



Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ciencias

REGLAS DE SELECCIÓN PARA LA DISPERSIÓN DEL NEUTRINO CON UN ELECTRÓN HIDROGENOIDE

María Eugenia Cabrera Catalán

Asesorado por: Dr. Omar Gustavo Miranda Romagnoli

Lic. Edgar Anibal Cifuentes Anléu

Guatemala, mayo de 2006.

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA

**REGLAS DE SELECCIÓN PARA LA DISPERSIÓN DEL NEUTRINO
CON UN ELECTRÓN HIDROGENOIDE**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA
POR

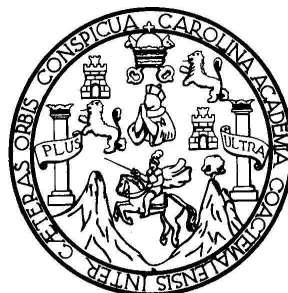
MARÍA EUGENIA CABRERA CATALÁN

ASESORADO POR: DR. OMAR GUSTAVO MIRANDA ROMAGNOLI
LIC. EDGAR ANIBAL CIFUENTES ANLÉU

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN FÍSICA APLICADA

GUATEMALA, MAYO DE 2006

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE INGENIERÍA



NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympto Paiz Recinos
VOCAL I	
VOCAL II	Lic. Amahán Sánchez Álvarez
VOCAL III	Ing. Julio David Galicia Celada
VOCAL IV	Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
VOCAL V	Br. Elisa Yazminda Vides Leiva
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivonne Véliz Vargas

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Murphy Olympto Paiz Recinos
EXAMINADOR	Lic. Ricardo Enrique Contreras Folgar
EXAMINADOR	Lic. Osmar Hernandez
EXAMINADOR	Lic. Erick Estuardo Hernández
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivonne Véliz Vargas

HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

**REGLAS DE SELECCIÓN PARA LA DISPERSIÓN DEL NEUTRINO
CON UN ELECTRÓN HIDROGENOIDE,**

tema que me fuera asignado por la Coordinación de la Carrera de Licenciatura en Física Aplicada y aprobado por Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería, con fecha 27 de Septiembre de 2005.



María Eugenia Cabrera Catalán



Cinvestav

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
Departamento de Física



México D. F., 2 de mayo de 2006

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta
Director Escuela de Ciencias
Facultad de Ingeniería
USAC

Señor Director:

Por este medio informo que el estudiante de la licenciatura en Física Aplicada, María Eugenia Cabrera Catalán, fue asesorado por el suscrito en su trabajo de graduación **"REGLAS DE SELECCIÓN PARA LA DISPERSIÓN DEL NEUTRINO CON UN ELECTRÓN HIDROGENOIDE"**.

Habiendo cumplido con los objetivos y metas propuestos para este trabajo, he procedido a la aprobación del mismo. Por lo que el contenido, conclusiones y recomendaciones de este trabajo es responsabilidad, tanto del autor como de sus asesores.

Atentamente,

Omar Gustavo Miranda Romagnoli
Profesor Titular



Guatemala, 17 de mayo de 2006

FACULTAD DE INGENIERIA

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta
Director Escuela de Ciencias
Facultad de Ingeniería
USAC

Señor Director:

Por este medio informo que la estudiante de la licenciatura en Física Aplicada, María Eugenia Cabrera Catalán, fue asesorado por el suscrito en su trabajo de graduación **"REGLAS DE SELECCIÓN PARA LA DISPERSIÓN DEL NEUTRINO CON UN ELECTRÓN HIDROGENOIDE"**.

Habiendo cumplido con los objetivos y metas propuestos para este trabajo, he procedido a la aprobación del mismo. Por lo que el contenido, conclusiones y recomendaciones de este trabajo es responsabilidad, tanto del autor como de sus asesores.

Atentamente,




Lic. Edgar Anibal Cifuentes Anleu



Guatemala, 17 de mayo de 2006

FACULTAD DE INGENIERIA

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS
FACULTAD DE INGENIERÍA
USAC, Ciudad

Estimado Ingeniero Boy:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión al trabajo de graduación "REGLAS DE SELECCIÓN PARA LA DISPERSIÓN DEL NEUTRINO CON UN ELECTRÓN HIDROGENOIDE", presentada por la estudiante **María Eugenia Cabrera Catalán**, con carné No. 2001-12788; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación.

Muy Atentamente,

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"




Lic. Edgar Aníbal Cifuentes Anléu
Coordinador, Licenciatura en Física Aplicada
Departamento de Física

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS

El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen de los asesores, con el visto bueno del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada al trabajo de graduación de la estudiante **MARÍA EUGENIA CABRERA CATALÁN**, titulado "REGLAS DE SELECCIÓN PARA LA DISPERSIÓN DEL NEUTRINO CON UN ELECTRÓN HIDROGENOIDE" procede a la autorización del mismo.

Ing. José Alberto Bóy Piedrasanta
Director Escuela de Ciencias



Guatemala, 29 de mayo de 2006

JABP/scvs

Universidad de San Carlos
de Guatemala



Facultad de Ingeniería
Decanato

Ref. DTG. 175-2006.

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de graduación titulado: **REGLAS DE SELECCIÓN PARA LA DISPERSIÓN DEL NEUTRINO CON UN ELECTRÓN HIDROGENOIDE**, presentado por la estudiante universitaria **María Eugenia Cabrera Catalán**, procede a la autorización para la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

Ing. Murphy Olimpo Paiz Recinos
DECANO



Guatemala, mayo 29 de 2,006

/gdech

Todo por Ti, Carolingia Mia
Dr. Carlos Martínez Durán
2006: Centenario de su Nacimiento

DEDICATORIA

*A mis padres Dominga Eugenia Catalán Gómez
Edgar Fidencio Cabrera Tello,
por su apoyo incondicional...*

AGRADECIMIENTOS A

Este trabajo no habría sido posible sin la valiosa colaboración de algunas personas y el soporte de algunas instituciones.

Dr. Omar Miranda Romagnoli
del Centro de Investigación y
Estudios Avanzados del I.P.N.
(Cinvestav), México

por su asesoría para realizar este trabajo de graduación, sus críticas, comentarios y sugerencias fueron indispensables para llevar esta investigación a feliz término.

Lic. Edgar Cifuentes Anléu

por su apoyo en este proyecto.

Proyecto de Conacyt 43649

por el apoyo parcial para la elaboración de mi trabajo de graduación en el Cinvestav.

Cinvestav

por haberme otorgado un mes de beca para realizar mi trabajo de graduación en dicho centro de investigación.

Juan Barranco

por su amistad y apoyo en la elaboración de mi tesis.

**Mis compañeros de Licenciatura
en Física**

por su amistad y solidaridad.

**Los estudiantes de Física del
Cinvestav**

por ayudarme a tener una estancia tan agradable en México.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	III
LISTA DE SÍMBOLOS	V
GLOSARIO	VII
RESUMEN	IX
OBJETIVOS	XI
INTRODUCCIÓN	XIII
1. MODELO ESTÁNDAR DE INTERACCIÓN ELECTRODÉBIL	1
1.1. Lagrangianos y ecuaciones de onda	2
1.2. Simetrías y leyes de conservación	3
1.3. Interacciones electrodébiles	7
2. INTERACCIÓN NEUTRINO-ELECTRÓN	11
2.1. Dispersión	11
2.1.1. Cinemática	11
2.1.2. Sección diferencial eficaz	12
2.2. Sección diferencial eficaz para la dispersión neutrino electrón	15

3. EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO Y SUS REGLAS DE SELECCIÓN	21
3.1. Átomo de hidrógeno no relativista	21
3.1.1. Solución de la ecuación de Schrodinger para el átomo de hidrógeno	21
3.1.2. Reglas de selección	24
3.2. Átomo de hidrógeno relativista	30
3.2.1. Solución de la ecuación de Dirac para el átomo de hidrógeno	30
3.2.2. Reglas de selección	37
4. DISPERSIÓN INELÁSTICA NEUTRINO ELECTRÓN PARA EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO	41
CONCLUSIONES	49
RECOMENDACIONES	51
REFERENCIAS	53
BIBLIOGRAFÍA	55

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

TABLAS

- | | | |
|-----|---|---|
| I. | Contenido fermiónico del Modelo Estándar | 1 |
| II. | Familia de leptones con los números cuánticos de carga Q , isospín T , hipercarga Y y tercera componente de isospín T_3 , ($Q = T_3 + \frac{Y}{2}$) | 9 |

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
α	Constante de estructura fina.
Z	Número atómico.
ϵ	Vector de polarización del fotón.
n	Número cuántico principal.
l	Número cuántico de momento angular orbital.
j	Número cuántico de momento angular total.
m	Número cuántico de proyección de j .
s	Número cuántico de espín.
κ	Número cuántico que combina j y la paridad.
σ_i	Matrices de Pauli.
γ^μ	Matrices de Dirac.
L	Lagrangiano.
\mathcal{L}	Densidad Lagrangiana.
H_I	Hamiltoniano de Interacción.

ψ	Función de onda.
u	Solución de la ecuación de Dirac para partículas.
M	Matriz de elementos.
σ	Sección Eficaz.
χ	Espinores.
$\Omega_{\kappa m}(r)$	Espinor esférico.
Y_{lm}	Armónico esférico.
$C_{m_1 m_2 m_3}^{j_1 j_2 j_3}$	Coefficiente de Clebsch-Gordan.
$j_l(x)$	Función esférica de Bessel.
$F(a, b; c)$	Función hipergeométrica confluyente.

GLOSARIO

Fermiones	Partículas que obedecen la estadística de Fermi-Dirac, tienen espín semientero.
Lepton	Fermiones ligeros que no tienen interacción fuerte, incluyen seis partículas agrupadas en seis familias electrón y neutrino del electrón (1a familia), muon y neutrino del muon (2a familia), tau y neutrino del tau.
Boson	Partículas que obedecen la estadística de Bose-Einstein, tienen espín entero.
Interacción débil	Interacción entre leptones y quarks mediante bosones W y Z .
Sección eficaz	En física nuclear este concepto es usado para expresar la probabilidad de interacción entre partículas. Está usualmente expresada en unidades de área.
Sección diferencial eficaz	Es definida como la probabilidad de observar una partícula dispersada en un estado cuántico dado por unidad de ángulo sólido, si es que el objetivo es irradiado por un flujo de una partícula por unidad de área.

Matriz S	Es la matriz unitaria que relaciona los estados finales en un futuro infinito y el estado inicial en un pasado infinito. Esta matriz S está íntimamente ligada a la <i>amplitud de la probabilidad de transición</i> entre los estados finales e iniciales que involucra y por lo tanto es muy útil para calcular la sección eficaz.
Matriz de elementos	En Mecánica cuántica, la matriz de elementos es la representación de un operador en cierta base. Para espacios finitos un operador es por lo tanto una matriz. Viene de una perturbación de n-esimo orden de la matriz S. También se le llama Amplitud de Feynman.
Paridad	Transformación que invierte el sistema de coordenadas espacial.
Helicidad	Es la proyección del momento angular sobre la dirección de movimiento: $h = \vec{J} \cdot \hat{p}$ con $\hat{p} = \vec{p}/ \vec{p} $. Puesto que el momento angular en un eje tiene valores discretos, la helicidad también. Para el caso de partículas de espín 1/2, la helicidad puede ser positiva y a la partícula se le dice "derecha." helicidad negativa, partícula "izquierda"
Invarianza de Lorentz	Invariante ante las transformaciones de Lorentz, de acuerdo con la teoría especial de la relatividad en sistemas inerciales.

