4 a 10^{11} T [33].

Mientras el núcleo de la estrella colapsa, su periodo de rotación aumenta debido a la conservación del momento angular, por lo que una estrella de neutrones recién formada rota hasta varios cientos de veces por segundo. Algunas estrellas de neutrones emiten haces de radiación electromagnética que permite que sean detectables como púlsares, los cuales fueron descubiertos por Jocelyn Bell Burnell en 1967 [19]. La radiación de los púlsares se cree que es emitida primordialmente por las regiones cerca de los polos magnéticos, si los polos magnéticos no coinciden con el eje rotacional de la estrella de neutrones, la emisión del haz va a barrer el espacio y cuando se vea a la distancia, si el observador está en alguna parte en el camino del haz, le parecerá que existen pulsos de radiación provenientes de un punto fijo en el espacio (llamado “el efecto faro”).

Se cree que existen alrededor de 100 millones de estrellas de neutrones en la Vía Láctea, supuesto que se obtiene al estimar el número de estrellas que han atravesado una explosión súper nova [10]. Sin embargo, la mayoría son viejas y se han enfriado, y las estrellas de neutrones solo son fácilmente detectadas en ciertas instancias, como cuando son púlsares o están en un sistema binario.

Las estrellas de neutrones en sistemas binarios pueden atravesar un proceso de acreción lo cuál hace que el sistema brille en rayos-X, mientras el material cae en la estrella de neutrones se forman lugares calientes que rotan fuera y dentro del campo de visión en sistemas de púlsares de rayos-X. Adicionalmente, estos sistemas de acreción pueden “reciclar” púlsares viejos y causar que estos ganen masa y que roten a tasas muy altas, formando los púlsares de milisegundos. Estos sistemas binarios van a continuar evolucionando y eventualmente estos acompañantes se pueden convertir en objetos compactos tales como enanas blancas o estrellas de neutrones aunque existen otros escenarios como la completa destrucción del acompañante. La unión de estrellas de neutrones binarias son un candidato a progenitores de rayos gamma de corta duración y se asocian a ondas gravitacionales, como la señal de la onda

gravitacional GW150914 detectada en 2017 [1].

2. GRAVEDAD DE LOS OBJETOS COMPACTOS

Como se menciona en la sección anterior, en el caso estos objetos que resultan extremadamente masivos, la gravedad descrita por Newton resulta obsoleta para modelar el comportamiento de sus parámetros estelares. Por esta razón, se realizarán correcciones a las ecuaciones de estado para considerar los efectos de la curvatura del espacio-tiempo que provocan estos objetos. A continuación se realizará un estudio de los conceptos preliminares de relatividad general que determinan la métrica a utilizar para describir las ecuaciones de estado.

2.1. Marco relativista

Geoméricamente, el espacio-tiempo es representado por una variedad ("superficie") de cuatro dimensiones, cada punto en la variedad corresponde a un evento en el espacio-tiempo [35]. El tensor métrico o métrica g_{ij} es una función que sirve para encontrar la distancia entre dos puntos en un espacio dado.

En física generalmente se trabaja en coordenadas locales, las coordenadas locales, x , van desde 0 a 3 donde se toman en cuenta la coordenada temporal y las coordenadas espaciales, que por convención se elegirá la combinación (+ + + -). La métrica se puede escribir de la forma:

$$g = g \, dx \, dx$$

La métrica entonces es una combinación de productos tensoriales. Sea dx las componentes de un desplazamiento infinitesimal de coordenadas del cuatro vector, la métrica determina la invarianza cuadrada de un elemento de línea infinitesimal. Denotado así:

$$ds^2 = g \, dx \, dx \tag{2.1}$$

Aplicando la ecuación de Lagrange en términos de la métrica se obtiene la conexión afín [41]:

$$\Gamma_{jk}^i(q) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il}(q) \left(\frac{\partial g_{lk}(q)}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}(q)}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}(q)}{\partial q^l} \right)$$

O utilizando la notación de Einstein:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} [g_{lk,j} + g_{lj,k} - g_{jk,l}] \quad (2.2)$$

En este caso la métrica eleva los índices y la coma denota la derivación covariante respecto de la coordenada x . Esta función (2.2) define los símbolos de Christoffel () como un modo de conectar diferentes puntos en el espacio-tiempo.

Ahora, partiendo del concepto de desplazamiento paralelo para el caso más sencillo, donde se asume que se transporta un vector \mathbf{v} alrededor de una curva en un *espacio bidimensional euclidiano* siguiendo una trayectoria L

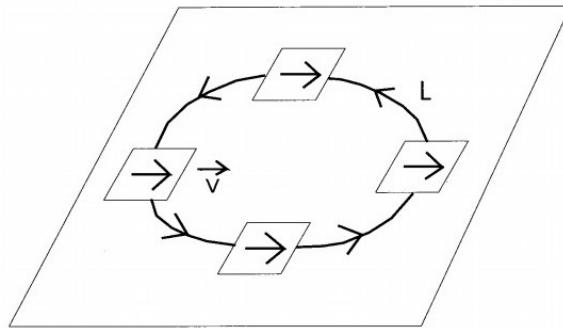


Figura 2.1. Transporte paralelo de un vector \mathbf{v} alrededor de una curva cerrada L en un espacio plano bidimensional euclidiano

El cambio neto alrededor de L es $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}$ en el caso de la Figura 2.1.

Ahora se extenderá el concepto de desplazamiento para un *espacio curvo*, como en la superficie de una esfera que se muestra en la Figura 2.2. En este caso, \mathbf{v} no regresa a donde comenzó (tiene una dirección diferente a la que tenía en el inicio), por lo que el cambio neto es $\Delta \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

En este caso se empleará la conexión afín (2.2) para obtener una forma diferencial no lineal de segundo orden que varía de punto a punto en la superficie [41] y se le denomina **tensor de curvatura de Riemann**.

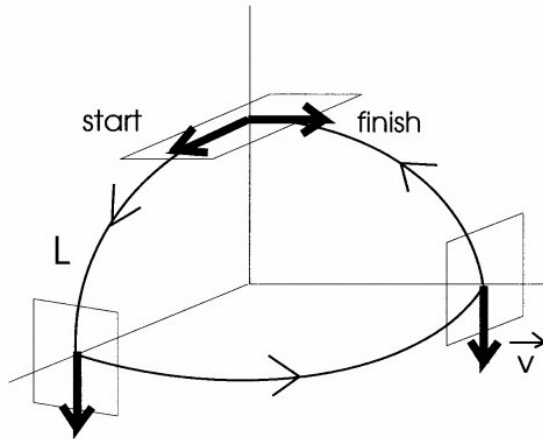


Figura 2.2. Transporte paralelo de un vector v alrededor de una curva particular L cerrada en la superficie de una esfera

$$R = \dots + \dots \quad (2.3)$$

En coordenadas locales, contrayendo el primer y el tercer índice del tensor de curvatura de Riemann se puede definir como

$$Ric = R_{ij} dx^i dx^j$$

Donde:

$$R = R \quad (2.4)$$

A este tensor se le denomina **tensor de Ricci**. Este tensor se puede contraer nuevamente y de él se obtiene la relación

$$R = g R \quad (2.5)$$

Al cual se le conoce como **escalar de Ricci**. Esta es la representación más simple de la invarianza de la curva en una variedad de Riemann. A cada punto en la variedad de Riemann le asigna un número real determinado por la geometría intrínseca de la variedad cerca de ese punto. Específicamente, el escalar de curvatura representa la cantidad por la cual el volumen de una pequeña esfera geodésica en una variedad riemanniana se desvía de la esfera estándar en un espacio euclidiano.

Utilizando la segunda identidad de Bianchi, se obtiene la relación

$$\begin{aligned} R^i_j - \frac{1}{2} R^i_j{}_{;i} &= 0 \\ G^i_{j;i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde \mathbf{G} es el tensor de Einstein, que es utilizado para expresar la curvatura de una pseudo variedad de Riemann. En este caso la **ecuación de campo de Einstein** se utilizará para describir la curvatura del espacio-tiempo de manera consistente con la conservación de energía y momento.

La ecuación (2.6) establece que el tensor de Einstein tiene divergencia cero ($G^i_{j;i} = 0$). Relacionando las dos expresiones de la ecuación se obtiene:

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (2.7)$$

donde se utilizaron las relaciones:

$$\begin{aligned} g^i_j &= (e^i \cdot e_j) = \delta^i_j \\ \delta^i_j &= g_{ji} g^{ii} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Una propiedad central del tensor de Einstein, será entonces que su divergencia covariante desaparece:

$$G^{ij}{}_{;i} = r_i G^{ij} = 0 \quad (2.9)$$

2.2. Tensor energía-momento

Asumiendo que un cuerpo está conformado por un fluido isotrópico sin fuerzas de corte y en reposo, utilizando una métrica estática con simetría esférica se puede modelar de manera general mediante tensor energía-momento así:

$$T = P g + \frac{P}{c^2} u u \quad (2.10)$$

donde P es la presión del fluido, ρ es la densidad de la masa propia, c^2 es la densidad de energía propia y u es el cuatro vector de velocidad en su forma covariante.

En el marco de referencia estacionario del fluido, y en los alrededores del origen

del marco de referencia estacionario se puede realizar un análisis no relativista. En este caso $u^i = (v^i/c)$ y $P = \rho c^2 \neq 0$. La ecuación (2.10) se reduce a:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= P \delta^{ij} + \rho v^i v^j \\ T^{4i} &= -\rho c v^i ; \quad T^{44} = -\rho c^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

y la forma no-relativista de las leyes de conservación de se describe así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} T^{ij} + \frac{\partial}{\partial ct} T^{i4} &= 0 ; \quad \text{Segunda ley de Newton} \\ \frac{\partial}{\partial x^j} T^{ij} + \frac{\partial}{\partial ct} T^{44} &= 0 ; \quad \text{Conservación de energía} \end{aligned} \quad (2.12)$$

La primera ecuación en (2.12) es simplemente la ley de Newton para el fluido, que conlleva a la ecuación básica de la hidrodinámica. La segunda ecuación en (2.12) es la ecuación de continuidad para la densidad de energía ρc^2 , que puede ser expresada como la conservación de energía. Estas relaciones se pueden combinar para expresar la conservación energía-momento en el marco de referencia estacionario como la relación tensorial:

$$T^{ij}{}_{;j} = \rho T^{i4}{}_{;4} = 0$$

Se utiliza una transformación de coordenadas (transformación de Lorentz) para volver al marco de referencia del laboratorio. Los índices contraídos no se transforman, por lo cual:

$$T^{ij}{}_{;j} = a^i{}_{\alpha} T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

De este modo, la divergencia covariante es nuevamente igual a la divergencia ordinaria, y se puede aseverar que se conserva la energía-momento en el marco de referencia de laboratorio:

$$T^{ij}{}_{;j} = \rho T^{i4}{}_{;4} = 0 \quad (2.13)$$

La divergencia covariante puede reexpresarse de la siguiente manera

$$T^{ij}{}_{;j} = \rho \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^q} (g T^{ij} + T^{ij} g) \quad (2.14)$$

2.3. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volko (TOV)

Queremos describir el comportamiento del campo gravitacional de materia muy densa estática, no rotante y por lo tanto deseamos obtener una serie de condiciones que nos permitan describir esta distribución tales ecuaciones se desarrollarán a continuación. Se comienza describiendo la métrica para la simetría axial, que será representada de la siguiente manera:

$$g = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B(r) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

(donde $A(r)$ y $B(r)$ son funciones que se determinarán utilizando las condiciones de frontera).

