



Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ciencias

REPRESENTACIÓN DE GRUPOS EN FÍSICA

Anibal Estuardo Sierra Morales

Asesorado por el Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

Guatemala, octubre de 2013

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA



NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Ing. Alfredo Enrique Beber Aceituno
VOCAL II	Ing. Pedro Antonio Aguilar Polanco
VOCAL III	Inga. Elvia Miriam Ruballos Samayoa
VOCAL IV	Br. Walter Rafael Véliz Muñoz
VOCAL V	Br. Sergio Alejandro Donis Soto
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
EXAMINADOR	Lic. Edgar Aníbal Cifuentes Anléu
EXAMINADOR	Lic. César Antonio Izquierdo Merlo
EXAMINADOR	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón
SECRETARIO	Ing. Hugo Humberto Rivera Pérez

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

En cumplimiento con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

REPRESENTACIÓN DE GRUPOS EN FÍSICA

Tema que me fuera asignado por la Dirección de la Escuela de Ciencias, con fecha 30 de julio de 2013.



Anibal Estuardo Sierra Morales



Guatemala, 07 de Julio de 2013

A quien interese:

Me dirijo para informar que he realizado la revisión del trabajo de graduación "**Representación de grupos en Física**", presentado por el estudiante **Anibal Estuardo Sierra Morales**; con carné: 2008-15407; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación, como asesor de dicho trabajo.

Muy atentamente,

Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón
ASESOR

RODOLFO SAMAYOA DARDON
INGENIERO CIVIL
COLEGIADO 1825



Guatemala, 07 de Julio de 2013

A quien interese:

Me dirijo para informar que he realizado la revisión del trabajo de graduación "**Representación de grupos en Física**", presentado por el estudiante **Anibal Estuardo Sierra Morales**; con carné: 2008-15407; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación.

Muy atentamente,



Lic. Ricardo Enrique Contreras Folgar
Coordinador, Lic. En Física Aplicada
Departamento de Física
Facultad de Ingeniería



El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen del asesor, con el visto bueno del Coordinador de la Carrera de Licenciatura en Física Aplicada al trabajo de graduación del estudiante *Anibal Estuardo Sierra Morales*, titulado “REPRESENTACION DE GRUPOS EN FISICA”, procede a la autorización del mismo.

Ing. Edwin Adalberto Bracamonte Orozco
Director Escuela de Ciencias



Guatemala, 30 de octubre de 2013

EABOP/scvs



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de graduación titulado: **REPRESENTACIÓN DE GRUPOS EN FÍSICA**, presentado por el estudiante universitario: **Anibal Estuardo Sierra Morales** procede a la autorización para la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

Ing. Murphy Olympo Paiz Ríos
Decano



Guatemala, octubre de 2013

/cc

ACTO QUE DEDICO A:

Mi mamá

Porque sin ella y su constante apoyo cada día de mi vida hubiera sido imposible llegar hasta aquí.

AGRADECIMIENTOS A:

- Mi familia** Por apoyo incondicional en mi formación académica, profesional y personal.
- Mi asesor** Por su sugerencia en el tema del trabajo de graduación y su posterior apoyo para poder llevarlo a cabo.
- Mis amigos** Por compartir muchas experiencias durante mi etapa universitaria, especialmente a todos mis compañeros de estudios de Fisired y del Departamento de Física.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	V
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
GLOSARIO	IX
RESUMEN	XI
OBJETIVOS	XIII
INTRODUCCIÓN	XV
1. GRUPOS	1
1.1. Definiciones	1
1.1.1. Grupo	2
1.1.2. Grupos abelianos	3
1.1.3. Subgrupo	3
1.1.4. Orden de un grupo	4
1.1.5. Orden de un elemento	5
1.1.6. Grupo discreto y continuo	5
1.1.7. Centro de un grupo	5
1.1.8. Homomorfismo	6
1.1.9. Isomorfismo	6
1.1.10. Elementos conjugados	6
1.1.11. Clase conjugada	7
1.1.12. Subgrupo normal	7
1.1.13. Subgrupo invariante	8
1.1.14. Clases laterales	8
1.1.15. Grupo cociente	9
1.1.16. Grupo cíclico	9
1.1.17. Producto directo	10
1.2. Grupo de permutaciones	10
1.2.1. Grupo simétrico	11
1.3. Grupos de Lie	12

1.3.1.	Espacio topológico	12
	1.3.1.1. Función continua	13
	1.3.1.2. Homeomorfismo	13
1.3.2.	Espacio de Hausdorff	14
1.3.3.	Variedad topológica	14
	1.3.3.1. Cálculo de varias variables	14
1.3.4.	Variedad diferenciable	15
1.3.5.	Grupo topológico	16
1.3.6.	Grupo de Lie	16
1.3.7.	Ejemplos de grupos de Lie	16
	1.3.7.1. Grupo general $GL(n; \mathbb{R})$ y $GL(n; \mathbb{C})$.	17
	1.3.7.2. Grupo especial lineal $SL(n; \mathbb{R})$, $SL(n; \mathbb{C})$	17
	1.3.7.3. Grupo ortogonal $O(n)$ y $SO(n)$	18
	1.3.7.4. Grupo unitario $U(n)$ y $SU(n)$	18
	1.3.7.5. Grupo ortogonal generalizado $O(n, k)$ y de Lorentz	19
	1.3.7.6. Grupo de Heisenberg H	20
1.3.8.	Álgebra de Lie	20
1.3.9.	Ejemplos de álgebras de Lie	22
	1.3.9.1. Grupo general lineal	23
	1.3.9.2. Grupo especial lineal	23
	1.3.9.3. Grupo ortogonal	24
	1.3.9.4. Grupo unitario	24
1.3.10.	Sistema de raíces	25
1.3.11.	Matrices de Cartan	26
1.3.12.	Diagramas de Dynkin	27
2.	REPRESENTACIÓN DE GRUPOS	29
2.1.	Representación	29
	2.1.1. Representaciones equivalentes	29
	2.1.2. Representaciones unitarias	30
	2.1.3. Subespacio invariante	31

2.1.4.	Caracter de una representación	31
2.2.	Representaciones irreducibles	32
2.2.1.	Ortonormalidad de la representaciones irreducibles	32
2.2.2.	Ortogonalidad de los caracteres	33
2.2.3.	Representación en suma directa	34
2.2.4.	Producto tensorial de representaciones	35
2.2.5.	Representación regular	36
2.2.6.	Lemas de Schur	39
2.3.	Tensores	39
2.3.1.	Vector covariante	40
2.3.2.	Vector contravariante	40
2.3.3.	Escalar	40
2.3.4.	Tensor	41
2.3.5.	Tensores p-covariantes y q-contravariantes	41
2.3.6.	Tensor invariante	41
2.3.7.	Tensores totalmente simétricos	42
2.3.8.	Tensores totalmente antisimétricos	43
3.	REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE LOS GRUPOS	
	SU(2) Y SU(3).	45
3.1.	Representaciones irreducibles del grupo SU(2)	45
3.2.	Representaciones irreducibles del álgebra su(2)	50
3.3.	Representaciones irreducibles del grupo SU(3)	55
3.4.	Representaciones irreducibles del álgebra su(3)	55
3.4.1.	Pesos de una representación	56
3.4.2.	Raíces de una representación	57
3.4.3.	Representaciones irreducibles $sl(3; \mathbb{C})$	60
3.4.4.	El grupo de Weyl	61
3.4.5.	Diagrama de Pesos	69
3.4.5.1.	Peso máximo (1,1)	70
3.4.5.2.	Peso máximo (3,0)	72
3.4.6.	Pesos producto tensorial	73

4.	DIAGRAMAS DE YOUNG	75
4.1.	Grupo simétrico	75
4.1.1.	Partición y Diagramas de Young	75
4.1.2.	Tablas de Young	76
4.1.3.	Dimensión de la representación	78
4.1.4.	Operadores de Young	79
4.2.	Grupo SU(3)	81
4.2.1.	Producto tensorial de representaciones	83
4.3.	Grupo SU(2)	86
5.	APLICACIONES A LA FÍSICA	87
5.1.	Momento angular	87
5.1.1.	Estados normalizados	92
5.1.2.	Adición momento angular	96
5.2.	Modelo del Quark	103
5.2.1.	El grupo SU(3)	106
5.2.2.	Mesones	111
5.2.3.	Bariones	118
	CONCLUSIONES	131
	RECOMENDACIONES	133
	BIBLIOGRAFÍA	135

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

FIGURAS

1.	Grupo de simetría del cuadrado	3
2.	Raíces	58
3.	Raíces y elementos integrales para $sl(3; \mathbb{C})$	68
4.	Diagrama de pesos para $\mu_0 = (1, 1)$	71
5.	Diagrama de pesos para $\mu_0 = (3, 0)$	73
6.	Cambio de base	108
7.	Quarks	109
8.	Antiquarks	110
9.	Mesones (representación reducible)	113
10.	Octeto mesónico (representación irreducible)	117
11.	Combinación de 2 quarks	119
12.	Bariones (representación reducible)	121
13.	Decuplete bariónico (representación irreducible)	123
14.	Bariones restantes	124
15.	Octeto bariónico (representación irreducible)	127

TABLAS

I.	Tabla de Cayley	2
II.	Tabla de Cayley del grupo de simetría del cuadrado	4
III.	Diagramas de Dynkin de sistema de raíces irreducibles	28
IV.	Grupo de orden 2	37
V.	Construcción de la representación regular	38
VI.	Operadores álgebras de Lie $su(2)$	51
VII.	Raíces	58

VIII.	Grupo de Weyl sobre las raíces de la representación	67
IX.	Posibles pesos para la representación (1,1)	71
X.	Posibles pesos para la representación (3,0)	72
XI.	Partición para los primeros 5 enteros	77
XII.	Representaciones irreducibles para S_2	81
XIII.	Ejemplos de diagramas Young para $SU(3)$	83
XIV.	Extrañeza e isospín de hadrones	105
XV.	Valores y vectores propios de H_1, H_2	107
XVI.	Pesos base ortogonal	108
XVII.	Pesos base ortogonal	109
XVIII.	Quarks, antiquarks y pesos	111
XIX.	Mesones (representación reducible)	112
XX.	Octeto mesónico (representación irreducible)	115
XXI.	Combinación de 2 quarks	118
XXII.	2 quarks (representación irreducible)	119
XXIII.	Bariones (representación reducible)	120
XXIV.	Decuplete bariónico (representación irreducible)	122
XXV.	1er octeto bariónico (representación irreducible)	125
XXVI.	2do octeto bariónico (representación irreducible)	125
XXVII.	Propiedades de los quarks	129

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
χ	Caracter de una representación
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales
\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos
δ_{ij}	Delta de Kronecker
\square	Diagrama de Young
\mathfrak{g}	Elemento del álgebra de Lie
L_i	Operador de momento angular
J_{\pm}	Operador escalera
\otimes	Producto directo
\oplus	Suma directa
ϵ_{ijk}	Tensor de Levi-Civita
$ \lambda\rangle$	Vector propio

GLOSARIO

Barión	Estado ligado de tres quarks o tres antiquarks.
Bosón	Partícula con espín entero y que obedece a la estadística de Bose-Einstein.
Espín	Momento angular intrínseco de las partículas fundamentales.
Fermión	Partícula con espín semientero y que obedece a la estadística de Fermi-Dirac.
Hipercarga	Magnitud que relaciona el isospín de una partícula con su carga eléctrica.
Isospín	Número cuántico que diferencia a un neutrón de un protón en la interacción fuerte.
Mesón	Estado ligado de un quark y un antiquark.
Quark	Partícula fundamental de la que están compuestos todos los mesones y bariones.

RESUMEN

El momento angular en la mecánica cuántica corresponde a una representación del grupo $SU(2)$. Los valores que puede tomar el momento angular sobre un eje arbitrario están cuantizados y dependen del valor de momento angular total de la partícula. En su representación irreducible, se pueden generar todos estos estados únicamente conociendo el estado de momento angular máximo y definiendo los operadores escalera para $SU(2)$. El producto de dos de estos estados genera sistemas ligados de partículas que también pueden ser representados irreduciblemente, produciendo así posibles estados finales con cierta probabilidad de ser medidos.

El modelo del quark es una representación del grupo $SU(3)$. Existen tres estados fundamentales en la representación irreducible, denominados quarks u, d, s ; los cuales forman el constituyente fundamental de la materia. Los mesones están constituidos de un quark y un antiquark y se ordenan simétricamente mediante un octete y un singlete, los bariones están formados por tres quarks y ordenados en un decuplete, dos octetes y un singlete. Las propiedades físicas de carga, isospín e hipercarga pueden ser calculadas para todos los hadrones con base en los pesos de la representación irreducible de $SU(3)$.

OBJETIVOS

General

Utilizar las representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$ sobre el modelo de quark y las representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$ sobre el momento angular cuántico.

Específicos

1. Calcular la degeneración de estados correspondientes a un valor de momento angular j .
2. Establecer la manera en que se suma el momento angular en la mecánica cuántica.
3. Desarrollar el cálculo de los coeficientes de Clebsch-Gordan en la adición de momento angular.
4. Describir el arreglo regular de los mesones y los estados que les corresponden.
5. Describir el arreglo regular de los bariones y los estados que les corresponden.
6. Predecir los valores de hipercarga e isospín de un hadrón aplicando el grupo $SU(3)$ al modelo del quark.

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo de graduación es utilizar las representaciones irreducibles de los grupos $SU(2)$ y $SU(3)$ sobre el momento angular y el modelo del quark respectivamente, desarrollando los estados correspondientes a cada representación y asociando sus valores propios a una propiedad física de las partículas.

En el capítulo 1 se abarcan las definiciones primordiales sobre la teoría de grupos, haciendo énfasis sobre el grupo de permutaciones y los de Lie, los cuales también se enfocan desde la perspectiva de los diagramas de Dynkin.

En el capítulo 2 se desarrollan los conceptos de la representación de grupos y su representación irreducible.

En el capítulo 3 se enfatiza, específicamente sobre la representación irreducible de los grupos $SU(2)$ y $SU(3)$, desarrollando a su vez el álgebra de Lie asociada a cada uno de ellos; ya que esta será la piedra angular para obtener los resultados en el último de los capítulos. En el capítulo 4 se presentan los diagramas de Young, y nuevamente se enfatizan sus consecuencias sobre el grupo de permutaciones y $SU(n)$.

El capítulo 5 está dividido en dos aplicaciones, la primera sobre el desarrollo del momento angular como una representación irreducible del grupo $SU(2)$, permitiendo establecer la manera en que se realiza la adición del momento angular y el cálculo de los coeficientes de Clebsch-Gordan. Asimismo, se parte describe el modelo del quark por medio de las representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$, con lo cual se hace evidente la necesidad de la postulación de esta partícula en tres diferentes estados.

1. GRUPOS

Los grupos juegan un papel fundamental en el desarrollo de la física contemporánea, pues suponen una estructura lógica y sencilla bajo la cual se pueden ordenar los conceptos físicos que en un principio podrían parecer aislados. La física se centra, principalmente, en los grupos de simetría (aquellos que dejan invariante ciertas propiedades del sistema ante las transformaciones espaciales, temporales, etc.), tal como releva el teorema de Noether; que es quizá la forma más directa y simple de ligar las leyes de la física a una estructura matemática básica.

En mecánica cuántica o relatividad, por ejemplo, los grupos aparecen de manera natural mientras se estudian las propiedades de las representaciones matriciales de los operadores; o en física del estado sólido mientras se considera la simetría de las estructuras regulares de los cristales. En la física de partículas por su parte, el papel de los grupos se centra en el grupo $SU(6)$; con el cual es posible describir el arreglo regular de mesones y bariones, resolviendo el problema del gran zoológico de hadrones, que alguna vez inquietó a los físicos de la época.

1.1. Definiciones

La teoría de grupos está basada en un conjunto de axiomas los cuales se desarrollan a continuación. La teoría de números, las ecuaciones algebraicas y la geometría forman el preámbulo histórico para la mayor parte de las definiciones. Para cada una se desarrolla un ejemplo sencillo, los cuales están basadas principalmente en la simetría de un cuadrado.

1.1.1. Grupo

Una colección de elementos $\{G : a, b, c, \dots\}$ se dicen que forman un grupo si:

- Para $a, b \in G$ con un producto ab definido, este también forma parte de G ($ab \in G$)
- Existe un elemento $e \in G$ tal que para toda $a \in G$, $ae = ea = a$
- Para toda $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$ de manera que $aa^{-1} = e$
- La operación es asociativa, es decir que para $a, b, c \in G$, $a(bc) = (ab)c$

Ejemplo: Al considerar el grupo G formado por los números complejos $\{1, -1, i, -i\}$, y con el producto definido usualmente. Esta composición suele representarse por medio de una tabla, conocida como tabla de Cayley de la siguiente manera:

Tabla I. **Tabla de Cayley**

	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Fuente: elaboración propia.

Puede notarse que del producto de dos elementos cualquiera, se obtiene otro elemento que, también se encuentra en el grupo. El elemento identidad es 1.

1.1.2. Grupos abelianos

Un grupo abeliano es aquel, cuyos elementos conmutan. Es decir, si $a, b \in G$, entonces $ab = ba$.

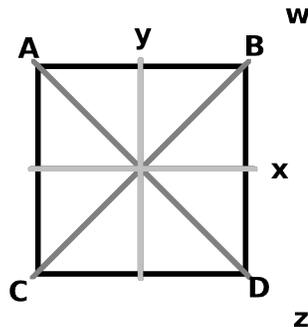
Ejemplo: el grupo descrito previamente en la tabla I es abeliano.

1.1.3. Subgrupo

Se dice que H es subgrupo de G si todos los elementos pertenecientes a H , también están en G , forman por sí mismos un grupo y, además obedece a las mismas reglas del producto definido en G .

Ejemplo: considérese el grupo compuesto por la simetría del cuadrado mostrado en la figura 1, en donde las esquinas del mismo se han identificado como A, B, C, D respectivamente, con el fin de diferenciar el efecto que tiene cada uno de los elementos del grupo.

Figura 1. Grupo de simetría del cuadrado



Fuente: elaboración propia.

Sean R_0, R_1, R_2, R_3 las rotaciones sobre el plano correspondientes a $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π , respectivamente; x, y, w, z , las reflexiones a través de los ejes horizontal, vertical, diagonal derecha y diagonal izquierda correspondientemente; y sea G el grupo formado por estos elementos, $G = \{R_0, R_1, R_2, R_3, x, y, w, z\}$. La tabla de Cayley asociada a este grupo es:

Tabla II. **Tabla de Cayley del grupo de simetría del cuadrado**

	R_0	R_1	R_2	R_3	x	y	w	z
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	x	y	w	z
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0	w	z	y	x
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1	y	x	z	w
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2	z	w	x	y
x	x	z	y	w	R_0	R_2	R_3	R_1
y	y	w	x	z	R_2	R_0	R_1	R_3
w	w	x	z	y	R_1	R_3	R_0	R_2
z	z	y	w	x	R_3	R_1	R_2	R_0

Fuente: elaboración propia.

El grupo $H = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ es un subgrupo de G , ya que la composición de cualquiera de estos elementos resulta en otro elemento de H definidos bajo el mismo producto; además, todos los elementos de H , también se encuentran en G .

1.1.4. Orden de un grupo

El orden de un grupo es el número de elementos del grupo. Por ejemplo, el grupo de simetría G del cuadrado definido anteriormente es de orden 8.

1.1.5. Orden de un elemento

El orden n de un elemento $g \in G$ es el mínimo entero tal que $g^n = e$. Por ejemplo, en referencia a la tabla II, el orden de R_o es 1, el orden de R_1, R_2, R_3 es 4, mientras el orden de $x, y, w, z = 2$. Con referencia en la tabla I, el orden de $1, -1$ es 1, mientras que el orden de $i, -i$ es 4.

1.1.6. Grupo discreto y continuo

Un grupo discreto es aquel cuyos elementos son divisibles un número finito de veces (van a pasos), sin importar su orden. Por su parte, un grupo continuo es aquel con un número infinito de elementos que varían de forma continua (sin dejar huecos o saltos). Ejemplos de grupos discretos son los presentados en las tablas I y II.

Dentro de los grupos continuos se distinguen los grupos de Lie, en cuyo caso los parámetros varían en un intervalo de valores cerrado y acotado, es decir, que localmente son como \mathbb{R}^n . Otro ejemplo típico es el grupo de rotaciones en \mathbb{R}^3 , también conocidos como ángulos de Euler.

1.1.7. Centro de un grupo

El centro de un grupo $Z(G)$ consta de todos los elementos que conmutan con cualquier elemento del grupo. Es decir, $Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}$.

Por ejemplo, el centro del grupo del cuadrado está formado por $\{R_o, R_2\}$. Mientras el centro del subgrupo H está conformado por todos sus elementos.

1.1.8. Homomorfismo

Se dice que hay un homomorfismo entre dos grupos A, B si existe una correspondencia entre sus elementos, y además se preserva la regla del producto. Es decir, si $a_i, a_j \in A$ y $b_i, b_j \in B$ de manera que $a_i \rightarrow b_i$ y $a_j \rightarrow b_j$, entonces $a_i a_j = b_i b_j$.

Por ejemplo, sea G_1 el grupo de las matrices unitarias $n \times n$, $U(n)$. Sea G_2 el grupo multiplicativo de los números complejos \mathbb{C}^* . La correspondencia $\det : U(n) \rightarrow \mathbb{C}^*$ es un homomorfismo entre G_1 y G_2 , ya que si $U_1 \in G_1 \rightarrow \det U_1 \in G_2$ y $U_2 \in G_1 \rightarrow \det U_2 \in G_2$, entonces $\det(U_1 U_2) = \det U_1 \det U_2$ por las propiedades básicas de las matrices.

1.1.9. Isomorfismo

Existe un isomorfismo entre dos grupos A, B si existe un homomorfismo entre ellos y además, la correspondencia entre sus elementos es uno a uno.

Es decir, que en la relación $a_i \rightarrow b_i$, el elemento b_i es único; y de la misma manera, inversamente, para cada $b_i \rightarrow a_i$, el elemento a_i es único.

1.1.10. Elementos conjugados

Un elemento $a \in G$ se dice que es conjugado al elemento $b \in G$ si existe otro elemento $c \in G$ tal que $a = c b c^{-1}$.

Por ejemplo, considerando la tabla II para el grupo de simetría del cuadrado,

se observa que con el uso del elemento R_3 y su inverso se obtiene:

$$\begin{aligned}R_3xR_3^{-1} &= R_3xR_1 \\ &= R_3z \\ R_3xR_3^{-1} &= y\end{aligned}$$

Es decir, y es un elemento conjugado de x con referencia al elemento R_3 . No existe otro elemento que haga que x y y sean conjugados entre si.

1.1.11. Clase conjugada

Los elementos de un grupo que son conjugados entre sí mismos, forman una clase conjugada. Como ejemplo, de la misma manera que y es un elemento conjugado de x , se puede demostrar que $R_1yR_1^{-1} = x$. Mientras que $R_1wR_1^{-1} = z$ y $R_1zR_1^{-1} = w$.

En definitiva, las clases conjugadas de G están formadas por $\{x, y\}$, $\{w, z\}$ y $\{R_1, R_3\}$.

1.1.12. Subgrupo normal

Si A es un subgrupo de G y $b \in G$, entonces $\{B : bab^{-1}; a \in A\}$ también es subgrupo de G , denominado como el subgrupo normal de A . Para visualizarlo, considérese el subgrupo $H = \{R_o, R_1, R_2, R_3\}$ y G el grupo de simetría del cuadrado. Eligiendo el elemento $x \in G$, el siguiente grupo resulta ser el subgrupo normal de H :

$$B : \{xR_0x^{-1}, xR_1x^{-1}, xR_2x^{-1}, xR_3x^{-1}\}$$

$$B : \{xR_0x, xR_1x, xR_2x, xR_3x\}$$

$$B : \{xx, xw, xy, xz\}$$

$$B : \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$$

1.1.13. Subgrupo invariante

Un subgrupo invariante es aquel que es idéntico a todos sus subgrupos normales. Es decir, siendo A subgrupo de G , para todo $b \in G$ y $\{B : bab^{-1}; a \in A\}$, entonces $B = A$. Los subgrupos provenientes de un grupo abelianos son un ejemplo de subgrupos invariantes. Por ejemplo, en el último subgrupo normal, nótese que $B = H$; y se puede comprobar que para los elementos para cualquier elemento de G la igualdad se mantiene; por lo que H es un subgrupo invariante de G .