RESUMEN

Se presenta un estudio de la dispersión neutrino-electrón para el caso en que el neutrino incidente tiene una energía muy baja, del orden de la energía de ligadura entre el electrón y el núcleo atómico. En particular tratamos el caso más simple de un electrón en un átomo de Hidrógeno y presentamos una forma general de describir una interacción en que el electrón en el estado base salta a un estado libre, debido a su interacción con el neutrino. En este problema, el electrón libre se representa como una superposición de estados ligados. Como resultado final presentamos las reglas de selección, en la aproximación dipolar, es decir, los términos que darán la mayor contribución en esta dispersión.

Si bien este es un problema académico, existen diversas propuestas experimentales que se están planteando el estudio de esta dispersión a muy bajas energías. Por lo tanto este problema podría ser de interés en investigación de frontera en el futuro.

OBJETIVOS

- **General**

Realizar un estudio a muy bajas energías de la dispersión del neutrino con un electrón ligado a un átomo de hidrógeno, considerando una fuente artificial de neutrinos.

- **Específicos**

1. Describir la interacción entre el neutrino y el electrón.
2. Analizar y describir el Modelo Estandar de interacción electrodébil.
3. Estudiar las reglas de selección de la dispersión de un fotón con un electrón ligado a un átomo de hidrógeno bajo consideraciones relativista y no relativista, tomando en cuenta la aproximación dipolar.
4. Encontrar las reglas de selección de la dispersión de un neutrino con un electrón ligado a un átomo de hidrógeno a muy bajas energías.

INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar se estableció a finales de los sesentas y desde entonces ha tenido gran éxito en la predicción de observables experimentales, tal vez la única excepción sea la masa de los neutrinos, la cual se postuló como cero. La fuerte evidencia experimental de una masa del neutrino distinta de cero de los datos obtenidos de experimentos con neutrinos solares [1], de la atmósfera [2], de reactores [3] y de aceleradores [4] fue, quizá, el mayor logro reciente en astropartículas, altas energías y física nuclear. Esto establece fuertes indicios de que el Modelo Estándar de las interacciones electro-débiles es incompleto.

Actualmente existen diversas propuestas experimentales para conocer la matriz de masas de los neutrinos y para probar distintas propiedades de los neutrinos tales como su momento magnético. Muchas de la propuestas plantean el estudio de las interacciones de neutrinos de muy altas energías como es el caso de los experimentos con aceleradores o con rayos cósmicos ultra-energéticos. Por otro lado, existen también propuestas experimentales con neutrinos de muy bajas energías (decenas o centenas de KeV) provenientes de reactores o de fuentes radiactivas artificiales; tal es el caso de NOSTOS (*Neutrino Oscillation Tritium Outgoing Source*) [5], y MAMONT (*Electron Antineutrino Magnetic Moment with Tritium Source*) [6]. Para este tipo de experimentos que se realizarán en un futuro, la energía de ligadura de los electrones será de gran importancia [7,8], especialmente para átomos como el germanio en donde las capas internas tienen una energía de ligadura similar a la del neutrino incidente. El estudio de este tipo de dispersión inelástica se ha abordado de manera incipiente en algunos artículos y dada la importancia que tendrá para los experimentos futuros está completamente justificado el estudio de este problema.

Como una primera etapa se plantea en este trabajo de graduación un caso más sencillo, el estudio a muy bajas energías de la dispersión del neutrino con un electrón ligado a un átomo de hidrógeno, en lugar de un gas noble o un semiconductor como el germanio. Este caso tiene la ventaja de que la función de onda tiene una solución analítica conocida. Esto nos permitirá centrarnos en estudiar con detalle la física de la dispersión inelástica,

intentando encontrar reglas de selección sencillas para el salto del electrón a los distintos niveles de energía tal como sucede en el ejemplo clásico de las transiciones al nivel base desde niveles de energía excitados. El problema se puede resolver tanto analítica como numéricamente, permitiendo así tener el problema bajo control antes de pasar a estudiar un caso cuya solución sólo se puede dar de manera numérica.

En la descripción de este tipo de dispersión, el electrón se puede representar como una combinación lineal de las funciones de onda del átomo de Hidrógeno. Para este caso concreto encontraremos las reglas de selección en la aproximación dipolar. Si bien este es un problema académico, servirá como un ejemplo muy interesante de trabajo de investigación original. Además, la experiencia adquirida en el estudio de este problema deja como perspectiva el abordar el problema más actual de la descripción de la dispersión en el caso de una transición al continuo, e incluso abre también la posibilidad de estudiar el caso de un electrón ligado a átomos más complejos como el Helio o Germanio.

A fin de llevar a cabo este trabajo hemos tenido que hacer primero una revisión de distintos temas que se pueden hallar en la literatura, pero que hemos decidido incluir en el presente trabajo de graduación, a fin de mostrar un escrito que sea autocontenido y que pueda ser útil al lector como referencia. Para este propósito hemos incluido en el capítulo 1 una breve descripción del Modelo Estándar de partículas elementales. Después de esta discusión, será necesario revisar también, antes de discutir el caso ligado, la dispersión neutrino-electrón para el caso típico de un electrón libre, la cual se dará en el capítulo 2, a lo cual seguirá la discusión del capítulo 3 sobre las reglas de selección para el átomo de Hidrógeno en el caso clásico de una interacción electromagnética. Con todos estos elementos ya discutidos podremos pasar finalmente al caso que nos interesa de la dispersión inelástica del neutrino con un electrón en un estado ligado de un átomo de Hidrógeno, cuyos resultados se presentan en el capítulo 4. Por último, al final de esta tesis se presentarán las conclusiones y perspectivas.

1. MODELO ESTÁNDAR DE INTERACCIÓN ELECTRODÉBIL

El Modelo Estándar ha sido enormemente exitoso al describir y predecir los datos experimentales. Este modelo contempla una invariancia de norma local con simetría $SU(3) \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ la cual contiene tres generaciones de leptones y quarks.

Tabla I. **Contenido fermiónico del Model Estándar**

1 ^a Familia	2 ^a Familia	3 ^a Familia
u	c	t
d	s	b
ν_e	ν_μ	ν_τ
e	μ	τ

El grupo $SU(3)$, describe la interacción fuerte la cual tiene ocho bosones de norma llamados gluones con diferentes números cuánticos de color, la teoría que surge de este sector se conoce como cromodinámica cuántica y los únicos fermiones que son sensibles a esta interacción son los quarks. El sector $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ describe las interacciones electromagnéticas y débiles, llamadas de manera colectiva interacciones electrodébiles, las cuales tienen cuatro bosones de norma (W^\pm , Z^0 y γ). Las interacciones electromagnéticas y débiles se unifican a altas energías obteniendo, entre otros resultados, la mezcla del bosón de norma neutro de $SU(2)_L$ y el bosón de norma de hipercarga $U(1)_Y$. A bajas energías, esta simetría está rota, si bien permanece vigente una simetría $U(1)_Q$.

A continuación describiremos algunos de los ingredientes fundamentales del Modelo Estándar, el cual será un ingrediente básico de el presente trabajo de graduación.

1.1. Lagrangianos y ecuaciones de onda

En la mecánica clásica las ecuaciones de movimiento de una partícula se pueden obtener de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1.1)$$

Haciendo referencia a [4], podemos extender el formalismo de un sistema discreto a un sistema continuo $\phi(x, t)$, con lo cual el lagrangiano se transforma a

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}, x_\mu \right), \quad (1.2)$$

donde el campo ϕ en sí mismo es una función de parámetros continuos x_μ , y la ecuación (1.1) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (1.3)$$

que es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange, y a \mathcal{L} se le llama la densidad lagrangiana.

Si elegimos el lagrangiano y éste es un escalar de Lorentz, la ecuación de movimiento (1.3) será covariante. Observemos que si sustituimos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.4)$$

en la ecuación (1.3) tenemos la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi \equiv (\square^2 + m^2) \phi = 0 \quad (1.5)$$

De manera similar ocurre para la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.6)$$

que puede ser obtenida del lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (1.7)$$

Para cada lagrangiano corresponde un conjunto de reglas de Feynman: se asocian con los términos de lagrangiano un conjunto de propagadores y factores de vértice, los propagadores son determinados por los términos cuadráticos en los campos, los otros términos del lagrangiano son asociados con vértices de interacción, el factor de vértice de Feynman está dado por el coeficiente correspondiente al término en $i\mathcal{L}$ conteniendo los campos interactuantes. Por ejemplo, la corriente del electrón está dada por $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ y entonces el término de interacción $i\mathcal{L}$ es

$$i\mathcal{L} = \dots + -ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

donde reconocemos el coeficiente ($ie\gamma^\mu$) de los campos interactuantes $\bar{\psi}\psi A_\mu$ como el factor de vértice de la electrodinámica cuántica.

El lagrangiano clásico ahora es cuantizado. Campos tales como ψ y A_μ se consideran ahora como operadores que describen la creación y aniquilación de partículas. Las interacciones son calculadas por la evaluación de una serie perturbativa en $i\mathcal{L}_{int}$, los términos de interacción $i\mathcal{L}$. El resultado final puede ser traducido al conjunto de reglas de Feynman las cuales describen el formalismo perturbativo.

1.2. Simetrías y leyes de conservación

Una de las ideas más profundas de la física teórica es que las interacciones están regidas por principios de simetría. Este principio se usa en el Modelo Estándar y además, una gran parte de las teorías más allá del Modelo Estándar toman como hipótesis que todas las interacciones de las partículas pueden ser descritas por simetrías de norma locales, es decir, con la idea de que las cantidades físicas se conservan en regiones locales del espacio y no solo globalmente. En esta sección daremos una breve discusión sobre estas ideas.

Haciendo referencia a [4], se establece que la invariancia bajo traslaciones, desplazamientos temporales, rotaciones conducen a la conservación del momento, la energía y el momento angular. Más que el estudio de estas leyes de conservación queremos describir aquí transformaciones de simetría internas que no mezclen campos con propiedades espacio-temporales (transformaciones que conmuten con las componentes del espacio-tiempo de

la función de onda). Por ejemplo, un electrón es descrito por un campo complejo y la inspección del lagrangiano (1.7) muestra que es invariante bajo la transformación de fase

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x), \quad (1.8)$$

donde α es una constante real que además participa en las transformaciones

$$\begin{aligned} \partial_\mu\psi &\rightarrow e^{i\alpha}\partial_\mu\psi(x) \\ \bar{\psi} &\rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

La familia de transformaciones de fase $U(x) \equiv e^{i\alpha}$ donde un parámetro α puede correr continuamente sobre todos los números reales, forman un grupo unitario Abeliano conocido como grupo $U(1)$.