Se puede relacionar la ecuación de campo de Einstein (2.7) con el tensor de energía-momento (2.10) de la siguiente forma:

$$G = R - \frac{1}{2}Rg = T \quad (2.16)$$

De la ecuación (2.2) se obtienen los símbolos de Christoffel para esta métrica donde A' y B' son las derivadas respecto a la coordenada radial de las funciones A y B respectivamente.

Tabla 2.1. Conexión afín para simetría esférica con las coordenadas (r, θ, ϕ, ct) . Se tiene simetría de la siguiente manera $\Gamma^{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^{\beta\alpha\gamma}$ y la notación primada denota la derivada respecto a la coordenada r .

r	r	r
$r' = \frac{A'}{2A}$	$r' = \frac{r \text{sen}^2}{A}$	$r' = \frac{r}{A}$
$r'' = \frac{B'}{2A}$	$r'' = \frac{\text{sen} \cos}{A}$	$r'' = \frac{1}{r}$
$r''' = \frac{1}{r}$	$r''' = \frac{\cos}{\text{sen}}$	$r''' = \frac{B'}{2B}$
Todos los demás son 0		

Aplicando la métrica (2.15) a la ecuación (2.16) se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{B''}{2B} + \frac{1}{4} \frac{B'}{B} - \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} &= \frac{1}{2}(\dot{c}^2 - P)A \quad ; rr \\
1 - \frac{1}{A} + \frac{r}{2A} \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} &= \frac{1}{2}(\dot{c}^2 - P)r^2 \quad ; \\
\text{sen}^2 \theta - 1 - \frac{1}{A} + \frac{r}{2A} \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} &= \frac{1}{2}(\dot{c}^2 - P)r^2 \quad ; \quad (2.17) \\
\frac{B''}{2A} - \frac{1}{4} \frac{B'}{A} - \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \frac{B'}{A} &= \frac{1}{2}(\dot{c}^2 + 3P)B \quad ; 44 \\
0 &= 0 \quad ; \quad \notin
\end{aligned}$$

Se tienen tres ecuaciones acopladas, no lineales, de segundo orden con tres incógnitas $[A(r); B(r); (r)]$. Se sabe que fuera de (r) estas ecuaciones tienen solución, es la métrica de Schwarzschild.

Utilizando la relación (2.13) y la expresión (2.14) se obtiene la ecuación:

$$T_{\quad ;} = g \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial q} \left[\rho g(P + \dot{c}^2) \frac{u^u u^u}{c^2} + (P + \dot{c}^2) \frac{u^u u^u}{c^2} \right] \quad (2.18)$$

Debido a que la cuatro velocidad está definida de la siguiente forma: $\frac{u}{c} = 0; 0; 0; \frac{1}{B(r)}$ el primer término dentro del paréntesis será 0. Luego, para $\rho = r$ y utilizando los símbolos de Christoffel de la tabla (2.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
g^{rr} \frac{dP}{dr} + \Gamma_{44}^r (P + \dot{c}^2) \frac{u^4 u^4}{c^2} &= 0 \\
\frac{1}{A} \frac{dP}{dr} + \frac{B'}{2A} (P + \dot{c}^2) \frac{1}{B} &= 0
\end{aligned} \quad (2.19)$$

Despejando se obtiene la ecuación:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2} (P + \dot{c}^2) \frac{B'}{B} \quad (2.20)$$

Y realizando la combinación $(rr) = 2A + (44) = 2B + (\quad) = r^2$ de las ecuaciones de (2.17) se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{A''}{A^2 r} - \frac{1}{Ar^2} = -c^2$$

Para obtener la función $A(r)$ de la métrica:

$$\frac{d}{dr} \frac{r}{A} = 1 - c^2 r^2 \quad (2.21)$$

Esta ecuación se puede integrar utilizando condiciones de frontera:

$$\frac{r}{A} = 0 \quad ; \quad \text{cuando } r = 0$$

Y definiendo $M(r)$ y

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^r 4\pi s^2 \rho(s) ds \\ &= \frac{8\pi G}{c^4} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se obtiene la función $A(r)$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \quad (2.23)$$

Derivando la ecuación (2.23) y utilizando (2.20) en la ecuación () de (2.17) se obtiene la expresión para $P(r)$

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} - \frac{P(r)}{r} \frac{1 + P(r)}{1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}} + \frac{4\pi P(r)r^3}{M(r)c^2} \quad (2.24)$$

El límite newtoniano se obtiene cuando $c^2 \rightarrow \infty$ de la ecuación (2.24) toma la forma:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad ; \quad \text{límite newtoniano} \quad (2.25)$$

Las condiciones de frontera que acompañan a las ecuaciones TOV se describen a en la tabla 2.2. A continuación se detallan las consecuencias de estas condiciones.

1) Ya que la parte angular de la métrica está dado simplemente por las coordenadas esféricas, la circunferencia de las estrellas está dado por $2\pi R$ y el área de

Tabla 2.2. Condiciones de frontera para ecuaciones TOV

1)	$A(0)$; finito
2)	$P(R); (R) = 0$; define la superficie
3)	$P(r); (r) = 0$; $r > R$
4)	$B(1) = 1$; límite newtoniano

la superficie está dada por $4 R^2$. Esto provee una forma ambigua de determinar la coordenada R , el radio de la estrella.

2) La masa total de la estrella está definida por:

$$M = M(R) = \int_0^R 4 \pi s^2 \rho(s) ds \quad (2.26)$$

Esto se obtienen de las relaciones de (2.22) ya que se ha identificado con la métrica de Schwarzschild fuera de la estrella (2.23).

3) Para obtener $B(r)$ se integra la ecuación (2.20) y se utiliza la condición de frontera 4) de la tabla 2.2 para obtener

$$\int_r^R \frac{dr}{B(r)} = \int_r^R \frac{dr}{2 \left(\frac{dP}{P + c^2} \right)} \quad (2.27)$$

Despejando el diferencial de presión de la ecuación (2.24)

$$\frac{dP}{P + c^2} = \frac{G dr}{c^2 r^2} \frac{M(r) + 4 \pi r^3 P(r) = c^2}{1 - 2GM(r) = c^2 r} \quad (2.28)$$

Considerando que la presión fuera de la estrella es 0, se obtiene la ecuación para $B(r)$ fuera de la estrella

$$\begin{aligned} B(r) &= \exp \int_r^R \frac{2G}{c^2} \frac{dr}{r^2} \frac{M}{1 - 2GM = c^2 r} ; r > R \\ &= 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Se asumió que:

$$\frac{2GM}{c^2 R} = \frac{R_s}{R} < 1$$

para que no existan singularidades en la integral 2.29. Aquí R_s se refiere al radio de

Schwarzschild que está definido como el radio de una esfera tal que, si toda su masa estuviera comprimida dentro de esa esfera, la velocidad de escape de la superficie de la esfera sería igual a la velocidad de la luz; esta desigualdad implica que el radio de Schwarzschild se encuentra dentro de la estrella.

Obtenemos la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff representada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)r}{c^2} \right) \left(1 + \frac{4P(r)r^3}{M(r)c^2} \right)^{-1} && \text{; eq. hidrostático} \\ \frac{dm(r)}{dr} &= -4\pi r^2 \rho && \text{; continuidad de masa} \\ P(r) &= P(r) && \text{; ecuación de estado} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Estas ecuaciones TOV pueden ser aplicadas a objetos estelares condensados como estrellas de neutrones, donde los efectos relativistas son importantes.

La ecuación de estado en 2.30 ecuación de estado en este caso nos será útil para asociar los parámetros estelares que se pueden observar de la estrella con la materia por la que está conformada y así se puede conocer sus propiedades.

3. ECUACIONES DE ESTADO

Una ecuación de estado relaciona las variables que describen el estado de la materia cuando esta se encuentra en equilibrio. Son útiles para describir las propiedades de fluidos, mezclas de fluidos, sólidos y el interior de las estrellas.

3.1. Ecuación de estado para el interior de una estrella formada por un gas ideal

Matemáticamente, las condiciones para el equilibrio interno de una estrella pueden ser expresadas como cuatro ecuaciones diferenciales que gobiernan la distribución de masa, gas, presión, producción de energía y transporte de materia en la estrella. A continuación se desarrollan estas ecuaciones para poder estimar el comportamiento de una estrella en equilibrio con simetría esférica, compuesta de un gas ideal.

3.1.1. Equilibrio hidrostático

La fuerza de gravedad atrae el material estelar hacia el centro. Esta fuerza es contrarrestada por la fuerza de la presión térmica producida por el movimiento de las moléculas del gas. La primera condición de equilibrio es que estas fuerzas se contrarresten una con la otra en la misma medida [22].