1.1.14. Clases laterales

Si $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ es un subgrupo de G y b es un elemento de G , entonces los elementos $bA = \{ba_1, ba_2, \dots\}$ forman la clase lateral izquierda de A . De la misma forma $Ab = \{a_1b, a_2b, \dots\}$ forman la clase lateral derecha de A . Por ejemplo, sea $H = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ subgrupo de G , entonces la clase lateral izquierda de H es:

$$xH = \{xR_0, xR_1, xR_2, xR_3\}$$

$$xH = \{x, z, y, w\}$$

1.1.15. Grupo cociente

Si A es un subgrupo invariante de G , el grupo cociente de G está determinado por el conjunto de clases laterales de A , de manera que si $b, c \in G$, entonces $bA \cdot cA = (bc)A$. El grupo cociente en cierto modo representa una factorización del grupo G . Por ejemplo, ya que $A = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ es un grupo invariante de G , nótese que:

$$\begin{aligned}xA \cdot yA &= \{x, z, w, y\} \cdot \{y, w, x, z\} \\ &= \{R_0, R_1, R_2, R_3\} \\ &= R_2\{R_2, R_3, R_0, R_1\} \\ &= (xy)A\end{aligned}$$

Y además:

$$\begin{aligned}R_0A \cdot R_2A &= \{R_0, R_1, R_2, R_3\} \cdot \{R_2, R_3, R_0, R_1\} \\ &= \{R_0, R_1, R_2, R_3\} \\ &= R_2\{R_2, R_3, R_0, R_1\} \\ &= (R_0R_2)A\end{aligned}$$

Por tanto, el grupo cociente de G está formado por las clases laterales de A , $\{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ y $\{x, y, w, z\}$.

1.1.16. Grupo cíclico

Un grupo G es cíclico si existe un elemento $g \in G$ tal que $G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. En tal caso, g es llamado el generador de G . Es decir, todos los elementos de G se pueden escribir como una potencia de g .

Ejemplo: el grupo $A = \{R_o, R_1, R_2, R_3\}$ es un grupo cíclico, ya que puede ser escrito como $A = \{R_1^4, R_1, R_1^2, R_1^3\}$. Donde evidentemente R_1 es el generador de A .

1.1.17. Producto directo

Si H_1, H_2 son subgrupos de G ; entonces G es el producto directo de H_1 y H_2 (se escribe como $G = H_1 \otimes H_2$), si para $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$:

- Los elementos de los subgrupos conmutan, es decir: $h_1h_2 = h_2h_1$
- Todo elemento del grupo $g \in G$, puede ser escrito de manera única como el producto de elementos de los subgrupos, es decir: $g = h_1h_2$

1.2. Grupo de permutaciones

El grupo de permutaciones, como su nombre lo sugiere, consiste en la permutación de los elementos de un grupo. El grupo de permutaciones es un subgrupo del grupo simétrico que se detalla a continuación.

En él es importante destacar el lema del reordenamiento: Si $a, b, c \in G$ y $ab = ac$, entonces $b = c$. Para demostrar el lema se multiplica por la izquierda el elemento inverso de a en la primer igualdad.

El lema es fundamental para que los elementos no se repitan dentro del grupo cuando permutan entre si, conservando la cerradura y generando un arreglo distinto al original.

1.2.1. Grupo simétrico

Sea $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n\}$ un grupo de orden n . El conjunto de todas las permutaciones de los elementos de G es llamado el grupo simétrico de orden n , denotado por S_n . Una permutación p de los n elementos tiene la forma de:

$$p = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ pg_1 & pg_2 & pg_3 & \cdots & pg_n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Donde la relación $g_i \rightarrow pg_i$ corresponde al reemplazo del elemento de la primer fila por el de la segunda.

Existen n formas de elegir $g_1 \rightarrow pg_1$; una vez ha sido establecido, existen $(n-1)$ formas de elegir $g_2 \rightarrow pg_2$, para evitar repetir los elementos. De igual forma existen $(n-2)$ formas para $g_3 \rightarrow pg_3$, $(n-3)$ formas para $g_4 \rightarrow pg_4$, \dots etc., de manera que hay $n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(2)(1) = n!$ elementos para S_n .

Además, a todo elemento $g_j \in G$, se le puede asociar una permutación $p(g_j)$; ya que el producto $\{g_j g_1, g_j g_2, g_j g_3, \dots, g_j g_n\}$, también es un reordenamiento de los elementos de G , debido a que $g_j g_i \in G$ por definición, y por el lema del reordenamiento $g_j g_i \neq g_j g_k$ si $i \neq k$.

Se sigue de inmediato de las permutaciones definidas en la siguiente ecuación, que toda $g_j \in G$ forma un subgrupo de S_n , el grupo de permutaciones:

$$p(g_j) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ g_j g_1 & g_j g_2 & g_j g_3 & \cdots & g_j g_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

El grupo de permutaciones es de gran importancia, pues el Teorema de Cayley afirma que todo grupo de orden n , es isomorfo a un subgrupo de S_n .

1.3. Grupos de Lie

En el estudio de grupos aplicados a física suelen aparecer con frecuencia grupos continuos (rotaciones espaciales, traslaciones espaciales, traslaciones temporales, etc.) o comúnmente llamados grupos de Lie; después de que el matemático noruego Sophus Lie, desarrollara toda la estructura de los grupos asociados a elementos infinitesimales; una estructura algebraica, netamente local, que termina por ser absorbida dentro de lo que se denomina Álgebra de Lie.

1.3.1. Espacio topológico

Si X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X , entonces el par (X, τ) es un espacio topológico si:

- $X \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$
- Para $A_i \in \tau$, entonces la unión de todos los subconjuntos, también está en τ ,
 $\cup_i A_i \in \tau$
- Para $A_1, A_2 \in \tau$, entonces la intersección de los subconjuntos, también está en τ ,
 $A_1 \cap A_2 \in \tau$

Se dice entonces que, la familia τ es una topología sobre X ; y a los elementos

de τ se les denomina conjuntos abiertos de (X, τ) .

1.3.1.1. Función continua

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos, y sea f una aplicación tal que $f : X_1 \rightarrow X_2$. Se dice que f es una aplicación continua si para todo $A \subseteq X_2$, tal que $A \in \tau_2$, la inversa de f está en la familia de subconjuntos de X_1 , es decir $f^{-1}(A) \in \tau_1$.

1.3.1.2. Homeomorfismo

Se dice que dos espacios topológicos son homeomorfos si:

- Existe una aplicación biyectiva entre ambos espacios
- La aplicación es continua
- La inversa de la aplicación también es continua

En sentido general, el homeomorfismo se refiere a que ambos espacios topológicos posean la misma forma, mediante una transformación realizada de manera continua. Por ejemplo, una esfera puede ser transformada en un elipsoide estirándola y encogiéndola diferencialmente sin necesidad de saltos bruscos.

Sin embargo, la misma esfera no puede ser transformada en un toroide debido a la necesidad de crear su agujero; lo que se traduce a que la esfera y el toroide no son homeomorfos, contrario a la esfera y el elipsoide.

1.3.2. Espacio de Hausdorff

Un espacio topológico se dice que es un espacio de Hausdorff (T_2) cuando para cualquiera dos puntos x, y en un espacio topológico X , estos pueden ser separados por una vecindad sin elementos en común. Es decir; si U, V son dos vecindades de x y y respectivamente, entonces $U \cap V = \emptyset$.

1.3.3. Variedad topológica

Un espacio topológico se dice que es una variedad topológica si:

- Localmente posee la estructura del espacio euclídeo \mathbb{R}^n
- Es un espacio de Hausdorff
- Posee una base numerable

Es decir, que a cada punto $x \in X$, su entorno es homeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^n . A estos homeomorfismos es a lo que se le conoce como los mapas de la variedad. Por ejemplo, una persona sobre la superficie terrestre la percibe localmente plana; aunque globalmente sea una esfera.

1.3.3.1. Cálculo de varias variables

Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y F una función tal que $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $\vec{x}_0 \in U$, se dice que la función F es diferenciable en \vec{x}_0 si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

de manera que:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{F(\vec{x}_0 + \vec{h}) - F(\vec{x}_0) - L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0} \quad (1.3)$$

Esta aplicación recibe el nombre de diferencial de F en \vec{x}_0 , denotada como $dF(\vec{x}_0)$. Sea ahora U un abierto de \mathbb{R}^n , $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$, sea V un abierto de \mathbb{R}^m de manera que $F(\vec{x}_0) \in V$; y sea $G : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en $F(\vec{x}_0)$. Entonces $H = G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en \vec{x}_0 y además:

$$dH(\vec{x}_0) = dG(F(\vec{x}_0)) \circ dF(\vec{x}_0) \quad (1.4)$$

También llamada regla de la cadena en cálculo diferencial.

1.3.4. Variedad diferenciable

Una variedad diferenciable es una variedad topológica cuyos mapas son aplicaciones diferenciables, y en las cuales se puede definir un espacio tangente a cada punto. Gráficamente se puede asociar una variedad a una curva en la dimensión 1, o a una superficie a la dimensión 2. La generalización para el espacio n-dimensional es inmediata.

Nótese que en el primer caso se puede elegir un conjunto de vectores tangentes a dicha curva; mientras que en el segundo caso se puede encontrar planos tangentes a cada punto sobre la superficie, cumpliendo con la estructura local de \mathbb{R}^n .

1.3.5. Grupo topológico

Un grupo topológico es un espacio topológico (X, τ) de manera que:

- (X, \cdot) es un grupo
- La aplicación $X \times X \rightarrow X$ tal que $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 \cdot x_2$ es continua
- La aplicación $X \rightarrow X$ tal que $x \rightarrow x^{-1}$ es continua

1.3.6. Grupo de Lie

Los grupos de Lie son continuos (en un intervalo dado), que se caracterizan por r parámetros reales $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$. Se dice que un grupo G es de Lie si es una variedad diferenciable y además, las siguientes aplicaciones son diferenciables:

- $G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow xy$
- $G \rightarrow G, x \rightarrow x^{-1}$

1.3.7. Ejemplos de grupos de Lie

La mayor parte de los grupos de Lie están directamente desarrollados matricialmente, y prácticamente todos los casos que aparecen en física son de este tipo; por lo que reciben un tratamiento especial y se les suele denominar como matrices del grupo de Lie. A continuación se demuestran algunos de los ejemplos más comunes:

1.3.7.1. Grupo general $GL(n; \mathbb{R})$ y $GL(n; \mathbb{C})$

El grupo general lineal sobre los números reales denotado como $GL(n; \mathbb{R})$, es el grupo de todas las matrices invertibles $n \times n$ con números reales en cada una de sus entradas. Asimismo, el grupo general lineal sobre los complejos denotado como $GL(n; \mathbb{C})$, es el grupo de todas las matrices invertibles $n \times n$ con números complejos en sus entradas.

En ambos casos, la operación binaria definida en los grupos es la multiplicación usual de las matrices; ya que el producto de dos matrices invertibles es de nuevo invertible, existe un elemento identidad, poseen inversa por definición y el producto es asociativo; cumpliendo los axiomas de un grupo.

1.3.7.2. Grupo especial lineal $SL(n; \mathbb{R})$, $SL(n; \mathbb{C})$

Un grupo especial lineal denotado como $SL(n; \mathbb{R})$ es un grupo general sobre \mathbb{R} cuyo determinante es igual a 1. Asimismo, un grupo especial lineal denotado como $SL(n; \mathbb{C})$ es un grupo general sobre \mathbb{C} cuyo determinante es igual a 1. En ambos casos son un subgrupo de $GL(n; \mathbb{R})$ y $GL(n; \mathbb{C})$ respectivamente, ya que todos sus elementos, también pertenecen al grupo general, y cumple con la cerradura de acuerdo a la operación binaria ya establecida en $GL(n)$; ya que, por ejemplo, para el caso real, si $A, B \in SL(n; \mathbb{R})$, entonces $AB \in SL(n; \mathbb{R})$, debido a las propiedades básicas de las matrices:

$$\text{Det}(AB) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$$

1.3.7.3. Grupo ortogonal $O(n)$ y $SO(n)$

El grupo de todas las matrices ortogonales $n \times n$ forman el grupo $O(n)$, si además su determinante es 1, se le denomina grupo ortogonal especial $SO(n)$. La condición de ortogonalidad viene dada por:

$$\sum_{l=1}^n A_{jl}A_{lk} = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (1.5)$$

Donde δ_{jk} es la delta de Kronecker. Otra manera más general de expresar que un operador A es ortogonal, es diciendo que preserva el producto interno, lo que implica: $\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = \langle A^{-1}x, A^{-1}y \rangle$.

1.3.7.4. Grupo unitario $U(n)$ y $SU(n)$

El grupo de todas las matrices unitarias $n \times n$ forman el grupo $U(n)$, si además su determinante es 1 se le denomina grupo especial unitario $SU(n)$. La condición unitaria viene dada por:

$$\sum_{l=1}^n \overline{A_{jl}}A_{lk} = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (1.6)$$

Por ejemplo, el grupo $SU(2)$ es el grupo de todas las matrices unitarias 2×2 con determinante +1. La forma general de una matriz de este tipo es:

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, por la condición de unitaria debe cumplir $u^\dagger u = 1$, de manera

que existe una relación directa entre los parámetros:

$$aa^* + bb^* = 1$$

$$cc^* + dd^* = 1$$

$$ac^* + bd^* = 0$$

$$a^*c + b^*d = 0$$

Si además es unitaria $ad - bc = 1$. De tal forma que, de las relaciones anteriores se obtiene que la forma estándar de una matriz $u \in SU(2)$ es:

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

Con $aa^* + bb^* = 1$.

1.3.7.5. Grupo ortogonal generalizado $O(n, k)$ y de Lorentz

Definiendo la forma bilineal $[,]$ sobre \mathbb{R}^{n+k} mediante la fórmula:

$$[x, y] = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1} - \cdots - x_{n+k}y_{n+k}$$

El grupo de las matrices reales A de dimensión $(n+k) \times (n+k)$, que preservan esta forma bilineal $[Ax, Ay] = [x, y]$ para $x, y \in \mathbb{R}^{n+k}$ es el grupo ortogonal generalizado $O(n, k)$. De manera especial, el grupo de Lorentz es de tipo $O(3, 1)$

el cual corresponde a la métrica del espacio de Minkowski, con tres variables correspondientes a las tres dimensiones espaciales usuales y la otra correspondiente al tiempo.

1.3.7.6. Grupo de Heisenberg H

Toda matriz 3×3 que posea la estructura

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma un grupo denominado grupo de Heisenberg, nombre característico debido a su aparición constante en las reglas de conmutación de la mecánica cuántica. De hecho, este grupo no es más que un subgrupo de un grupo general de dimensión $n = 3$ sobre los reales, con las restricciones ya establecidas sobre los elementos de la matriz.

1.3.8. Álgebra de Lie

Sea G un grupo de Lie. El álgebra de Lie de G denotada por \mathfrak{g} se define como el espacio tangente a G en el elemento identidad $e \in G$, y en la cual está contenida la estructura local del grupo. El álgebra es un espacio vectorial en la cual está definida una operación:

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \tag{1.7}$$

Que para cualquier $u, v, w, z \in \mathfrak{g}$, y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; se cumplen las siguientes propiedades:

- Bilinealidad: $[au + bv, cw + dz] = ac[u, w] + ad[u, z] + bc[v, w] + bd[v, z]$
- Antisimetría: $[u, v] = -[v, u]$
- Identidad de Jacobi: $[u, [v, w]] = [v, [w, u]], = [w, [u, v]] = 0$

Un subálgebra de Lie de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , es un subespacio \mathfrak{h} de \mathfrak{g} de manera que si $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$, entonces $[H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$. Por su parte, si \mathfrak{g} y \mathfrak{f} son dos álgebras de Lie, se dice que hay un homomorfismo entre \mathfrak{g} y \mathfrak{f} si para una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{f}$, entonces $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.

- Constante de estructura

Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie, y X_1, X_2, \dots, X_n es una base para este espacio, entonces la operación $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$; para dos elementos cualquiera de la base puede ser escrito de la siguiente manera:

$$[X_a, X_b] = \sum_{c=1}^n i c_{abc} X_c \quad (1.8)$$

Donde c_{abc} se le denomina la constante de estructura para \mathfrak{g} ; las cuales, por las propiedades de antisimetría y de Jacobi cumplen con las siguientes propiedades:

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0$$

$$\sum_m (c_{ijm} c_{mkl} + c_{jkm} c_{mil} + c_{kim} c_{mjl}) = 0$$

Teorema: Sean G y H son dos matrices de un grupo de Lie, y $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sus respectivas álgebras; si existe una aplicación lineal $\Phi : G \rightarrow H$, que es un homomorfismo entre G y H , entonces existe una aplicación lineal única $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ de manera que:

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)} \quad \text{para toda } X \in \mathfrak{g} \quad (1.9)$$

Y que, además posee las siguientes propiedades para $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $A \in G$:

- $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$
- $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$
- $\phi(X) = \frac{d}{ds}\Phi(e^{sX})|_{s=0}$

1.3.9. Ejemplos de álgebras de Lie

Al igual que los grupos de Lie, las álgebras de Lie relacionadas con matrices son las más significativas y de mayor interés. Por lo que tienen un especial énfasis. Si G es una matriz de un grupo de Lie, el álgebra de Lie de G denotada por \mathfrak{g} es el conjunto de todas las matrices X de manera que $e^{sX} \in G$ para todos los números reales s . Además, posee las siguientes propiedades:

- $aX \in \mathfrak{g}$ para todos los números reales a
- Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces tanto $X + Y$ como $XY - YX \in \mathfrak{g}$

- Si G es una matriz de un grupo de Lie, y \mathfrak{g} su álgebra; con $X \in \mathfrak{g}$ y $A \in G$, entonces $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

1.3.9.1. Grupo general lineal

Si X es cualquier matriz compleja $n \times n$, por definición e^{sX} es invertible. Por lo que el álgebra de Lie asociada al grupo $GL(n; \mathbb{C})$ denotada como $gl(n; \mathbb{C})$ es el conjunto de todas las matrices $n \times n$.

1.3.9.2. Grupo especial lineal

Ya que $e^{sX} \in SL(n; \mathbb{C})$, entonces $\det(e^{sX}) = 1$. Pero, diagonalizando X :

$$\begin{aligned}
 \det(e^{sX}) &= \det \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (sX)^n \right) \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s)^n \det(X^n) \right) \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s)^n (\det X)^n \right) \\
 1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s)^n (\operatorname{tr} X)^n \right) = e^{s \operatorname{tr}(X)}
 \end{aligned}$$

Para cualquier $s \in \mathbb{R}$, por lo que $\operatorname{tr}(X) = 0$. De manera que el álgebra de Lie asociada al grupo $SL(n; \mathbb{C})$ denotada como $sl(n; \mathbb{C})$ es el conjunto de las matrices $n \times n$ tal que su traza sea igual a 0.

1.3.9.3. Grupo ortogonal

Una matriz es ortogonal si $A^t = A^{-1}$. Si X es una matriz $n \times n$, entonces e^{sX} es ortogonal si:

$$\begin{aligned}(e^{sX})^t &= (e^{sX})^{-1} \\ e^{sX^t} &= e^{-sX}\end{aligned}$$

Es decir, si $X^t = -X$. Por lo que el álgebra de Lie asociada a las matrices de Lie tanto del grupo $O(n)$ como $SO(n)$ es el conjunto de matrices bajo esta condición (antisimétricas), denotada como $so(n)$.

1.3.9.4. Grupo unitario

Una matriz es unitaria si $A^* = A^{-1}$. Si X es una matriz $n \times n$, entonces e^{sX} es unitaria si:

$$\begin{aligned}(e^{sX})^* &= (e^{sX})^{-1} \\ e^{sX^*} &= e^{-sX}\end{aligned}$$

Es decir, si $X = -X^*$. Por tanto, el álgebra de Lie asociada a las matrices de Lie tanto del grupo $U(n)$ como $SU(n)$ es el conjunto de matrices que cumplan esta restricción (antihermíticas), denotada como $su(n)$.

1.3.10. Sistema de raíces

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre los números racionales, y sea (x, y) una forma bilineal simétrica y definitivamente positiva en V . Un subconjunto \mathcal{R} de vectores en V es un sistema de raíces si:

- \mathcal{R} genera V
- Para $\alpha \in \mathcal{R}$ y $t\alpha \in \mathcal{R}$, siendo t racional; entonces $t = \pm 1$
- $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, entonces $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ es entero
- $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, entonces $\beta - 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)\alpha \in \mathcal{R}$

Un sistema de raíces se dice ser irreducible si no existe un subespacio propio $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}$ de manera que si $\alpha \in \mathcal{D}$ y $\beta \in \mathcal{R}$, pero $\beta \notin \mathcal{D}$ entonces $(\alpha, \beta) = 0$.

Se define el simetrizador para cada elemento $\alpha \in \mathcal{R}$ en V , mediante $S_\alpha : V \rightarrow V$, de manera que $S_\alpha(x) = x - 2[(\alpha, x)/(\alpha, \alpha)]\alpha$. Este operador cumple con la propiedad $(S_\alpha(x), S_\alpha(y)) = (x, y)$. Para demostrarlo considérese lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 (S_\alpha(x), S_\alpha(y)) &= \left(x - 2\frac{(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, y - 2\frac{(\alpha, y)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \right) \\
 &= (x, y) - 4\frac{(\alpha, x)(\alpha, y)}{(\alpha, \alpha)} + 4\frac{(\alpha, x)(\alpha, y)(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)(\alpha, \alpha)} \\
 &= (x, y) - 4\frac{(\alpha, x)(\alpha, y)}{(\alpha, \alpha)} + 4\frac{(\alpha, x)(\alpha, y)}{(\alpha, \alpha)} \\
 (S_\alpha(x), S_\alpha(y)) &= (x, y)
 \end{aligned}$$

El grupo W generado por los elementos S_α , cuando este varía sobre todos los elementos $\alpha \in \mathcal{R}$ es llamado el grupo de Weyl.

Un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$ es llamado una base para el sistema de raíces en V si \mathcal{B} es una base del espacio vectorial V y para cualquier $\beta \in \mathcal{R}$, esta se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de la base $\beta = \sum m_i \alpha_i$; en donde $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Se puede demostrar, además, que todo sistema de raíces posee una base.

1.3.11. Matrices de Cartan

Dada una base $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de un sistema de raíces \mathcal{R} en V , y definiendo a $N(x, y) = 2(x, y)/(y, y)$ para todo $x, y \in \mathcal{R}$; entonces los elementos de la matriz de Cartan están dados por $N(\alpha_i, \alpha_j)$. Por ejemplo, sea $V = Q^2$; donde Q es el campo de los números racionales. Una base para este espacio es $\alpha_1 = (1, 0)$ y $\alpha_2 = (-1, 1)$. Por lo que la matriz de Cartan asociada a un sistema de raíces con esta base es:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} N(\alpha_1, \alpha_1) & N(\alpha_1, \alpha_2) \\ N(\alpha_2, \alpha_1) & N(\alpha_2, \alpha_2) \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La importancia de las matrices de Cartan radica en que todas las raíces de un sistema de raíces \mathcal{R} pueden ser determinadas a partir de estas matrices y una base \mathcal{B} para \mathcal{R} .

1.3.12. Diagramas de Dynkin

Los diagramas de Dynkin son una representación gráfica bidimensional del sistema de raíces \mathcal{R} en V con base $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Para construirlos se siguen las siguientes reglas:

- El diagrama tendrá un número de vértices igual a los elementos de la base (n)
- Cada par de vértices se unirá con $N(\alpha_i, \alpha_j)N(\alpha_j, \alpha_i)$ líneas entre los vértices α_i y α_j
- Si $N(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0$ y $(\alpha_i, \alpha_i) > (\alpha_j, \alpha_j)$; entonces se dibuja una flecha desde el vértice α_i al vértice α_j

Ejemplo: considérese la siguiente base para $V = Q^3$: $\alpha_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1)$. Entonces se calcula $N(\alpha_i, \alpha_j)$ para cada par de elementos de la base, de manera que:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1, \alpha_2) &= -1 & N(\alpha_2, \alpha_1) &= -2 & N(\alpha_2, \alpha_3) &= 0 \\ N(\alpha_3, \alpha_2) &= 0 & N(\alpha_1, \alpha_3) &= 0 & N(\alpha_3, \alpha_1) &= 0 \end{aligned}$$

Donde la matriz de Cartan es rápidamente construida de forma que:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y el diagrama de Dynkin correspondiente es:

$$\begin{array}{ccc} \circ & \Leftarrow & \circ & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array}$$

Se puede demostrar, que los únicos diagramas de Dynkin correspondientes a sistema de raíces irreducibles con una base de n elementos, son de la forma de alguno de los siguientes nueve tipos que se muestran en la tabla III.