La invariancia $U(1)$ de \mathcal{L} no es de manera alguna trivial pues, a través del teorema de Noether, implica la existencia de una corriente conservada. Para observar esto, basta con estudiar la invariancia de \mathcal{L} bajo una transformación $U(1)$ infinitesimal

$$\psi \rightarrow (1 + i\alpha)\psi \quad (1.10)$$

La invariancia requiere que el lagrangiano permanezca sin cambios, esto es,

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \\ &= \frac{\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi) + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\alpha\partial_\mu\psi) + \dots \\ &= i\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \right] \psi + i\alpha\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

El término en paréntesis cuadrado es idéntico a cero debido a la ecuación de Euler-Lagrange (1.3) para ψ , y de manera similar para $\bar{\psi}$. Así, la ecuación (1.11) se reduce a una ecuación de corriente conservada

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.12)$$

donde, utilizando la ecuación (1.7),

$$j^\mu = \frac{ie}{2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right) = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (1.13)$$

El factor de proporcionalidad se elige tal que j^μ concuerde con la densidad de la corriente electromagnética de un electrón de carga $-e$. De la ecuación (1.12) se sigue que la carga

$$Q = \int d^3x j^0 \quad (1.14)$$

debe ser una cantidad conservada debido a la invariancia de fase $U(1)$.

La ecuación (1.8) implica que la fase α no es medible, no tiene significado físico, y puede elegirse arbitrariamente. α es una constante, de manera que una vez fijada es igual para todo el espacio-tiempo. Estaríamos, por tanto, hablando de una invariancia de norma global. Esta es la invariancia más general aunque sería más satisfactorio si α pudiera ser diferenciada punto a punto en el espacio tiempo, esto es, $\alpha = \alpha(x)$.

La generalización de la ecuación (1.8) a la expresión

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (1.15)$$

puede realizarse. Aquí $\alpha(x)$ depende del espacio-tiempo de una manera completamente arbitraria. Esto es conocido como invariancia de norma local. Sin embargo, notemos que el lagrangiano de la ecuación (1.7) no es invariante bajo tales transformaciones locales de fase. De (1.15) podemos obtener

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}, \quad (1.16)$$

de manera que el último término de \mathcal{L} es invariante; sin embargo, la derivada de ψ no cumple con (1.15), sino que más bien toma la forma

$$\partial_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\partial_\mu \psi(x) + ie^{i\alpha(x)}\psi\partial_\mu \alpha \quad (1.17)$$

y el término $\partial_\mu \alpha$ rompe la invariancia de \mathcal{L} .

Si se intenta imponer una invariancia al lagrangiano bajo transformaciones de norma locales, se debe buscar una derivada modificada D_μ que se transforme covariantemente bajo transformaciones de fase. Se debe introducir un campo vectorial A_μ con propiedades de transformación tales que compensen el término no deseado en (1.17), esto puede ser

realizado usando la siguiente definición

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \quad (1.18)$$

donde A_μ se transforma como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha. \quad (1.19)$$

Por lo tanto, la invariancia del lagrangiano (1.7) es obtenida reemplazando ∂_μ por D_μ

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma_\mu D^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \end{aligned} \quad (1.20)$$

De ahí que por demandar una invariancia de fase local, nos hemos visto forzados a introducir un campo vectorial A_μ , llamado campo de norma, el cual se acopla a una partícula de Dirac de carga $-e$ en exactamente la misma forma como el campo de un fotón. Además, el nuevo término de interacción en (1.20) puede ser escrito como $-j_\mu A_\mu$, donde j^μ es la densidad de corriente.

Puesto que estamos considerando a este nuevo campo como un fotón físico, entonces debemos agregar al lagrangiano un término correspondiente a la energía cinética, análogo a $\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2$ en (1.4). Como el término cinético debe ser invariante bajo (1.19), éste puede solamente contener un tensor de campo invariante de norma

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.21)$$

Todo esto nos lleva al lagrangiano de Electrodinámica Cuántica

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.22)$$

Una vez obtenido este lagrangiano de interacción para la electrodinámica que está basado en una simetría de norma $U(1)_Q$, podemos revisar, en la siguiente sección, el caso electrodébil, el cual como veremos, esta descrito por una simetría de norma $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Esta última simetría esta espontáneamente rota por medio del mecanismo de Higgs, el cual da masa a los bosones intermediarios de las interacciones débiles W^\pm y Z^0 .

En esta tesis no discutiremos el mecanismo de Higgs, pero si haremos una revisión del lagrangiano de interacción electrodébil, que es un ingrediente básico para calcular la dispersión neutrino-electrón.

1.3. Interacciones electrodébiles

Cuando las interacciones débiles fueron por primera vez descritas teóricamente por Fermi, hacia 1933, se postularon para tener una estructura similar a las interacciones en electrodinámica cuántica. Sin embargo, a raíz de los experimentos realizados por la doctora Chien Shung Wu en 1956, se encontró que las interacciones débiles violan paridad por lo que existe una diferencia estructural entre los factores de los vértices electromagnéticos y los débiles. Para describir esta violación de paridad se tiene que modificar la descripción del acoplamiento del bosón intermediario. Así, en el caso del acoplamiento W^\pm se tiene una estructura $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ en lugar de la estructura γ^μ de la interacción electromagnética mediada por el fotón.

Tomando las referencias [2] y [4], se bosquejará la teoría de interacción electrodébil. Podemos absorber la matriz $(1 - \gamma^5)$ dentro del espinor de la partícula. Específicamente, definimos

$$u_L \equiv \frac{(1 - \gamma^5)}{2}u(p) \quad (1.23)$$

el subíndice (L) significa "parte izquierda". Si bien u_L en general no es un eigenestado de la helicidad

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \sigma}{E+m} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{p} \cdot \sigma}{E-m} \end{pmatrix} u(p), \quad (1.24)$$

si la partícula no tiene masa, entonces

$$\gamma^5 u(p) = (\hat{p} \cdot \Sigma)u(p) \quad (1.25)$$

donde $(\hat{p} \cdot \Sigma)$ es la helicidad, con eigenvalores ± 1 , de modo que

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u(p) = \begin{cases} 0, & \text{helicidad} + 1 \\ u(p) & \text{helicidad} - 1 \end{cases} \quad (1.26)$$

De forma más general, $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ funciona como el operador proyección, dando la componente de helicidad -1 de $u(p)$.

Para el caso de la antipartícula se tiene

$$\gamma^5 v(p) = -(\hat{p} \cdot \Sigma)v(p). \quad (1.27)$$

Por esta razón definimos

$$v_L(p) \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} v(p) \quad (1.28)$$

y la correspondiente parte derecha

$$u_R(p) \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} u(p) \quad v_R(p) \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} v(p). \quad (1.29)$$

Considerando para empezar, la primera familia de leptones, introducimos el doblete izquierdo

$$\chi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \bar{\chi}_L = (\bar{\nu}_e, \bar{e}) \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad (1.30)$$

Tambien hay una componente derecha de los leptones. La parte derecha del neutrino no existe en el modelo estándar, por lo tanto los leptones derechos son representados por singletes

$$\chi_R = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) e. \quad (1.31)$$

A partir de esta discusión, y sabiendo que la estructura de la corriente débil es, como ya mencionamos, de la forma $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$, podemos definir la corriente cargada como

$$j_\pm^\mu = \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e = 2 \bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_\pm \chi_L \quad (1.32)$$

donde las matrices τ_\pm son una combinación lineal de las dos primeras matrices de Pauli, $\tau_\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$.

Si bien la corriente (1.32) describe las corrientes débiles cargadas, hay que tomar en cuenta que en 1973 la colaboración Gargamelle observó por primera vez las corrientes neutras, predichas por el Modelo Estándar de Glashow, Weinberg y Salam.

Podemos incluir de manera natural estas corrientes, si tenemos una tercera corriente que

incluya a la matriz de Pauli $\frac{1}{2}\tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$j_3^\mu = -\bar{\chi}_L \gamma^\mu \tau_3 \chi_L = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \quad (1.33)$$

Agrupando las corrientes, contruimos la corriente débil de isoespín

$$\mathbf{j}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\chi}_L \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \chi_L \quad (1.34)$$

mientras que la corriente electromagnética estará dada por

$$\begin{aligned}
J_{em}^\mu &= \bar{e}\gamma^\mu e \\
&= \chi_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \chi_L + \text{bar}\chi_R \gamma^\mu \chi_L + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \chi_R \\
&= \chi_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \tau_3\right) \chi_L + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \chi_R
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Podemos definir además la corriente débil de hipercarga, la cual está dada por

$$j_Y^\mu = j_{em}^\mu - j_3^\mu = \frac{1}{2} \bar{\chi}_L \gamma^\mu \chi_L + \bar{\chi}_R \gamma^\mu \chi_R. \tag{1.36}$$

Otra forma de obtener estas corrientes será a través de la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ en donde los leptones tienen los números cuánticos expresados en el cuadro II.

Tabla II. **Familia de leptones con los números cuánticos de carga Q , isospín T , hipercarga Y y tercera componente de isospín T_3 , ($Q = T_3 + \frac{Y}{2}$).**

Leptones	Q	(T, T_3)	Y
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	$(1/2, +1/2)$	-1
e_L, μ_L, τ_L	-1	$(1/2, -1/2)$	-1
e_R, μ_R, τ_R	-1	0	-2

En este caso describimos la corriente de isospín débil, como un acoplamiento de magnitud g a un isotriplete débil mediado por el bosón \mathbf{W} , generador del grupo $SU(2)_L$ mientras que la corriente débil de hipercarga se acopla con una magnitud $g'/2$ a un isosinglete mediante el bosón B (que es un generador del grupo $U(1)_Y$)

$$-i \left[g \mathbf{j} \cdot \mathbf{W}_\mu + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B_\mu \right]. \tag{1.37}$$

En esta estructura están contenidas las interacciones electrodinámicas y débiles. El producto punto puede ser escrito en términos de las corrientes cargadas $j_\mu^\pm = j_\mu^1 \pm i j_\mu^2$ definidas en la ecuación (1.32)

$$\mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} j_\mu^+ W_\mu^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} j_\mu^- W_\mu^- + j_\mu^3 W_\mu^3 \tag{1.38}$$

donde

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (1.39)$$

son las funciones que representan las partículas W^\pm .