Considerando un elemento de volumen cilíndrico a una distancia r desde el centro de la estrella (como se ilustra en la Figura 3.1). Su volumen es $dV = dA dr$, donde dA es el área base y dr es la altura; su masa es $dm = \rho dA dr$, donde $\rho = \rho(r)$ es la densidad del gas en el radio r . Si la masa dentro, a un radio r es M_r , la fuerza gravitacional en el elemento de volumen será:

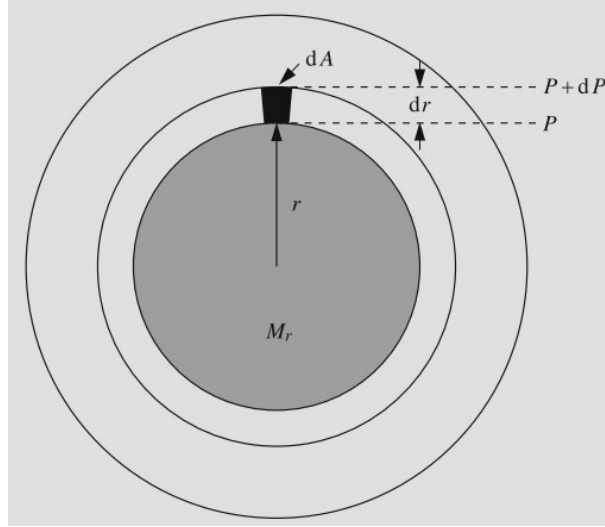


Figura 3.1. En el equilibrio hidrostático la suma de la presión gravitacional y la fuerza de la presión actuando sobre un elemento de volumen es cero

$$dF_g = \frac{GM_r dm}{r^2} = \frac{GM_r}{r^2} dA dr$$

donde G es la constante gravitacional. El signo menos indica que la fuerza tiene dirección hacia el centro de la estrella. Si la presión en la superficie interior del elemento del volumen es P y si en la superficie superior es $P + dP$, la fuerza de la presión actuando en el elemento es entonces:

$$dF_p = P dA - (P + dP) dA = -dP dA$$

Ya que la presión disminuye a medida que el radio aumenta, dP será negativa y la fuerza dF_p será positiva. La condición de equilibrio es tal que la fuerza neta actuando en el elemento de volumen es cero, i.e.:

$$0 = dF_g + dF_p = \frac{GM_r}{r^2} dA dr - dP dA$$

De lo que se obtiene la *ecuación de equilibrio hidrostático*:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \quad (3.1)$$

3.1.2. Distribución de masa

La ecuación que a continuación se describe, nos indica la masa contenida dentro de un radio dado. Considerando un cascarón esférico de grosor dr a una distancia r

del centro de la estrella. La masa es:

$$dM_r = 4 \pi r^2 \rho dr$$

de la que se obtiene la *ecuación de continuidad de la masa*

$$\frac{dM_r}{dr} = 4 \pi r^2 \rho \quad (3.2)$$

que implica que la ecuación diferencial que describe la razón de cambio de la masa depende de su área superficial y de la densidad del material que lo forma (asumiendo que esta es constante), además esta por ser de valor positivo implica que la masa M_r aumenta a medida que la distancia r es mayor.

3.1.3. Principio de energía

La energía potencial gravitacional total, de un cuerpo autogravitante está definido como el negativo de la cantidad total de energía requerida para dispersar todos los elementos de masa del cuerpo al infinito. El estado de energía potencial cero se toma como el estado final luego de la dispersión. En otras palabras, es la energía necesaria para formar la estrella, en su actual configuración, al coleccionar el material del universo. Por lo que representa el trabajo (negativo) hecho en, o por, el sistema y debe tomarse en cuenta para determinar la energía total de la estrella [18].

Se puede llegar al estado disperso al remover sucesivamente las capas de la estrella esférica. Al llegar a un punto donde se encuentre una masa $M_r + dM_r$ y cuando se pretende retirar la siguiente capa, que tiene una masa dM_r , desde un radio r^0 a $r^0 + dr^0$ se requieren $\frac{GM_r}{r^2} dM_r dr^0$ unidades de trabajo. Al ir de r al infinito se obtiene la contribución de

$$d = \int_r^\infty \frac{GM_r}{r^2} dM_r dr^0 = \frac{GM_r dM_r}{r}$$

Para dispersar completamente la estrella se requiere que se realice el procedimiento para todo dM_r o,

$$= \int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r \quad (3.3)$$

Para una esfera de densidad uniforme, de densidad constante, se obtiene la expresión:

$$= \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Si se desprecia el movimiento de la masa o fenómenos como turbulencia, la energía total de la estrella será más la energía interna total debida a procesos microscópicos. Sea E la energía interna específica local por unidad de material, se multiplica por M si se quiere la energía por unidad de volumen. La energía total, W , será:

$$W = \int_M^Z E dM_r + \dots = U + \dots \quad (3.4)$$

lo que define la energía interna total

$$U = \int_M^Z E dM_r \quad (3.5)$$

Este enunciado expresa que el estado de equilibrio de la estrella corresponde a un punto estacionario respecto a W . Esto significa que W para la estrella en equilibrio hidrostático es un extremo relativo a todas las otras posibles configuraciones que podría adoptar la estrella. Ahora se perturba la estrella de su estado original en un proceso adiabático. Esta condición se cumple si la perturbación se realiza lo suficiente rápido de modo que no ocurre una transferencia de calor entre los elementos de masa; por otro lado, también se requiere que la perturbación sea lo suficiente lenta de modo que la energía cinética del movimiento de las masas pueda ser ignorado.

El operador δ representa las perturbaciones ya sean locales o globales, entonces el equilibrio hidrostático es tal que

$$(\delta W)_{ad} = 0$$

donde el subíndice “ad” indica que el proceso es adiabático. De este modo, si suceden cambios adiabáticos arbitrarios, no alteran W , entonces el estado inicial de la estrella está en equilibrio hidrostático. Aplicado a la ecuación 3.4

$$(\delta W)_{ad} = (\delta U)_{ad} + (\delta \dots)_{ad}$$

Una perturbación δU causa que U cambie de la forma $U + \delta U$ con

$$U = U + \int_M E dM_r = U + \int_M E dM_r$$

El último paso se obtiene al considerar el cambio de la energía interna específica de un elemento de masa particular dM_r .

Ahora se considera E ; para un cambio infinitesimal y reversible, combinando la primera y la segunda ley de la termodinámica se obtiene

$$dQ = dE + P dV_p = T dS \quad (3.6)$$

Aquí dQ es el calor agregado al sistema, dE es el incremento de la energía interna específica y $P dV$ es el trabajo hecho por el sistema a sus alrededores si el volumen cambia por dV . Este volumen es el volumen específico, con

$$V = 1 = : \quad (3.7)$$

La entropía S , y Q , son cantidades específicas también. Si se reemplaza los diferenciales por S , entonces los requerimientos de un proceso adiabático ($S = 0$) inmediatamente indican que $(E)_{ad} = P V$. Entonces,

$$(U)_{ad} = \int_M P V dM_r$$

Donde se aplica el concepto de volumen específico de 3.7 y la ecuación de continuidad de la masa 3.2

$$V = \frac{1}{4} = \frac{4 r^2 dr}{dM_r} = \frac{d(4 r^3=3)}{dM_r} \quad (3.8)$$

Por simplicidad, se restringen todas las perturbaciones a aquellas que mantienen la simetría esférica. Por lo tanto, si el diferencial de masa dM_r se mueve, solo se mueve en dirección a una nueva posición $r + \delta r$. Perturbando V en 3.8 es equivalente a perturbar r o:

$$V = V + \delta V = \frac{d[4 (r + \delta r)^3=3]}{dM_r} = V + \frac{d(4 r^2 \delta r)}{dM_r} \quad (3.9)$$

para el primer orden en δr , donde se asume que $j r = r^j$ 1. LA variación de la energía interna total es:

$$(U)_{ad} = \int_M^Z P \frac{d(4 r^2 r)}{dM_r} dM_r \quad (3.10)$$

Ahora se introducen dos condiciones de frontera, la primera es que no se permite que el centro de la esfera simétrica se mueva, $r(M_r = 0) = 0$. La segunda es requiere que la presión en la superficie desaparezca.

Por lo tanto, $P_S = P(M_r = M) = 0$.

Ahora se integra 3.10 por partes, aplicando las condiciones de frontera, se obtiene

$$(U)_{ad} = \int_M^Z \frac{dP}{dM_r} 4 r^2 r dM_r:$$

Del análisis correspondiente para $(W)_{ad}$ se obtiene

$$\int_M^Z \frac{GM_r}{r + r} dM_r = \int_M^Z \frac{GM_r}{r^2} r dM_r$$

al primer orden de r después de la expansión del denominador en la primera integral.

Agrupando ambas ecuaciones, se obtiene

$$(W)_{ad} = \int_M^Z \frac{dP}{dM_r} 4 r^2 + \frac{GM_r}{r^2} r dM_r$$

Esta expresión debe ser cero cuando se recupera el equilibrio hidrostático, de modo que la expresión dentro de los corchetes también es cero, de lo que se obtiene la expresión:

$$\frac{dP}{dM_r} = \frac{GM_r}{4 r^4} \quad (3.11)$$

Para obtener un problema descrito adecuadamente se aplicarán las siguientes condiciones de a las ecuaciones diferenciales antes descritas:

No hay fuentes de energía o masa en el centro dentro del radio $r = 0$; por lo que $M_0 = 0$

La masa total dentro del radio R de la estrella tiene un valor fijo, $M_R = M$

La presión en la superficie estelar tiene un valor determinado, P_R . Estos valores son muy pequeños en comparación con los valores en el interior y por lo tanto en general es suficiente tomar $P_R = 0$.

3.1.4. El Modelo de densidad constante

Ahora se construye un modelo estelar donde la densidad es constante en todas partes, que es un modelo bastante ilustrativo para conocer el comportamiento de las variables estelares a medida que varía su radio. Si se elige $\rho = \rho_c = \text{constante}$, donde "c" significa densidad en el centro, entonces de la ecuación de continuidad de la masa 3.2 se obtiene el valor $M_r = \frac{4}{3} r^3 \rho_c$ para determinado r entre 0 y R. En el punto que $r = R$, $M_r = M$ donde M es la masa total de la estrella. La relación entre ambas masas es entonces:

$$M_r = \frac{r^3}{R^3} M \quad (3.12)$$

Esta expresión se sustituye en la ecuación 3.11, de modo que el gradiente de presión puede ser representado de la forma:

$$\frac{dP}{dM_r} = \frac{GM}{4 R^4} \frac{M_r}{M} \quad 1=3$$

Esta ecuación nos indica que a medida que la masa contenida en el radio r aumenta, la presión ejercida por las partículas que componen la estrella disminuye.

La ecuación anterior y las ecuaciones 3.1, 3.2 describen el comportamiento de la estrella a medida que recorremos desde el centro de núcleo hasta su radio externo.

3.1.5. Teorema del Virial

Se considera el producto escalar $\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$ donde \mathbf{p}_i es el vector momento de una partícula de masa m_i localizada en la posición \mathbf{r}_i , y la suma sobre todas las partículas que componen la estrella. Si la mecánica es no relativista, reconocemos que

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{d}{dt} (m_i r_i^2) = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2}$$

donde I es el momento de inercia, $I = \sum_i m_i r_i^2$. Por otro lado, la derivada de la expresión original da como resultado

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

El último término es solamente $\sum_i m_i v_i^2$ (v_i es la velocidad de la partícula i) y

es igual al doble de la energía cinética, K , de todas las partículas libres en la estrella. Además, consideraremos la ley de Newton,

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$$

donde \mathbf{F}_i es la fuerza aplicada a una partícula i , la cual tomaremos como la fuerza de la gravedad. Agrupando estas ecuaciones, se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \quad (3.13)$$

El último término es el virial de Clausius, pero para hacer uso de este se debe especificar qué significa $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$.