Tabla III. **Diagramas de Dynkin de sistema de raíces irreducibles**

Tipo	n	Diagrama
A_n	$n \geq 1$	$\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & - & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{n-1} & & \alpha_n \end{array}$
B_n	$n \geq 2$	$\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & \Rightarrow & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{n-1} & & \alpha_n \end{array}$
C_n	$n \geq 3$	$\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & \Leftarrow & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{n-1} & & \alpha_n \end{array}$
D_n	$n \geq 4$	$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \circ & & \\ & & & & & & & & \alpha_n \\ \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ & - & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{n-2} & & \alpha_{n-1} \end{array}$
E_6		$\begin{array}{ccccccc} & & & & \circ & & \\ & & & & & & \alpha_6 \\ \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \alpha_5 \end{array}$
E_7		$\begin{array}{ccccccc} & & & & \circ & & \\ & & & & & & \alpha_7 \\ \circ & - & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \alpha_5 & & \alpha_6 \end{array}$
E_8		$\begin{array}{ccccccc} & & & & \circ & & \\ & & & & & & \alpha_8 \\ \circ & - & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \alpha_5 & & \alpha_6 & & \alpha_7 \end{array}$
F_4		$\begin{array}{ccccccc} \circ & - & \circ & \Leftarrow & \circ & - & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 \end{array}$
G_2		$\begin{array}{ccc} \circ & \Leftarrow & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 \end{array}$

Fuente: elaboración propia.

2. REPRESENTACIÓN DE GRUPOS

2.1. Representación

Si existe un homomorfismo entre un grupo G y un grupo de operadores $U(G)$ en algún espacio vectorial V , se dice que $U(G)$ es una representación del grupo G . Es decir, que para dos elementos del grupo $g_1 \in G \rightarrow U(g_1) \in V$ y $g_2 \in G \rightarrow U(g_2) \in V$, se conserva la operación binaria definida en G :

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2) \quad (2.1)$$

La dimensión de la representación es igual a la dimensión del espacio vectorial V . Es posible además, encontrar un conjunto de matrices $D(G)$ asociadas a los operadores $U(G)$, de manera que se dirá que tales matrices forman una representación matricial para el grupo G .

2.1.1. Representaciones equivalentes

Sean $U_1(G)$ y $U_2(G)$ dos representaciones del grupo G . Se dice que $U_1(G)$ y $U_2(G)$ son equivalentes si existe un operador $S \in V$ de manera que:

$$U_1(G) = SU_2(G)S^{-1} \quad (2.2)$$

Suele referirse a esta relación diciendo que $U_1(G)$ y $U_2(G)$ están conectadas

bajo una transformación similar. Representaciones equivalentes se dicen que forman una clase equivalente.

Para conocer si dos representaciones cualquiera son equivalentes, se necesitaría determinar si existe el operador S ; sin embargo, hay un camino más corto que proviene de encontrar una propiedad que sea invariante para los operadores $U(G)$ equivalentes.

Dicha propiedad proviene de la representación matricial $D(G)$ para $U(G)$, siendo esta la traza:

$$\text{tr}D(g) = \sum_i D(g)_i^i \tag{2.3}$$

Ya que de las propiedades básicas de las matrices se sabe que si $D_1(G)$, $D_2(G)$ son representaciones matriciales de $U_1(G)$, $U_2(G)$ respectivamente, y además están conectadas bajo la ecuación 2.2, entonces $\text{tr}D_2(g) = \text{tr}D_1(g)$. Es decir, la traza es la misma en todos los elementos de una clase equivalente.

2.1.2. Representaciones unitarias

Si un grupo está representado en un espacio vectorial con producto interno definido y los operadores $U(g)$ son tales que $U^\dagger(g)U(g) = e$, para cualquier elemento $g \in G$, entonces la representación $U(G)$ se dice que es unitaria.

El teorema de Maschke, por otro lado enuncia que toda representación de un grupo finito o compacto es equivalente a una representación unitaria.

2.1.3. Subespacio invariante

Sea $U(G)$ una representación para el grupo G en el espacio vectorial V . Si V_1 es un subespacio vectorial de V , se dice que es invariante con respecto a $U(G)$ si para cualquier elemento $|x\rangle \in V_1$ y $g \in G$, $U(g)|x\rangle \in V_1$.

Es decir, al aplicar un elemento cualquiera del grupo a un elemento del subespacio, se obtiene un elemento que se encuentra en el mismo subespacio. El subespacio invariante se dice que es mínimo, si no contiene ningún otro subespacio invariante no trivial con respecto a $U(G)$.

2.1.4. Caracter de una representación

Sea $U(g)$ una representación de un grupo G de dimensión d . El caracter $\chi^D(g)$ asociado a un elemento $g \in G$ se define como la traza de la matriz $D(g)$ en la representación matricial.

$$\chi^D(g) = \sum_{i=1}^d D_i^i(g)$$

El caracter cumple con las siguientes propiedades:

- El caracter asociado a representaciones equivalentes es el mismo
- $\chi^D(e) = d$
- El caracter de una clase conjugada es el mismo, por lo que se puede identificar a

las clases, únicamente conociendo su caracter

- Si la representación es unitaria $U^\dagger(g) = U^{-1}(g)$, entonces $\chi(g^{-1}) = \chi^*(g)$

2.2. Representaciones irreducibles

Una representación $U(G)$ en un espacio vectorial V es irreducible si no existe ningún subespacio invariante no trivial en V con respecto a $U(G)$. En caso contrario, la representación es reducible.

Una representación $U(G)$ se dice que es completamente reducible si, además de tener un subespacio invariante V_1 en V , su complemento ortogonal (que consta de todos los vectores en V que son ortogonales a todos los elementos de V_1), también es invariante respecto a $U(G)$.

Teorema: si una representación unitaria es reducible, entonces también es completamente reducible. En vista de este teorema y del teorema de Maschke, se puede deducir que toda representación de un grupo finito o compacto reducible, también es completamente reducible (en relación a su representación unitaria equivalente).

2.2.1. Ortonormalidad de la representaciones irreducibles

Si $U_\mu(G)$ y $U_\nu(G)$ son dos representaciones irreducibles de G ; y $D^\mu(g)_i^k, D^\nu(g)_l^j$ los elementos de las matrices que representan a estos operadores respectivamente, entonces la condición de ortonormalidad está dada por:

$$\frac{n_\mu}{n_G} \sum_g D_\mu^\dagger(g)_i^k D^\nu(g)_l^j = \delta_\mu^\nu \delta_i^j \delta_l^k \quad (2.4)$$

Donde n_μ es la dimensión de la representación μ , y n_G el orden del grupo G . La importancia de este resultado radica en que conociendo una representación irreducible de $U(G)$, es posible encontrar todas las representaciones irreducibles restantes.

2.2.2. Ortogonalidad de los caracteres

Los caracteres correspondientes a representaciones irreducibles son ortogonales. Para demostrarlo, se coloca en la ecuación 2.4 la restricción $i = k$ y $j = l$ para obtener los elementos de la diagonal que corresponden al caracter de las representaciones, entonces:

$$\sum_g D_\mu^\dagger(g)_i^i D^\nu(g)_j^j = \frac{n_G}{n_\mu} \delta_\mu^\nu \delta_i^j \delta_j^i$$

Sumando ahora sobre los índices i y j :

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \sum_g D_\mu^\dagger(g)_i^i D^\nu(g)_j^j &= \frac{n_G}{n_\mu} \sum_i \sum_j \delta_\mu^\nu \delta_i^j \delta_j^i \\ \sum_g \chi^\nu(g) \chi^{\mu*}(g) &= \frac{n_G}{n_\mu} \sum_i \delta_\mu^\nu \delta_i^i \\ \sum_g \chi^\nu(g) \chi^{\mu*}(g) &= \frac{n_G}{n_\mu} n_\mu \delta_\mu^\nu \\ \sum_g \chi^\nu(g) \chi^{\mu*}(g) &= n_G \delta_\mu^\nu \end{aligned}$$

2.2.3. Representación en suma directa

Si V_1 es un espacio invariante y V_2 su complemento ortogonal, también invariante con respecto a $U(G)$, y $U_1(G)$, $U_2(G)$ los operadores que representan a este operador en estos subespacios, entonces del álgebra lineal se sabe que $V = V_1 \oplus V_2$; y además $U(G) = U_1(G) \oplus U_2(G)$ para $g \in G$.

De manera general, los subespacios V_1 y V_2 pueden seguir teniendo un subespacio invariante y, por tanto pueden seguir siendo descompuestos hasta llegar a representaciones irreducibles. Si $U^1(G), U^2(G), U^3(G), \dots$ representan estas representaciones irreducibles, y a_1, a_2, a_3, \dots el número de veces que estas representaciones aparecieron durante el proceso de descomposición, entonces:

$$U(G) = \sum_{\lambda \oplus} a_\lambda U^\lambda(G) \quad (2.5)$$

Donde cada U^λ es una representación irreducible e inequivalente de $U(G)$.

Teorema: el número de veces a_λ que una representación irreducible U^λ aparece en una representación reducible $U(G)$ de un grupo finito G de orden n_G está dado por:

$$a_\lambda = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi^U(g) \chi^{\lambda*}(g) \quad (2.6)$$

Para demostrarlo se hace referencia a la ecuación 2.5, tomando la traza de ambos lados para un elemento $g \in G$ se obtiene:

$$\chi^U(g) = \sum_{\lambda} a_\lambda \chi^\lambda(g)$$

Multiplicando ahora ambos lados por el caracter $\chi^{\nu^*}(g)$ y sumando sobre todos los elementos del grupo:

$$\begin{aligned}\sum_{g \in G} \chi^U(g) \chi^{\nu^*}(g) &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} \sum_g \chi^{\lambda}(g) \chi^{\nu^*}(g) \\ \sum_{g \in G} \chi^U(g) \chi^{\nu^*}(g) &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} n_G \delta_{\nu}^{\lambda} \\ a_{\lambda} &= \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \chi^U(g) \chi^{\lambda^*}(g)\end{aligned}$$

Corolario: si la representación $U(G)$ es irreducible e igual a U^{λ} , entonces a_{λ} es 1 para esa representación en particular, y 0 para las restantes. Por lo que, de la ecuación 2.6:

$$\sum_{g \in G} |\chi^{\nu}(g)|^2 = n_G \tag{2.7}$$

Esta es una condición suficiente para comprobar si una representación es irreducible o no.

Teorema: el número de representaciones irreducibles U^{λ} no equivalentes de un grupo finito G es igual al número de clases conjugadas de G .

2.2.4. Producto tensorial de representaciones

Si se tienen dos espacios vectoriales W y V de dimensión finita cuyas bases son e_1, e_2, \dots, e_n y f_1, f_2, \dots, f_m respectivamente. Considerando los elementos $w \in W$, $v \in V$, entonces el producto tensorial $w \otimes v \in W \otimes V$ es una aplicación bilineal

cuya base es $\{e_i \otimes f_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. La dimensión de $W \otimes V$ es igual al producto de las dimensiones de los espacios individuales, es decir: $\dim(W \otimes V) = (\dim W)(\dim V)$.

Si U_1 es una representación de un grupo G sobre W , y U_2 es una representación de un grupo H sobre V entonces, el producto tensorial de U_1 y U_2 es una representación del grupo $G \times H$ sobre el espacio $W \otimes V$, de manera que:

$$U_1 \otimes U_2(A, B) = U_1(A) \otimes U_2(B) \quad (2.8)$$

Para todos los elementos $A \in G$ y $B \in H$. Si además, u_1 y u_2 son las álgebras asociadas a las representaciones U_1 y U_2 , entonces el álgebra asociada a $U_1 \otimes U_2$ es un elemento que pertenece a $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ que para toda $X \in \mathfrak{g}$ y $Y \in \mathfrak{h}$:

$$u_1 \otimes u_2(X, Y) = u_1(X) \otimes I + I \otimes u_2(Y) \quad (2.9)$$

2.2.5. Representación regular

Sean $\{g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_n\}$ elementos de un grupo G . La operación binaria $g_i g_j = g_k$ puede ser escrita como:

$$g_i g_j = g_m (\Delta_i)_j^m \quad (2.10)$$

Donde $(\Delta_i)_j^m$ son un conjunto de matrices que forman una representación para el grupo G , llamada representación regular. Por ejemplo, considerando el grupo de orden 2 descrito en el cuadro IV, se puede escribir con base en la ecuación 2.10:

$$g_1 g_2 = g_1 (\Delta_1)_2^1 + g_2 (\Delta_1)_2^2$$

$$g_1 g_1 = g_1 (\Delta_1)_1^1 + g_2 (\Delta_1)_1^2$$

Tabla IV. **Grupo de orden 2**

	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2
g_2	g_2	g_1

Fuente: elaboración propia.

De manera que:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Y de igual forma para los otros dos productos definidos en el grupo se obtiene:

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Se verifica que cumplen con los axiomas de una representación para G . De hecho esta representación no es irreducible, ya que haciendo uso de la ecuación 2.7, se nota que:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |\chi^\nu(g)|^2 &= (\chi^\Delta(e)\chi^\Delta(e)^* + \chi^\Delta(a)\chi^\Delta(a)^*) \\ \sum_{g \in G} |\chi^\nu(g)|^2 &= ((2)(2) + (0)(0)) \\ \sum_{g \in G} |\chi^\nu(g)|^2 &= 4 \neq 2 \end{aligned}$$

Una manera de alternativa de construir la representación regular consiste en agrupar los elementos del grupo construyendo la tabla de Cayley, de manera que el elemento identidad aparezca en toda la diagonal (Cuadro V); y construyendo las matrices $\Delta(g_i)$ de tal forma que se sustituye por la unidad cada una de las posiciones donde aparezca el elemento g_i de la tabla, y colocando cero en las restantes.

$$\Delta_{ij}(g_k) = \begin{cases} 0 & \text{Si } g_i^{-1}g_j \neq g_k \\ 1 & \text{Si } g_i^{-1}g_j = g_k \end{cases} \quad (2.13)$$

Tabla V. **Construcción de la representación regular**

	g_1	g_2	\dots	g_n
g_1^{-1}	1			
g_2^{-1}		1		
\vdots			\ddots	
g_n^{-1}				1

Fuente: elaboración propia.

Teorema: una representación regular U^{reg} puede ser descompuesta como la suma directa de representaciones irreducibles U^λ , similar a lo efectuado en la ecuación 2.5. La suma de los cuadrados de las a_λ veces que aparece la representación U^λ en U^{reg} es exactamente igual al orden del grupo n_G . Para demostrarlo, se escribe la representación regular como una suma directa de las representaciones irreducibles:

$$U^{reg}(e) = \sum_{\oplus \lambda} a_\lambda U^\lambda(e)$$

Y por las propiedades del caracter:

$$\begin{aligned}
 n_G &= \chi^{reg}(e) \\
 n_G &= \text{tr} \sum_{\lambda} a_{\lambda} U^{\lambda}(e) \\
 n_G &= \sum_{\lambda} a_{\lambda} \text{tr} U^{\lambda}(e) \\
 n_G &= \sum_{\lambda} a_{\lambda}^2
 \end{aligned}$$

Donde se ha hecho el uso de la propiedad $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

2.2.6. Lemas de Schur

Primer lema: cualquier matriz que conmute con todas las representaciones matriciales de una representación irreducible debe ser múltiplo de la matriz unidad.

Segundo lema: si D y D' son dos representaciones irreducibles de un grupo G de dimensiones d y d' correspondientemente, y A una matriz tal que $AD(g) = D'(g)A$, $\forall g \in G$; entonces $A = 0$, o $d = d'$ y D es una representación equivalente a D' .

2.3. Tensores

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, y V^* su espacio dual, la aplicación multilineal (lineal en cada una de sus componentes) tal que:

$$T : (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.14}$$

es un tensor de rango $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, r veces contravariante y s veces covariante.

Los tensores son de gran importancia en diversas áreas de la física, como la mecánica clásica o relatividad general; ya que suponen una generalización a la noción de un vector (tensor de rango 1) o escalar (tensor de rango 0).

2.3.1. Vector covariante

Sea G un grupo y $D(G)$ una representación matricial. Se dice que V_μ con $\mu = 1, 2, \dots, n$ es un vector covariante respecto a la representación $D(G)$ si al aplicar un elemento $g \in G$, V_μ se transforma de la siguiente manera:

$$V_\mu \rightarrow [D(g)]_\mu^\nu V_\nu \quad (2.15)$$

2.3.2. Vector contravariante

El vector V^μ , $\mu = 1, 2, \dots, n$ se dice que es un vector contravariante respecto a la representación $D(G)$ si se transforma de la siguiente manera:

$$V^\mu \rightarrow [D(g)^{-1}]^\mu_\nu V^\nu \quad (2.16)$$

2.3.3. Escalar

Cualquier objeto que sea invariante bajo una transformación de simetría se denomina como escalar. Por ejemplo, el producto interno de dos vectores es un escalar.

2.3.4. Tensor

El objeto matemático $T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$, $\mu_i = 1, 2, \dots, n$; es un tensor respecto a la representación $D(G)$ si se transforma de acuerdo a:

$$T_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \rightarrow [D(g)]_{\mu_1}^{\nu_1} [D(g)]_{\mu_2}^{\nu_2} \dots [D(g)]_{\mu_n}^{\nu_n} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} \quad (2.17)$$

2.3.5. Tensores p-covariantes y q-contravariantes

Un tensor, que es s veces covariante y r veces contravariante se transforma con las propiedades mezcladas de covarianza y contravarianza.

Estos tensores se contraen si existe una suma interna entre un índice covariante y uno contravariante, reduciendo el rango en dos unidades (uno en cada índice). Por ejemplo, el tensor $T_{\mu_1\mu_2\lambda\dots\mu_s}^{\nu_1\nu_2\lambda\dots\nu_r}$ es un tensor $(r - 1)$ veces contravariante y $(s - 1)$ veces covariante. Es decir,

$$T \in \bigotimes_{s-1}^{r-1} V$$

2.3.6. Tensor invariante

Un tensor invariante es aquel que permanece inalterado al realizar una transformación de simetría. Existe para cualquier rango, un tensor invariante trivial, que no es más que la delta de Kronecker:

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{Si } \nu = \mu \\ 0 & \text{Si } \nu \neq \mu \end{cases}$$

Un ejemplo de un tensor invariante de rango 3 es el tensor de Levi-Civita.

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Si la permutación de } ijk \text{ es par} \\ -1 & \text{Si la permutación de } ijk \text{ es impar} \\ 0 & \text{Para índices repetidos} \end{cases}$$

2.3.7. Tensores totalmente simétricos

Sea V un espacio vectorial de dimensión n , y sea T un tensor de rango $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ (r veces contravariante), es decir:

$$T \in \bigotimes_o^r V$$

$$T(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n) \in \mathbb{R}$$

T es totalmente simétrico sí y solo sí para un elemento del grupo de permutaciones $\sigma \in S_r$:

$$T(\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n) = T(\phi^{\sigma(1)}, \phi^{\sigma(2)}, \dots, \phi^{\sigma(n)}) \quad (2.18)$$

De la misma forma, un tensor $T(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}$ de rango $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$ (s veces covariante) es totalmente simétrico si y solo si para $\sigma \in S_s$:

$$T(v_1, v_2, \dots, v_n) = T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \quad (2.19)$$

2.3.8. Tensores totalmente antisimétricos

Sea V un espacio vectorial de dimensión n , y sea A un tensor de rango $\binom{0}{k}$.
 T es totalmente antisimétrico sí y solo sí para toda $\sigma \in S_k$:

$$T(v_1, v_2, \dots, v_n) = sg(\sigma)T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \quad (2.20)$$

En donde la operación signo $sg(\sigma)$ está definida de manera que:

$$sg(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{Si el número de transposiciones es par} \\ -1 & \text{Si el número de transposiciones es impar} \end{cases}$$

El conjunto de todos estos tensores suele escribirse como:

$$\bigwedge^k = \{T \in \bigotimes_k^0 V \mid T \text{ es antisimétrico}\} \quad (2.21)$$

3. REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE LOS GRUPOS $SU(2)$ y $SU(3)$

3.1. Representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$

Se define por V_0 la representación trivial de $SU(2)$ sobre \mathbb{C} , V_1 su representación estándar sobre \mathbb{C}^2 , y de manera general a V_n como al espacio de polinomios homogéneos de orden $(n + 1)$ de dos variables z_1, z_2 sobre \mathbb{C}^{n+1} . Se verá el efecto que tiene sobre estos polinomios la aplicación de un elemento que pertenece a $SU(2)$ mediante la regla:

$$(\Phi(g)f)z = f(\Phi^{-1}(g)z) \tag{3.1}$$

En donde f es un polinomio, $\Phi(g)$ una representación del grupo asociada al elemento $g \in SU(n)$, y z base de V_n . Por ejemplo, para $SU(2)$, se caracteriza lo anterior mediante:

$$\begin{aligned} f &= 5z_1 - 2z_2 \\ z &= (z_1, z_2) \\ \Phi(g) &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \Phi^{-1}(g) &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces la transformación del polinomio f es:

$$\begin{aligned}
 (\Phi(g)f)z &= f(\Phi^{-1}(g)z) \\
 &= f\left(\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\
 &= f(-iz_1, iz_2) \\
 &= -5iz_1 - 2iz_2
 \end{aligned}$$

Nótese que similar a lo realizado con V_1 , se puede encontrar una base para cualquier n de V_n , de manera que:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \{z_1, z_2\} \\
 V_2 &= \{z_1^2, z_1z_2, z_2^2\} \\
 V_3 &= \{z_1^3, z_1^2z_2, z_1z_2^2, z_2^3\} \\
 V_4 &= \{z_1^4, z_1^3z_2, z_1^2z_2^2, z_1z_2^3, z_2^4\} \\
 &\vdots \\
 V_n &= \{z_1^k z_2^{n-k}, 0 \leq k \leq n\}
 \end{aligned}$$

De manera general, el polinomio f de grado m es de la forma:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^m a_k z_1^{m-k} z_2^k$$

Por lo que si $\Phi^{-1}(g) = \begin{pmatrix} g_{11}^{-1} & g_{12}^{-1} \\ g_{21}^{-1} & g_{22}^{-1} \end{pmatrix}$ entonces:

$$\begin{aligned}
(\Phi^{-1}(g)f)z &= f\left(\begin{pmatrix} g_{11}^{-1} & g_{12}^{-1} \\ g_{21}^{-1} & g_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= f(z_1g_{11}^{-1} + z_2g_{12}^{-1}, z_1g_{21}^{-1} + z_2g_{22}^{-1}) \\
&= \sum_{k=0}^m a_k (z_1g_{11}^{-1} + z_2g_{12}^{-1})^{m-k} (z_1g_{21}^{-1} + z_2g_{22}^{-1})^k
\end{aligned}$$

Lo que significa que el polinomio $(\Phi(g)f)z$ sigue siendo un polinomio de grado m ; tal y como puede comprobarse con el resultado anterior. Además, si $g_1, g_2 \in SU(2)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\Phi(g_1)[\Phi(g_2)f](z) &= \Phi(g_2)f(\Phi^{-1}(g_1)z) \\
&= f(\Phi^{-1}(g_2)\Phi^{-1}(g_1)z) \\
&= f((\Phi(g_1)\Phi(g_2))^{-1}z) \\
&= [\Phi(g_1)\Phi(g_2)]f(z)
\end{aligned}$$

Demostrando así que los elementos definidos bajo la ecuación 3.1 forman una representación de $SU(2)$ y que, además son irreducibles.

Para demostrar esta irreducibilidad es necesario demostrar que si A en V' es una representación de $SU(2)$ sobre V , de manera que es un homomorfismo sobre sí mismo y conmuta con todos los elementos de $SU(2)$, entonces A es proporcional a la matriz identidad y por tanto $V' = V$. Eligiendo un elemento $\Phi(g_a) \in SU(2)$ de

manera que:

$$\Phi^{-1}(g_a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} (\Phi^{-1}(g_a)f_k)z &= f_z(az_1, a^{-1}z_2) \\ &= a^k z_1^k a^{k-n} z_2^{n-k} \\ &= a^{2k-n} z_1^k z_2^{n-k} \\ \Phi^{-1}(g_a)f_k &= a^{2k-n} f_k \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(g_a)Af_k &= A\Phi^{-1}(g_a)f_k \\ &= Aa^{2k-n} f_k \\ &= a^{2k-n} Af_k \end{aligned}$$

Que no es más, que Af_k es un vector propio de $\Phi^{-1}(g_a)$ y también de $\Phi(g_a)$. Además, como el espacio propio de $\Phi(g_a)$ en V_n es generado por f_k , se deduce que $Af_k = c_k f_k$.