Una vez obtenida la parte cargada, podemos también obtener de (1.37) la corriente de hypercarga (1.36) así como la corriente electromagnética. Para obtener este resultado, los dos estados neutros, W^3 y B , se mezclan produciendo una combinación lineal de un bosón sin masa A_μ (el fotón), y su combinación ortogonal con masa (Z_μ^0):

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^3 \sin \theta_W \\ Z_\mu^0 &= -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^3 \cos \theta_W. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Podemos comparar el resultado de sustituir esta rotación en (1.37) con las corrientes electromagnética y débil mostradas más arriba. Notaremos que la forma de las corrientes es la misma si fijamos los acoplamientos g y g' en términos de e y θ_W como

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W. \quad (1.41)$$

La constante de acoplamiento para Z^0 es entonces

$$g_Z = \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} = \frac{g}{\cos \theta}. \quad (1.42)$$

Utilizando la relación (1.40), la densidad lagrangiana de interacción se puede expresar ahora como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e] \\ &+ \frac{g}{\cos \theta_W} [\bar{f}_L \gamma^\mu f_L (T_3^f - Q^f \sin^2 \theta_W) + \bar{f}_R \gamma^\mu f_R (-Q^f \sin^2 \theta_W)] Z_\mu \\ &+ e Q^f (\bar{f} \gamma^\mu f) A_\mu \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde hemos definido como f al fermión y como T_3^f y Q^f su tercera componente de isoespín y su carga, respectivamente.

2. INTERACCIÓN NEUTRINO-ELECTRÓN

Una vez revisado el Modelo Estándar de partículas elementales pasaremos en esta sección a revisar la dispersión del neutrino con un electrón libre, para después pasar al caso de mayor interés para esta tesis, que es el caso de un electrón ligado.

2.1. Dispersión

Antes de estudiar la sección eficaz de la dispersión neutrino-electrón veremos algunas generalidades acerca de como calcular las secciones eficaces, empezando con la cinemática del cálculo.

2.1.1. Cinemática

Empecemos por recordar que la energía E y el vector \vec{p} de una partícula de masa m forman el cuadrivector de momento $p = (E, \vec{p})$, que cumple con la ecuación $p^2 \equiv E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$. La velocidad de la partícula está dada por $\beta = \frac{\vec{p}}{E}$.

La energía y el momento (E^*, \vec{p}^*) vistos desde un sistema en movimiento con velocidad β_f están dados por

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_{||}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_f & -\gamma_f \beta_f \\ -\gamma_f \beta_f & \gamma_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{||} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

y $p_T^* = p_T$, donde $\gamma_f = (1 - \beta_f^2)^{\frac{1}{2}}$ y $p_T(p_{||})$ son las componentes de \vec{p} perpendiculares (paralelas) a β_f .

El producto escalar de dos cuadrimomentos $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2$ es invariante.

Considerando ahora la colisión de dos partículas de masas m_1 y m_2 , podemos notar que la energía total del centro de masas puede ser expresada en términos de los invariantes de Lorentz

$$\begin{aligned} E_{cm} &= [(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ E_{cm} &= [m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde θ es el ángulo entre las partículas. En un marco de referencia en el que la partícula dos está en reposo (sistema de laboratorio)

$$\beta_{cm} = \frac{p_{1\text{Lab}}}{E_{1\text{Lab}} + m_2}, \quad \gamma_{cm} = \frac{E_{1\text{Lab}} + m_2}{E_{cm}}. \quad (2.3)$$

El momento en el centro de masas de la partícula 1 y 2 es de magnitud

$$p_{cm} = p_{\text{Lab}} \frac{m_2}{E_{cm}} \quad (2.4)$$

Es útil notar también que

$$E_{cm} dE_{cm} = m_2 dE_{1\text{Lab}} = m_2 \beta_1 dp_{\text{Lab}} \quad (2.5)$$

2.1.2. Sección diferencial eficaz

La definición de la sección eficaz está dada por

$$\sigma = \frac{W_{fi}}{\text{flujo inicial}} \times \text{número de estados finales} \quad (2.6)$$

donde W_{fi} es la tasa de transición por unidad de volumen

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{V}$$

y T_{fi} es la probabilidad de transición. Estas cantidades están relacionadas con la amplitud invariante de la siguiente forma:

$$T_{fi} = -iN_3N_4N_1N_2 \frac{(2\pi)^4 \delta^4(P_3 + P_4 - P_1 - P_2) |M|^2}{V^4} \quad (2.7)$$

en el caso de la dispersión $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Las cantidades N_1, \dots, N_4 son los factores de normalización de la función de onda y V es el volumen.

Es importante mencionar que en (2.7), las funciones delta vienen de la integración sobre el espacio cuando escribimos explícitamente la función de onda de una partícula libre

$$\psi(x) = Nu(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}$$

el significado físico de estas funciones delta es la conservación de la energía y el momento en una dispersión elástica.

Para el caso de una partícula libre es común fijar la normalización de la función de una partícula libre $\phi = Ne^{ipx}$ como $2E$ partículas en un volumen V

$$\int_V \rho dV = 2E \quad (2.8)$$

donde $\rho = 2E|N|^2$ es la densidad de probabilidad y entonces $N_A, \dots, N_B = 1/\sqrt{V}$

La teoría cuántica restringe el número de estados de un volumen V con momento d^3p para que sea $Vd^3p/(2\pi)^3$ y como tenemos $2E$ partículas en un volumen V , entonces para las partículas 3 y 4 dispersadas en elementos de momento d^3p_3, d^3p_4 tendremos que el número de estados finales estará dado por

$$\frac{Vd^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{Vd^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4}$$

Por otro lado, el flujo inicial estará dado por

$$v_{\text{rel}} \frac{2E_1}{V} \frac{2E_2}{V}$$

donde v_{rel} es la velocidad relativa.

Finalmente podemos escribir la sección diferencial eficaz

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{F} dQ \quad (2.9)$$

donde dQ es el factor de fase del invariante de Lorentz

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \quad (2.10)$$

y el flujo incidente $F = v_{rel}2E_12E_2$ donde la velocidad relativa v_{rel} está dada por la expresión

$$E_1E_2v_{rel} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2} \quad (2.11)$$

En el sistema de laboratorio, con m_2 en reposo,

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2} = m_2p_{1\text{Lab}}$$

mientras que en el sistema de centro de masas

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2m_2^2} = p_{1cm}\sqrt{s}.$$

Los invariantes de Lorentz están definidos por

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ s &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2 \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2E_1E_4 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 \end{aligned} \quad (2.14)$$

y satisfacen

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (2.15)$$

y la sección diferencial eficaz está dada por

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}{4E_1E_2v_{rel}} \frac{d^3p_3}{2E_3(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{2E_4(2\pi)^3} \overline{|M|^2} \quad (2.16)$$

de la delta del cuadrimento, $\delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) = \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2)$, la integral sobre d^3p_3 se resuelve con la función delta de momento, de modo que

$$\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_4, \quad E_3 = \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_4)^2 + m_3^2}$$

Utilizando el marco de referencia del centro de masas, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$, y haciendo $d^3p_4 = p_4^2 dp_4 d\Omega$

$$d\sigma = \frac{\delta(E_4 + \sqrt{E_4^2 - m_4^2 + m_3^2} - E_1 - E_2) p_4^2 dp_4 d\Omega}{64\pi^2 E_1 E_2 E_3 E_4 v_{rel}} |M|^2. \quad (2.17)$$

Haciendo ahora la sustitución $E_4 dE_4 = |\vec{p}_4| dp_4$ y tomando la velocidad relativa en el marco de referencia del centro de masa, $v_{rel} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} |\vec{p}_1|$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \frac{\delta(E_4 + \sqrt{E_4^2 - m_4^2 + m_3^2} - E_1 - E_2) |\vec{p}_4| dE_4 d\Omega}{\sqrt{s} E_3 |\vec{p}_1|} \quad (2.18)$$

y si utilizamos la relación

$$\int f(x, y) \delta[g(x, y)] dx = \left[\frac{f(x, y)}{(\partial g / \partial x)_y} \right]_{g=0}$$

con

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial(E_4 + \sqrt{E_4^2 - m_4^2 + m_3^2} - E_1 - E_2)}{\partial E_4} = \frac{E_3 + E_4}{E_3} = \frac{\sqrt{s}}{E_3}$$

vemos que la sección eficaz diferencial respecto a un diferencial de ángulo sólido, para la dispersión $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_4|}{|\vec{p}_1|} |M|^2 \quad (2.19)$$

también es muy útil la representación de la sección eficaz diferencial respecto a un diferencial de energía dE_4

$$\frac{d\sigma}{dE_4} = \frac{1}{64\pi^2 s |\vec{p}_1|} \frac{dp_4}{dE_4} d\Omega |M|^2 \quad (2.20)$$

Expresando la sección eficaz en términos de energía, e integrando sobre el ángulo sólido se tiene

$$\frac{d\sigma}{dE_4} = \frac{1}{16\pi s} \frac{E_4}{\sqrt{(E_1^2 - m_1^2)(E_4^2 - m_4^2)}} |M|^2 \quad (2.21)$$

2.2. Sección diferencial eficaz para la dispersión neutrino electrón

Vamos a determinar la amplitud de Feynman, M . Primero vamos a considerar la dispersión neutrino-electrón, donde el propagador es el bosón Z^0

$$M_{Z^0} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_3 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_1] [\bar{u}_4 \gamma_\mu (G_V - G_A \gamma^5) u_2] \quad (2.22)$$

donde

$$G_V = T_3^e - 2Q^e \sin^2 \theta_W = -\frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W \quad G_A = T_3^e = -\frac{1}{2} \quad (2.23)$$

El término que será necesario para la sección eficaz es el cuadrado de la amplitud, $|M|^2$, el cual está dado por

$$|M_{Z^0}|^2 = \frac{G_F^2}{2} [\bar{u}_3 \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_1] [\bar{u}_4 \gamma_\mu (G_V - G_A \gamma^5) u_2] \times [\bar{u}_3 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u_1]^* [\bar{u}_4 \gamma_\nu (G_V - G_A \gamma^5) u_2]^* \quad (2.24)$$

Utilizando el truco de Casimir

$$\sum_{\text{espines}} [\bar{u}(a) \Gamma_1 \bar{u}(b)] [\bar{u}(a) \Gamma_2 \bar{u}(b)]^* = \text{Tr}[\Gamma_1(p_b + m_b) \bar{\Gamma}_2(p_a + m_a)]$$

Haciendo una suma de espines finales y un promedio de espines iniciales, y considerando que p_1, p_3 son el momento inicial y final del neutrino, $m_1 = m_3 = 0$, y p_2, p_4 , momento inicial y final del electrón, $m_2 = m_4 = m$.

$$|M_{Z^0}|^2 = \frac{G_F}{4} \text{Tr}\{\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_3\} \times \text{Tr}\{\gamma_\mu (G_V - G_A \gamma^5) (\not{p}_2 + m) \gamma_\nu (G_V - G_A \gamma^5) (\not{p}_4 + m)\} \quad (2.25)$$

Utilizando las propiedades: la traza de un producto impar de matrices gamma es cero, y la traza de un producto de una matriz gamma con un número impar de matrices gamma es cero.