Este término en 3.13 es la interacción gravitacional mutua de todas las partículas en la estrella (En este caso solo se considerará la contribución por este tipo de fuerza). Para tratar la gravedad, sea \mathbf{F}_{ij} la fuerza gravitacional en la partícula i debido a la presencia de la partícula j . Ya que estas fuerzas son iguales y opuestas, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. [18] Sabemos que la fuerza gravitacional descrita por Newton toma la siguiente forma

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

donde r_{ij} es la distancia entre partículas $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. La contribución gravitacional al virial será entonces:

$$\sum \mathbf{F}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = -\sum \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \text{Virial}$$

podemos apreciar que esta expresión es equivalente a la expresión descrita en 3.3 que representa el negativo del trabajo requerido para dispersar las partículas al infinito, por lo que tenemos la siguiente expresión

$$\text{Virial} = -I$$

Y combinado con la ecuación 3.13 se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K - I \quad (3.14)$$

conocido como el “teorema del virial” o simplemente “virial” [18].

Se puede utilizar el Teorema del Virial para obtener otras relaciones; se con-

siderará una estrella de densidad uniforme y temperatura compuesta por un gas monoatómico ideal. La densidad de energía interna es

$$E = \frac{3}{2}nkT = \frac{3}{2} \frac{N_A kT}{\mu} \quad (3.15)$$

donde n es la densidad del número de partículas libres, k es la constante de Boltzmann, N_A es la constante de Avogadro y μ es el peso molecular promedio (usualmente en una) por ion o átomo de la mezcla estelar [18]. La cantidad E se puede describir en términos de las siguientes cantidades

$$n = \frac{N_A}{\mu}$$

La presión de gas ideal se podrá describir en términos de E de la siguiente forma

$$P = nkT = \frac{N_A kT}{\mu} \quad (3.16)$$

A esta ecuación se le conoce como **ley de los gases ideales** que describe las variables de estado para un sistema conformado por un gas ideal.

A continuación se estudiará el caso en que la materia se encuentra altamente compacta dentro de un volumen pequeño, lo cuál tendrá un efecto en la curvatura del espacio-tiempo como se menciona en el capítulo 2.

3.2. Ecuación de estado fría por debajo del *Neutron Drip*

3.2.1. Conceptos preliminares de Termodinámica

Convencionalmente, las cantidades termodinámicas hacen referencia a un número de partículas N en un volumen V . La invarianza relativista es más transparente si todas las cantidades describen medidas realizadas en un marco de referencia local que se mueve en conjunto con el fluido. [35] Ahora imaginamos un marco de referencia local de Lorentz que se mueve con la misma velocidad que algún elemento del fluido. Sea n la densidad de número de bariones medidos en este marco de referencia y sea ϵ la densidad de energía total (incluyendo la energía de la masa en reposo). Entonces $\epsilon = n\epsilon_0$ es la energía por barión. Es conveniente definir las cantidades de esta

manera ya que esta es una cantidad conservada. La primera ley de la Termodinámica toma la siguiente forma

$$dQ = d \frac{u}{n} + P d \frac{1}{n} \quad (3.17)$$

donde dQ es el calor obtenido por barión, P es la presión y $1/n$ es el volumen por barión.

Si un proceso ocurre en un elemento de fluido que está en equilibrio todo el tiempo, entonces

$$dQ = T ds \quad (3.18)$$

donde s es la entropía por barión y T es la temperatura. Combinando las ecuaciones 3.17 y 3.18 se obtiene una ecuación que representa el equilibrio termodinámico

$$d \frac{u}{n} = P d \frac{1}{n} + T ds \quad (3.19)$$

En general, la densidad de energía de un sistema que contiene diferentes especies de partículas depende de la cantidad relativa de cada especie, así como del volumen ($1/n$) y la entropía. Si se define la concentración de la i -ésima especie de la partícula con

$$Y_i = \frac{n_i}{n} \quad (3.20)$$

donde n_i es la densidad de número de partículas i , entonces la densidad de energía será una función que dependerá del volumen, entropía y esta densidad ($u = u(n; s; Y_i)$)

Por lo que de manera general se puede escribir

$$d \frac{u}{n} = P d \frac{1}{n} + T ds + \sum_i Y_i dY_i \quad (3.21)$$

donde

$$P = \frac{\partial u(n)}{\partial (1/n)} = n^2 \frac{\partial u(n)}{\partial n} \quad (3.22)$$

$$T = \frac{\partial u(n)}{\partial s} \quad (3.23)$$

y

$$i \quad \frac{\partial(\text{"}n)}{\partial Y_i} = \frac{\partial \text{"}}{\partial n_i} \quad (3.24)$$

La cantidad μ_i es llamada *potencial químico* de la especie i . Tiene la interpretación del cambio de densidad de energía para una variación unitaria de la densidad de número de especies i , mientras el volumen, entropía y todas las densidades se mantienen constantes.

En equilibrio, las reacciones entre las partículas producen un estado de balance detallado donde cada reacción está balanceada por su inversa y la concentración de cada especie se mantiene constante. Por lo que en estado de equilibrio, las concentraciones Y_i no son independientes de las otras cantidades termodinámicas. [35] Se pueden determinar las relaciones de equilibrio de la siguiente manera:

Considérese el caso especial que un sistema está infinitesimalmente cerca de su equilibrio. Pueden reacciones que permitan que el sistema alcance el equilibrio, pero el sistema se debe mantener aislado térmicamente y a un volumen constante ($dn = 0$) de modo que no se realice un trabajo al sistema. En este caso, la ecuación 3.17 da como resultado $(d(\text{"}n)) = 0$; lo que significa que la energía del sistema se mantiene constante. La entropía se produce por las reacciones, pero, debido a que la entropía es máxima en su equilibrio, $ds = 0$. Lo que implica que la ecuación 3.19 tiene la siguiente forma cuando el sistema se encuentra en equilibrio

$$\sum_i \mu_i dY_i = 0 \quad (3.25)$$

Ahora se considera el caso general donde el sistema no está necesariamente aislado, y el sistema puede realizar trabajo. Si el sistema fuera a alcanzar el equilibrio mediante equilibrio cuasiestático, entonces $T ds = dQ$. En general, la segunda ley implica

$$dQ \geq T ds$$

Lo que significa que la ecuación de conservación de energía (3.17) implica

$$d \left(\frac{\text{"}}{n} \right) + P d \left(\frac{1}{n} \right) = T ds \quad (3.26)$$

Si se alcanza el equilibrio a n y S constante, entonces la ecuación 3.26 se convierte en

$$d\text{"} = 0$$

El estado de equilibrio corresponde al cese de cambio de μ (i.e. $d\mu = 0$), que es un mínimo de μ a n y s fijos.

Similarmente, si T y n se mantienen constantes, la ecuación 3.21 se convierte en

$$df = 0$$

donde

$$f = \frac{\mu}{n} - Ts \quad (3.27)$$

que es la energía libre de Helmholtz por barión.

Si T y P se mantienen constantes (que es la situación más común), entonces

$$dg = 0$$

donde

$$g = \frac{\mu + P}{n} - Ts \quad (3.28)$$

es la *energía libre de Gibbs* por barión. El equilibrio corresponde a un mínimo de esta energía a T y P constantes.

Utilizando la ecuación 3.21, podemos hallar con la ecuación 3.28 que

$$dg = \frac{1}{n} dP - s dT + \sum_i Y_i dY_i \quad (3.29)$$

En consecuencia, el requerimiento de que g sea mínimo a T y P constante es una implicación de la ecuación 3.25.

3.2.2. Ecuación de estado para un gas ideal completamente degenerado de Fermi

Una enana blanca o una estrella de neutrones aisladas se enfrían completamente, llegando a la temperatura cero, y es la presión asociada con la materia cuando $T = 0$ que permite que estas estrellas no colapsen por la fuerza gravitacional. La ecuación de estado de materia fría degenerada es la que está descrita por una sola

especie de fermiones ideales (que no interactúan entre ellos).

En la teoría cinética, la densidad de número en el espacio de fase de cada especie de partícula, $dN = \frac{g}{h^3} d^3p$ provee una descripción completa del sistema. Equivalentemente, se puede especificar la función de distribución adimensional en el espacio de fase definida por:

$$\frac{dN}{d^3p} = \frac{g}{h^3} f \quad (3.30)$$

donde h^3 es el volumen en la celda en el espacio de fase, y g es el peso estadístico — esto es, el número de estados de una partícula con un valor dado de momento p , para partículas masivas $g = 2S + 1$ ($S = \text{spin}$) para fotones $g = 2$, para neutrinos $g = 1$. La función f indica el número ocupación promedio de una celda en el espacio de fase.

La densidad del número de cada especie de partículas está dado por

$$n = \int \frac{dN}{d^3p} d^3p \quad (3.31)$$

donde la integral se extiende sobre todos los momenta. La densidad de energía está dada entonces por

$$u = \int E \frac{dN}{d^3p} d^3p \quad (3.32)$$

donde

$$E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}; \quad m = \text{masa de la partícula} \quad (3.33)$$

Nótese que u incluye la energía de la masa en reposo de las partículas. La presión de un sistema con una distribución isotrópica de momentum está dada por

$$P = \frac{1}{3} \int p v \frac{dN}{d^3p} d^3p \quad (3.34)$$

donde la velocidad es $v = pc^2/E$. Esta relación establece que la presión es un flujo de momento y el factor $\frac{1}{3}$ viene de la isotropía.

Para un gas ideal en equilibrio, f tiene la forma simple de

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT] + 1} \quad (3.35)$$

donde el signo superior se refiere a fermiones (distribución de Fermi-Dirac) y el signo inferior se refiere a los bosones (distribución de Bose-Einstein). En esta ecuación k es la constante de Boltzmann y μ es el potencial químico.

Para densidades de partículas lo suficiente lentas y altas temperaturas, $f(E)$ se reduce a:

$$f(E) = \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) \quad (3.36)$$

la distribución Maxwell-Boltzmann. En este caso $f(E) \ll 1$.