- Descomposición en suma directa

El producto directo de dos espacios anteriormente descritos puede ser descompuesto como la suma directa de espacios irreducibles, de la siguiente manera:

$$V_k \otimes V_l = \bigoplus_{j=0}^q V_{k+l-2j} \quad \text{Donde } q = \min\{k, l\} \quad (3.3)$$

Ejemplo: la representación 2×2 es reducible, y puede ser escrita como una de dimensión tres y de dimensión uno.

$$\begin{aligned} 2 \otimes 2 &= V_1 \otimes V_1 \\ &= V_2 \oplus V_0 \\ 2 \otimes 2 &= 3 \oplus 1 \end{aligned}$$

La representación 3×3 es reducible, y se descompone en una dimensión seis y otra de dimensión 3.

$$\begin{aligned} 3 \otimes 3 &= V_2 \otimes V_2 \\ &= V_4 \oplus V_2 \oplus V_0 \\ &= 5 \oplus 3 \oplus 1 \\ 3 \otimes 3 &= 6 \oplus 3 \end{aligned}$$

Para un triple producto directo, se siguen las reglas básicas de asociación.

$$\begin{aligned} 2 \otimes 2 \otimes 2 &= V_1 \otimes (V_1 \otimes V_1) \\ &= V_1 \otimes (V_2 \oplus V_0) \\ &= V_1 \otimes V_2 \oplus V_1 \otimes V_0 \\ &= V_3 \oplus V_1 \oplus V_1 \\ 2 \otimes 2 \otimes 2 &= 4 \oplus 2 \oplus 2 \end{aligned}$$

3.2. Representaciones irreducibles del álgebra $su(2)$

De las propiedades del álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie, se puede encontrar de manera inmediata la representación irreducible del álgebra de Lie asociada a la representación irreducible de $SU(2)$ de la sección anterior. Si $\phi(X)$ denota la representación de $su(2)$, donde $X \in \mathfrak{g}$, entonces:

$$\phi(X) = \left. \frac{d}{ds} \Phi(e^{sX}) \right|_{s=0}$$

De donde, al aplicarlo sobre un polinomio f se obtiene:

$$\begin{aligned} (\phi(X)f)(z) &= \left. \frac{d}{ds} f(e^{-sX}z) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} f(z(s)) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{dz_1}{ds} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{dz_2}{ds} \right|_{s=0} \\ &= -(X_{11}z_1 + X_{12}z_2) \frac{\partial f}{\partial z_1} - (X_{21}z_1 + X_{22}z_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} \end{aligned}$$

Por tanto, el operador asociado a las álgebras de Lie $su(2)$ tiene la siguiente forma general:

$$\phi(X) = -(X_{11}z_1 + X_{12}z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} - (X_{21}z_1 + X_{22}z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} \quad (3.4)$$

Se consideran a continuación tres matrices pertenecientes a $SU(2)$, se observa la forma que tiene este operador y cómo afecta a un polinomio homogéneo f de grado m . Los resultados se resumen en la tabla VI:

Tabla VI. **Operadores álgebras de Lie $su(2)$**

Matriz (X)	Operador $\phi(X)$	$\phi(X)z_1^k z_2^{m-k}$
$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$	$(m - 2k)z_1^k z_2^{m-k}$
$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$	$-kz_1^{k-1} z_2^{m-k+1}$
$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$-z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}$	$(k - m)z_1^{k+1} z_2^{m-k-1}$

Fuente: elaboración propia.

Hasta acá se ha trabajado bajo estas tres matrices pertenecientes a $SU(2)$, que han generado los operadores $\phi \in su(2)$. Sin embargo, estas matrices forman una base para $SU(2)$, por lo que las propiedades que debe cumplir cualquier elemento en el álgebra $su(2)$ se pueden generalizar a partir de estas. Por otra parte, considerar una representación de $su(2)$ es equivalente a estudiar una representación sobre los complejos del grupo especial lineal $sl(2; \mathbb{C})$, y de paso hará el cálculo más sencillo eligiendo una base adecuada que no tiene contraparte para $su(2)$.

Considérense entonces tres operadores (A, B, C) en un espacio de dimensión finita V . Y sea ϕ una aplicación lineal tal que $\phi : sl(2; \mathbb{C}) \rightarrow V$. Si se define el conmutador entre estos tres operadores por:

$$[A, B] = 2B$$

$$[A, C] = -2C$$

$$[B, C] = A$$

Nótese que obedecen las mismas reglas para las tres matrices H, X, Y definidas en la tabla VI. Por lo que estos operadores serán una representación de $sl(2; \mathbb{C})$ de manera que:

$$\phi(H) = A, \quad \phi(X) = B, \quad \phi(Y) = C.$$

Y además, esta representación es irreducible. Para mostrar esto, puede considerarse un elemento $v \in V$, el cual es un vector propio de $\phi(H)$ con valor propio α . Por las reglas de conmutación definidas anteriormente:

$$\begin{aligned} [\phi(H)\phi(X) - \phi(X)\phi(H)]v &= 2\phi(X)v \\ \phi(H)\phi(X)v &= [\phi(X)\phi(H) + 2\phi(X)]v \\ \phi(H)\phi(X)v &= \phi(X)\phi(H)v + 2\phi(X)v \\ \phi(H)\phi(X)v &= \phi(X)\alpha v + 2\phi(X)v \\ \phi(H)\phi(X)v &= (\alpha + 2)\phi(X)v \end{aligned}$$

Significando que $\phi(X)v$ es un vector propio de $\phi(H)$ con valor propio $(\alpha + 2)$. O de manera más general, que $\phi(X)^n v$ es un vector propio de $\phi(H)$ con un valor propio $(\alpha + 2n)$. De la misma forma se puede demostrar que $\phi(Y)^k v$ es un vector propio de $\phi(H)$ con valor propio $(\alpha - 2k)$. Como el espacio es de dimensión finita, el número de vectores propios será finito; es decir, habrá una restricción sobre los valores que pueda tomar n , antes de que la aplicación $\phi(X)$ al aplicarla repetidas veces sobre el vector, lo vuelva el vector nulo. Si N es este valor máximo que mantiene al vector sin ser nulo, entonces:

$$\phi^{N+1}(X)v = 0, \quad \phi^N(X)v \neq 0, \quad \phi(H)\phi^N(X)v = (\alpha + 2N)\phi^N(X)v$$

Estas definiciones anteriores son fundamentales en la sección posterior para entender la representación del grupo $SU(3)$, por tanto recibirán un carácter especial. Ya que $\phi^N(X)v$ y $(\alpha + 2N)$ son el vector propio y valor propio más grandes correspondientes al operador $\phi(H)$; se les denotará como v_o y λ respectivamente.

Si se define el vector $v_k = \phi^k(Y)v_o$, entonces por las propiedades anteriores se sabe que es un vector propio de $\phi(H)$ tal que:

$$\phi(H)v_k = (\lambda - 2k)v_k$$

Con el mismo razonamiento, estos valores de k estarán restringidos por el número de vectores propios de $\phi(H)$. Si m es el número de veces máximo que se puede aplicar $\phi(Y)$ sobre v_o antes de volverlo un vector nulo, entonces:

$$v_{m+1} = \phi^{m+1}(Y)v_o = 0, \quad v_m = \phi^m(Y)v_o \neq 0 \quad \text{para } k \leq m$$

Por otro lado se puede demostrar por inducción que:

$$\phi(X)v_k = [k\lambda - k(k-1)]v_{k-1} \quad \text{si } k \neq 0$$

Pero como $v_{m+1} = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \phi(X)v_{m+1} &= 0 \\ [(m+1)\lambda - m(m+1)]v_m &= 0 \\ (m+1)(\lambda - m)v_m &= 0 \end{aligned}$$

Como el vector no es nulo, se deduce que $\lambda = m$. Es decir, el número de veces que se puede aplicar el operador $\phi(Y)$ sobre el vector máximo antes de volverlo en

un vector nulo es igual al valor propio máximo. En resumen, estos operadores junto con los vectores v_0, v_1, \dots, v_m tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\phi(H)v_k &= (m - 2k)v_k \\ \phi(Y)v_k &= v_{k+1} \quad (k < m) \\ \phi(Y)v_m &= 0 \\ \phi(X)v_k &= (km - k(k - 1))v_{k-1} \quad (m > k > 0) \\ \phi(X)v_0 &= 0\end{aligned}$$

La independencia lineal de las v_k se deduce de la primera de las relaciones, ya que a cada vector le corresponde un distinto valor propio. Además, esta base de vectores propios es invariante ante cualquier operador que represente a un elemento de $sl(2; \mathbb{C})$, además de generar todo V ; demostrando así la irreducibilidad de la representación. Por su parte, de acuerdo a los operadores definidos en la tabla VI, por cálculo directo sobre un polinomio homogéneo se demuestra que cumplen con todas las propiedades anteriormente descritas, demostrando así que estos operadores corresponden a una representación irreducible de $sl(2; \mathbb{C})$.

Describiendo todos estos argumentos sobre un espacio vectorial arbitrario de $sl(2; \mathbb{C})$ de dimensión finita, se puede resumir así:

- Los eigenvalores de $\phi(H)$ son enteros
- Si v es un vector no nulo de V tal que $\phi(X)v = 0$ y $\phi(H)v = \lambda v$, existe un entero no negativo m tal que $\lambda = m$; donde los vectores $\phi(Y)v, \phi^2(Y)v, \dots, \phi^m(Y)v$ son linealmente independientes y su expansión es un subespacio invariante irreducible de dimensión $m + 1$

3.3. Representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$

Existe una correspondencia uno a uno entre las representaciones del grupo $SU(3)$ y sus respectivas álgebras $su(3)$, relacionadas mediante la ecuación 1.9. Más precisamente, se enfoca la atención sobre el subgrupo de $su(3)$ definido sobre los complejos $su(3; \mathbb{C})$, el cual pretende generalizar los resultados obtenidos con la representación de $su(2)$.

Por su parte, una representación del grupo $SU(3)$ es irreducible si y solo si la representación de su álgebra $su(3)$ es irreducible. Por lo que basta con prestar toda la atención sobre la representación del álgebra; y con base en los resultados obtenidos allí, se pueden extraer las propiedades de los elementos de $SU(3)$.

3.4. Representaciones irreducibles del álgebra $su(3)$

Estableciendo las siguientes matrices:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Las cuales forman una base para el espacio vectorial de $sl(3; \mathbb{C})$, calculando las relaciones de conmutación para las matrices H_1, H_2 , se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
[H_1, H_2] &= 0 & , & & [H_1, Y_1] &= -2Y_1 \\
[H_2, Y_1] &= Y_1 & , & & [H_1, Y_2] &= Y_2 \\
[H_2, Y_2] &= -2Y_2 & , & & [H_1, Y_3] &= -Y_3 \\
[H_2, Y_3] &= -Y_3 & , & & [H_1, X_1] &= 2X_1 \\
[H_2, X_1] &= -X_1 & , & & [H_1, X_2] &= -X_2 \\
[H_2, X_2] &= 2X_2 & , & & [H_1, X_3] &= X_3 \\
[H_2, X_3] &= X_3
\end{aligned}$$

Totalmente equivalentes a las matrices encontradas en la representación de $sl(2; \mathbb{C})$, y motivo por el cual se dice que $su(2)$ es un subálgebra contenida en $su(3)$. Con el objetivo de ordenar y clasificar las representaciones irreducibles de $su(3; \mathbb{C})$ se definen los pesos, las raíces de esta y los vectores asociados a cada uno de ellos.

3.4.1. Pesos de una representación

Si ϕ es una representación de $sl(3; \mathbb{C})$ en un espacio vectorial V ; entonces el par $\mu = (m_1, m_2) \in \mathbb{C}$ es un peso de la representación ϕ si existe un vector v no nulo en V que es vector propio de $\phi(H_1)$ y $\phi(H_2)$ simultáneamente, con valores propios m_1 y m_2 . Es decir:

$$\begin{aligned}
\phi(H_1)v &= m_1v \\
\phi(H_2)v &= m_2v
\end{aligned}$$

Al vector propio v recibe el nombre de vector peso; y además, se demuestra con base en los mismos argumentos presentados en la sección anterior para $sl(2; \mathbb{C})$, que los valores propios asociados son enteros. Si existen otros vectores que satisfagan esta condición bajo el mismo valor de $\mu = (m_1, m_2)$; estos formarán un espacio vectorial denominado el espacio de peso, correspondiente a los valores propios m_1, m_2 .

3.4.2. Raíces de una representación

Si H_1 y H_2 son las matrices descritas previamente que forman una base para $sl(3; \mathbb{C})$; entonces el par $\alpha = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}$ se dice que es una raíz si existe un elemento no nulo $Z \in sl(3; \mathbb{C})$ que no conmute simultáneamente con H_1 y H_2 , y que sea un vector peso para la representación adjunta de las matrices H_1 y H_2 . Es decir:

$$\begin{aligned} [H_1, Z] &= a_1 Z \\ [H_2, Z] &= a_2 Z \end{aligned}$$

El elemento Z recibe entonces el nombre de vector raíz correspondiente a la raíz α .

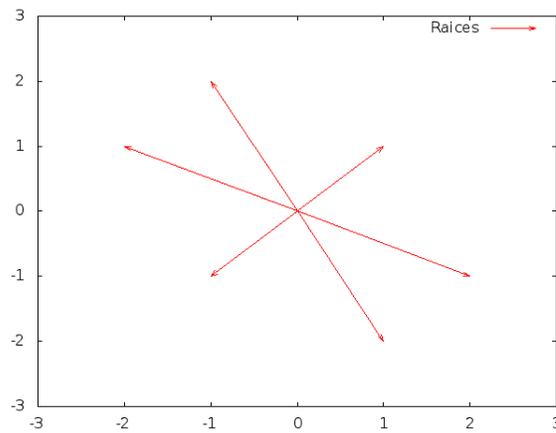
Por ejemplo, los conmutadores de H_1 y H_2 con X_1 son $[H_1, X_1] = 2X_1$ y $[H_2, X_1] = -X_1$ respectivamente; por lo que X_1 es un vector raíz correspondiente a la raíz $(2, -1)$. De la misma forma, se pueden obtener las raíces restantes para los elementos de la base de $sl(3; \mathbb{C})$ las cuales se resumen en la tabla VII y se esquematizan en la figura 2.

Tabla VII. **Raíces**

α	Z
$(2, -1)$	X_1
$(-1, 2)$	X_2
$(1, 1)$	X_3
$(-2, 1)$	Y_1
$(1, -2)$	Y_2
$(-1, -1)$	Y_3

Fuente: elaboración propia.

Figura 2. **Raíces**



Fuente: elaboración propia.

Se escoge arbitrariamente dos de estas raíces y se les nombra especialmente, $\alpha_1 = (2, -1)$, $\alpha_2 = (-1, 2)$. El resto de raíces puede ser escrita como una combinación de estas dos.

La relación existente entre las raíces y pesos de una representación puede determinarse calculando el conmutador de H_1 y H_2 con un vector raíz de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[H_1, Z] &= a_1 Z \\
(\phi(H_1)\phi(Z) - \phi(Z)\phi(H_1))v &= a_1\phi(Z)v \\
\phi(H_1)\phi(Z)v &= \phi(Z)\phi(H_1)v + a_1\phi(Z)v \\
\phi(H_1)\phi(Z)v &= \phi(Z)m_1v + a_1\phi(Z)v \\
\phi(H_1)\phi(Z)v &= (m_1 + a_1)\phi(Z)v
\end{aligned}$$

Para H_2 se encuentra una relación equivalente. Es decir, si Z es un vector raíz correspondiente a la raíz $\alpha = (a_1, a_2)$ en $sl(3; \mathbb{C})$, y v es un vector con peso $\mu = (m_1, m_2)$ para la representación ϕ ; entonces $\phi(Z)v$ es un nuevo vector de peso de ϕ con peso $\mu + \alpha$.

Ahora, en analogía a $sl(2; \mathbb{C})$, al seguir aplicando $\phi(Z)$ sobre un vector peso v se puede seguir obteniendo nuevos vectores de peso; sin embargo, para una representación de dimensión finita los eigenvectores son finitos, lo que lleva a concluir que llegará un momento en el que ya no puede seguir obteniendo nuevos vectores peso, y habrá un vector al cual le corresponda un peso máximo.

Como cualquier peso de $sl(3; \mathbb{C})$ consta de un par de números $\mu = (m_1, m_2)$, se debe definir qué se entiende que un peso sea mayor a otro. Si se tienen dos pesos μ_1, μ_2 ; entonces se dirá que $\mu_1 > \mu_2$ si la diferencia $\mu_1 - \mu_2$ puede ser escrita como una combinación lineal de α_1 y α_2 con coeficientes positivos. Es decir:

$$\mu_1 - \mu_2 = a\alpha_1 + b\alpha_2, \quad \text{donde } a, b \geq 0 \tag{3.8}$$

3.4.3. Representaciones irreducibles $sl(3; \mathbb{C})$

Tanto las raíces como los pesos de una representación ϕ de $sl(3; \mathbb{C})$ son de vital importancia para construir su respectiva representación irreducible; la cual se resume en los siguientes teoremas:

- Toda representación irreducible ϕ de $sl(3; \mathbb{C})$ es la suma directa de sus espacios de peso
- Toda representación irreducible de $sl(3; \mathbb{C})$ tiene un único peso máximo μ_0
- Dos representaciones irreducibles equivalentes de $sl(3; \mathbb{C})$ tienen el mismo peso máximo
- Dos representaciones irreducibles de $sl(3; \mathbb{C})$ con el mismo peso máximo son equivalentes
- El peso máximo μ_0 de una representación ϕ de $sl(3; \mathbb{C})$ es de la forma $\mu_0 = (m_1, m_2)$ donde m_1 y m_2 son dos enteros no negativos
- Si m_1 y m_2 son dos enteros no negativos, existe una representación irreducible ϕ de $sl(3; \mathbb{C})$ con peso máximo $\mu_0 = (m_1, m_2)$
- La dimensión de una representación irreducible con peso máximo $\mu_0 = (m_1, m_2)$ es $\frac{1}{2}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)$

Todo par de números enteros no negativos (m_1, m_2) se les denomina un ele-

mento integral dominante. De manera que todo peso máximo de una representación irreducible es un elemento integral dominante; y todo elemento integral dominante es un peso máximo de una representación irreducible para $sl(3; \mathbb{C})$. Los elementos integrales dominantes fundamentales $(1, 0)$ y $(0, 1)$ pueden ser escritos como una combinación lineal de los pesos base (tal y como puede ser comprobado fácilmente) de la siguiente manera:

$$(1, 0) = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \quad (3.9)$$

$$(0, 1) = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 \quad (3.10)$$

3.4.4. El grupo de Weyl

Consiste en un grupo de dimensión finita formado por reflexiones ortogonales a los planos formados por el sistema de raíces. La idea proviene de observar que dada una representación ϕ para un elemento $X \in sl(3; \mathbb{C})$, se puede asociar una representación equivalente dada por el elemento AXA^{-1} , siendo $A \in SU(3)$. Es decir, $\phi(X) \equiv \phi(AXA^{-1})$.

Al definir a \mathfrak{h} como el subespacio bidimensional con base H_1 y H_2 ; algunos elementos $A \in SU(3)$ no preservarán a \mathfrak{h} cuando sean aplicados sobre un elemento $H \in \mathfrak{h}$ por medio de la representación adjunta; es decir que de manera general $Ad_A(H) \notin \mathfrak{h}$. Sin embargo, algunos elementos $A \in SU(3)$ si preservarán esta estructura sobre \mathfrak{h} ; a este conjunto de elementos, que forman un grupo, se le denomina grupo de Weyl de $SU(3)$.

Para caracterizar este grupo, se denota a \mathfrak{h} como el subespacio de $sl(3; \mathbb{C})$ expandido por H_1 y H_2 . Si Z es el subgrupo de $SU(3)$ de modo que para todo elemento $A \in SU(3)$ la representación adjunta $Ad_A(H) = H$ para toda $H \in \mathfrak{h}$, y N

es el subgrupo de $SU(3)$, tal que para todo elemento $A \in SU(3)$ la representación adjunta $Ad_A(H) \in \mathfrak{h}$ para toda $H \in \mathfrak{h}$, entonces el grupo de Weyl denotado por W está determinado por el grupo cociente N/Z .

Se define la acción de un elemento $w \in W$ sobre un elemento $H \in \mathfrak{h}$ de manera que si A es un elemento de la clase lateral de Z correspondiente al elemento w , entonces:

$$w \cdot H = Ad_A(H) \quad (3.11)$$

Las matrices que pertenecen al subgrupo Z son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\theta+\xi)} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Ya que su inversa es igual a su adjunta, y su determinante es claramente 1.

$$A^{-1} = A^\dagger = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\theta+\xi)} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Además, si se supone que $H \in \mathfrak{h}$, entonces puede ser escrita como una combinación lineal de la base: $H = aH_1 + bH_2$. En vista de las matrices H_1 y H_2 , H es de la forma:

$$H = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a + b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Por lo que al aplicar la representación adjunta relacionada a la matriz A sobre H se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Ad_A(H) &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\theta+\xi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a+b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\theta+\xi)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a+b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} = aH_1 + bH_2 = H
 \end{aligned}$$

Tal y como fue definido el subgrupo Z . Por su parte, el subgrupo N está determinado por todas aquellas matrices A de manera que para cada $k = \{1, 2, 3\}$ existe un θ_0 y una $l = \{1, 2, 3\}$ tal que:

$$Ae_k = e^{i\theta_0} e_l$$

Siendo e_1, e_2, e_3 la base usual para \mathbb{C}^3 . Es clave notar que la acción de estas matrices $A \in N$ es tomar un elemento de esta base y devolver un múltiplo de un elemento de esta misma base. De hecho, el grupo de Weyl $W = N/Z$ es isomorfo al grupo de permutaciones de tres elementos; así como los elementos de la base de \mathbb{C}^3 pueden cambiar entre sí bajo la acción de A .

El objetivo ahora es mostrar que el grupo de Weyl da una simetría de los pesos de cualquier representación de $sl(3; \mathbb{C})$ de dimensión finita; y para esto, habrá que variar sustancialmente la perspectiva hacer de los pesos. Al considerar dos elementos $J, K \in \mathfrak{h}$; entonces es claro que $\phi(aJ + bK)v = (a\lambda_1 + a\lambda_2)v$, ya que tanto J como K pueden ser escritos como una combinación lineal de H_1 y H_2 , los cuales poseen vectores propios en \mathfrak{h} .

Si \mathfrak{h} es un subespacio de $sl(3; \mathbb{C})$ expandido sobre H_1 y H_2 , y ϕ es una representación de dimensión finita de $sl(3; \mathbb{C})$ en un espacio vectorial V ; entonces una funcional $\mu \in \mathfrak{h}^*$ es un peso para la representación ϕ si existe un vector v no nulo en V tal que:

$$\phi(H)v = \mu(H)v$$

Es claro que la definición hecha inicialmente sobre el peso de una representación se sigue manteniendo, ya que H depende linealmente de H_1 y H_2 . En esta nueva perspectiva, el peso es un elemento del espacio dual de \mathfrak{h} .

Se define ahora la acción de un elemento del grupo de Weyl w sobre $\mu \in \mathfrak{h}^*$ de manera que sea un elemento de \mathfrak{h}^* , de acuerdo a la fórmula:

$$(w \cdot \mu)H = \mu(w^{-1} \cdot H)$$

De hecho, el elemento $(w \cdot \mu) \in \mathfrak{h}^*$ también es un peso para la representación ϕ con la misma multiplicidad de μ ; ya que si $A \in N$, entonces:

$$\begin{aligned} \phi(H)\Phi(A)v &= \Phi(A)\Phi(A)^{-1}\phi(H)\Phi(A)v \\ &= \Phi(A)\phi(A^{-1}HA)v \\ &= \mu(A^{-1}HA)\Phi(A)v \\ &= \mu(w^{-1}H)\Phi(A)v \\ &= (w \cdot \mu)(H)\Phi(A)v \end{aligned}$$

Donde la asociación de $w^{-1} \in W$ a $A \in N$ es inmediata de acuerdo al elemento en la clase de equivalencia de w definido en la ecuación 3.11; y como la aplicación

$\Phi(A)$ es un isomorfismo entre μ y $w \cdot \mu$, entonces la dimensión de sus espacios es la misma y por tanto, también su multiplicidad. Además, como las raíces de una representación no son más que los pesos de la representación adjunta, se observa que $\phi(H)v' = \mu(A^{-1}HA)v' = \mu(H)v'$, lo que implica que $\mu(A^{-1}HA) = \mu(H)$. Es decir, las raíces de la representación son invariantes bajo la acción del grupo de Weyl.