La primera traza se simplifica a

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\{\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_3\} \\ &= \text{Tr}\{\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3\} + \text{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3\} + \text{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3\} \\ &+ \text{Tr}\{\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

separando \not{p} en $p\gamma^\mu$, tenemos

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\{\gamma^\mu (1 - \gamma^5) p_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) p_3\} \\ &= (p_1)_\alpha (p_3)_\beta \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta\} + (p_1)_\sigma (p_3)_\lambda \text{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\lambda\} \\ &+ (p_1)_\phi (p_3)_\theta \text{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\phi \gamma^\nu \gamma^\theta\} + (p_1)_\zeta (p_3)_\eta \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\zeta \gamma^\nu \gamma^\eta\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

utilizando los siguientes teoremas de trazas:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma &= 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}) \\ \text{Tr}\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma &= 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \end{aligned}$$

simplificando las trazas

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\{\gamma^\mu(1 - \gamma^5)p_1\gamma^\nu(1 - \gamma^5)p_3\} \\
&= 8(p_1)_\alpha(p_3)_\beta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}) + 8i(p_1)_\sigma(p_3)_\lambda\epsilon^{\mu\sigma\nu\lambda} \\
&= 8[p_1^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_3) + p_3^\mu p_1^\nu + (p_1)_\sigma(p_3)_\lambda i\epsilon^{\mu\sigma\nu\lambda}].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la segunda traza

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\{\gamma_\mu(G_V - G_A\gamma^5)(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu(G_V - G_A\gamma^5)(\not{p}_4 + m)\} \\
&= G_V^2 \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_4\} - G_V G_A \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \gamma^5 \not{p}_4\} + G_V^2 m^2 \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} \\
&\quad - G_A G_V \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma^5 \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_4\} - G_A^2 m^2 \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} + G_A^2 \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu \not{p}_4\}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

utilizando además el teorema de la traza:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

simplificamos la traza,

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\{\gamma_\mu(G_V - G_A\gamma^5)(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu(G_V - G_A\gamma^5)(\not{p}_4 + m)\} \\
&= (G_V^2 + G_A^2)(p_2)_\alpha(p_4)_\beta \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta\} + m^2(G_V^2 - G_A^2) \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} \\
&\quad + 2G_V G_A (p_2)_\lambda (p_4)_\sigma \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\sigma\} \\
&= 4(G_V^2 + G_A^2)(p_2)_\alpha(p_4)_\beta (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}) \\
&\quad + 4m^2(G_V^2 - G_A^2)g_{\mu\nu} - 8G_V G_A (p_2)_\lambda (p_4)_\sigma i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \\
&= 4[(G_V^2 + G_A^2)(p_{2\mu}p_{4\nu} - g_{\mu\nu}(p_2 \cdot p_4) + p_{4\mu}p_{2\nu}) + m^2(G_V^2 - G_A^2)g_{\mu\nu} \\
&\quad - 2G_A G_V (p_2)_\lambda (p_4)_\sigma i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Sustituyendo los términos de las trazas en la ecuación (2.2)

$$\begin{aligned}
|M_{Z^0}|^2 &= 8G_F^2 \{p_1^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(p_1 \cdot p_3) + p_3^\mu p_1^\nu + (p_1)_\sigma(p_3)_\lambda i\epsilon^{\mu\sigma\nu\lambda}\} \times \\
&\quad \{(G_V^2 + G_A^2)(p_{2\mu}p_{4\nu} - g_{\mu\nu}(p_2 \cdot p_4) + p_{4\mu}p_{2\nu}) \\
&\quad - 2G_A G_V (p_2)_\lambda (p_4)_\sigma i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} + m^2(G_V^2 - G_A^2)g_{\mu\nu}\}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

realizando la multiplicación de las trazas,

$$\begin{aligned}
|M_{Z^0}|^2 &= 16G_F^2 \{(G_V^2 + G_A^2)[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \\
&\quad + 2G_V G_A (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - 2G_V G_A (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\
&\quad - m^2(G_V^2 - G_A^2)(p_3 \cdot p_1)\}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

reagrupando términos

$$|M_{Z^0}|^2 = 16G_F\{(G_V + G_A)^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (G_V - G_A)^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)\} - m^2(G_V^2 - G_A^2)(p_3 \cdot p_1) \quad (2.33)$$

Ahora, tomando en cuenta que el propagador es el bosón W

$$M_W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{u}_4\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u_1][\bar{u}_3\gamma_\mu(1 - \gamma^5)u_2] \quad (2.34)$$

con la ayuda de la identidad de Fierz

$$(\bar{u}_1\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)u_2)(\bar{u}_3\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)u_4) = (\bar{u}_1\gamma^\alpha(1 - \gamma_5)u_4)(\bar{u}_3\gamma_\alpha(1 - \gamma_5)u_2),$$

podemos expresar M_W como

$$M_W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{u}_3\gamma_\mu(1 - \gamma^5)u_1][\bar{u}_4\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u_2] \quad (2.35)$$

la matriz de elementos, M , para la dispersión neutrino electrónico - electrón es la suma de M_{Z^0} y M_W

$$M = M_{Z^0} + M_W = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{u}_3\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u_1][\bar{u}_4\gamma_\mu(G_V - G_A\gamma^5)u_2] - \frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{u}_3\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u_1][\bar{u}_4\gamma_\mu(1 - \gamma_5)u_2] \quad (2.36)$$

realizando la suma,

$$M = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{u}_3\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u_1][\bar{u}_4\gamma_\mu(G'_V - G'_A\gamma^5)u_2] \quad (2.37)$$

donde

$$G'_V = G_V + 1 \quad G'_A = G_A + 1$$

Haciendo M^2 ,

$$|M|^2 = 16G_F\{(G'_V + G'_A)^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (G'_V - G'_A)^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)\} - m^2(G_V'^2 - G_A'^2)(p_3 \cdot p_1) \quad (2.38)$$

por simplicidad en la notación, redefinimos $G_V = G'_V$ y $G_A = G'_A$,

$$|M|^2 = 16G_F\{(G_V + G_A)^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (G_V - G_A)^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)\} - m^2(G_V^2 - G_A^2)(p_3 \cdot p_1) \quad (2.39)$$

Considerando las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14), y tomando en cuenta que $(p_1 \cdot p_2), (p_3 \cdot p_4) \gg m_1^2, m_2^2$ y $(p_1 \cdot p_4), (p_2 \cdot p_3) \gg m_1^2, m_2^2$, entonces $s = -2p_1 \cdot p_2 = -2p_3 \cdot p_4$, y $u = -2p_1 \cdot p_4 = -2p_2 \cdot p_3$, podemos expresar la matriz de Feynman en términos de invariantes de Lorentz,

$$|M|^2 = 4G_F^2(G_V + G_A)^2 s^2 + (G_V - G_A)^2 u^2 + 2(G_V^2 - G_A^2)m^2 t \quad (2.40)$$

tomando en cuenta las consideraciones anteriores, y haciendo $E_1 = E_\nu$ y $E_4 = T$, la ecuación (2.21) queda como

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{1}{16\pi E_\nu s} |M|^2 \quad (2.41)$$

sustituyendo la ecuación (2.40) en (2.41)

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{G_F^2}{4\pi s E_\nu} \{s^2(G_V + G_A)^2 + u^2(G_V - G_A)^2 + 2tm^2(G_V^2 - G_A^2)\} \quad (2.42)$$

Si consideramos el sistema de laboratorio, donde $E_2 = E_e$ está en reposo, podemos escribir $s = 2E_\nu E_e = 2E_\nu m_e$ y $t = -2E_e T = -2m_e T$,

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{G_F^2 m}{2\pi} \left\{ (G_V + G_A)^2 + \frac{u^2}{s^2} (G_V - G_A)^2 - \frac{mT}{E_\nu^2} (G_V^2 - G_A^2) \right\} \quad (2.43)$$

Los invariantes de Lorentz u, t pueden expresarse como

$$u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta) \quad t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta)$$

entonces podemos escribir

$$\frac{u}{s} = -1 - \frac{t}{s} = 1 - \frac{T}{E_\nu}$$

por lo tanto

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{G_F^2 m}{2\pi} \left\{ (G_V + G_A)^2 + (G_V - G_A)^2 \left(1 - \frac{T}{E_\nu}\right)^2 + (G_A^2 - G_V^2) \frac{mT}{E_\nu^2} \right\} \quad (2.44)$$

Podemos encontrar la expresión de la sección eficaz diferencial respecto a un diferencial de ángulo sólido, esta vez situándonos en el sistema del centro de masas, en donde considerando de nuevo que el producto de los momentos es mucho mayor que la masa,

$(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) = |p_1|^4 = E_1^4 = E_\nu^4$, $(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) = E_\nu^4 \cos^2 \theta$ y $(p_1 \cdot p_3) = E_\nu^2 \cos \theta$,
 entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2 E_\nu^2}{4\pi^2} \left\{ (G_V - G_A)^2 + (G_V + G_A)^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{E_\nu^2} (G_V^2 - G_A^2) \cos \theta \right\} \quad (2.45)$$

donde θ es el ángulo de dispersión.

3. EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO Y SUS REGLAS DE SELECCIÓN

Dado que en la presente tesis estudiamos las reglas de selección para la dispersión del neutrino con un electrón ligado a un átomo de Hidrógeno, será necesario estudiar las funciones de onda del electrón sometido al potencial del átomo de Hidrogeno. En este capítulo presentamos estas funciones de onda y mostramos además las reglas de selección en el caso clásico en que el electrón es excitado por un fotón

3.1. Átomo de hidrógeno no relativista

Empezaremos por discutir el caso no relativista en esta sección para después pasar al caso relativista, que será de gran interés para nosotros dado que la dispersión que consideraremos en el capítulo siguiente se da en el límite relativista.

Iniciaremos esta sección con la solución a la ecuación de Schrodinger correspondiente, para luego pasar a las reglas de selección para este caso.

3.1.1. Solución de la ecuación de Schrodinger para el átomo de hidrógeno

Partimos de la ecuación de Schrodinger

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(r) = E\psi(r) \quad (3.1)$$

donde μ es la masa reducida.

Para el átomo de hidrógeno, el potencial está dado por

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (3.2)$$

Se propone una solución de ψ , mediante separación de variables $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, y se introduce en (3.1)

$$\left[- \left(r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} \right) - 2\mu(Ze^2r + Er^2) \right] - \left(\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Observamos que la parte radial debe ser una constante y proponemos que sea $-l(l+1)$; al multiplicarla por $\sin^2 \theta$ obtenemos que

$$\left[\sin^2 \theta \frac{\Theta''}{\Theta} + \cos \theta \operatorname{sen} \theta \frac{\Theta'}{\Theta} + l(l+1) \sin^2 \theta \right] + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0. \quad (3.4)$$

Ahora bien, la segunda parte de la ecuación también debe ser una constante, que se propone como $-m^2$,

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2, \quad \Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad (3.5)$$

introduciendo, (3.4) en (3.5) se tiene

$$\Theta'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (3.6)$$

cuya solución es un polinomio de Legendre

$$\Theta(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta). \quad (3.7)$$

Tomando el producto $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, tenemos que la solución es un armónico esférico Y_{lm} .