Para fermiones completamente degenerados ($T \rightarrow 0$, i.e., $\mu \approx kT \rightarrow 0$) es llamada la *energía de Fermi*, E_F y

$$f(E) = \begin{cases} 1 & E < E_F \\ 0 & E > E_F \end{cases} \quad (3.37)$$

Una enana blanca o estrellas de neutrones finalmente se enfría a la temperatura cero y es la presión asociada con la materia a $T = 0$ que previene el colapso gravitacional de estas estrellas. La ecuación de estado para materia degenerada más sencilla es aquella que se obtiene al considerar fermiones ideales (que no interactúan) de una misma especie.

Con el fin de delimitar, se asumirá un gas conformado por neutrones a temperatura cero. Este gas se puede asumir como ideal si se ignoran las interacciones electrostáticas.

Si se define el *momento de Fermi*, p_F , como

$$E_F = (p_F^2 c^2 + m_n^2 c^4)^{1/2} \quad (3.38)$$

de las ecuaciones 3.31 y 3.37 se obtiene

$$n_n = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8}{3h^3} p_F^3 \quad (3.39)$$

Es conveniente definir el momento de Fermi como “parámetro de relatividad”, χ , por

$$\chi = \frac{p_F}{m_n c} \quad (3.40)$$

Entonces

$$n_n = \frac{1}{3} \frac{2}{2} \frac{3}{3} x^3 \quad (3.41)$$

donde $\lambda_n = \hbar/m_n c$ es la longitud de onda de Compton para un neutrón.

La presión está dada por la ecuación 3.34,

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{(p^2 c^2 + m_n^2 c^4)^{1/2}} 4 p^2 dp \\ &= \frac{8}{3 h^3} \int_0^x \frac{x^4 dx}{(1 + x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{m_n c^2}{3} (x) \\ &= 1.42180 \cdot 10^{24} (x) Pa \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde

$$(x) = \frac{1}{8} \frac{1}{2} (x(1 + x^2)^{1/2} (2x^2 - 1) + \ln[x + (1 + x^2)^{1/2}]) \quad (3.43)$$

Similarmente, de la ecuación 3.32 se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} (p^2 c^2 + m_n^2 c^4)^{1/2} 4 p^2 dp \\ &= \frac{m_n c^2}{3} (x) \end{aligned} \quad (3.44)$$

donde

$$(x) = \frac{1}{8} \frac{1}{2} (x(1 + x^2)^{1/2} (1 + 2x^2) + \ln[x + (1 + x^2)^{1/2}]) \quad (3.45)$$

Incluso en aplicaciones donde los neutrones degenerados contribuyen en su mayor parte a la presión, la densidad usualmente es dominada por la masa en reposo de los iones. Esta densidad es

$$\rho_0 = \sum_i n_i m_i \quad (3.46)$$

donde m_i es la masa de la especie i de ion.

Ahora, en el caso de los electrones, si se define la masa en reposo promedio como

$$m_B = \frac{1}{n} \sum_i n_i m_i = \frac{\sum_i n_i A_i}{\sum_i n_i} \quad (3.47)$$

donde A_i es el número bariónico (número entero de peso atómico) de la i -ésima especie, entonces

$$\rho_0 = n m_B = \frac{n_e m_B}{Y_e} \quad (3.48)$$

Aquí Y_e es el número promedio de electrones por barión.

A veces la cantidad

$$\mu_e = \frac{m_B}{m_u Y_e} \quad (3.49)$$

(peso molecular promedio por electrón) es utilizado, de modo que

$$\rho_0 = \mu_e m_u n_e = 0.97395 \cdot 10^9 \mu_e n_e \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (3.50)$$

o

$$\rho_0 = 1.0088 \cdot 10^3 \frac{\rho_0}{\mu_e} \quad (3.51)$$

donde ρ_0 tiene dimensionales de $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$. Usualmente la diferencia entre m_B y m_u en la ecuación 3.49 puede ignorarse.

De manera similar, la cantidad μ (peso molecular promedio) es usualmente utilizada para especificar la densidad. Está definida de la siguiente manera

$$\mu = \frac{1}{n_e + \sum_i n_i} \sum_i n_i m_u \quad (3.52)$$

y por la ecuación 3.48 se obtiene

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{Y_e + \sum_i Y_i} \sum_i Y_i \frac{m_u}{m_B} \quad (3.53)$$

El peso molecular promedio es particularmente útil en el límite no degenerado, cuando la presión está dada por la ley de gas ideal (como se menciona en la sección 3.1 en la ecuación 3.15)

$$\begin{aligned}
 P &= (n_e + \sum_i n_i) kT \\
 &= \frac{\rho}{m_u} kT
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

Para el caso límite donde el parámetro de relatividad es bajo, $x \ll 1$ (neutrones no relativistas) se tiene

$$\rho \approx \frac{1}{15} \rho_0 x^5 + \frac{5}{14} \rho_0 x^7 + \frac{5}{24} \rho_0 x^9 \dots$$

$$\rho \approx \frac{1}{3} \rho_0 x^3 + \frac{3}{10} \rho_0 x^5 + \frac{3}{56} \rho_0 x^7 \dots$$

mientras que para $x \gg 1$ (neutrones relativistas) se tiene

$$\rho \approx \frac{1}{12} \rho_0 x^4 + x^2 + \frac{3}{2} \ln 2 x \dots$$

$$\rho \approx \frac{1}{4} \rho_0 x^4 + x^2 + \frac{1}{2} \ln 2 x \dots$$

La ecuación 3.46, utilizando la ecuación 3.41 se expresa de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= m_n n_n \\
 &= \frac{m_n}{3} \frac{1}{3} x_n^3
 \end{aligned}
 \tag{3.55}$$

La ecuación de estado puede se puede expresar en la forma *poliprótica*

$$P = K \rho_0
 \tag{3.56}$$

donde existen dos casos limitantes para K y ρ_0 :

1. Neutrones no relativistas, $\rho_0 \approx 6 \cdot 10^{18} \text{ kg=m}^3$, $x \ll 1$, $\rho \approx \frac{1}{15} \rho_0 x^5$

$$K = \frac{5}{3} \rho_0^{-1/3} = \frac{3^{2=3} 4=3}{5} \frac{\rho_0^{-2}}{m_n^{8=3}}
 \tag{3.57}$$

2. Neutrones extremadamente relativistas, $\rho_0 \approx 6 \cdot 10^{18} \text{ kg=m}^3$, $x \gg 1$, $\rho \approx \frac{1}{12} \rho_0 x^4$

$$K = \frac{4}{3} \rho_0^{-1/3} = \frac{3^{1=3} 2=3}{4} \frac{\rho_0^{-2}}{m_n^{4=3}}
 \tag{3.58}$$

Utilizando la ecuación de estado propuesta (3.56) y las constantes obtenidas en este capítulo se procederá a resolver las ecuaciones TOV, utilizando el método numérico Runge Kutta de cuarto orden que se detallará en el siguiente capítulo.

4. MÉTODO NUMÉRICO

Ya que se tienen las ecuaciones diferenciales (2.30) que pueden describir las variables estelares de una estrella de neutrones, la cual es extremadamente densa por lo que causa una curvatura del espacio tiempo, se procederá a resolverlas utilizando las ecuaciones de estado para materia degenerada que fueron desarrolladas en el capítulo 3. Debido a que el objetivo del presente trabajo es analizar los resultados obtenidos de las ecuaciones TOV más allá que la resolución de estas, se utilizarán métodos numéricos para resolverlas. A continuación se describirá el desarrollo y las consideraciones que se tomaron para la utilización de este método.

4.1. Método de Runge Kutta

Primero consideremos el método de Euler, que es un procedimiento de integración numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) a partir de un valor inicial dado. Debido a que este método es de primer orden, su error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso y el error global es proporcional al tamaño del paso, de la siguiente forma:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n; y_n) \quad (4.1)$$

Esta fórmula avanza de una solución de x_n a una de $x_{n+1} = x_n + h$, esta es asimétrica: Avanza a la solución a través de un intervalo h , pero usa la información de la derivada solo al principio del intervalo (como se muestra en la Figura 4.1). Esto significa que el paso del error es únicamente un orden de magnitud más pequeño que la corrección, i.e. $O(h^2)$ sumado a la ecuación 4.1.

Consideraremos ahora utilizar un paso como el de la ecuación 4.1 para tomar un paso inicial al punto medio del intervalo y entonces utilizar ambos, el valor de x y y en el punto intermedio para obtener el paso “real” a través de todo el intervalo (ver imagen 4.2).

En las ecuaciones:

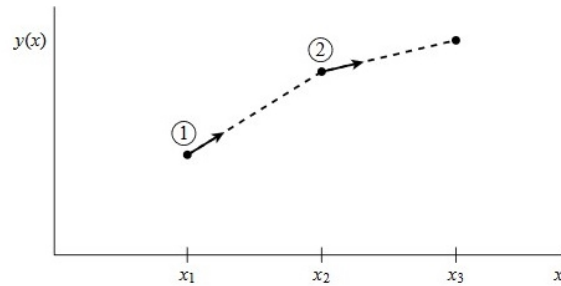


Figura 4.1. Este es el método más simple para integrar una EDO, la derivada en el punto inicial de cada intervalo se extrapola para obtener el siguiente valor de la función. El método tiene precisión de primer orden.

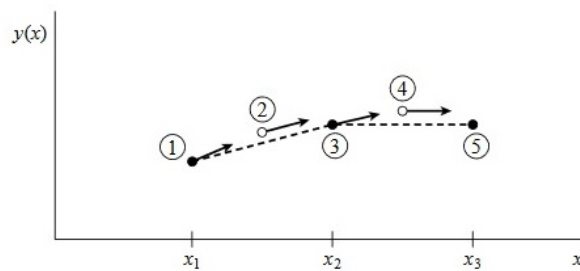


Figura 4.2. En este método se obtiene precisión de segundo orden al utilizar la derivada inicial en cada paso para obtener un punto a la mitad del intervalo, luego se utiliza la derivada del punto medio a través del tamaño total del intervalo. En la figura, los puntos de color sólido representan valores finales de la función, mientras que los puntos sin relleno representan valores de la función que se descartan una vez sus derivadas han sido calculadas y utilizadas.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n; y_n) \\
 k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h; y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\
 y_{n+1} &= y_n + k_2 + O(h^3)
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Como se indica en el término de error de la última ecuación de 4.2, esta operación cancela el término de error de primer orden. Al procedimiento explicado en 4.2 se le denomina método Runge Kutta de segundo orden o método del punto medio.

Siguiendo este procedimiento se pueden eliminar los términos de error orden por orden. Esta es la idea básica del método de Runge Kutta. De modo que estudiaremos ahora el método de Runge Kutta de cuarto orden, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n; y_n) \\
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf(x_n + h; y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

El método de Runge Kutta de cuarto orden requiere la evaluación de los cuatro valores del lado derecho por paso h (como se muestra en la Figura 4.3).