Para deshacerse de la referencia continua al espacio de funcionales \mathfrak{h}^* y solo mencionar a \mathfrak{h} , se restringe \mathfrak{h}^* como el producto interno usual sobre \mathbb{C}^3 . Es decir, si $A \in \mathfrak{h}$ entonces existe un elemento de $A^* \in \mathfrak{h}^*$ tal que $A^* = \langle A, \cdot \rangle$. Este producto interno con un elemento de $B \in \mathfrak{h}$ no es más que el producto interno de Hilbert-Schmidt, de manera que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(\overline{A}B)$. Los pesos entonces pueden escribirse como:

$$\phi(H)v = \langle A, H \rangle v$$

Bajo este nuevo punto de vista, los pesos pueden ser escritos como elementos de \mathfrak{h} , de manera que:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ya que al hacer sus proyecciones sobre los elementos de la base H_1 y H_2 , estas coinciden con su definición previa.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1, H_1 \rangle &= \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

De la misma forma se encuentra que $\langle \alpha_1, H_2 \rangle = -1$, $\langle \alpha_2, H_1 \rangle = -1$, $\langle \alpha_2, H_2 \rangle = -2$.

Por su parte, el ángulo entre las raíces (base) bajo este nuevo producto interno relativo al grupo invariante de Weyl es:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}{\sqrt{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} \sqrt{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle}} \\
\cos(\theta) &= -\frac{1}{2} \\
\theta &= 120^\circ
\end{aligned}$$

Los elementos dominante base μ_1, μ_2 por su parte, tal y como se muestra en la ecuación 3.10 están dados por:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

De donde se calcula que $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle = 1/3$ y $\langle \mu_1, \mu_1 \rangle = \langle \mu_2, \mu_2 \rangle = \sqrt{6}/3$; por lo que el ángulo entre los elementos integrales dominantes es de 60° .

Al suponer ahora que $w_{\{3,1,2\}}$ es un elemento del grupo de Weyl de manera que intercambia los elementos de la diagonal de todo $H \in \mathfrak{h}$ de forma que $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Entonces las raíces base se transforman de la siguiente manera:

$$w_{\{3,1,2\}}\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \alpha_2$$

$$w_{\{3,1,2\}}\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(\alpha_1 + \alpha_2)$$

De igual manera se puede calcular los restantes cinco elementos que permutan los elementos de la diagonal, los cuales se resumen en la tabla VIII.

Tabla VIII. **Grupo de Weyl sobre las raíces de la representación**

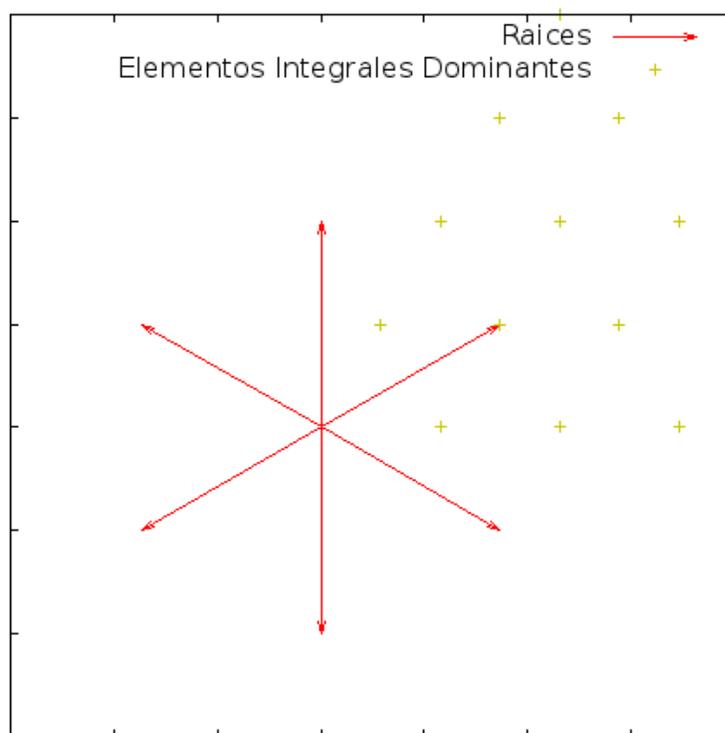
W	α_1	α_2
$w_{\{1,2,3\}}$	α_1	α_2
$w_{\{2,1,3\}}$	$-\alpha_1$	$\alpha_1 + \alpha_2$
$w_{\{3,2,1\}}$	$-\alpha_2$	$-\alpha_1$
$w_{\{1,3,2\}}$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$-\alpha_2$
$w_{\{2,3,1\}}$	$-(\alpha_1 + \alpha_2)$	α_1
$w_{\{3,1,2\}}$	α_2	$-(\alpha_1 + \alpha_2)$

Fuente: elaboración propia.

Los elementos del grupo de Weyl consisten entonces de dos rotaciones de 120 grados en contra y a favor de las manecillas del reloj, el elemento identidad y tres reflexiones bajo la línea perpendicular a α_1 , α_2 y $\alpha_1 + \alpha_2$; al igual que la simetría de un triángulo equilátero mostrado en el primero de los capítulos.

La representación gráfica de las raíces y de los elementos integrales dominantes descritos previamente se muestran en la figura 3, con la base usual H_1 y H_2 relativas al grupo invariante de Weyl.

Figura 3. **Raíces y elementos integrales para $sl(3; \mathbb{C})$**



Fuente: elaboración propia.

3.4.5. Diagrama de Pesos

Con el fin de poder hacer el Diagrama de Pesos correspondiente a una representación irreducible de $sl(3; \mathbb{C})$, es necesario definir la región convexa de un conjunto de puntos o vectores. Al suponer que v_1, \dots, v_n es una colección finita de vectores en V , entonces la región convexa asociada a estos vectores es el conjunto de todos los vectores que pueden ser expresados como una combinación lineal de v_1, \dots, v_n ; donde las constantes de la expansión son números reales mayores o iguales a 0, tal que su suma es la unidad.

Si se supone ahora que ϕ es una representación irreducible de $sl(3; \mathbb{C})$ cuyo peso máximo es μ_0 . Entonces, un elemento $\mu \in \mathfrak{h}$ será un peso para la representación ϕ si y solo si:

- μ está en la región convexa de la órbita generada por μ_0 bajo el grupo de Weyl
- $\mu_0 - \mu$ puede ser escrita como una combinación lineal de α_1 y α_2 con coeficientes enteros

La primera de las restricciones implica que al rotar el peso máximo de la representación, generará una órbita cerrada a trazos (un polígono); por lo que todo peso μ debe estar dentro de este polígono.

Solo existen tres diferentes polígonos generados al rotar los pesos de una representación irreducible de $sl(3; \mathbb{C})$, estos son: un hexágono, un triángulo equilátero o un punto ¹.

¹Un punto no es un polígono, sino un elemento sin dimensión.

El hexágono surge al aplicar los seis diferentes elementos del grupo de Weyl sobre un peso que no se encuentre en la frontera de los elementos integrales dominantes.

El triángulo equilátero resulta precisamente cuando un peso se encuentra en esta frontera, ya que será invariante, ya sea ante la reflexión de la línea perpendicular a α_1 o α_2 , eliminando así 3 de los puntos que generaría un hexágono.

Finalmente, el punto es el caso especial cuando el peso máximo es $\mu_0 = (0, 0)$, el cual se localiza en el origen y al aplicarse cualquier elemento de rotación asociado al grupo de Weyl, permanecerá invariante.

Por su lado, la multiplicidad de los pesos está directamente relacionada con la forma del polígono generado por estos. La frontera exterior de ambos tendrá multiplicidad 1; sin embargo, para un hexágono, mientras se vaya avanzando por capas hacia el interior de este, la multiplicidad aumentará en una unidad.

En el caso de los triángulos, la multiplicidad será la misma para sus capas interiores que para su frontera. En caso de que un triángulo se encuentre dentro de un hexágono, este estabilizará el aumento proveniente de las capas externas hexagonales, manteniendo constante el interior.

3.4.5.1. Peso máximo (1,1)

El objetivo es determinar los posibles pesos de la representación con peso máximo $\mu = (1, 1)$ y ver si satisfacen las dos condiciones dadas. Estos cálculos se resumen en la tabla IX.

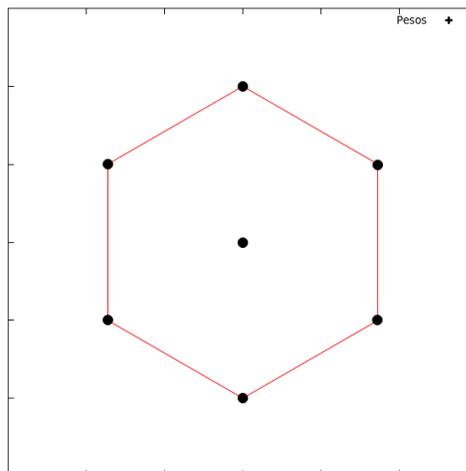
Tabla IX. Posibles pesos para la representación (1,1)

μ	$\mu_0 - \mu$	$a\alpha_1 + b\alpha_2$
(0, 0)	(1, 1)	$\alpha_1 + \alpha_2$
(1, 0)	(0, 1)	$1/3\alpha_1 + 2/3\alpha_2$
(0, 1)	(1, 0)	$2/3\alpha_1 + 1/3\alpha_2$

Fuente: elaboración propia.

De estos resultados se observa que únicamente $\mu = (0, 0)$ cumple con los requisitos para ser un peso de la representación con peso máximo $\mu = (1, 1)$; los restantes no enumerados en la tabla, ya se encuentran fuera de la región conexa generada por μ_0 . Su diagrama, luego de aplicar los seis elementos del grupo de Weyl se muestra en la figura 4.

Figura 4. Diagrama de pesos para $\mu_0 = (1, 1)$



Fuente: elaboración propia.

Donde los elementos del hexágono exterior poseen multiplicidad 1, y el peso del central es de multiplicidad 2. La dimensión de esta representación es 8, de acuerdo al teorema 7 de las representaciones irreducibles de $sl(3; \mathbb{C})$.

3.4.5.2. Peso máximo (3,0)

Al igual que para el caso anterior, la tabla x resume los posibles pesos para la representación con peso máximo (3, 0).

Tabla x. **Posibles pesos para la representación (3,0)**

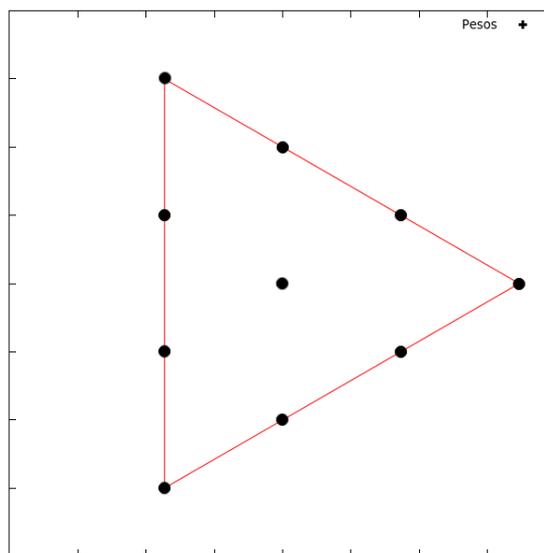
μ	$\mu_0 - \mu$	$a\alpha_1 + b\alpha_2$
(0, 0)	(3, 0)	$2\alpha_1 + \alpha_2$
(1, 0)	(2, 0)	$4/3\alpha_1 + 2/3\alpha_2$
(0, 1)	(3, -1)	$5/3\alpha_1 + 1/3\alpha_2$
(1, 1)	(2, -1)	α_1
(2, 0)	(1, 0)	$2/3\alpha_1 + 1/3\alpha_2$

Fuente: elaboración propia.

Por lo que, los pesos de la representación, además del máximo son (0, 0) y (1, 1). La figura 5 muestra estos pesos junto con el efecto surgido en estos al aplicarse el grupo de Weyl.

La dimensión de esta representación es 10 y cada peso es de multiplicidad 1.

Figura 5. Diagrama de pesos para $\mu_0 = (3, 0)$



Fuente: elaboración propia.

3.4.6. Pesos producto tensorial

Si se tienen dos representaciones irreducibles ϕ_1, ϕ_2 de $SU(3)$ y se conocen los pesos correspondientes a cada una. La pregunta ahora es saber cómo están relacionados los pesos de una representación de un producto tensorial de estas dos representaciones irreducibles. La ecuación 2.9 revela cómo actúa un operador sobre este nuevo espacio en términos de los operadores sobre cada uno de los espacios vectoriales originales.

Al suponer que v_1 es un vector peso de ϕ_1 en V_1 , con peso (p_1, q_1) ; y que v_2 es un vector de peso de ϕ_2 en V_2 con peso (p_2, q_2) ; entonces el vector $v = v_1 \otimes v_2$ en el espacio vectorial $V_1 \otimes V_2$ tiene un peso:

$$\begin{aligned}
\phi(H_1)v &= \phi_1(H_1)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \phi_2(H_1)v_2 \\
&= p_1v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes p_2v_2 \\
&= (p_1 + p_2)(v_1 \otimes v_2) \\
\phi(H_1)v &= (p_1 + p_2)v
\end{aligned}$$

Igualmente para $\phi(H_2)v = (q_1 + q_2)v$. Es decir, el peso en una representación de producto tensorial es la suma de los pesos de las representaciones individuales.

4. DIAGRAMAS DE YOUNG

4.1. Grupo simétrico

Las representaciones irreducibles del grupo simétrico se abarcan, especialmente, por su estrecha relación con todos los grupos de dimensión finita; tal y como fue demostrado en los capítulos anteriores en donde todo grupo de orden n es isomorfo a un subgrupo de S_n .

Además, es de vital importancia en el próximo capítulo, ya que la simetría englobada en el grupo simétrico es fundamental para caracterizar sistemas físicos bajo un intercambio de partículas idénticas.

Los diagramas de Young son una herramienta sencilla para identificar estas representaciones irreducibles del grupo simétrico, y además, un arma para determinar sus propiedades como la dimensionalidad. Ya que el número de distintos diagramas de Young para cualquier n es igual al número de clases conjugadas y al número de representaciones irreducibles de S_n .

4.1.1. Partición y Diagramas de Young

Una partición $\lambda \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ del entero n es una secuencia de enteros positivos λ_i tal que:

$$\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$$

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$$

Un diagrama de Young para el grupo simétrico es una representación gráfica de una partición, con n cajas y r filas; y con cada fila correspondiente a λ_i cajas. Los siguientes ejemplos para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 se muestra en la tabla XI.

4.1.2. Tablas de Young

Las tablas de Young se clasifican de tres tipos: general, normal y estándar.

- Una tabla general de Young consiste en llenar cada caja de un diagrama de Young con los números $1, 2, \dots, n$ en cualquier orden; mientras sean utilizados una única vez. Por ejemplo:

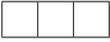
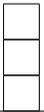
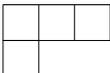
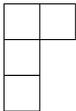
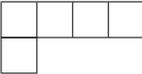
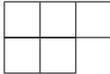
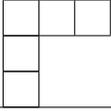
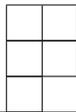
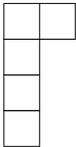
2	3	4
1	5	

- Una tabla normal de Young consiste en llenar cada caja de un diagrama de Young con los números $1, 2, \dots, n$ de manera ascendente, de izquierda a derecha y de las filas superiores a las inferiores. Por ejemplo:

1	2	3
4	5	

- La tabla estándar por su parte, consiste en llenar cada caja de un diagrama de Young con los números $1, 2, \dots, n$ con la restricción de que los números deben

Tabla XI. **Partición para los primeros 5 enteros**

n=1	
Partición	{1}
Diagrama	
n=2	
Partición	{2} {1, 1}
Diagrama	 
n=3	
Partición	{3} {2, 1} {1, 1, 1}
Diagrama	  
n=4	
Partición	{4} {3, 1} {2, 2} {2, 1, 1} {1, 1, 1, 1}
Diagrama	    
n=5	
Partición	{5} {4, 1} {3, 2} {3, 1, 1} {2, 2, 1}
Diagrama	    
Partición	{2, 1, 1, 1} {1, 1, 1, 1, 1}
Diagrama	 

Fuente: elaboración propia.

aumentar de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo; no necesariamente en orden. Nótese que toda tabla normal de Young es, además una tabla estándar de Young. Por ejemplo:

1	3	4
2	5	

Se denota como Θ_λ a una partición λ específica de n , con los números dentro de las cajas en algún orden establecido. Cualquier otra combinación de estos números dentro de las cajas de la tabla de Young puede ser obtenido permutándolos con el elemento p , que aplicado sobre el arreglo inicial se escribe como $p\Theta_\lambda = \Theta_\lambda^p$.

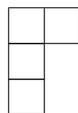
4.1.3. Dimensión de la representación

Para poder determinar la dimensión de una representación de un grupo simétrico por medio de un diagrama de Young, es necesario establecer la regla de los ganchos, en la que a cada caja del diagrama (c_i), se le asocia una longitud del gancho (l_i) de la siguiente manera: $l_i = \text{número de cajas a la derecha} + \text{número de cajas debajo} + 1$.

La dimensión de una representación de una partición de n dada por un diagrama de Young D viene dada por:

$$\dim D = \frac{n!}{\prod_{c_i} l_i} \quad (4.1)$$

Por ejemplo, para la partición de $n = 4$ dada por $\{2, 1, 1\}$, la tabla de Young asociada es:



De donde la dimensión de esta partición es:

$$\dim D = \frac{4!}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

4.1.4. Operadores de Young

El fin de definir los operadores de Young consiste en encontrar una representación para el grupo S_n . Esto se logra esquematizando los diagramas de Young para una partición de n y con ello encontrando una base del espacio vectorial sobre la cual actúa la representación de S_n . Mediante la aplicación de los elementos del grupo sobre este operador, es posible encontrar las componentes restantes de la base y a su vez una representación para el grupo.

Teniendo como referencia una tabla de Young Θ_λ^p , una permutación horizontal h_λ^p se define como aquella que deja invariante los números que aparecen en una fila específica. Del mismo modo, una permutación vertical v_λ^p es aquella cuyo conjunto de números que aparecen en una columna específica permanece inalterada.

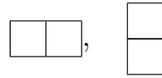
Se definen los operadores simetrizador s_λ^p , antisimetrizador a_λ^p y el operador de Young Y_λ^p de la siguiente manera:

$$s_\lambda^p = \sum_h h_\lambda^p \quad \text{la suma es sobre las permutaciones horizontales}$$

$$a_\lambda^p = \sum_v (-1)^v v_\lambda^p \quad \text{la suma es sobre las permutaciones verticales}$$

$$Y_\lambda^p = s_\lambda^p a_\lambda^p = \sum_h \sum_v (-1)^v h_\lambda^p v_\lambda^p \quad \text{suma sobre ambas permutaciones}$$

Por ejemplo, consideremos el grupo $S_2 : \{e, (12)\}$, equivalente al definido en la tabla de Cayley del cuadro IV. Evidentemente para $n = 2$, las únicas dos particiones corresponden a $\{2\}$, $\{1, 1\}$; cuyos diagramas de Young respectivamente son:



Para la tabla de Young $\Theta_1 : \boxed{1 \mid 2}$, se nota que las permutaciones horizontales están compuestas por $h_1 : \{e, (12)\}$; mientras que la única permutación vertical es para el elemento identidad $v_1 : \{e\}$. Construyendo el operador simetrizador y antisimetrizador se obtiene:

$$\begin{aligned} s_1 &= e + (12) \\ a_1 &= e \end{aligned}$$

Por lo que el operador de Young es:

$$Y_1 = s_1 a_1 = e + (12)$$

Se nota además que:

$$eY_1 = (12)Y_1 = Y_1$$

La cual corresponde a la representación trival $U_1(g) = 1, \forall g \in G$. Por su parte,

para la tabla de Young $\Theta_2 : \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$, $h_2 : \{e\}$ y $v_2 : \{e, (12)\}$. Por lo que:

$$s_2 = e$$

$$a_2 = e - (12)$$

$$Y_2 = e - (12)$$

En este caso se nota que:

$$eY_2 = Y_2$$

$$(12)Y_2 = -Y_2$$

Que corresponde a la representación $e \rightarrow 1$ y $(12) \rightarrow -1$. En resumen, se han encontrado dos representaciones (irreducibles) U_μ de orden 1 para S_2 las cuales se muestran en detalle en la tabla XII.

Tabla XII. **Representaciones irreducibles para S_2**

μ	e	(12)
1	1	1
2	1	-1

Fuente: elaboración propia.

4.2. Grupo $SU(3)$

El uso de los diagramas de Young, también facilitan la representación irreducible de los grupos $SU(n)$; diagramas en los que se encierran las propiedades básicas

de la representación, por ejemplo, el peso máximo y su dimensión.

Para dibujar los diagramas de Young en el caso de $SU(n)$ se abstraen muchas de las ideas de la representación del grupo simétrico S_n , y se procede de la siguiente manera:

- Si hay r cajas en una fila, en la fila siguiente habrán como máximo r cajas
- Para $SU(n)$ habrán como máximo n filas en total en el diagrama. Las horizontales relacionadas a la simetrización, y las verticales con la antisimetrización
- Para $SU(3)$, la representación con peso máximo (p, q) significa que la primer fila tendrá p cajas más que la segunda, y la segunda fila tendrá q cajas más que la tercera
- La dimensión de la representación está implícita en el diagrama. De manera general para $SU(n)$, se escribirá el valor de n en la primer caja del diagrama; las restantes cajas se llenarán de manera que el número irá aumentando de izquierda a derecha, e irá disminuyendo de arriba hacia abajo. La dimensión de la representación está dada por el producto de todos los números en las cajas dividido el producto de la longitud de los ganchos. Una ecuación muy similar a la definida en el caso del grupo simétrico

En la tabla XIII se resumen algunos ejemplos. La línea horizontal sobre la dimensión de una representación hace referencia a la antisimetría, diferenciando así a las representaciones que permutan los números p y q aunque compartan la dimensionalidad. Cabe resaltar además, que la dimensión de la representación obtenida de esta manera por los diagramas de Young coincide exactamente con la presentada en

el teorema 7 de la representación irreducible de $sl(3; \mathbb{C})$.

Tabla XIII. Ejemplos de diagramas Young para $SU(3)$

Peso máximo	Diagrama de Young	Dimensión
(0,0)	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$
(1,0)	$\square, \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\frac{3}{1} = 3$
(0,1)	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \bar{3}$
(2,0)	$\square \square, \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 6$
(1,2)	$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c c c } \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \end{array}$	$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \bar{15}$
(2,2)	$\begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c c c c } \hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & & \end{array}$	$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 27$
(3,0)	$\square \square \square, \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$	$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$
(2,1)	$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 15$

Fuente: elaboración propia.

4.2.1. Producto tensorial de representaciones

Del producto tensorial de dos representaciones irreducibles en dos espacios vectoriales U, V se obtiene una representación en el espacio $U \times V$. Esta representación no es irreducible, y por tanto puede ser escrita como la suma directa de representaciones irreducibles. Los diagramas de Young facilitan grandemente el cálculo de estas representaciones irreducibles como su dimensionalidad.

Suponiendo que se requiere encontrar el producto entre la representación (1,1) consigo misma. Primero se escriben los diagramas de Young de cada una, diferenciándolas de manera que el segundo diagrama posea alguna característica en común para cada fila (en este caso el segundo se llenará con las letras a y b).

$$(1, 1) \otimes (1, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline c & c \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array}$$

Seguidamente se debe agregar la primera fila (la de a 's) en el primer diagrama de todas las maneras posibles siempre y cuando generen un diagrama de Young válido y no se repita más de una a en la misma columna.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline c & c \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline c & c & a & a \\ \hline c & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & c & a \\ \hline c & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & c & a \\ \hline c & & \\ \hline a & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & c & a \\ \hline c & a & \\ \hline a & & \\ \hline \end{array}$$

Después se debe proceder de la misma manera con la siguiente fila (la de b 's), pero con la restricción de que leyendo en diagonal desde la esquina superior derecha del diagrama, el número de a 's debe ser mayor o igual al número de b 's.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline c & c \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline c & c & a & a \\ \hline c & b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline c & c & a & a \\ \hline c & & & \\ \hline b & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & c & a \\ \hline c & a & b \\ \hline c & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & c & a \\ \hline c & b & \\ \hline a & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline c & c \\ \hline c & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Que puede ser escrito nuevamente en términos de los pesos máximos o de la

4.3. Grupo $SU(2)$

Similar al caso de $SU(3)$, una representación de $SU(2)$ puede caracterizarse por un único parámetro α (peso máximo de la representación), la cual corresponde a una representación de dimensión $(\alpha + 1)$. Como en una representación de $SU(n)$ habrán como máximo n filas en el diagrama de Young, el cálculo de la reducibilidad del producto tensorial de dos representaciones irreducibles suele ser aún más sencillo y se siguen exactamente las mismas reglas explicadas en el caso de $SU(3)$, y en donde el número (α) representa cuántas cajas de más hay en la primer fila con respecto de la segunda.