Regresando a la ecuación (3.3), tomando en cuenta las constantes definidas, obtenemos la ecuación radial de Schrodinger

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) R + 2\mu \left[E + \frac{Ze^2}{r} - \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R = 0 \quad (3.8)$$

Nos concentraremos en las soluciones de los estados ligados, $E < 0$. Haciendo un conveniente cambio de variables

$$\rho = (8\mu|E|)^{\frac{1}{2}} r \quad (3.9)$$

la ecuación queda ahora como

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right) R = 0 \quad (3.10)$$

donde introducimos el parámetro

$$\lambda = Ze^2 \left(\frac{\mu}{2|E|} \right)^{1/2} = Z\alpha \left(\frac{\mu}{2|E|} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Notamos primero, que para un valor de R muy grande, las solución debe tender a cero, de modo que

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} - \frac{1}{4}R = 0. \quad (3.12)$$

La solución de esta ecuación es de la forma $R \sim e^{-\rho/2}$, por lo que proponemos la solución

$$R(\rho) = e^{-\rho/2}G(\rho) \quad (3.13)$$

con lo que ahora la ecuación (3.10) es

$$\frac{d^2 G}{d\rho^2} - \left(1 - \frac{2}{\rho}\right) \frac{dG}{d\rho} + \left[\frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] G = 0, \quad (3.14)$$

y si ahora escribimos $G(\rho)$ como una expansion de series de potencia

$$G(\rho) = \rho^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \quad (3.15)$$

y definiendo $H(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$, tendremos

$$\frac{d^2 H}{d\rho^2} + \left(\frac{2l+2}{\rho} - 1 \right) \frac{dH}{d\rho} + \frac{\lambda - 1 - l}{\rho} H = 0 \quad (3.16)$$

y sustituyendo $H(\rho)$, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1)a_n \rho^{n-2} + na_n \rho^{n-1} \left(\frac{2l+2}{\rho} - 1 \right) + (\lambda - 1 - l)a_n \rho^{n-1} \right] = 0 \quad (3.17)$$

que es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+1)[na_{n+1} + (2l+2)a_{n+1}] + (\lambda - 1 - l - n)a_n \} \rho^{n-1} = 0$$

como la ecuación se anula término por término, obtenemos la relación recursiva

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+l+1-\lambda}{(n+1)(n+2l+2)}. \quad (3.18)$$

Para n muy grande se tiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \simeq \frac{1}{n}. \quad (3.19)$$

Necesitamos que para valores grandes de n , la serie termine, esto significa que para un l dado, y para $n = n_r$, debemos tener

$$\lambda = n_r + l + 1 \quad (3.20)$$

introducimos el número cuántico principal, definido por

$$n = n_r + l + 1 \quad (3.21)$$

ahora, considerando el hecho que $n_r \geq 0$, entonces $n \geq l + 1$, n es un entero, la relación $\lambda = n$ implica que

$$E = -\frac{1}{2}\mu \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \quad (3.22)$$

3.1.2. Reglas de selección

Consideremos ahora el Hamiltoniano que describe la interacción de un electrón en un potencial estático con un campo electromagnético descrito por $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

$$H = \frac{[\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2}{2m} + V(r) \quad (3.23)$$

recordando la sección anterior, si escribimos

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r) \quad (3.24)$$

encontramos que

$$\lambda H_1 = \frac{e}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{p}. \quad (3.25)$$

Si consideramos a e como un parametro mucho más pequeño que λ , entonces \mathbf{A}^2 es un término de segundo orden. \mathbf{A}^2 es un término que contribuye en la dispersión de luz con un átomo y la transición con emisión de dos fotones, pero no contribuye a la transición acompañada por la emisión (o absorción) de un solo fotón.

Para la absorción de un cuanto de luz por una partícula cargada en un estado inicial que tienen N fotones de frecuencia angular ω

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{2\pi N}{\omega V} \right)^{1/2} \epsilon e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (3.26)$$

Para la emisión de un fotón por una partícula cargada en un estado final que tiene $N + 1$ cuantos, esto es, para un estado inicial con N cuantos de frecuencia ω ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{2\pi(N+1)}{\omega V} \right]^{1/2} \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (3.27)$$

Ahora bien, para la emisión de un solo fotón de frecuencia ω de un estado que no tiene fotones, tenemos que, de acuerdo a (3.25)

$$\lambda H_1 = \frac{e}{m} \left(\frac{2\pi}{\omega V} \right)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \quad (3.28)$$

La probabilidad de transición por unidad de tiempo, está dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{k \rightarrow m} &= 2\pi |\langle \phi_m | H_1 | \phi_k \rangle|^2 \delta(E_m^0 - E_k^0 - \omega) \\ &\quad - 2\pi |\langle \phi_m | H_1^\dagger | \phi_k \rangle|^2 \delta(E_m^0 - E_k^0 + \omega) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ahora consideremos la probabilidad de transición por unidad de tiempo y asumamos que $E_k^0 > E_m^0$, entonces la transición corresponde a la emisión de un fotón de energía ω . La razón de transición es

$$\Gamma_{k \rightarrow m} = \frac{4\pi^2}{m^2 \omega V} |\langle \phi_m | e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} | \phi_k \rangle|^2 \delta(E_k^0 - E_m^0 - \omega) \quad (3.30)$$

El siguiente paso es entonces calcular

$$\langle \phi_m | e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} | \phi_k \rangle \quad (3.31)$$

Necesitamos estimar el valor del exponente $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Pero tenemos que $kr \sim \frac{1}{2} Z\alpha$ y considerando que $Z\alpha \ll 1$, simplificamos el término usando la expansión $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{n!} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})^n$. A orden $Z\alpha$ simplificamos de modo que

$$\langle \phi_m | e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} | \phi_k \rangle \simeq \langle \phi_m | \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} | \phi_k \rangle \quad (3.32)$$

y notamos que podemos escribir esto como

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \langle \phi_m | \mathbf{p} | \phi_k \rangle = im\omega \boldsymbol{\epsilon} \cdot \langle \phi_m | \mathbf{r} | \phi_k \rangle \quad (3.33)$$

Si el estado inicial ϕ_k es un estado caracterizado por los número cuánticos iniciales n_i, l_i y m_i , y el estado ϕ_m es el estado final con número cuánticos n_f, l_f y m_f , entonces

$$\begin{aligned}\langle \phi_m | \epsilon \cdot \mathbf{r} | \phi_k \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \int d\Omega R_{n_f l_f}^*(r) Y_{l_f m_f}^*(\theta, \phi) \epsilon \cdot \mathbf{r} R_{n_i l_i}(r) Y_{l_i m_i}(\theta, \phi) \\ &= \int_0^\infty r^2 dr R_{n_f l_f}^*(r) r R_{n_i l_i}(r) \\ &\quad \times \int d\Omega Y_{l_f m_f}^*(\theta, \phi) \epsilon \cdot \hat{\mathbf{r}} Y_{l_i m_i}(\theta, \phi).\end{aligned}\tag{3.34}$$

Nos concentraremos ahora en la integral angular. Tenemos

$$\epsilon \cdot \hat{\mathbf{r}} = \epsilon_x \sin \theta \cos \phi + \epsilon_y \sin \theta \sin \phi + \epsilon_z \cos \theta\tag{3.35}$$

haciendo uso de

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} Y_{1,0}(\theta, \phi) = \cos \theta \quad \sqrt{\frac{3}{8\pi}} Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sin \theta e^{\pm i\phi}\tag{3.36}$$

y después de un poco de algebra llegamos a

$$\epsilon \cdot \hat{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\epsilon_z Y_{1,0} + \frac{-\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{1,1} + \frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{1,-1} \right)\tag{3.37}$$

por lo que la integral angular involucra un término

$$\int d\Omega Y_{l_f m_f}^*(\theta, \phi) Y_{1,m}(\theta, \phi) Y_{l_i m_i}(\theta, \phi).\tag{3.38}$$

Primero consideraremos la integral azimutal, que nos da

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{-im_f \phi} e^{im\phi} e^{im_i \phi} = 2\pi \delta_{m=m_f-m_i}\tag{3.39}$$

Asi obtenemos la primera reglase selección

$$m_f - m_i = m = 1, 0, -1\tag{3.40}$$

Específicamente, si definimos el eje z para que este en la dirección de \mathbf{k} , entonces $\epsilon_z = 0$, y entonces $m = \pm 1$, como un caso especial, si el estado final es el estado base, con $l_f = m_f = 0$, entonces $m = -m_i$. Por ejemplo, si $m_i = 1$, entonces $m = -1$ y el vector de polarización para la radiación es $(\epsilon_x + i\epsilon_y)/\sqrt{2}$. La implicación es que si el átomo en el

estado inicial es polarizado a lo largo del eje z con $m_i = 1$, entonces en un decaimiento a un estado con momento angular cero, la conservación de la componente z del momento angular demanda que el fotón tampoco tenga componente z . El fotón debe entonces tener su espín alineado a lo largo del eje z positivo, debe de tener helicidad positiva, o de forma equivalente, tener polaridad circular derecha, que es lo que el término $(\epsilon_x + i\epsilon_y)/\sqrt{2}$ indica.

La integración sobre θ nos da otra regla de selección.

Consideraremos primero el caso en que $l_f = 0$. Considerando que $Y_{0,0} = 1/\sqrt{4\pi}$, la integral (3.38) involucra el término

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\Omega Y_{1,m}(\theta, \phi) Y_{l_i, m_i}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{l_i, 1} \delta_{m_i, -m} \quad (3.41)$$

que implica que el estado inicial debe de tener $l_i = 1$

De forma más general, utilizando el teorema de adición para armonicos esféricos, que es

$$Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) = \sum_{L=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} C_{l_1 l_2 m_1 m_2}^{L m_1+m_2} Y_{L, m_1+m_2}(\theta, \phi) \quad (3.42)$$

y sustituyendo esta ecuación en (3.38)

$$\int d\Omega Y_{l_f m_f}^*(\theta, \phi) \sum_{L=|l_i-1|}^{l_i+1} C_{1 l_i m m_i}^{L, m+m_i} Y_{L, m+m_i}(\theta, \phi) = 0 \quad (3.43)$$

a menos que

$$l_f = l_i + 1, l_i, |l_i - 1| \quad (3.44)$$

Esta es la forma general de la regla de selección de la radiación del dipolo eléctrico, con la observación que no hay transición de zero a zero.

Esta es una restricción que resulta de la conservación de la paridad. Dado que \mathbf{r} es impar bajo reflexiones, hay una regla de selección adicional para la transición de dipolo eléctrico: El estado atómico debe cambiar paridad. Dado que la paridad esta dada por

$(-1)^l$, esto implica que los valores de l deben cambiar, por lo tanto:

$$\Delta l = \pm 1. \quad (3.45)$$

La perturbación H_1 , no tiene dependencia con el espín, de ahí que el espín no altere la transición. Esto nos da otra regla de selección

$$\Delta S = 0. \quad (3.46)$$

De las ecuaciones (3.45) y (3.46) obtenemos la regla de selección para j ,

$$\Delta j = 1, 0, -1 \quad (3.47)$$

Una vez calculadas estas reglas de selección podríamos pasar en principio al caso relativista. Sin embargo, antes de pasar a dicha discusión llegaremos a estas mismas reglas por medio de una aproximación distinta, para lo cual seguiremos de cerca la Ref. [11]. La motivación principal para seguir esta aproximación radica en que en el cálculo de la dispersión neutrino-electrón será más útil seguir esta aproximación al problema que la descrita más arriba.