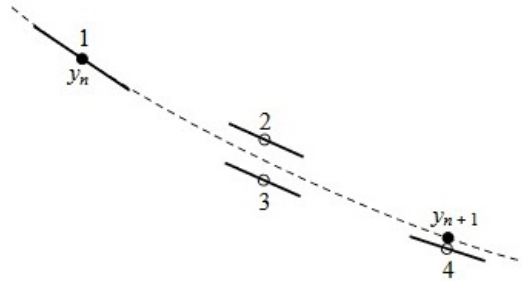


Figura 4.3. En cada paso la derivada se evalúa cuatro veces: una en el punto inicial, dos veces en los puntos intermedios de prueba y una vez en el punto final de prueba. El valor de la función en el final (El punto de relleno sólido y_{n+1}) se calcula con estas derivadas.

La aseveración “El método de cuarto orden de Runge Kutta es generalmente superior al de segundo orden” es verdadero, pero se debe reconocer como una aseveración acerca de la práctica contemporánea de la ciencia, en vez de una aseveración estrictamente matemática [32].

4.2. Algoritmo empleado

En el caso de las ecuaciones TOV (2.30), que son un grupo de ecuaciones ordinarias diferenciales acopladas no lineales, se pueden obtener resultados precisos mientras se escoja un tamaño de paso razonablemente pequeño. A continuación se evaluará el comportamiento de una estrella descrita por una ecuación de estado para un gas completamente degenerado de Fermi no relativista en donde se toma un rango de 0.1 a 1750 km para con un paso de 6000 km

Valores iniciales (cuando $r = 0$):

$\rho_0 =$ Valores entre 0 y $6 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}^3$ (rango estimado para materia degenerada no relativista [35])

$P_0 =$ El valor inicial de presión será obtenido por medio la ecuación de estado dada en 2.30, utilizando la densidad para materia degenerada no relativista.

$m_0 = 0$, ya que no se ha encerrado algún volumen de la estrella no existe masa encerrada.

Se define como P' la ecuación diferencial de la presión respecto al radio, M' como la ecuación diferencial de la masa respecto al radio y h sea el paso utilizado:

$$P_0 = K \rho_0$$

$$P_n = P_0$$

$$m_n = m_0$$

$$k_1 = P'(m_n; P_n; r_n)$$

$$l_1 = M'(m_n; P_n; r_n)$$

$$k_2 = P' \left(m_n + \frac{l_1}{2}; P_n + \frac{k_1}{2}; r_n + \frac{h}{2} \right)$$

$$l_2 = M' \left(m_n + \frac{l_1}{2}; P_n + \frac{k_1}{2}; r_n + \frac{h}{2} \right)$$

$$k_3 = P' \left(m_n + \frac{l_2}{2}; P_n + \frac{k_2}{2}; r_n + \frac{h}{2} \right)$$

$$l_3 = M' \left(m_n + \frac{l_2}{2}; P_n + \frac{k_2}{2}; r_n + \frac{h}{2} \right)$$

$$k_4 = P'(m_n + l_3; P_n + k_3; r_n + h)$$

$$l_4 = M'(m_n + l_3; P_n + k_3; r_n + h)$$

$$P_{n+1} = P_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

$$M_{n+1} = m_n + \frac{l_1}{6} + \frac{l_2}{3} + \frac{l_3}{3} + \frac{l_4}{6}$$

Se seguirá el mismo algoritmo en el caso donde se asume que la estrella está formada de un gas degenerado de Fermi extremadamente relativista, se varía el rango de radios que corresponde de 0.1 a 17 km utilizando un paso de 0.6 km , así como los valores de densidades ρ_0 empleados. Estos valores se estiman que son mucho mayor a $6 \cdot 10^{18} \text{ kg=m}^3$ [35].

5. RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos al resolver las ecuaciones diferenciales de las variables estelares, primero utilizando la aproximación newtoniana acompañada de la ecuación de estado para un gas ideal; luego se toma en consideración los efectos relativistas de los objetos compactos en el espacio tiempo debido a su alta densidad y se proponen dos ecuaciones de estado para describir la materia en este estado, la primera aproximación será para materia degenerada no relativista y la segunda será para materia degenerada extremadamente relativista. Esto con el fin de obtener los valores críticos de radio y posteriormente de masa para contrastarlos con mediciones recientes de masas de estrellas de neutrones.

5.1. Estrella de neutrones compuesta por un gas ideal

Este ejemplo será de carácter ilustrativo y a su vez sigue siendo una buena aproximación en casos estelares de mediana masa. Este caso servirá para conocer la tendencia de las variables estelares a medida que se barre el radio. Para resolver este caso se asume una estrella formada por un gas ideal, esférica, de densidad constante que se encuentra en equilibrio hidrostático. Por tal razón es válido considerar que la aproximación newtoniana describe correctamente el comportamiento de ésta.

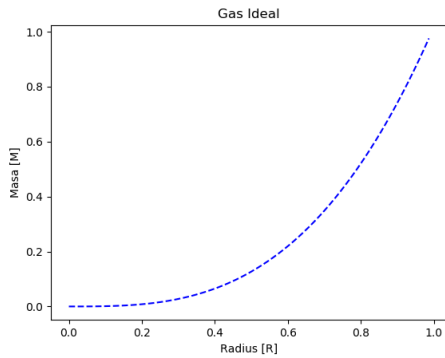


Figura 5.1. Figura de masa vs radio de una estrella de radio R formada de un gas ideal

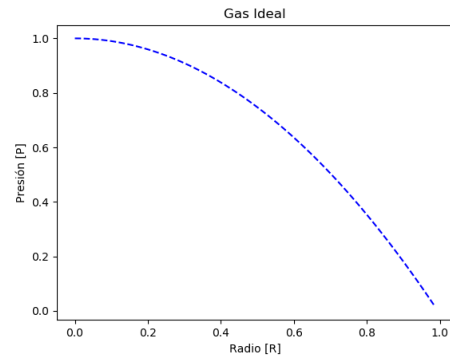


Figura 5.2. Figura de presión vs radio de una estrella de radio R formada de un gas ideal

Debido a la naturaleza ilustrativa de este caso, en ambas figuras los parámetros estelares se presentan en forma porcentual, siendo 1 el 100% del tamaño total de la estrella, “ R ” el radio total de la estrella, “ M ” el valor de masa crítica de la estrella y “ P_0 ” el valor de presión crítica de la estrella. Se puede observar que para un radio R se alcanza la masa total M y que se alcanza un valor de presión $P = 0$.

En la Figura 5.1 se puede apreciar el comportamiento de la masa contenida por la estrella a medida que aumenta el radio hasta llegar a R . Esta tiene un comportamiento exponencial ascendente, el cual es consistente con la ecuación diferencial 3.2 llegando a un límite dado por el radio total de la estrella, debido que a partir de este valor, la ecuación no está definida.

La Figura 5.2 describe la presión que ejercen las partículas del gas hacia afuera de la estrella. Como se puede inferir de la ecuación 3.1, ésta tiene un comportamiento decreciente, alcanzando un valor de 0 cuando este llega al radio R de la estrella, debido a que las partículas en este punto no ejercen presión alguna, lo cual define la superficie de la estrella.

5.2. Mediciones recientes de masas de estrellas de neutrones

Se presentan algunos datos de masas y radios de estrellas de neutrones que se conocen actualmente. Con el crecimiento de la capacidad observacional en diferentes

longitudes de onda tales como Arecibo [23] y Parkes [7] en radio, Geminis Sur [7], entre otros; así como los avances computacionales han permitido un aumento en el rango de descubrimiento y la sincronización de los radio púlsares en binarias en los últimos años, lo que ha resultado en un gran número de mediciones de masas. Estos descubrimientos han demostrado que la distribución de masas para las estrellas es mucho mayor de lo que se creía, ya que se conocen 3 púlsares con masas determinadas, las cuales se encuentran en un rango de masa de 1.9 a $2.0 M_{\odot}$. Para los valores de radios, las largas listas de datos de satélites de rayos-X así como el progreso en el modelado teórico conllevó a un progreso significativo en las mediciones, ubicándolos en un rango entre 9.9 - $11.2 km$ y ha disminuido las incertezas debido a un mejor entendimiento de las fuentes de error sistemático [30].

La gran mayoría de mediciones precisas de masa de estrellas de neutrones se han llevado realizado a través de observaciones de radio de púlsares rotantes. Actualmente se conocen más de 2500 en la Galaxia [26], de los cuales la mayoría son detectables como radio púlsares, pero algunos se pueden observar en rayos-X y un número creciente pueden ser detectados en rayos gamma [2][11].

Cerca del 90 % de los radio púlsares están aislados. Sus masas no pueden ser medidas ya que todos los métodos se basan en la medición precisa de los movimientos orbitales a través de la llegada de las pulsaciones observadas. El resto de 250 púlsares se ubican en sistemas binarios, en los cuales se basan las observaciones.

5.2.1. Púlsares de milisegundos

El término “púlsares de milisegundos” (MSPs) se refiere a los púlsares con periodos de espín en el rango $1.39 < P < 20 ms$ y $\dot{P} < 10^{-19}$. Estos sistemas han sido reciclados por una fase de acreción larga en un sistema binario de rayos-X de baja masa (LMXB).

Las mediciones de masa para estos sistemas se llevan a cabo por mediciones de espectroscopía. Para algunos MSPs, particularmente aquellos con periodos orbitales pequeños, la acompañante es ópticamente brillante. Esto ha permitido determinar valores fiables de masa para ambos componentes al estudiar las líneas de Balmer producidas por el hidrógeno en la atmósfera de las enanas blancas.

5.2.2. Estrellas de neutrones en binarias de rayos-X

También se han realizado mediciones para estrellas de neutrones con acompañantes de gran y baja masa estelar utilizando las observaciones de estas binarias en rayos-X y longitud de onda visible. Dependiendo de la masa de la acompañante será el método utilizado para realizar las mediciones.

En los sistemas con acompañantes de gran masa, de las observaciones en rayos-X del pulsar se obtiene el periodo de la binaria, la excentricidad de la órbita, eje semi mayor de la órbita de la estrella de neutrones, entre otros. Con estos parámetros se pueden obtener los parámetros fundamentales de la binaria que incluyen la masa de la estrella de neutrones. Estas mediciones son usualmente menos precisas que las que se obtienen de *radio pulsar timing* y existen varias fuentes de incertezas sistemáticas.