Si se considera una representación de $SU(2)$ dada por (1) con dimensión 2 (en el próximo capítulo será esencial para comprender un sistema de dos espines), se puede descomponer el producto de esta representación consigo misma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 2 \otimes 2 &= \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|cc|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|cc|} \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \\
 2 \otimes 2 &= 3 \oplus 1
 \end{aligned}$$

Aún más, se puede explorar qué se obtiene un tercer producto tensorial:

$$\begin{aligned}
 2 \otimes 2 \otimes 2 &= \left(\begin{array}{|cc|} \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|cc|} \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|ccc|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|cc|} \hline & \\ \hline \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|cc|} \hline & \\ \hline \\ \hline \end{array} \\
 2 \otimes 2 \otimes 2 &= 4 \oplus 2 \oplus 2
 \end{aligned}$$

5. APLICACIONES A LA FÍSICA

5.1. Momento angular

El momento angular es una magnitud fundamental en la descripción de los fenómenos en las diversas ramas de la física. Desde la mecánica cuántica, pasando por la mecánica clásica y hasta la mecánica relativista. Específicamente en la mecánica cuántica, la manera de tener evidencia del momento angular es por medio de operadores que representan el acto de hacer una medición sobre un sistema específico; estos operadores están relacionados estrechamente con las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Las cuales pueden ser escritas como una combinación lineal del espacio generado por los operadores del álgebra de Lie del grupo $su(2)$ (ver cuadro VI). $\sigma_1 = X + Y$, $\sigma_2 = -iX + iY$, $\sigma_3 = H$. Estas matrices son hermíticas y poseen la siguiente regla de conmutación:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Se define $T_i = \frac{-i}{2}\sigma_i$, de tal manera que estas nuevas matrices obedezcan la misma regla de conmutación sin la constante $2i$. Estas matrices junto a la matriz identidad forman una base para las matrices hermíticas 2×2 ; por lo que en mecánica cuántica todo operador que represente un observable sobre un espacio Hilbert bidimensional puede ser escrito como una combinación lineal de las matrices de Pauli. Las matrices T_i además forman por sí mismas una base para $su(2; \mathbb{C})$.

Los operadores de momento angular $L = (L_1, L_2, L_3)$ en mecánica cuántica siguen la misma regla de conmutación que las matrices de Pauli:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad (5.4)$$

Solo difiriendo en la constante de Planck (\hbar), cuya magnitud puede ser establecida como la unidad en el sistema natural de unidades. Si ϕ es una representación irreducible de $su(2; \mathbb{C})$ sobre un espacio vectorial V , se definen los elementos:

$$\begin{aligned} J_3 &= i\phi(T_3) \\ J_{\pm} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\phi(T_1) \pm i\phi(T_2)) \end{aligned}$$

De manera que J_3 representa el operador de momento angular sobre un eje arbitrario (por ejemplo el eje z), y J_{\pm} los operadores tipo escalera que aumentan o disminuyen el momento angular sobre este eje en una unidad como se verá a continuación. Estos elementos de $su(2; \mathbb{C})$ como era de esperar, también siguen las siguientes reglas de conmutación:

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (5.5)$$

$$[J_+, J_-] = J_3 \quad (5.6)$$

Ya que J_3 es un operador hermítico, posee un valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ al cual le corresponde un vector propio $|\lambda\rangle$ sobre V , equivalente a hacer la medición sobre el momento angular de una partícula sobre el eje z y obtener un resultado. De las relaciones previas de conmutación se tiene que:

$$\begin{aligned} [J_3, J_{\pm}] |\lambda\rangle &= \pm J_{\pm} |\lambda\rangle \\ J_3 J_{\pm} |\lambda\rangle &= J_{\pm} J_3 |\lambda\rangle \pm J_{\pm} |\lambda\rangle \\ J_3 J_{\pm} |\lambda\rangle &= (\lambda \pm 1) J_{\pm} |\lambda\rangle \end{aligned}$$

Es decir, si $J_{\pm} |\lambda\rangle$ no es el vector nulo, entonces es de nuevo un vector propio de J_3 con valor propio $(\lambda \pm 1)$, confirmando la hipótesis previa sobre el operador tipo escalera. Más aún, si se supone que la relación siguiente es válida para un número entero n :

$$[J_3, J_{\pm}^n] = \pm n J_{\pm}^n \tag{5.7}$$

La cual se puede demostrar por inducción:

$$\begin{aligned} [J_3, J_{\pm}^{n+1}] &= J_3 J_{\pm}^{n+1} - J_{\pm}^{n+1} J_3 \\ &= J_3 J_{\pm}^n J_{\pm} - J_{\pm} J_{\pm}^n J_3 \\ &= (n J_{\pm}^n + J_{\pm}^n J_3) J_{\pm} - J_{\pm} J_{\pm}^n J_3 \\ &= n J_{\pm}^{n+1} + J_{\pm}^n J_3 J_{\pm} - J_{\pm}^n J_{\pm} J_3 \\ &= n J_{\pm}^{n+1} + J_{\pm}^n (J_3 J_{\pm} - J_{\pm} J_3) \\ &= n J_{\pm}^{n+1} + J_{\pm}^n [J_3, J_{\pm}] \\ &= (n + 1) J_{\pm}^{n+1} \end{aligned}$$

Entonces si $J_{\pm}^n |\lambda\rangle$ no es el vector nulo, también es un vector propio de J_3 con valor propio $(\lambda \pm n)$.

$$J_3 J_{\pm}^n |\lambda\rangle = (\lambda \pm n) J_{\pm}^n |\lambda\rangle$$

En la teoría de la representación irreducible del grupo $su(2; \mathbb{C})$ del tercer capítulo se demostró que estos vectores propios son linealmente independientes y forman un espacio vectorial de dimensión finita, y que existe un vector propio máximo tal que al aplicarle el operador escalera que asciende su valor propio, lo vuelve el vector nulo.

Se denota a este vector como $|j, j\rangle$, con valor propio j , entonces:

$$J_+ |j, j\rangle = 0$$

Estos vectores, también tendrán un límite inferior, ya que al aplicar el operador J_- sobre el vector máximo repetidamente, eventualmente se obtendrá un vector mínimo, al volver a aplicar J_- el vector se transformará en el vector nulo.

Si k es el número de veces que se puede aplicar el operador J_- sobre $|j, j\rangle$ antes de volverlo el vector nulo, entonces:

$$|\psi_k\rangle = J_-^k |j, j\rangle \neq |0\rangle \quad J_- |\psi_k\rangle = |0\rangle \quad (5.8)$$

Si se define a $|\psi_l\rangle = J_-^l |j, j\rangle$, entonces:

$$\begin{aligned}
J_+ |\psi_l\rangle &= J_+ J_-^l |j, j\rangle \\
&= (J_+ J_-) J_-^{l-1} |j, j\rangle \\
&= ([J_+ J_-] - J_- J_+) J_-^{l-1} |j, j\rangle \\
&= (J_3 + J_- J_+) J_-^{l-1} |j, j\rangle \\
&= J_3 J_-^{l-1} |j, j\rangle + J_- J_+ J_-^{l-1} |j, j\rangle \\
&= (j - (l - 1)) J_-^{l-1} |j, j\rangle + J_- J_+ J_-^{l-1} |j, j\rangle
\end{aligned}$$

Al último término puede aplicarse el mismo razonamiento, de manera que:

$$\begin{aligned}
J_- J_+ J_-^{l-1} |j, j\rangle &= J_- J_+ J_- (J_-)^{l-2} |j, j\rangle \\
&= J_- ([J_+, J_-] + J_- J_+) (J_-)^{l-2} |j, j\rangle \\
&= J_- (J_3 + J_- J_+) (J_-)^{l-2} |j, j\rangle \\
&= J_- [(j - (l - 2)) J_-^{l-2}] |j, j\rangle + J_-^2 J_+ (J_-)^{l-2} |j, j\rangle \\
&= [(j - (l - 2)) J_-^{l-1}] |j, j\rangle + J_-^2 J_+ (J_-)^{l-2} |j, j\rangle
\end{aligned}$$

El método puede seguir reproduciéndose l veces antes de obtener el vector nulo.

Por lo que en general:

$$\begin{aligned}
J_+ |\psi_l\rangle &= \sum_{k=1}^l [j - (l - k)] |\psi_{l-1}\rangle \\
&= \left(\sum_{k=1}^l (j - l) + \sum_{k=1}^l k \right) |\psi_{l-1}\rangle \\
&= \left((j - l)l + \frac{l(l + 1)}{2} \right) |\psi_{l-1}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l \left(j - l + \frac{l+1}{2} \right) |\psi_{l-1}\rangle \\
&= \frac{l}{2} (2j - l + 1) |\psi_{l-1}\rangle
\end{aligned}$$

Para conocer qué relación existe entre el valor propio máximo j y el número de veces k que se puede aplicar el operador J_- sobre el vector propio máximo, en vista de la ecuación 5.8 considérese:

$$\begin{aligned}
0 &= J_+ J_- |\psi_k\rangle \\
&= ([J_+, J_-] + J_- J_+) |\psi_k\rangle \\
&= (J_3 + J_- J_+) |\psi_k\rangle \\
&= (j - k) |\psi_k\rangle + J_- \left(k(j - \frac{1}{2}(k - 1)) \right) |\psi_{k-1}\rangle \\
&= (j - k + k(j - \frac{1}{2}(k - 1))) |\psi_k\rangle \\
0 &= \frac{1}{2}(k + 1)(2j - k) |\psi_k\rangle
\end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $2j = k$. Es decir, el número de vectores propios, además de $|j, j\rangle$ es de $2j$. El número de estados que expanden V es entonces $2j + 1$, que físicamente se interpreta como la degeneración de un estado cuyo momento angular total es j .

5.1.1. Estados normalizados

El objetivo es escribir estados $|j, m\rangle$ cuya norma sea 1, en lugar de estados arbitrarios $|\psi_{jm}\rangle$. Acá la m representa el valor propio del estado $|\psi_l\rangle$ cuyo valor propio

máximo era j antes de aplicársele J_- un número l de veces; es decir: $m = j - l$, y puede tomar los valores $j, j - 1, \dots, -(j - 1), -j$.

En vista de que las matrices T_i para $i = 1, 2, 3$ son antihermíticas, entonces los operadores adjuntos de J_3 y J_{\pm} son de la siguiente forma:

$$J_3^\dagger = J_3 \qquad J_{\pm}^\dagger = J_{\mp}$$

La norma de un estado $|\psi_l\rangle$ se puede escribir en términos de la norma de su estado superior encontrando el bra correspondiente al ket $J_+ |\psi_l\rangle$:

$$\begin{aligned} J_+ |\psi_l\rangle &\longleftrightarrow \langle \psi_l | J_+^\dagger \\ &\longleftrightarrow \langle \psi_l | J_- \\ &\longleftrightarrow \langle \psi_{l-1} | \end{aligned}$$

Ya que $J_+ |\psi_l\rangle = \frac{l}{2}(2j - l + 1) |\psi_{l-1}\rangle$, entonces el producto de este ket con su respectivo bra es:

$$\begin{aligned} \langle \psi_l | J_+^\dagger J_+ |\psi_l\rangle &= \langle \psi_{l-1} | \frac{l}{2}(2j - l + 1) |\psi_{l-1}\rangle \\ \langle \psi_l | \psi_l\rangle &= \frac{l}{2}(2j - l + 1) \langle \psi_{l-1} | \psi_{l-1}\rangle \end{aligned}$$

De manera análoga se encuentra que:

$$\langle \psi_{l-1} | \psi_{l-1}\rangle = \frac{(l-1)}{2}(2j - (l-1) + 1) \langle \psi_{l-2} | \psi_{l-2}\rangle$$

Que se puede generalizar así:

$$\langle \psi_{l-i} | \psi_{l-i} \rangle = \frac{(l-i)}{2} (2j - (l-i-1)) \langle \psi_{l-i-1} | \psi_{l-i-1} \rangle$$

Por lo que la norma del estado $|\psi_l\rangle$ suponiendo que el estado máximo ya está normalizado es:

$$\begin{aligned} \langle \psi_l | \psi_l \rangle &= \prod_{i=0}^{l-1} \frac{(l-i)}{2} (2j - (l-i-1)) \\ &= \frac{(l)(l-1) \dots (l-(l-1))}{2^l} (2j - (l-1)) \dots (2j - (l - (l-1) - 1)) \\ &= \frac{(l)(l-1) \dots (1)}{2^l} (2j - (l-1)) \dots (2j-1)(2j) \\ &= \frac{l!}{2^l} (2j)(2j-1) \dots (2j - (l-1)) \\ &= \frac{l!}{2^l} \frac{(2j)(2j-1) \dots (2j - (l-1))(2j-l) \dots (2)(1)}{(2j-l)(2j-(l+1)) \dots (2)(1)} \\ &= \frac{l!(2j)!}{2^l(2j-l)!} \end{aligned}$$

El estado normalizado es entonces:

$$|j, m\rangle = \sqrt{\frac{2^l(2j-l)!}{l!(2j)!}} |\psi_l\rangle \quad (5.9)$$

Los tres operadores de interés (J_3, J_{\pm}) sobre este estado son de vital importancia para componer estados superiores o inferiores de momento angular, los cuales actúan de forma que:

$$J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (5.10)$$

$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j-m)(j+m+1)}{2}} |j, m+1\rangle \quad (5.11)$$

$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}} |j, m-1\rangle \quad (5.12)$$

Para demostrar estas relaciones se utilizan las relaciones ya desarrolladas. Se ejemplifica el caso de J_+ , los otros dos son análogos:

$$\begin{aligned}
J_+ |j, m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\langle \psi_l | \psi_l \rangle}} J_+ |\psi_l\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\langle \psi_l | \psi_l \rangle}} \left(\frac{l}{2}\right) (2j - l + 1) |\psi_{l-1}\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\langle \psi_{l-1} | \psi_{l-1} \rangle}{\langle \psi_l | \psi_l \rangle}} \left(\frac{l}{2}\right) (2j - l + 1) |j, m + 1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{l(2j - l + 1)}} \left(\frac{l}{2}\right) (2j - l + 1) |j, m + 1\rangle \\
&= \sqrt{\frac{l(2j - l + 1)}{2}} |j, m + 1\rangle \\
J_+ |j, m\rangle &= \sqrt{\frac{(j - m)(j + m + 1)}{2}} |j, m + 1\rangle
\end{aligned}$$

Por ejemplo, si se considera un estado cuyo momento angular es $j = 2$. Entonces, aplicando J_- sobre $|2, 2\rangle$ sucesivamente se obtiene:

$$\begin{aligned}
J_- |2, 2\rangle &= \sqrt{2} |2, 1\rangle \\
J_-^2 |2, 2\rangle &= \sqrt{6} |2, 0\rangle \\
J_-^3 |2, 2\rangle &= 3\sqrt{2} |2, -1\rangle \\
J_-^4 |2, 2\rangle &= 6 |2, -2\rangle
\end{aligned}$$

Las potencias mayores se anulan. Estos vectores son una base para el espacio de dimensión $2j + 1 = 5$.

Otro operador de gran importancia en la teoría del momento angular $J^2 = \frac{1}{2} (J_3^2 + J_+ J_- + J_- J_+)$. El cual es un operador casimir (conmuta con todos los operadores restantes) y es hermítico, por lo que representa un observable del sistema.

Este observable está relacionado con el momento angular total del sistema, y junto al momento angular en el eje z (J_3) forman los observables fundamentales de todo sistema cuántico relacionados al momento angular. La acción de este operador sobre el estado $|j, m\rangle$ en el sistema natural de unidades es:

$$J^2 |j, m\rangle = j(j + 1) |j, m\rangle \quad (5.13)$$

5.1.2. Adición momento angular

La adición de momento angular es un fenómeno bastante sencillo en la mecánica clásica; sin embargo, debido a la imposibilidad de conocer todas las componentes del momento angular de un sistema cuántico, hace imposible realizar tal adición de la manera tradicional.

Las partículas, además de su momento angular debido a su traslación, poseen una propiedad intrínseca llamada espín (S), cuyas propiedades de sus operadores son totalmente análogas a las del momento angular tradicional. Esta propiedad de las partículas elementales fue confirmada inicialmente por el famoso experimento de Stern-Gerlach, en el que además de demostrar los principios básicos de la mecánica cuántica sobre la imposibilidad de determinar totalmente el estado de un sistema, se demostró que los átomos de plata atravesando un campo magnético en lugar de crear un patrón continuo de dispersión como predeciría la mecánica clásica, creaban un patrón discreto de únicamente dos estados posibles.

Por tanto, si se supone que una partícula posee un momento angular (L) y un espín (S), entonces tendrá un momento angular total (J):

$$J = L + S \quad (5.14)$$

De nuevo, la incapacidad de hacer una suma vectorial conlleva a replantearse la manera de realizar tal adición.

Considérense dos representaciones irreducibles ϕ_1, ϕ_2 de $su(2; \mathbb{C})$ sobre V_1 y V_2 respectivamente. De manera general el producto de los vectores $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ en $V = V_1 \otimes V_2$ es reducible, por lo que el objetivo es conocer qué forma tienen estos estados en una representación irreducible.

Por ejemplo, sea $|\uparrow\rangle$ el estado de una partícula con espín $\frac{1}{2}$. La dimensión de este espacio es $2(\frac{1}{2}) + 1 = 2$, el cual corresponde a los dos posibles orientaciones del espín $\pm\frac{1}{2}$. Los espacios vectoriales de la representación irreducible de estos estados se puede realizar con base en la ecuación 3.3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 2 \otimes 2 &= V_1 \otimes V_1 \\
 &= \bigoplus_{j=0}^1 V_{1+1-2j} \\
 &= V_2 \oplus V_0 \\
 &= 3 \oplus 1
 \end{aligned}$$

Ya que la dimensión es 2, el diagrama de Young que representa estos estados es simplemente \square . El producto tensorial de estos estados es:

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

El primero de estos resultados representa los estados totalmente simétricos ante el intercambio de las partículas, mientras el segundo representa los estados totalmente antisimétricos con respecto a esta permutación. La dimensión calculada

para cada uno de los diagramas de Young previos resultan ser 3 y 1 respectivamente; exactamente lo mismo que se había encontrado en la descomposición de los espacios vectoriales. Estos estados en la representación irreducible son:

$$\begin{aligned} \square \square &= |\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

Más aún, agregando una tercer partícula, los espacios vectoriales se descomponen así:

$$\begin{aligned} 2 \otimes 2 \otimes 2 &= (V_1 \otimes V_1) \otimes V_1 \\ &= (V_2 \oplus V_0) \otimes V_1 \\ &= V_2 \otimes V_1 \oplus V_0 \otimes V_1 \\ &= \bigoplus_{j=0}^1 V_{3-2j} \oplus \bigoplus_{j=0}^0 V_{1-2j} \\ &= V_3 \oplus V_1 \oplus V_1 \\ &= 4 \oplus 2 \oplus 2 \end{aligned}$$

Mientras que la descomposición con los diagramas de Young correspondientes es:

$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square &= \left(\square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \square \\ &= \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

El primero de estos es totalmente simétrico ante el intercambio de dos de las partículas y dejando inalterada una tercera. Los otros dos restantes tienen simetría mezclada. Los estados correspondientes en la representación irreducible son:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} &= |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} &= |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} &= |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle
 \end{aligned}$$

Es clara la antisimetría al intercambiar la primera y segunda partícula en el penúltimo estado, así como también en el intercambio entre la segunda y la tercera en el último. Además existe un estado antisimétrico al intercambiar la primera y tercera partícula, el cual es: $|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$. Sin embargo, este estado es linealmente dependiente de los dos anteriores, por lo que no representa un nuevo espacio vectorial.

Por otro lado, en el capítulo 2 se mostró que un operador $\phi = \phi_1 \otimes \phi_2$ en V es: $\phi = \phi_1 \otimes I + I \otimes \phi_2$; mientras en el capítulo 3 se vio cómo los valores propios de esta representación es simplemente la suma de las representaciones individuales. Los operadores $\mathbb{J}_3, \mathbb{J}_\pm$ sobre V son definidos entonces como:

$$\mathbb{J}_3 = J_3 \otimes I + I \otimes J_3 \quad (5.15)$$

$$\mathbb{J}_\pm = J_\pm \otimes I + I \otimes J_\pm \quad (5.16)$$

Estos operadores satisfacen también, las mismas reglas de conmutación que los operadores sobre V_1 y V_2 . El vector de máximo peso sobre V será aquel relacionado con $|j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle = |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$ y la dimensión de V es igual al producto de las dimensiones de V_1 y V_2 : $\dim V = (\dim V_1)(\dim V_2) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

Los estados de menor peso $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - k\rangle$ para algún $k > 0$ pueden ser escritos de diferentes formas, ya que:

$$\begin{aligned}
 |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - k\rangle &= |j_1, j_1 - k\rangle \otimes |j_2, j_2\rangle \\
 &= |j_1, j_1 - k + 1\rangle \otimes |j_2, j_2 - 1\rangle \\
 &= \vdots \\
 &= |j_1, j_1 - 1\rangle \otimes |j_2, j_2 - k + 1\rangle \\
 &= |j_1, j_1\rangle \otimes |j_2, j_2 - k\rangle
 \end{aligned}$$

Este número de formas con base en el desarrollo anterior es claramente $k + 1$. Siempre y cuando al restar k de j_1 y j_2 no rebase los límites inferiores $-j_1$ y $-j_2$, respetando así los posibles valores que puede tomar la componente del momento angular en el eje z de cada representación. Esto impone entonces otra restricción adicional: $k \leq 2\min(j_1, j_2) = (j_1 + j_2) - |j_1 - j_2|$.

Por ejemplo, un electrón en el átomo de hidrógeno se encuentra en un estado de momento angular orbital $|2, -1\rangle$, y a la vez se mide que el estado de su espín es $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. La pregunta es saber qué posibles valores de J^2 pueden ser medidos y con qué probabilidad.

Se nota primero que hay dos posibles valores para el estado ligado: $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ y $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ con dimensiones 6 y 4 respectivamente. Se comienza con el estado $|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$, el cual proviene de la representación de los siguientes estados con peso máximo:

$$\left| \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle = |2, 2\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Para conocer la representación irreducible de los estados de menor peso se pro-

cede a aplicar el operador \mathbb{J}_- a ambos lados sucesivamente, obteniendo los siguientes estados:

\mathbb{J}_-^1

$$\left| \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{4}{5}} |2, 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{5}} |2, 2\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

\mathbb{J}_-^2

$$\left| \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} |2, 0\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |2, 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

\mathbb{J}_-^3

$$\left| \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}} |2, -1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |2, 0\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (5.17)$$

\mathbb{J}_-^4

$$\left| \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}} |2, -2\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{4}{5}} |2, -1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

\mathbb{J}_-^5

$$\left| \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle = |2, 2\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Por su parte el estado $\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$ debería ser una combinación lineal de los estados que cuya suma de los pesos sea $\frac{3}{2}$; estos son:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = c_1 |2, 2\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + c_2 |2, 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Si se aplica el operador \mathbb{J}_+ a ambos lados, el lado izquierdo se anula y se obtiene la relación de $c_1 = -2c_2$ entre los coeficientes. Junto a la condición de normalización $c_1^2 + c_2^2 = 1$, soluciona el sistema de ecuaciones y el último estado entonces puede ser escrito como:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{4}{5}} |2, 2\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{5}} |2, 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Aplicando nuevamente \mathbb{J}_- sucesivamente a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_-^1 \quad & \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{3}{5}} |2, 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |2, 0\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
\mathbb{J}_-^2 \quad & \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}} |2, 0\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}} |2, -1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\
\mathbb{J}_-^3 \quad & \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}} |2, -1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{4}{5}} |2, -2\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Específicamente, las ecuaciones 5.17 y 5.18 poseen los estados iniciales del problema. Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $\sqrt{\frac{2}{5}}$, la segunda por $\sqrt{\frac{3}{5}}$ y haciendo la resta entre ambas se obtiene:

$$|2, -1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}} \left| \frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \tag{5.19}$$

Los coeficientes que acompañan a los estados de la derecha son los coeficientes de Clebsch-Gordan, cuyos cuadrados son la probabilidad de que el estado sea medido.