Anteriormente calculamos la aproximación de la expansión de series de potencias para $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, ahora consideraremos la matriz de elementos exacta. Introducimos el estado $|1\rangle$ que consiste en un producto directo del estado del fotón en el vacío y el estado atómico con números cuánticos y función de onda con subíndice 1. Y el estado $|2\rangle$ con el producto del estado del fotón con energía E , número de onda k , y helicidad λ y estado atómico cuyo número cuántico y función de onda tiene subíndice 2.

Consideraremos que $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ puede expandirse como

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{jm} i^j j_j(kr) Y_{jm}^*(k) Y_{jm}(r) \quad (3.48)$$

donde $j_j(kr)$ es la función esférica de Bessel de orden j . Los números cuánticos del momento angular del fotón son j, m .

La función de onda para estados atómicos se denota por $\psi_i(\mathbf{x}) = R_i(r)Y_{j_i m_i}(\theta, \phi)$, donde R_i es la función de onda radial que depende de n_i, j_i .

Tomando $\delta = j_1 - j_2$ y $W = j_1 + j_2$, entonces, para $j + j_1 + j_2$ par tenemos

$$\begin{aligned} \langle 1|H_1|2\rangle &= e^2 a \left(\frac{\alpha}{8}\right)^{\frac{1}{2}} i^j (-1)^{m_1} \lambda \left(\frac{(2j+1)(2j_1+1)(2j_2+1)}{\pi j(j+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} j & j_1 & j_2 \\ m & -m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j_1 & j_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\times [[j(j+1) + \delta(W+1)] \int_0^\infty j_j(kr) R_1^*(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} R_2(r)\right) r dr \\ &\quad + [-j(j+1) + \delta(W+1)] \int_0^\infty j_j(kr) \left(\frac{\partial}{\partial r} R_1^*(r)\right) R_2(r) r dr] \end{aligned} \quad (3.49)$$

y para $j + j_1 + j_2$ impar, tenemos

$$\begin{aligned} \langle 1|H_1|2\rangle &= e^2 a \left(\frac{\alpha}{8}\right)^{\frac{1}{2}} i^{j+1} (-1)^{m_1} k \left(\frac{(2j+1)(2j_1+1)(2j_2+1)}{\pi j(j+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times [(W-1)(W+j+2)(j+\Delta+1)(j-\delta+1)]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \begin{pmatrix} j & j_1 & j_2 \\ m & -m_1 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j+1 & j_1 & j_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty j_j(kr) R_1^*(r) R_2(r) r dr \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde a es el radio de Bohr y α la constante de estructura fina.

Las reglas de selección se obtienen de las propiedades de los símbolos $3j$, para que sean distintos de cero, deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$j_i \geq |m_i| \leq 0 \quad , \quad \Delta(j_1 j_2 j_3) \quad (3.51)$$

En este caso general podemos obtener reglas de selección exactas a partir de la conservación del momento angular al considerar que solo podrán ser emitidos fotones para los cuales $m = m_1 - m_2$, y $j = |\delta|, |\delta| + 1, \dots, W - 1, W$.

Podemos dar un paso más en las reglas de selección si notamos que los valores absolutos de los elementos de matriz son mayores para $j = 1$. En este caso, las integrales que contienen $j_1(kr)$ dan la mayor contribución y por lo tanto, de una manera aproximada

podemos decir que las transiciones 'permitidas' son aquellas en las que $j = 1$, y notamos además que $|\delta| = 1$ o, de manera equivalente, $j_1 = j_1 \pm 1$ [11].

Para el segundo simbolo $3j$ de la ecuación (3.49), $j = \delta$, entonces $\Delta j = \pm 1$. Y para (3.50), $j + 1 = \delta$, entonces $\Delta j = \pm 2$.

Pero el simbolo el primer simbolo $3j$ de ambas ecuaciones establece que $-1 \leq \Delta j \leq 1$. Por lo tanto $\Delta j = \pm 1$.

Tomando en cuenta la conservación del espín, concluimos que con esta aproximación al problema llegamos a las reglas de selección

$$\begin{aligned} \Delta j &= \pm 1 & \Delta m_j &= 0, \pm 1 \\ \Delta l &= \pm 1 & \Delta m_l &= 0, \pm 1 \end{aligned} \tag{3.52}$$

3.2. Átomo de hidrógeno relativista

3.2.1. Solución de la ecuación de Dirac para el átomo de hidrógeno

El Hamiltoniano de Dirac con un potencial central, esta dado por

$$H_D = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m + V(r) \tag{3.53}$$

donde $V(r) = eA_0(r)$. Debido a la simetría esférica del campo, el operador de momentum angular \mathbf{J} y el operador de paridad $P = e^{i\phi}\beta(\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}) = e^{i\phi}\gamma^0 P_0$ con respecto al origen del sistema de coordenadas, conmutan con el Hamiltoniano.

Ocurren estados con energía y momentum angular definidos. La correspondiente función de onda está denotada por

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} \phi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{j'l'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

donde $\phi_{jlm}(\mathbf{x}, t)$ y $\chi_{j'l'm}(\mathbf{x}, t)$ son espinores. Como ψ_{jm} debe de cumplir con la conservación de la paridad, tenemos que

$$P\psi_{jm}(x') = \lambda\psi_{jm}(x') \tag{3.55}$$

$$P\psi_{jm} = \lambda\psi_{jm} = \lambda \begin{pmatrix} \phi_{jlm}(\mathbf{x}, t) \\ \chi_{j'l'm}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

donde $|\lambda| = 1$. La ecuación (3.55) demanda que se cumpla la paridad de la función de onda, la función de onda es una eigenfunción del operador de paridad. La ecuación (3.56) muestra que la paridad del espinor ϕ_{jlm} debe ser igual a la paridad negativa de $\chi_{j'l'm}$, de allí que el número cuántico l sea distinto para ambos espinores.

También podemos obtener esto de forma que, empezando con la ecuación estacionaria de Dirac $H_0\psi = E\psi$, y $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$\begin{aligned} (E - m_0 - V)\phi &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi, \\ (E + m_0 - V)\chi &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi \end{aligned} \quad (3.57)$$

Vamos a denotar los espinores esféricos como Ω_{jlm} , que están definidos como

$$\Omega_{jlm} = \sum_{m', m_s} C_{\frac{1}{2}m_s j m}^{lm'} Y_{lm'} \chi_{\frac{1}{2}m_s} \quad (3.58)$$

el espinor $\chi_{\frac{1}{2}m_s}$ son eigenfunciones del espín $\mathbf{S}^2 = \sigma^2/4$ y $S_3 = \sigma/2$.

La paridad de Ω_{jlm} está determinada por Y_{lm} , $P_0\Omega_{jlm} = (-1)^l\Omega_{jlm}$. Ahora definimos los espinores como

$$\phi_{jlm} = ig(r)\Omega_{jml} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad \chi_{j'l'm} = -if(r)\Omega_{j'l'm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (3.59)$$

con

$$l' = 2j - l = \begin{cases} 2(l + \frac{1}{2}) - l = l + 1 & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ 2(l - \frac{1}{2}) - l = l - 1 & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.60)$$

Si $j = l + \frac{1}{2}$ el momentum angular orbital l' de $\chi_{j'l'm}$ es $l' + 1$. Esta es la única forma que χ tenga paridad opuesta a ϕ . El valor $l = l - 1$ debe ser excluido porque el momento angular total $j = l + \frac{1}{2}$ no puede ser construido por $l' = l - 1$ y $S = \frac{1}{2}$.

Con respecto a (3.58), decimos que los espinores esféricos son eigenfunciones de \mathbf{L}^2 , \mathbf{J}^2 , \mathbf{S}^2 con eigenvalores $l'(l'+1)$, $j(j+1)$ y $\frac{3}{4}$ respectivamente. Ahora, damos la forma explícita de Ω_{jlm} , para el caso de $j = l + \frac{1}{2}$ y $j = l - \frac{1}{2}$ ($j \geq \frac{2}{2}$):

$$\Omega_{l+\frac{1}{2},l,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \Omega_{l+\frac{1}{2},l,m} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{l,m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{l,m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Ahora hacemos uso de la siguiente relación entre los espinores

$$\left(\sigma \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \Omega_{jlm} = -\Omega_{jl'm} \quad (3.62)$$

de la ecuación (3.62), tenemos que

$$-(\sigma \cdot \mathbf{p}) \Omega_{jlm} = (\sigma \cdot \mathbf{p}) \left(\sigma \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \Omega_{jl'm} \quad (3.63)$$

utilizando la relación

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (3.64)$$

para escribir (3.63) como

$$-(\sigma \cdot \mathbf{p}) \Omega_{jlm} = \left(\mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + i\sigma \cdot \left(\mathbf{p} \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right)\right) \Omega_{jl'm} \quad (3.65)$$

con $\mathbf{p} = -i\nabla$ y $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, la ecuación anterior se transforma en

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{r})) \frac{1}{r} \Omega_{jl'm} = -i \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{r} \mathbf{L} \cdot \sigma\right) \Omega_{jl'm}. \quad (3.66)$$

De

$$\mathbf{J}^2 = \left(\mathbf{L} + \frac{1}{2}\sigma\right)^2 \quad (3.67)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \sigma \Omega_{jl'm} &= \left(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \left(\frac{1}{2}\sigma\right)^2\right) \Omega_{jl'm} \\ &= \left\{j(j+1) - l'(l'+1) - \frac{3}{4}\right\} \Omega_{jl'm}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Definimos un número cuántico κ por,

$$\kappa = \mp(j + \frac{1}{2}) = \begin{cases} -(l+1) & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \\ l & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.69)$$

Utilizando la definición de κ , podemos escribir (3.66) como

$$(2 + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma})\Omega_{j'l'm} = (1 + \kappa)\Omega_{j'l'm} \quad (3.70)$$

y para Ω_{jlm} obtenemos $(2 + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma})\Omega_{jlm} = (1 - \kappa)\Omega_{jlm}$.

Ahora, podemos escribir la función de onda como

$$\psi_{jm} = \begin{pmatrix} ig(r)\Omega_{jlm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\ -f(r)\Omega_{j'l'm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Considerando (3.59) tenemos que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi_{jlm} = \frac{dg(r)}{dr} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \Omega_{jlm} + ig(r)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\Omega_{jlm} \quad (3.72)$$

utilizando las ecuaciones (3.66) y (3.70) llegamos a una nueva ecuación para (3.65)

$$- (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\Omega_{jlm} = -\frac{i}{r}(1 + \kappa)\Omega_{j'l'm} \quad (3.73)$$

Utilizando las ecuaciones (3.62) y (3.73), (3.72) toma la forma

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\phi_{jlm} = -\Omega_{j'l'm} \left(\frac{dg}{dr} + \frac{\kappa + 1}{r}g(r) \right) \quad (3.74)$$

de forma análoga

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi_{j'l'm} = -i\Omega_{jlm} \left(\frac{df}{dr} - \frac{\kappa - 1}{r}f(r) \right) \quad (3.75)$$

Ahora, sustituimos (3.74) y (3.75) en (3.57) obtenemos la ecuación radial para las funciones f y g

$$\begin{aligned} \frac{dg(r)}{dr} + (1 + \kappa)\frac{g(r)}{r} - [E + m_0 - V(r)]f(r) &= 0 \\ \frac{df(r)}{dr} + (1 - \kappa)\frac{f(r)}{r} - [E + m_0 - V(r)]g(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Haciendo la sustitución $G = rg$ y $F = rf$, finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dG(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r}G(r) - [E + m_0 - V(r)]F(r) &= 0 \\ \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r}F(r) - [E - m_0 - V(r)]G(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Esta es la ecuación diferencial para la función de onda radial F y G de la ecuación de Dirac, en el caso de un potencial $V(r)$ con simetría esférica.