Los estudios espectrales de brotes de rayos-X de estrellas de neutrones proveen simultáneamente mediciones de masas y radios. Estos valores de masa son menos precisos que los que se obtienen por *pulsar timing*, sin embargo proveen un valor estimado de masa para las estrellas de neutrones en una población diferente.

Sistema	M [M_{\odot}]	Referencia
Púlsares de milisegundos con acompañantes enanas blancas y órbitas con baja excentricidad		
J0621+1002	$1.53^{+0.10}_{-0.20}$	[23]
J1738+0333	$1.47^{+0.07}_{-0.06}$	[7]
B1855+09	$1.58^{+0.10}_{-0.13}$	[36]
Estrellas de neutrones en binarias de rayos-X de baja masa		
Cyg X-2	$1.90^{+0.22}_{-0.35}$	[29]
4U 1608-52	$1.57^{+0.30}_{-0.29}$	[30]
EXO 1745-248	$1.65^{+0.21}_{-0.31}$	[30]

Tabla 5.1. Datos experimentales de masas de estrellas de neutrones

5.3. Estrella de neutrones compuesta por un gas completamente degenerado de Fermi no relativista

Se presenta el ejemplo de una estrella formada por un gas completamente degenerado de Fermi para el caso no relativista válido para un sistema de fermiones

libres que se rigen por la estadística de Fermi-Dirac, esta es una primera aproximación para objetos compactos, tales como enanas blancas y estrellas de neutrones.

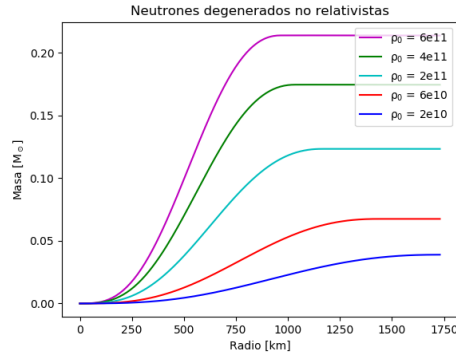


Figura 5.3. Figura de masa vs radio para un gas degenerado no relativista

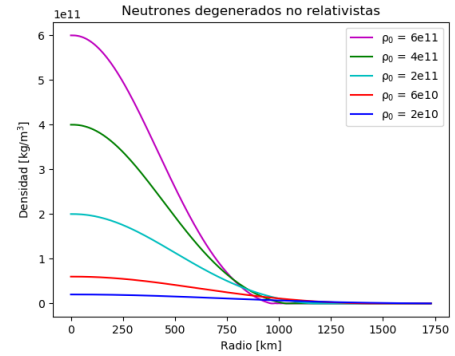


Figura 5.4. Figura de densidad vs radio para un gas degenerado no relativista

Densidad central ρ_0 [$kg \cdot m^{-3}$]	Masa Crítica [M]	Radio Crítico [km]
$6 \cdot 10^7$	0.039	1730
$6 \cdot 10^{10}$	0.067	1436
$2 \cdot 10^{11}$	0.123	1174
$4 \cdot 10^{11}$	0.174	1050
$6 \cdot 10^{11}$	0.213	980

Tabla 5.2. Datos obtenidos para una estrella de neutrones compuesta de un gas completamente degenerado de Fermi no relativista

En la Figura 5.4 se puede apreciar que la densidad del gas degenerado no relativista de Fermi tiene un comportamiento decreciente (de acuerdo a la ecuación diferencial de presión descrita en 2.30) a medida que el radio de la estrella aumenta, hasta llegar a un punto donde se hace cero, este punto nos indica el radio crítico que tendría una estrella que estuviese conformada por este gas. El radio crítico para los diferentes valores de densidad tiene un valor similar, el cual se encuentra en el rango de 1000 a 1500 km .

De la Figura 5.3 se puede apreciar que el valor de masa presenta un valor de constante a medida que cada modelo de las diferentes densidades alcanza su radio crítico. Tales valores de masa se encuentran en un rango de 0.039 a 0.213 M .

Se puede apreciar en ambas figuras y en la tabla de datos 5.3 que a medida que la densidad aumenta, el modelo alcanza el valor crítico de radio más rápidamente.

Comparando con el caso de gas ideal observamos que la masa contenida en función del radio no se comporta de la misma manera; mientras que para el caso de gas ideal se observa el mismo comportamiento independientemente del valor de densidad, en el caso de un gas degenerado de fermi, el comportamiento es dependiente de la densidad central. El valor de masa crítica se alcanza de manera asintótica (ver figuras 5.3).

Al observar los valores de masas y tamaños obtenidos para estrellas formadas de este tipo de gas, notamos que se alejan de los valores observacionalmente inferidos. Los objetos compactos al tener altas concentraciones de masa en un radio pequeño requieren de correcciones relativistas para las partículas que los conforman.

5.4. Estrella de neutrones compuesta por un gas completamente degenerado de Fermi extremadamente relativista

En este ejemplo se considera una estrella formada por un gas completamente degenerado de Fermi con correcciones relativistas.

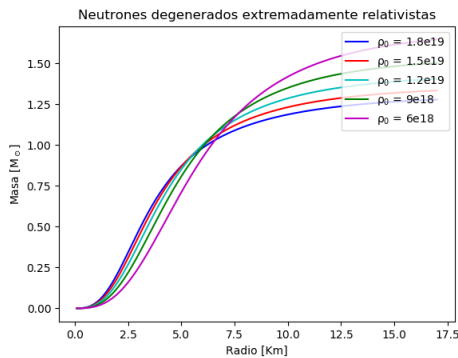


Figura 5.5. Figura de masa vs radio para un gas degenerado extremadamente relativista

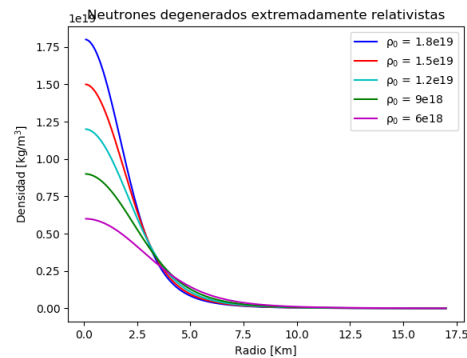


Figura 5.6. Figura de densidad vs radio para un gas degenerado extremadamente relativista

Se trabaja el rango de densidades de $6 \cdot 10^{18}$ a $1.8 \cdot 10^{19} \text{ kg/m}^3$ debido a que las densidades mayores a este rango no son correctamente descritas por la ecuación de estado para un gas degenerado de fermi extremadamente relativista.

En la Figura 5.6 se observa que las densidades decaen rápidamente a partir de

Densidad central ρ_0 [$kg=m^3$]	Masa Crítica [M]	Radio Crítico [km]
6.0 10^{18}	1.634	16.45
9.0 10^{18}	1.480	15.35
1.2 10^{19}	1.381	14.83
1.5 10^{19}	1.306	14.35
1.8 10^{19}	1.250	14.15

Tabla 5.3. Datos obtenidos para una estrella de neutrones compuesta de un gas completamente degenerado de Fermi extremadamente relativista

que se alcanza un radio mayor a los 10 km , sin embargo posteriormente estas no llegan a un valor cercano a 0 debido a que el método utilizado no describe correctamente el comportamiento para esta parte. Los criterios utilizados para obtener los valores presentados en la tabla 5.3 fueron:

En todos los casos se despreciaron los valores de densidad por debajo de $7 \cdot 10^{15} kg=m^3$ debido a que son muy pequeños comparados con la densidad inicial.

Se trabajó con una tolerancia de $1 \cdot 10^{15}$ de presión para obtener el valor de radio crítico.

Se utilizó una tolerancia máxima de $9 \cdot 10^{-4} M$ para obtener el valor de masa crítica.

En las Figuras se utiliza el rango de 0 a 17.5 km de modo que se pudiera apreciar el comportamiento constante de masa para los diferentes valores de densidad.

Los valores de masa se encuentran en un rango de 1.250 a 1.634 M rango el cual coincide con los valores conocidos de masas de estrellas[30] y los valores de radio se encuentran en un rango de 14.15 a 16.45 km , este valor se encuentra ligeramente fuera del rango mencionado en la sección de 5.2. El rango obtenido podría acercarse a las observaciones al utilizar ecuaciones de estado más refinadas, en las que se consideran diferentes densidades para las capas de las estrellas.

Se puede observar que cuanto mayor es la densidad, menor es el radio de la estrella y menor es la masa que encierra.

5.5. Trabajo actual de ecuaciones de estado para estrellas de neutrones

La densidad nuclear de saturación puede expresarse como una densidad de masa de $2.8 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$.

En los núcleos de las estrellas de neutrones la materia se encuentra fría y ultra densa, caracterizada por grandes potenciales químicos y una asimetría significativa en el número de neutrones y protones, con una fracción de protones $x < 10\%$, que difiere con los núcleos normales que poseen aproximadamente un número equivalente de protones y neutrones. La densidad de en los núcleos de las estrellas de neutrones puede alcanzar una densidad de $10 \rho_{sat}$ y dado que los neutrones se superponen a densidades de $4 \rho_{sat}$, a estas altas densidades, la materia puede no estar compuesta de nucleones únicamente sino que puede contener una gran variedad de grados de libertad hadrónicos. Cuando aumenta el solapamiento de nucleones, se espera transiciones a estados no nucleónicos de la materia, por ejemplo, es probable una aparición gradual de grados de libertad de quarks y que los constituyentes de los quarks se propaguen por el sistema [4][25]. Adicionalmente, los condensados de mesones de Bose-Einstein como los piones [3][27][31] o condensados de kaones [21][9][16] pueden hallarse a altas densidades. También es posible que la materia ultra densa contenga quarks extraños en otras formas que no sean kaones, ya que las interacciones débiles en los núcleos fríos de estrellas de neutrones pueden llevar a estados de la materia con un alto grado de extrañeza.

Algunas de las posibilidades consideradas a la fecha incluyen la presencia de hiperones [6][15][34], estrellas híbridas que contienen quarks libres [13], o fases súper conductoras de color [5].