Así que combinando estos estados del electrón en el átomo de hidrógeno, se puede asegurar de que existe $\frac{2}{5}$ de probabilidad de que al medir J^2 se obtenga un valor de $\frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \hbar^2$ y $\frac{3}{5}$ de probabilidad de medir $\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \hbar^2$.

Debido a su gran importancia, los coeficientes de Clebsch-Gordan suelen estar tabulados para todos los valores posibles de L , S y sus respectivas proyecciones sobre el eje z . Estos coeficientes trabajan también en sentido inverso; es decir, acá se presentaron como los coeficientes que acompañan a los estados ligados que generan

a la combinación de dos estados aislados, como en la ecuación 5.19. Sin embargo, los coeficientes de la descomposición de un estado ligado como una combinación lineal de los estados aislados, también son coeficientes de Clebsch-Gordan, y sus cuadrados representan la probabilidad de que el estado ligado haya sido obtenido a partir de esos estados individuales, como en la ecuación 5.17 o 5.18. La lectura de los coeficientes en las tablas es indiferente si se trata de uno u otro caso.

5.2. Modelo del Quark

El 1947 supuso una revolución importante para la física de partículas. Casi una década antes Yukawa había predecido la existencia de partículas a las que llamó mesones (middle weight) debido a su masa intermedia entre los protones y los electrones, partículas conocidas hasta el momento; sin embargo, los esfuerzos por encontrarla experimentalmente, solo terminó entre otras cosas con el descubrimiento del muón, una partícula que no correspondía con el mesón de Yukawa.

Fue durante experimentos llevados a cabo en la Universidad de Bristol en Inglaterra, que se logró medir, por primera vez, unas partículas con las propiedades predecidas por Yukawa con tres diferentes cargas eléctricas, las cuales recibieron el nombre de Pion (π^\pm, π^0).

Posterior a estas, el número de partículas más pesadas iban siendo descubiertas constantemente durante experimentos con más altas energías. Fue tan grande el número de nuevas partículas, cada una con sus propias propiedades que los físicos de la época le llamaron el gran zoológico de partículas extrañas, al desconocer su origen.

Además, resultaba un problema ver cómo el tiempo de producción y de decaimiento para muchas de estas no coincidía en el orden de magnitud. Gell-Mann y Nishijima, independientemente propusieron un nuevo número cuántico para poder solventar el problema: la extrañeza.

Un número entero que es conservado en las interacciones de la fuerza fuerte y la electromagnética, mas no en la fuerza débil. Explicando entonces por qué, aunque el método de producción de algunas de estas partículas puede llevarse a cabo rápidamente por medio de la interacción fuerte, necesita un tiempo mayor para decaer al tener que violar la conservación de la extrañeza por el camino de la fuerza débil.

Aún con la restricción de la conservación de la extrañeza en las interacciones fuerte y electromagnéticas, la teoría predecía interacciones que eran físicamente irreproducibles en el laboratorio.

Para solventar este problema, se propuso que a cada partícula se le podía asociar otro número entero llamado número bariónico (B), el cual era conservado en todas las interacciones. Lo que vino a solventar todos los problemas entre lo que se sucedía físicamente y lo que no.

Todas estas partículas (hoy llamadas hadrones), fueron clasificadas de acuerdo a su extrañeza (S), junto a su isospín (I), una componente de isospín (I_3) y su número bariónico (B); tal y como se muestra en la tabla XIV. Allí se incluye además, el término de hipercarga (Y), definido como $Y = B + S$, donde B es el número bariónico, y S la extrañeza.

Tabla XIV. **Extrañeza e isospín de hadrones**

Hadrón	S	I_3	I	B	Y
π^+	0	+1	1	0	0
π^0	0	0	1	0	0
π^-	0	-1	1	0	0
η	0	0	0	0	0
K^+	+1	+1/2	1/2	0	1
K^0	+1	-1/2	1/2	0	1
\bar{K}^0	-1	+1/2	1/2	0	-1
K^-	-1	-1/2	1/2	0	-1
p	0	+1/2	1/2	1	1
n	0	-1/2	1/2	1	1
Σ^+	-1	+1	1	1	0
Σ^0	-1	0	1	1	0
Σ^-	-1	-1	1	1	0
Λ	-1	0	0	1	0
Ξ^0	-2	+1/2	1/2	1	-1
Ξ^-	-2	-1/2	1/2	1	-1
Δ^{++}	0	+3/2	3/2	1	1
Δ^+	0	+1/2	3/2	1	1
Δ^0	0	-1/2	3/2	1	1
Δ^-	0	-3/2	3/2	1	1
Ω	-3	0	0	1	-2

Fuente: elaboración propia.

El próximo paso es encontrar un orden, o una estructura que permita explicar

el arreglo regular de estas partículas. Similar al trabajo que hiciera Mendeleev con la tabla periódica de los elementos en 1869.

5.2.1. El grupo $SU(3)$

En el capítulo 3 se desarrollaron las ideas de las representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$. Fueron de vital importancia las matrices que se muestran a continuación para desarrollar los pesos de una representación, cuya dimensión podría ser conocida en base al peso máximo:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

En este caso se enfocará la atención a la representación fundamental, aquella dada por las matrices 3.7 que forman una base para $SU(3)$. Los vectores propios y valores propios correspondientes a las matrices 5.20 se resumen en la tabla XV; y se reagrupan de acuerdo a sus pesos en la misma tabla, aquí se le ha llamado u, d, s arbitrariamente a estos tres vectores propios que serán el pilar en lo que sigue.

Tabla xv. **Valores y vectores propios de H_1, H_2**

H_1		H_2		Arreglo de vectores	
λ_i	v_i	λ_i	v_i	Peso	Vector peso
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	(1,0)	$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	(-1,1)	$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	(0,-1)	$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fuente: elaboración propia.

El peso máximo de esta representación es (1, 0), a la que le corresponde una dimensión igual a 3. Antes de graficar estos pesos, cabe recordar que el producto interno definido entre matrices, implicaba tener una base cuyos vectores unitarios formaban un ángulo de 60 grados.

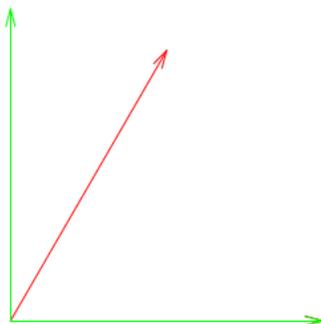
Se quiere por tanto transformar esta base a una nueva base cuyos vectores unitarios sean ortogonales (la base usual), como se ve en la figura 6.

Las coordenadas se transforman de acuerdo a:

$$x' = x + y \cos(60^\circ)$$

$$y' = y \sin(60^\circ)$$

Figura 6. **Cambio de base**



Fuente: elaboración propia.

Por lo que los pesos en esta nueva base ortogonal son $(1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ para u, d, s respectivamente. Finalmente, se hará una rotación de 60 grados para estos pesos de acuerdo a la matriz de rotación antihoraria:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

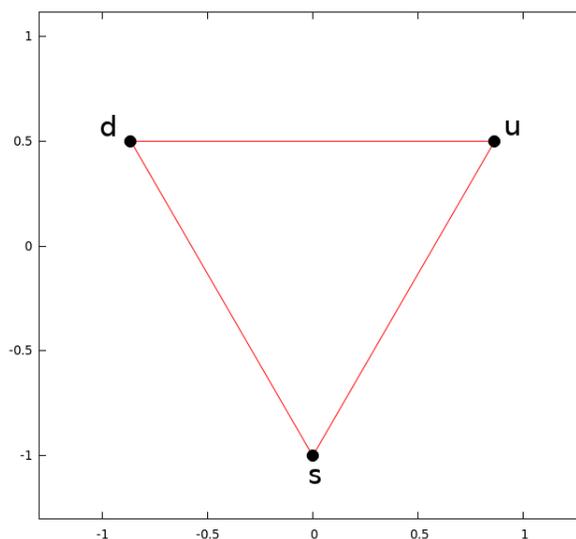
De manera que se obtienen los pesos que se resumen en la tabla XVI, y que se grafican en la figura 7.

Tabla XVI. **Pesos base ortogonal**

Vector	Peso
u	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
d	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
s	$(0, -1)$

Fuente: elaboración propia.

Figura 7. Quarks



Fuente: elaboración propia.

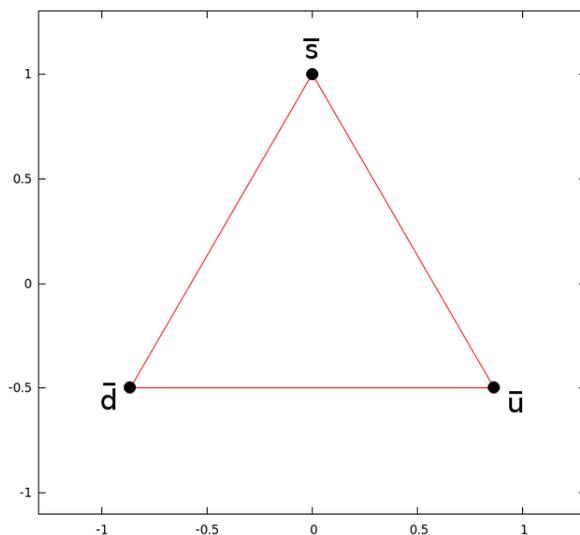
Y en donde el efecto de aplicar los operadores Y_1 , Y_2 y Y_3 sobre los vectores propios es: $Y_1 u = d$, $Y_3 u = s$, $Y_2 d = s$; las combinaciones restantes son el vector nulo. El complejo conjugado de esta representación $\bar{3}$ se obtiene al multiplicar los pesos de la presentación anterior por -1 , como se muestra en la tabla XVII y se grafican en la figura 8.

Tabla XVII. Pesos base ortogonal

Vector	Peso
\bar{u}	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
\bar{d}	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
\bar{s}	$(0, 1)$

Fuente: elaboración propia.

Figura 8. Antiquarks



Fuente: elaboración propia.

De igual manera, aplicando X_1 , X_2 , X_3 sobre los vectores propios conjugados; los tres vectores no nulos que se obtienen son: $X_3\bar{s} = \bar{u}$, $X_2\bar{s} = \bar{d}$ y $X_1\bar{d} = \bar{u}$.

Cabe resaltar que los operadores X_i y Y_i son un tipo de operadores que transforman un vector en otro hasta anularlo tras repetidas aplicaciones; un operador de tipo escalera.

Se postula en la física y en el modelo estándar de partículas, que estos vectores propios u , d , s llamados quarks junto a sus valores propios forman la base fundamental bajo la cual se pueden construir todos los hadrones y sus propiedades cuánticas. Debido a que la idea de quark es única, y estos provienen en tres manifestaciones diferentes, se dirá que poseen una propiedad llamada sabor¹, la cual los distingue

¹No tiene ninguna relación con una propiedad del sentido del gusto.

como u, d, s .

Los quarks por sí mismos no pueden ser medidos de manera experimental, debido al fenómeno llamado confinamiento; por lo que la única forma en que estos se manifiestan físicamente es en grupos de un quark y un antiquark (mesones) o tres quarks (bariones), y cuyas propiedades físicas encontradas experimentalmente (ver tabla XIV) se reproducirán en las siguientes subsecciones con base en este modelo.

El resumen de los diferentes sabores de quarks junto a sus correspondientes antipartículas se muestra a continuación.

Tabla XVIII. **Quarks, antiquarks y pesos**

Quark	Peso	Antiquark	Peso
u	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	\bar{u}	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
d	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	\bar{d}	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
s	$(0, -1)$	\bar{s}	$(0, 1)$

Fuente: elaboración propia.

5.2.2. Mesones

Un mesón es un hadrón formado por la combinación de un quark y un antiquark, los cuales permanecen unidos por medio de la interacción fuerte. Todos los mesones son inestables y poseen una vida media en el orden de milisegundos.

Durante su proceso de decaimiento, si el mesón estaba cargado suele decaer en electrones y neutrinos; sin embargo, si el mesón inicialmente era neutro puede decaer

en fotones, de tal forma, que cumplen con la conservación del momento lineal.

En los análisis experimentales llevados a cabo en los aceleradores de partículas, se ha determinado que siguen a la estadística de Bose-Einstein, teniendo un espín entero y libres del principio de exclusión de Pauli.

Ya que los pesos de una representación de producto tensorial es simplemente la suma de los pesos de las representaciones individuales, podemos construir todas las combinaciones de producto tensorial de un quark con un antiquark y conocer qué peso le corresponde a los distintos mesones.

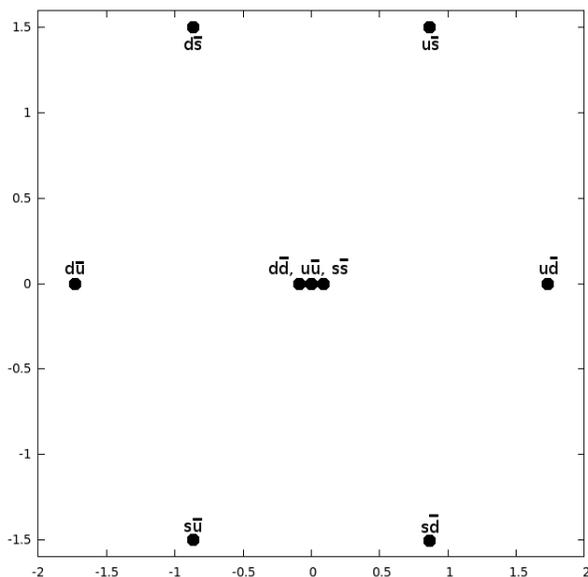
Estos resultados se resumen a continuación en la tabla XIX para una representación reducible de $SU(3)$.

Tabla XIX. **Mesones (representación reducible)**

Mesón	Peso
$u \otimes \bar{u}$	$(0, 0)$
$u \otimes \bar{d}$	$(\sqrt{3}, 0)$
$u \otimes \bar{s}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$d \otimes \bar{u}$	$(-\sqrt{3}, 0)$
$d \otimes \bar{d}$	$(0, 0)$
$d \otimes \bar{s}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$s \otimes \bar{u}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$s \otimes \bar{d}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$s \otimes \bar{s}$	$(0, 0)$

Fuente: elaboración propia.

Figura 9. Mesones (representación reducible)



Fuente: elaboración propia.

La figura 9 de los pesos de esta representación revela qué forman los vértices de un hexágono de multiplicidad 1, y otro punto más en el centro de multiplicidad 3. Para averiguar cuál es el estado correspondiente a cada punto en la representación irreducible, es necesario aplicar los operadores $y_i = Y_i \otimes I - I \otimes Y_i$ sucesivamente sobre el estado de máximo peso $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, con el fin de generar los estados restantes (los otros cinco vértices y el central). Por ejemplo, para el operador y_3 sobre $u \otimes \bar{s}$:

$$y_3(u \otimes \bar{s}) = Y_3 u \otimes \bar{s} - u \otimes X_3 \bar{s}$$

$$y_3(u \otimes \bar{s}) = s \otimes \bar{s} - u \otimes \bar{u}$$

Para el estado con peso $(0, 0)$, los operadores tipo escalera sobre los elementos que dan alguna combinación de los estados que aparecen en el centro son:

$$\begin{aligned}
x_1(u \otimes \bar{d}) &= u \otimes \bar{u} - d \otimes \bar{d} \\
x_2(s \otimes \bar{d}) &= d \otimes \bar{d} - s \otimes \bar{s} \\
x_3(s \otimes \bar{u}) &= u \otimes \bar{u} - s \otimes \bar{s} \\
y_1(u \otimes \bar{d}) &= d \otimes \bar{d} - u \otimes \bar{u} \\
y_2(d \otimes \bar{s}) &= s \otimes \bar{s} - d \otimes \bar{d} \\
y_3(u \otimes \bar{s}) &= s \otimes \bar{s} - u \otimes \bar{u}
\end{aligned}$$

Se ve de inmediato que únicamente 2 de estos estados son linealmente independientes, sin embargo, hay tres estados distintos correspondientes al peso $(0, 0)$, lo que indica que uno de estos no pertenecerá a este grupo. De los tres estados correspondientes a los operadores y_1 , y_2 y y_3 ; se toma uno de ellos como el estado normalizado independiente:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|d \otimes \bar{d}\rangle - |u \otimes \bar{u}\rangle) \quad (5.21)$$

Y el otro estado como una combinación lineal de los dos estados restantes:

$$|\beta\rangle = b_1 (|s \otimes \bar{s}\rangle - |u \otimes \bar{u}\rangle) + b_2 (|s \otimes \bar{s}\rangle - |d \otimes \bar{d}\rangle) \quad (5.22)$$

Estos estados deben ser ortonormales $\langle\beta|\alpha\rangle = 0$, $\langle\beta|\beta\rangle = 1$; de donde se obtiene el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} (-b_2 + b_1) &= 0 \\
2b_1^2 + 2b_2^2 + 2b_1b_2 &= 1
\end{aligned}$$

Cuya solución es $b_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Dejando a los estados centrales del hexágono así:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|d \otimes \bar{d}\rangle - |u \otimes \bar{u}\rangle) \quad (5.23)$$

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (2|s \otimes \bar{s}\rangle - |u \otimes \bar{u}\rangle - |d \otimes \bar{d}\rangle) \quad (5.24)$$

Los estados correspondientes a los pesos restantes del hexágono se resumen en la tabla XX.

Tabla XX. **Octeto mesónico (representación irreducible)**

Mesón	Peso
$ u \otimes \bar{s}\rangle$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$ u \otimes \bar{d}\rangle$	$(\sqrt{3}, 0)$
$ d \otimes \bar{s}\rangle$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$ \alpha\rangle, \beta\rangle$	$(0, 0)$
$ d \otimes \bar{u}\rangle$	$(-\sqrt{3}, 0)$
$ s \otimes \bar{u}\rangle$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$ s \otimes \bar{d}\rangle$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, el tercer estado cuyo peso, también es $(0, 0)$ debe ser ortogonal tanto a $|\alpha\rangle$ como a $|\beta\rangle$; pero no puede ser escrito como una combinación de los estados anteriores, porque implicaría ser parte del multiplete.

Este estado aparece también como consecuencia de restar las multiplicidades de la figura 9 (de la representación reducible) y la de los estados descritos en la

tabla XX (de la representación irreducible), quedando entonces únicamente uno en el centro del mismo.

Este estado, que es totalmente simétrico ante el intercambio de cualquier par de mesones (y sus respectivos antimmesones), corresponde a un singlete y su estado está dado por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|u \otimes \bar{u}\rangle + |d \otimes \bar{d}\rangle + |s \otimes \bar{s}\rangle) \quad (5.25)$$

Los pesos de la representación irreducible $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$, tienen una relación directa con la tabla de mesones medidos experimentalmente XIV, con la cual concuerda muy bien.

Y en donde la relación directa entre los pesos (p, q) de la representación irreducible de $SU(3)$ y los valores de la hipercarga (Y) e isospín (I_3) de las partículas, está dada por:

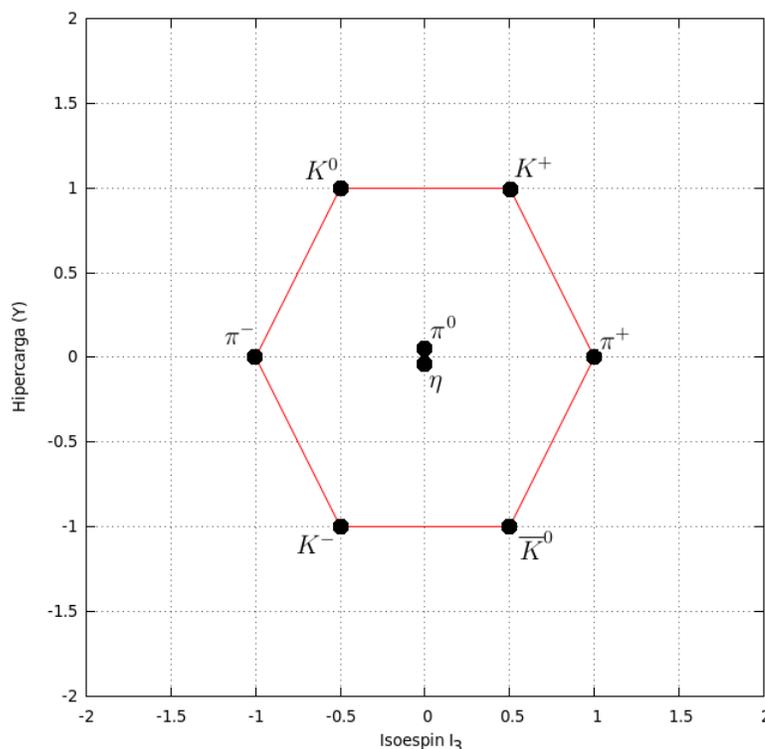
$$I_3 = \frac{p}{\sqrt{3}} \quad (5.26)$$

$$Y = \frac{2}{3}q \quad (5.27)$$

Entonces se puede arreglar a los mesones en un octeto y un siglete similar a lo realizado en la representación de $SU(3)$ como se observa en la figura 10.

La simetría que muestra esta figura es uno de los grandes logros del arreglo de las partículas fundamentales.

Figura 10. Octeto mesónico (representación irreducible)



Fuente: elaboración propia.

Nótese además, que las partículas también están arregladas de acuerdo a su carga eléctrica, ya que las rectas cuya pendiente es igual a -2 poseen partículas igualmente cargadas. De hecho, la relación de la carga con la hipercarga e isospín es tan sencilla que puede expresarse mediante la ecuación de Gell-Mann–Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad (5.28)$$

Por otro lado, los dos mesones con hipercarga 1 ($K's$) poseen una masa de aproximadamente 495 MeV, los piones de 137 MeV, la eta η de 549 MeV y las $K's$ con hipercarga de -1 una masa de alrededor de 495 MeV.

5.2.3. Bariones

Un barión es un hadrón formado por tres quarks o tres antiquarks, que permanecen unidos por la interacción fuerte.

Este tipo de materia es el tipo más abundante de materia visible en el universo; entre estas partículas se encuentran el protón y el neutrón, dos constituyentes fundamentales del núcleo atómico. El protón posee una vida media en el orden de magnitud de 10^{35} años, por lo que en fines prácticos es considerada estable.

El resto de bariones suelen ser partículas muy inestables con vida media muy corta; y su evidencia experimental se obtiene en los aceleradores de partículas con base en los rastros o productos que estos dejan durante su proceso de decaimiento.

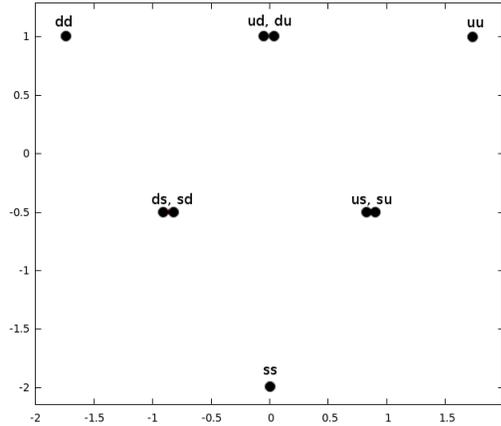
En la tabla XXI se muestran los pesos correspondientes a un par de quarks, estos mismos se grafican en la figura 11.

Tabla XXI. **Combinación de 2 quarks**

Estado	Peso
$u \otimes u$	$(\sqrt{3}, 1)$
$d \otimes d$	$(-\sqrt{3}, 1)$
$s \otimes s$	$(0, -2)$
$u \otimes d, d \otimes u$	$(0, 1)$
$u \otimes s, s \otimes u$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
$d \otimes s, s \otimes d$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

Fuente: elaboración propia.

Figura 11. **Combinación de 2 quarks**



Fuente: elaboración propia.

El vector de peso máximo es $u \otimes u$, con peso máximo $(\sqrt{3}, 1)$. De nuevo se aplican los operadores escalera sobre este vector para obtener los estados correspondientes en la representación irreducible. Estos estados (ya normalizados) son precisamente los que se resumen en la tabla XXII.

Tabla XXII. **2 quarks (representación irreducible)**

Estado	Peso
$u \otimes u$	$(\sqrt{3}, 1)$
$d \otimes d$	$(-\sqrt{3}, 1)$
$s \otimes s$	$(0, -2)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u \otimes d + d \otimes u)$	$(0, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u \otimes s + s \otimes u)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(d \otimes s + s \otimes d)$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

Fuente: elaboración propia.

De nuevo en la representación reducible; es posible ahora realizar el triple producto tensorial de quarks. Los pesos para el triple producto siguen siendo constantes aditivas.

Todas las combinaciones posibles de los tres quarks u, d, s se muestran en la tabla XXIII y se grafican en la figura 12.

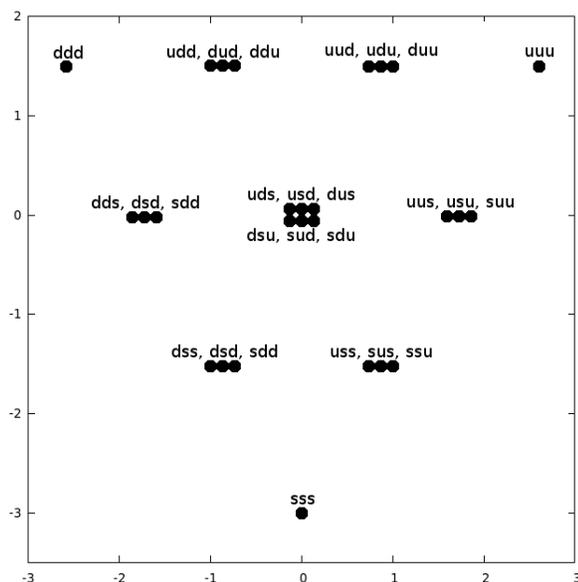
Nótese que los tres primeros pesos no tienen estados degenerados, los seis pesos siguientes poseen degeneración triple, y el último posee una degeneración séxtuple de estados.

Tabla XXIII. **Bariones (representación reducible)**

Barión	Peso
$u \otimes u \otimes u$	$(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$d \otimes d \otimes d$	$(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$s \otimes s \otimes s$	$(0, -3)$
$u \otimes u \otimes d, u \otimes d \otimes u, d \otimes u \otimes u$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$u \otimes u \otimes s, u \otimes s \otimes u, s \otimes u \otimes u$	$(\sqrt{3}, 0)$
$u \otimes d \otimes d, d \otimes u \otimes d, d \otimes d \otimes u$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$u \otimes s \otimes s, s \otimes u \otimes s, s \otimes s \otimes u$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$d \otimes d \otimes s, d \otimes s \otimes d, s \otimes d \otimes d$	$(-\sqrt{3}, 0)$
$d \otimes s \otimes s, s \otimes d \otimes s, s \otimes s \otimes d$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$u \otimes d \otimes s, u \otimes s \otimes d, d \otimes u \otimes s$ $d \otimes s \otimes u, s \otimes u \otimes d, s \otimes d \otimes u$	$(0, 0)$

Fuente: elaboración propia.

Figura 12. Bariones (representación reducible)



Fuente: elaboración propia.

El estado de peso máximo es $u \otimes u \otimes u$ con peso máximo $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$. Aplicando los operadores escalera sobre este vector con el fin de obtener los estados correspondientes a la representación irreducible se obtienen los estados y pesos (ya normalizados) mostrados en la tabla XXIV.

Además, usando de nuevo la relación encontrada de los pesos de esta representación con los números cuánticos de hipercarga e isospín (Ecuación 5.27), se encuentra que estos coinciden perfectamente con algunos de los bariones encontrados experimentalmente y cuyas características se resumieron en la tabla XIV.

Estos bariones tienen entonces un arreglo en un decuplete de manera similar a la manera en que se arreglan los pesos de la representación irreducible $SU(3)$ para

un triple producto tensorial. Estos bariones se muestran en la figura 13, en donde al igual que con el octeto mesónico, las rectas cuyas pendientes es igual a -2 poseen partículas con la misma carga, dando otra simetría extra al diagrama.

La masa de estos bariones, también está implícita en el diagrama aproximadamente, ya que las de hipercarga 1, es decir las Δ 's poseen una masa de aproximadamente $1235 MeV$, las Σ 's de alrededor de $1385 MeV$, las Ξ 's de $1530 MeV$ y la Ω^- de $1670 MeV$. Todos los bariones del decuplete poseen momento angular total $J = \frac{3}{2}$.

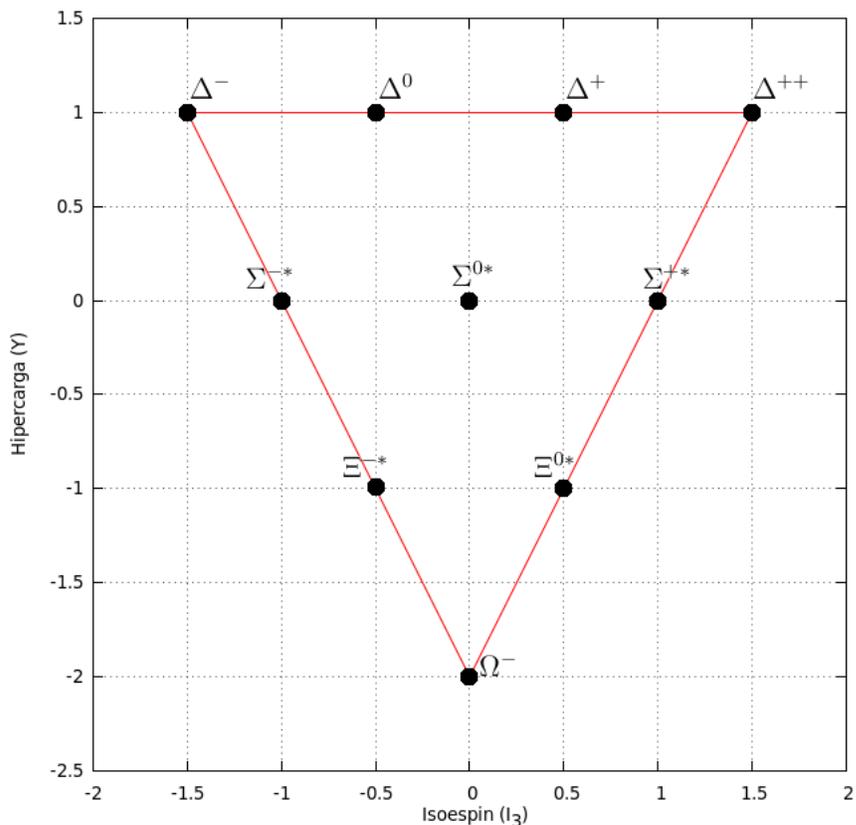
Tabla XXIV. **Decuplete bariónico (representación irreducible)**

Barión	Peso
$ u \otimes u \otimes u\rangle$	$(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$ d \otimes d \otimes d\rangle$	$(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$ s \otimes s \otimes s\rangle$	$(0, -3)$
$\frac{1}{\sqrt{3}} (u \otimes u \otimes d\rangle + u \otimes d \otimes u\rangle + d \otimes u \otimes u\rangle)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{3}} (u \otimes u \otimes s\rangle + u \otimes s \otimes u\rangle + s \otimes u \otimes u\rangle)$	$(\sqrt{3}, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{3}} (u \otimes d \otimes d\rangle + d \otimes u \otimes d\rangle + d \otimes d \otimes u\rangle)$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{3}} (u \otimes s \otimes s\rangle + s \otimes u \otimes s\rangle + s \otimes s \otimes u\rangle)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{3}} (d \otimes d \otimes s\rangle + d \otimes s \otimes d\rangle + s \otimes d \otimes d\rangle)$	$(-\sqrt{3}, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{3}} (d \otimes s \otimes s\rangle + s \otimes d \otimes s\rangle + s \otimes s \otimes d\rangle)$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{6}} (u \otimes d \otimes s\rangle + u \otimes s \otimes d\rangle + d \otimes u \otimes s\rangle + d \otimes s \otimes u\rangle + s \otimes u \otimes d\rangle + s \otimes d \otimes u\rangle)$	$(0, 0)$

Fuente: elaboración propia.

Todos los estados son totalmente simétricos ante el intercambio de dos quarks.

Figura 13. Decuplete bariónico (representación irreducible)



Fuente: elaboración propia.

La descomposición $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$ indica que hacen falta más bariones, los cuales aparecen al eliminar de la figura 12 (representación reducible) la multiplicidad de los estados obtenidos en la figura 13 (representación irreducible). Los estados restantes son los que se observan en la figura 14.

La multiplicidad de estos pesos es 2 para los elementos de los vértices, y de 5 para el elemento en el centro del hexágono. El peso máximo ahora es $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, al cual le corresponden los vectores propios:

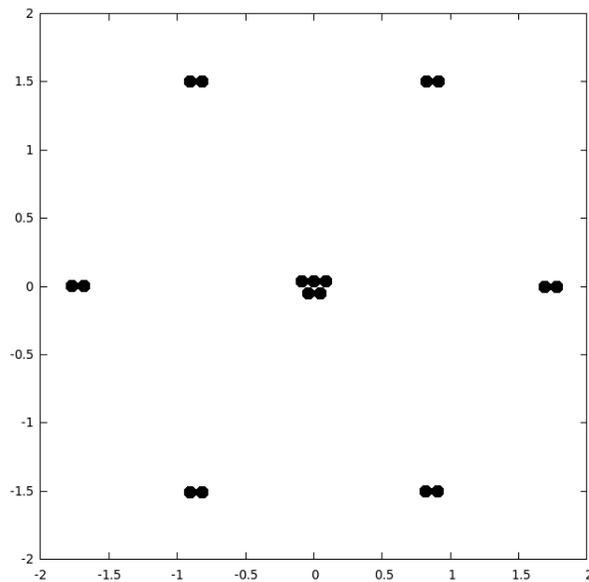
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(d \otimes u \otimes u - u \otimes d \otimes u)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(d \otimes u \otimes u + u \otimes d \otimes u - 2u \otimes u \otimes d)$$

Estos estados que son aniquilados por todos los operadores tipo escalera X_i para $i = 1, 2, 3$.

Se procede entonces como antes, a aplicar los operadores Y_i a estos estados para obtener los estados restantes; de donde se obtienen dos octetos cuyos estados son ortogonales entre sí. Todos estos estados, junto a sus pesos correspondientes se resumen en las tablas XXV y XXVI, respectivamente.

Figura 14. **Bariones restantes**



Fuente: elaboración propia.

Tabla XXV. **1er octeto bariónico (representación irreducible)**

Barión	Peso
$\frac{1}{\sqrt{6}} (d \otimes u \otimes u\rangle + u \otimes d \otimes u\rangle - 2 u \otimes u \otimes d\rangle)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{6}} (s \otimes u \otimes u\rangle + u \otimes s \otimes u\rangle - 2 u \otimes u \otimes s\rangle)$	$(\sqrt{3}, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{6}} (2 d \otimes d \otimes u\rangle - d \otimes u \otimes d\rangle - u \otimes d \otimes d\rangle)$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{6}} (s \otimes d \otimes d\rangle + d \otimes s \otimes d\rangle - 2 d \otimes d \otimes s\rangle)$	$(-\sqrt{3}, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{6}} (2 s \otimes s \otimes u\rangle - s \otimes u \otimes s\rangle - u \otimes s \otimes s\rangle)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{6}} (2 s \otimes s \otimes d\rangle - s \otimes d \otimes s\rangle - d \otimes s \otimes s\rangle)$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{12}} (s \otimes d \otimes u\rangle + s \otimes u \otimes d\rangle + d \otimes s \otimes u\rangle + u \otimes s \otimes d\rangle - 2 d \otimes u \otimes s\rangle - 2 u \otimes d \otimes s\rangle),$ $\frac{1}{\sqrt{12}} (2 s \otimes d \otimes u\rangle + 2 d \otimes s \otimes u\rangle - s \otimes u \otimes d\rangle - d \otimes u \otimes s\rangle - u \otimes s \otimes d\rangle - u \otimes d \otimes s\rangle)$	$(0, 0)$

Fuente: elaboración propia.

Tabla XXVI. **2do octeto bariónico (representación irreducible)**

Barión	Peso
$\frac{1}{\sqrt{2}} (d \otimes u \otimes u\rangle - u \otimes d \otimes u\rangle)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (s \otimes u \otimes u\rangle - u \otimes s \otimes u\rangle)$	$(\sqrt{3}, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (d \otimes u \otimes d\rangle - u \otimes d \otimes d\rangle)$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (s \otimes d \otimes d\rangle - d \otimes s \otimes d\rangle)$	$(-\sqrt{3}, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (s \otimes u \otimes s\rangle - u \otimes s \otimes s\rangle)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (s \otimes d \otimes s\rangle - d \otimes s \otimes s\rangle)$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$
$\frac{1}{2} (s \otimes d \otimes u\rangle + s \otimes u \otimes d\rangle - d \otimes s \otimes u\rangle - u \otimes s \otimes d\rangle)$ $\frac{1}{2} (s \otimes u \otimes d\rangle + d \otimes u \otimes s\rangle - u \otimes s \otimes d\rangle - u \otimes d \otimes s\rangle)$	$(0, 0)$

Fuente: elaboración propia.

Estos estados tienen una simetría mixta al intercambiar un par de quarks, no son simétricos o antisimétricos puros.

Al eliminar de nuevo la multiplicidad de estos estados de la figura 14, queda un último estado (formando un singlete) cuyo peso es $(0, 0)$. Este estado está dado por:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|s \otimes d \otimes u\rangle - |s \otimes u \otimes d\rangle + |d \otimes u \otimes s\rangle - |d \otimes s \otimes u\rangle + |u \otimes s \otimes d\rangle - |u \otimes d \otimes s\rangle)$$

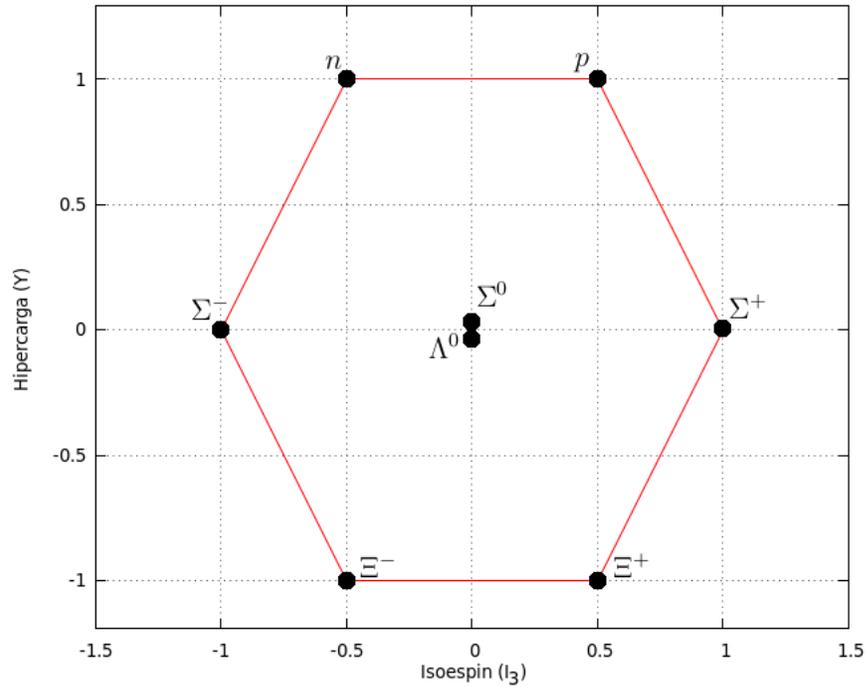
Este estado es totalmente antisimétrico ante el intercambio de un par de quarks.

Es oportuno recordar además, que el decuplete es totalmente simétrico, mientras los octetos tienen simetría mezclada, tal y como era de esperar al realizar la descomposición por medio de los diagramas de Young, donde las cajas vertical representan antisimetría, y las horizontales la simetría.

$$\begin{array}{c} \square \otimes \square \otimes \square = \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ 3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \end{array}$$

Los bariones asociados al octeto bariónico, al hacer la transformación respectiva de los pesos a la hipercarga e isospín se muestran en detalle en la figura 15. Estos bariones poseen momento angular total $J = \frac{1}{2}$. Otra vez, las rectas con pendiente -2 son la simetría para partículas con la misma carga, respaldando la ecuación 5.28.

Figura 15. Octeto bariónico (representación irreducible)



Fuente: elaboración propia.

La simetría mostrada para los mesones y bariones por medio de la representación irreducible de $SU(3)$ no es una simetría perfecta, debido a la ligera variación de la masa entre las partículas; aunque aproximadamente los hadrones con una misma hipercarga que pertenecen a un decuplete u octeto poseen una masa que varía en el orden de unidades o decenas de MeV.

El modelo teórico del quark se basa en el éxito de poder reproducir las características físicas de los mesones y bariones por medio de postular una entidad más fundamental en 3 estados o sabores. Sin embargo, se encuentra la limitante física de no poder hacer la medición experimental directa sobre las características propias de

un quark debido al confinamiento. Aunque cabe aclarar que esto no excluye que se puedan realizar mediciones indirectas sobre estos.

Para comprobar que el protón estaba compuesto de otras partículas más fundamentales se tomó la misma idea que utilizó Rutherford para demostrar que el átomo tenía su carga positiva concentrada en el núcleo.

En los años 60, en el SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) se bombardearon protones con un haz de electrones de alta energía. De acuerdo a las predicciones de la sección eficaz y en ángulo de dispersión, se confirmó que, efectivamente estos protones tenían concentrada su carga en pequeños paquetes, en este caso tres de ellos. Más tarde con experimentos independientes, también lo confirmaron utilizando un haz de neutrinos.

El recuento histórico revela además, que algunos de los hadrones fueron primero predecidos por el modelo del quark que medidos experimentalmente, tal fue el caso para el barión Ω^- cuya predicción incentivó a los físicos experimentales a buscarlo; y cuyo descubrimiento posterior concordó perfectamente con las predicciones de masa, extrañeza, carga, e isospín.

Las propiedades de los quarks de acuerdo a este modelo se resumen en la tabla XXVII. Acá B denota el número bariónico, Q la carga en términos de la carga fundamental e , I_3 la componente del isospín en el eje z , S la extrañeza y Y la hipercarga.

Tabla XXVII. **Propiedades de los quarks**

Quark	Espín	B	Q	I_3	S	Y
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{2}{3}$

Fuente: elaboración propia.

Para terminar el modelo hace falta un último paso, nótese por ejemplo, el barión Δ^{++} está compuesto de tres quarks iguales $|u \otimes u \otimes u\rangle$. Ya que los quarks poseen espín $\frac{1}{2}$, obedecen la estadística de Fermi-Dirac y están sujetos al principio de exclusión de Pauli, por lo que no pueden compartir los mismos números cuánticos. Hasta ahora no hay ningún número de estos que los distinga entre sí. Para solucionar el problema se postula que, además de sabor, los quarks poseen una nueva característica: el color ². Son necesarios tres diferentes colores para poder distinguir a los quarks en un barión: rojo, verde y azul. Por los que los quarks u del barión Δ^{++} tiene cada uno un color diferente. A cada color se le asocia su respectivo anticolor: antirrojo, antiverde y antiazul; característica propia de los antiquarks.

El postulado de color para los quarks, además de solucionar este problema, también ayuda a explicar otras hipótesis hechas previamente. En la naturaleza, las únicas partículas que existen son aquellas que son incoloras. Para los colores rojo, verde y azul; al hacer la analogía óptica, la mezcla de estos resulta en el color blanco. Por ejemplo, un mesón compuesto de un quark y su respectivo antiquark ($q\bar{q}$) posee una cantidad de color propia del quark, la cual se elimina por la misma cantidad del

²El nombre es por razones históricas, no tiene ninguna relación con las propiedades ópticas de los quarks.

anticolor correspondiente del antiquark.

Además, el modelo de ausencia de color para los hadrones explica por qué es imposible obtener un quark aislado, o una combinación de dos quarks; al no existir la combinación necesaria para hacer a la partícula incolora.

En la década de los setenta, el aparecimiento de hadrones más complejos que no podían ser explicados con los quarks u , d , s llevó a la necesidad de implementar al modelo otros tres quarks c (charm), b (bottom), t (top) por sus nombres en inglés. Estos 6 quarks en total, cada uno con tres colores es el modelo final hasta hoy en día, los cuales se describen de acuerdo a la representación del grupo $SU(6)$; dando arreglos ya no bidimensionales, sino tridimensionales de las características de los mismos.

En física de altas energías, la parte teórica ha ido mucho más adelante que la experimental en las últimas décadas; ya que no fue sino hasta 1995, que en Fermilab se tuvieron pruebas experimentales de la existencia del quark t . Actualmente, los grandes aceleradores de partículas como el LHC en Suiza siguen produciendo grandes cantidades de datos con el fin de seguir comprendiendo las características de la materia y responder, por ejemplo, a algunas de las siguientes preguntas que siguen abiertas sobre quarks: ¿Por qué exactamente existen únicamente 6 tipos de quarks?, ¿existe alguna relación entre sus masas?, ¿es el quark la última entidad fundamental de la materia o estos también poseen estructura?, ¿tienen alguna implicación con la materia oscura?. Lo que es claro es que cada respuesta trae consigo mucho más preguntas.

CONCLUSIONES

1. Conociendo el valor máximo de momento angular de una partícula, los valores posibles que puede tomar sobre un eje en particular son discretos y finitos. Sus estados correspondientes se pueden construir con los operadores escalera aplicados sobre el estado con momento angular máximo j , los cuales corresponden a una representación irreducible de $SU(2)$. El número de estos estados es $2j + 1$.
2. La adición del momento angular en mecánica cuántica es un proceso probabilístico discreto de posibles valores que puede tomar tal adición. Los estados correspondientes pertenecen al producto de dos representaciones irreducibles de $SU(2)$ y su respectiva representación irreducible puede ser construída con base a un único estado de momento angular máximo y los operadores escalera en este espacio vectorial.
3. El producto de dos estados de momento angular puede ser descompuesto como una combinación lineal de posibles estados ligados pertenecientes a una representación irreducible de $SU(2)$, los cuadrados de los coeficientes en esta descomposición representan la probabilidad de que el estado en concreto sea medido. Estos coeficientes se denominan de Clebsh-Gordan y se obtienen al aplicar sucesivamente los operadores escalera sobre los estados de momento angular normalizados.

4. Existen tres estados fundamentales (u, d, s) en una representación irreducible de $SU(3)$, a los cuales se les denomina quark. Los pesos de cada estado en esta representación determinan las propiedades físicas de carga, isospín e hipercarga de cada uno de los quarks.
5. El producto de dos estados (quarks) de la representación irreducible de $SU(3)$ genera los estados correspondientes a los mesones. La representación irreducible de este producto provoca que los mesones y sus propiedades se arreglen en dos figuras geométricas sencillas: un octeto y un singlete.
6. El producto de tres estados (quarks) de la representación irreducible de $SU(3)$ genera los estados correspondientes a los bariones. La representación irreducible de este producto provoca que los bariones y sus propiedades se arreglen en cuatro figuras geométricas sencillas: un decuplete, dos octetos y un singlete.
7. Las propiedades físicas de los hadrones (carga, isospín e hipercarga) pueden calcularse a través de los pesos de las representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$ y el postulado de una partícula fundamental denominada quark, la cual crea su estructura interna.

RECOMENDACIONES

1. Estudiar la teoría de representación de grupos para un mejor entendimiento de la física de altas energías.
2. Implementar el estudio de la teoría de grupos y de representación de grupos dentro del p nsum de estudios de la Licenciatura en Física Aplicada de esta Facultad.
3. Abarcar el tratamiento del momento angular en el curso de Mecánica Cuántica 2, correspondiente al p nsum de estudios actual desde la perspectiva de las representaciones irreducibles de $SU(2)$.
4. Introducir el cálculo de los coeficientes de Clebsh-Gordan en el curso de Introducción a la Física de Altas Energías 1 o Mecánica Cuántica 2.
5. Incluir en el curso actual de Introducción a la Física de Altas Energías 1 el modelo del quark desde el punto de vista de las representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$.

BIBLIOGRAFÍA

1. BRÖCKER, Thedor. *Representations of compact Lie groups, graduate text in mathematics*. New York: Board, 1985. 313 p.
2. GALLIAN, Joseph. *Contemporary abstract algebra*. 2a ed. Canadá: D.C. Heath and Company, 1986. 547 p.
3. GRIFFITHS, David. *Introduction to elementary particles*. New York: John Wiley & Sons, 1987. 400 p.
4. GUTOWSKI, Jan. *Symmetry and particle physics*. UK: University for Cambridge, 2007. 400 p.
5. HALL, Brian. *Lie groups Lie algebras and representation. An elementary introduction*. USA: Springer, 2004. 351 p.
6. TUNG, Wu-Ki. *Group theory in physics*. England: World Scientific, 1993. 344 p.