CONCLUSIONES

1. Es importante considerar correcciones relativistas al trabajar con objetos compactos, ya que estos debido a su alta densidad curvan el espacio-tiempo.
2. Considerar que una estrella formada por un gas ideal es un ejemplo útil para observar el comportamiento que tienen las variables de masa y presión a medida que se aumenta el tamaño del radio hasta llegar al radio total de la estrella.
3. Se utilizó el método de Runge Kutta de cuarto orden para resolver las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Tal método fue particularmente útil para resolver el caso de una estrella formada por un gas degenerado de Fermi no relativista, sin embargo para el caso de un gas degenerado de Fermi extremadamente relativista el método no describía adecuadamente la variación de la densidad a medida que se acercaba al radio crítico de la estrella, por lo que se utilizaron criterios para discriminar los valores que fueran mucho menores a los valores de la densidad inicial.
4. En el caso de la materia degenerada, el comportamiento de la masa a medida que aumenta el radio varía del comportamiento de un gas ideal, ya que la masa tiende a alcanzar un valor constante que depende de la densidad central en la estrella.
5. Un gas degenerado de Fermi no relativista no es una buena aproximación, ya que los valores de radios obtenidos varían aproximadamente dos órdenes de magnitud respecto de los valores observados, y los valores de masa son muy bajos comparados con las mediciones experimentales.
6. El caso de una estrella formada por un gas degenerado extremadamente relativista resulta ser una buena aproximación debido a que los valores de masa obtenidos se encuentran en un rango de $1.250 - 1.634 M$ que se asemejan a los valores de mediciones citadas. Los valores de radio se encuentran en un

rango de 14:15 – 16:45 *km*, que se acercan considerablemente a los valores observados, en comparación con el caso de un gas degenerado no relativista.

RECOMENDACIONES

1. Aplicar un método numérico que describa de mejor manera el comportamiento de una estrella de un gas degenerado a medida que esta se acerca a su radio crítico o bien emplear el mismo método numérico utilizando una capacidad de computo mayor, debido a que se necesita incrementar el número de iteraciones para obtener una mejor aproximación de los valores obtenidos de radios y masas críticos.
2. Considerar interacciones coulombianas y las interacciones entre quarks a propósito de obtener una ecuación de estado más realista así como describir de una manera más fidedigna el comportamiento de la manera que forma las estrellas de neutrones.
3. Considerar ecuaciones de estado que proponen que las estrellas de neutrones están formadas por diferentes capas con diferentes valores de densidad.
4. Explorar las opciones diferentes a un gas degenerado de Fermi, como los condensados de mesones descritos por la estadística de Bose-Einstein como los piones [3][27][31] o los condensados de kaones [21][9][16].

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adams, T., Addesso, P., Adhikari, R., Adya, V., et al. (2017). Gw170814: A three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. *Physical Review Letters*, 119(14):141101.
- [2] Abdo, A., Ajello, M., Allafort, A., Baldini, L., Ballet, J., Barbiellini, G., Baring, M., Bastieri, D., Belfiore, A., Bellazzini, R., et al. (2013). The second fermi large area telescope catalog of gamma-ray pulsars. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):17.
- [3] Akmal, A., Pandharipande, V., and Ravenhall, D. (1998). Equation of state of nucleon matter and neutron star structure. *Physical Review C*, 58(3):1804.
- [4] Alford, M., Braby, M., Paris, M., and Reddy, S. (2005). Hybrid stars that masquerade as neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 629(2):969.
- [5] Alford, M. and Reddy, S. (2003). Compact stars with color superconducting quark matter. *Physical Review D*, 67(7):074024.
- [6] Ambartsumyan, V. and Saakyan, G. (1961). On equilibrium configurations of superdense degenerate gas masses. *Astronomicheskii Zhurnal*, 38:785.
- [7] Antoniadis, J., van Kerkwijk, M., Koester, D., Freire, P., Wex, N., Tauris, T., Kramer, M., and Bassa, C. (2012). The relativistic pulsar–white dwarf binary psr j1738+ 0333–i. mass determination and evolutionary history. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(4):3316–3327.
- [8] Backman, D. and Seeds, M. (2010). *The Solar System*. Cengage Learning.
- [9] Brown, G., Kubodera, K., Rho, M., and Thorsson, V. (1992). A novel mechanism for kaon condensation in neutron star matter. *Physics Letters B*, 291(4):355–362.

- [10] Camenzind, M. (2007). *Compact objects in astrophysics: white dwarfs, neutron stars and black holes*. Springer Science & Business Media.
- [11] Caraveo, P. A. (2014). Gamma-ray pulsar revolution. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 52:211–250.
- [12] Chandrasekhar, S. (1931). The maximum mass of ideal white dwarfs. *The Astrophysical Journal*, 74:81.
- [13] Collins, J. C. and Perry, M. J. (1975). Superdense matter: neutrons or asymptotically free quarks? *Physical Review Letters*, 34(21):1353.
- [14] Fowler, R. H. (1926). On dense matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 87:114–122.
- [15] Glendenning, N. and Moszkowski, S. (1991). Reconciliation of neutron-star masses and binding of the Λ in hypernuclei. *Physical Review Letters*, 67(18):2414.
- [16] Glendenning, N. K. and Schaffner-Bielich, J. (1999). First order kaon condensate. *Physical Review C*, 60(2):025803.
- [17] Green, S. F., Jones, M. H., and Burnell, S. J. (2004). *An introduction to the sun and stars*. Cambridge University Press.
- [18] Hansen, C. J., Kawaler, S. D., and Trimble, V. (2012). *Stellar interiors: physical principles, structure, and evolution*. Springer Science & Business Media.
- [19] Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J., Scott, P. F., and Collins, R. A. (1968). Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature*, 217(5130):709.
- [20] Ho, W. C. (2012). Central compact objects and their magnetic fields. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 8(S291):101–106.
- [21] Kaplan, D. and Nelson, A. (1986). Strange goings on in dense nucleonic matter. *Physics Letters B*, 175(1):57–63.
- [22] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., and Donner, K. J. (2007). *Fundamental astronomy*. Springer.
- [23] Kasian, L. E. (2012). *Radio observations of two binary pulsars*. PhD thesis, University of British Columbia.

- [24] Kızıltan, B. (2011). Reassessing the fundamentals new constraints on the evolution, ages and masses of neutron stars. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1379, pages 41–47. AIP.
- [25] Kojo, T., Powell, P. D., Song, Y., and Baym, G. (2015). Phenomenological qcd equation of state for massive neutron stars. *Physical Review D*, 91(4):045003.
- [26] Manchester, R. N., Hobbs, G. B., Teoh, A., and Hobbs, M. (2005). The australia telescope national facility pulsar catalogue. *The Astronomical Journal*, 129(4):1993.
- [27] Mukherjee, A. (2009). Variational theory of hot nucleon matter. ii. spin-isospin correlations and equation of state of nuclear and neutron matter. *Physical Review C*, 79(4):045811.
- [28] Oppenheimer, J. R. and Volkoff, G. M. (1939). On massive neutron cores. *Physical Review*, 55(4):374.
- [29] Orosz, J. A. and Kuulkers, E. (1999). The optical light curves of cygnus x-2 (v1341 cyg) and the mass of its neutron star. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 305(1):132–142.
- [30] Özel, F. and Freire, P. (2016). Masses, radii, and the equation of state of neutron stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 54:401–440.
- [31] Pandharipande, V., Pethick, C., and Thorsson, V. (1995). Kaon energies in dense matter. *Physical review letters*, 75(25):4567.
- [32] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1996). *Numerical recipes in C*, volume 2. Cambridge university press Cambridge.
- [33] Reisenegger, A. (2003). Origin and evolution of neutron star magnetic fields. *arXiv preprint astro-ph/0307133*.
- [34] Schulze, H.-J., Baldo, M., Lombardo, U., Cugnon, J., and Lejeune, A. (1998). Hyperonic nuclear matter in brueckner theory. *Physical Review C*, 57(2):704.
- [35] Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A. (2008). *Black holes, white dwarfs and neutron stars: the physics of compact objects*. John Wiley & Sons.
- [36] Splaver, E. M. (2004). Long-term timing of millisecond pulsars. *Ann Arbor*, 1001:48106–1346.

- [37] Staelin, D. H. and Reifenstein, E. C. (1968). Pulsating radio sources near the crab nebula. *Science*, 162(3861):1481–1483.
- [38] Taylor, J. H. and Weisberg, J. M. (1989). Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar psr 1913+ 16. *The Astrophysical Journal*, 345:434–450.
- [39] Tolman, R. C. (1939). Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, 55(4):364.
- [40] Truscott, A. G., Strecker, K. E., McAlexander, W. I., Partridge, G. B., and Hulet, R. G. (2001). Observation of fermi pressure in a gas of trapped atoms. *Science*, 291(5513):2570–2572.
- [41] Walecka, J. D. (2007). *Introduction to general relativity*. World Scientific Publishing Co Inc.

A. Apéndice: Código fuente para gas degenerado de Fermi no relativista

```
from mpmath import
from math import
import numpy as np
import matplotlib.mlab as mlab
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab

#Constantes
G = 6.67e-11
c = 2.99e8
K = 7.723756e10
gamma = 4.0/3.0
gamin = 3.0/4.0
ms = 1.989e30

def dP (M, P, r):
    return ( (G/(r**2)) * ((P/K)**gamin + (P/(c**2)))
            (M+4*pi*(r**3)*P/(c**2))/(1-2*G*M/(c**2)*r))

def dM (M, P, r):
    return (4*pi*(P/K)**gamin*r**2)

def RK4 (rho, m_0, r_0, r_f, h):
    sol = [[], [], []] #sol[0] = Ps, sol[1] = Ms
```

```

P_0      =   K rho   gamma
M_n      =   m_0
r_n      =   r_0
P_n      =   P_0

```

```

sol [0].append(P_0)
sol [1].append(m_0/ms)
sol [2].append((P_0/K)   gamin)

```

```

for i in range (int((r_f r_0)/h)  1):

```

```

    ks = []
    ls = []

```

```

    ks.append(dP(M_n, P_n, r_n))
    ls.append(dM(M_n, P_n, r_n))

```

```

    ks.append(dP(M_n+0.5 ls [0], P_n+0.5 ks [0], r_n+h/2))
    ls.append(dM(M_n+0.5 ls [0], P_n+0.5 ks [0], r_n+h/2))

```

```

    ks.append(dP(M_n+0.5 ls [1], P_n+0.5 ks [1], r_n+h/2))
    ls.append(dM(M_n+0.5 ls [1], P_n+0.5 ks [1], r_n+h/2))

```

```

    ks.append(dP(M_n+ls [2], P_n+ks [2], r_n+h))
    ls.append(dM(M_n+ls [2], P_n+ks [2], r_n+h))

```

```

    P_n += h (ks [0]+2 ks [1]+2 ks [2]+ks [3])/6
    rho = ((P_n)/K)   gamin
    M_n += h (ls [0]+2 ls [1]+2 ls [2]+ls [3])/6
    r_n += h

```

```

    sol [0].append(P_n)
    sol [1].append(M_n/ms)
    sol [2].append(rho)

```

```
return (sol)
```