La energía de interacción de Coulomb, de un punto en el núcleo y una partícula de carga $-e$ es $V(r) = -Ze^2/r$, entonces la ecuación radial según (3.77) es

$$\begin{aligned}\frac{dG(r)}{dr} &= -\frac{\kappa}{r}G(r) + [E + m_0 + \frac{Z\alpha}{r}]F(r) \\ \frac{dF(r)}{dr} &= \frac{\kappa}{r}F(r) - [E - m_0 + \frac{Z\alpha}{r}]G(r)\end{aligned}\tag{3.78}$$

donde α es la constante de estructura fina.

Primero, examinaremos el caso en el que r es muy pequeño, ($r \sim 0$). En este caso, los términos $E \pm m_0$ pueden ser omitidos, entonces

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r}G - \frac{Z\alpha}{r}F &= 0 \\ \frac{dF}{dr} - \frac{\kappa}{r}F + \frac{Z\alpha}{r}G &= 0\end{aligned}\tag{3.79}$$

ahora, hacemos $G = ar^\gamma$ y $F = br^\gamma$, de modo que

$$\begin{aligned}a\gamma r^{\gamma-1} + \kappa ar^{\gamma-1} - Z\alpha br^{\gamma-1} &= 0 \\ b\gamma r^{\gamma-1} - \kappa br^{\gamma-1} + Z\alpha ar^{\gamma-1} &= 0\end{aligned}\tag{3.80}$$

o bien

$$a(\gamma + \kappa) - bZ\alpha = 0, \quad aZ\alpha + b(\gamma - \kappa) = 0\tag{3.81}$$

El determinante de los coeficientes debe desaparecer en

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \kappa^2 - (Z\alpha)^2, \\ \gamma &= \pm \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2} = \pm \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}\end{aligned}\tag{3.82}$$

Como la función de onda no está normalizada, debemos escoger el signo positivo para γ , la solución negativa nos dice que $F^2 + G^2 \sim r^{-2}|\gamma|$ cerca de $r = 0$ que puede provocar una integral divergente para la norma.

Definimos las siguientes variables

$$\varrho = 2\lambda r \quad \text{con} \quad \lambda = (m_0^2 - E^2)^{\frac{1}{2}}\tag{3.83}$$

haciendo la sustitución en (3.78)

$$\begin{aligned}\frac{dG(\varrho)}{d\varrho} &= -\frac{\kappa}{\varrho}G(\varrho) + \left[\frac{E + m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] F(\varrho), \\ \frac{dF(\varrho)}{d\varrho} &= -\left[\frac{E - m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] G(\varrho) + \frac{\kappa}{\varrho}F(\varrho)\end{aligned}\tag{3.84}$$

usando estas ecuaciones podemos obtener la solución de $F(\varrho)$ y $G(\varrho)$ para $\varrho \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}\frac{dG(\varrho)}{d\varrho} &= \frac{E + m_0}{2\lambda}F(\varrho) \\ \frac{dF(\varrho)}{d\varrho} &= -\frac{E - m_0}{2\lambda}G(\varrho)\end{aligned}$$

combinandola con (3.83), se convierte en

$$\frac{d^2G(\varrho)}{d\varrho^2} = -\frac{E^2 - m_0^2}{(2\lambda)^2}G(\varrho) = \frac{1}{4}G(\varrho)$$

que nos da dos posibles soluciones con $G(\varrho) \sim e^{\pm\varrho/2}$, pero solo el exponencial decreciente puede ser usado porque es el único normalizable.

Un resultado similar viene para $F(\varrho)$, entonces proponemos

$$\begin{aligned}G(\varrho) &= (m_0 + E)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varrho}{2}}(Q_1(\varrho) + Q_2(\varrho)) \\ F(\varrho) &= (m_0 - E)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varrho}{2}}(Q_1(\varrho) - Q_2(\varrho))\end{aligned}\tag{3.85}$$

sustituyendo (3.85) en (3.84) y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(Q_1+Q_2) + \frac{dQ_1}{d\varrho} + \frac{dQ_2}{d\varrho} &= -\frac{\kappa}{\varrho}(Q_1 + Q_2) + \left[\frac{E - m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{m_0 - E}{\lambda}(Q_1 - Q_2) \\ -\frac{1}{2}(Q_1-Q_2) + \frac{dQ_1}{d\varrho} + \frac{dQ_2}{d\varrho} &= \frac{\kappa}{\varrho}(Q_1 - Q_2) + \left[\frac{E - m_0}{2\lambda} + \frac{Z\alpha}{\varrho} \right] \frac{m_0 + E}{\lambda}(Q_1 + Q_2)\end{aligned}\tag{3.86}$$

sumando y restando las ecuaciones (3.86) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{d\varrho} &= \left(1 - \frac{Z\alpha E}{\lambda\varrho} \right) Q_1 - \left(\frac{\kappa}{\varrho} + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda\varrho} \right) Q_2, \\ \frac{dQ_2}{d\varrho} &= \left(-\frac{\kappa}{\varrho} + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda\varrho} \right) Q_1 + \left(\frac{Z\alpha E}{\lambda\varrho} \right) Q_2.\end{aligned}\tag{3.87}$$

Para encontrar la solución de Q_1 y Q_2 proponemos una solución de expansión de series de potencias, separando el factor ϱ^γ que describe el límite de la solución cuando $\varrho \rightarrow 0$

$$Q_1 = \varrho^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \varrho^m, \quad Q_2 = \varrho^\gamma \varrho^m \quad (3.88)$$

sustituyendo (3.88) en (3.87) y comparando los coeficientes concluimos que

$$\begin{aligned} \alpha_m(m + \gamma) &= \alpha_{m-1} - \frac{Z\alpha E}{\lambda} a_m - \left(\kappa + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda} \right) \beta_m, \\ \beta_m(m + \gamma) &= \left(-\kappa + \frac{Z\alpha m_0}{\lambda} \right) \alpha_m + \frac{Z\alpha E}{\lambda} \beta_m. \end{aligned} \quad (3.89)$$

definiendo la variable $n' = \frac{Z\alpha E}{\lambda} - \gamma$ y utilizando la ecuación (3.89)

$$\alpha_m \left[\left(m + \gamma + \frac{Z\alpha E}{\lambda} \right) (n' - m) + \kappa^2 - \frac{Z^2 \alpha^2 m_0^2}{\lambda^2} \right] = \alpha_{m-1} (n' - m) \quad (3.90)$$

con $\gamma^2 = \kappa^2 - (Z\alpha)^2$, llegamos a

$$\alpha_m = \frac{(1 - n')(2 - n') \cdots (m - n')}{m!(2\gamma + 1) \cdots (2\gamma + m)} \alpha_0 \quad (3.91)$$

de forma análoga decimos que

$$\beta_m = (-1)^m \frac{n'(n' - 1) \cdots (n' - m + 1)}{m!(2\gamma + 1) \cdots (2\gamma + m)} \beta_0 \quad (3.92)$$

esta serie de potencias puede convertirse en una función hipergeométrica, entonces encontramos que

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha_0 \varrho^\gamma F(1 - n', 2\gamma + 1; \varrho), \\ Q_2 &= \beta_0 \varrho^\gamma F(-n', 2\gamma + 1; \varrho) \\ &\quad - \left(\frac{\kappa - Z\alpha m_0/\lambda}{n'} \right) \alpha_0 \varrho^\gamma F(-n', 2\gamma + 1; \varrho) \end{aligned} \quad (3.93)$$

Para que la función de onda sea renormalizable, requerimos que las series Q_1 y Q_2 terminen; la función hipergeométrica tendrá que ser un polinomio simple, esto puede ser únicamente si n es un número entero no negativo.

Entonces definimos el número cuántico principal

$$n = n' + |\kappa| = n' + j + \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.94)$$

con esto podemos calcular los eigenestados de la energía

$$E = m_0 \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left[n - j - \frac{1}{2} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - (Z\alpha)^2 \right]^{1/2} \right]^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.95)$$

Finalmente queremos encontrar la expresión completa para la función de onda radial. Vamos a normalizar la función de onda de acuerdo a $\int \psi^\dagger \psi dV = 1$

$$\int_0^\infty (f^2 + g^2) r^2 dr = 1 \quad (3.96)$$

esto nos da la expresión final de la función de onda radial normalizada

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} g(r) \\ f(r) \end{Bmatrix} &= \frac{\pm(2\lambda)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(2\gamma + 1)} \times \sqrt{\frac{(m_0 \pm E)\Gamma(2\gamma + n' + 1)}{4m_0 \frac{(n'+\gamma)m_0}{E} \left(\frac{(n'+\gamma)m_0}{E} - \kappa \right) n!}} \\ &\times (2\lambda r)^{\gamma-1} e^{-\lambda r} \left\{ \left(\frac{(n'+\gamma)m_0}{E} - \kappa \right) F(-n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \mp n' F(1 - n', 2\gamma + 1; 2\lambda r) \right\}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

3.2.2. Reglas de selección

La interacción con el campo del fotón es

$$H_I = e\alpha \cdot \mathbf{A} \quad (3.98)$$

donde α está dada en término de las matrices de Pauli.

En la mecánica cuántica relativista una partícula se caracteriza por la representación irreducible de las variables dinámicas: el Hamiltoniano \mathbf{H} , componentes del momento lineal P_i , las componentes del momento angular \mathbf{J}_i , las componentes espacio tiempo del tensor del momento angular relativista K_i . La representación con la que trabajemos será de masa cero, energía positiva y representación finita del espín. Cada representación es caracterizada por un número λ , la helicidad, mientras que $|\lambda|$ es la representación del espín.

Denifimos el sistema dinámico correspondiente a un fotón siendo la suma de la representación para la cual $\lambda = \pm 1$. El producto interno se define por

$$(f, g) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int f^*(\mathbf{p}, \lambda) g(\mathbf{p}, \lambda) \frac{d\mathbf{p}}{p} \quad (3.99)$$

La cantidad $\int_V [|g(\mathbf{p}, \lambda)|^2/p] d\mathbf{p}$ nos da la probabilidad relativa que un fotón en un estado dado por $g(\mathbf{p}, \lambda)$, tengo su momento en un volumen V del espacio de momento y tenga helicidad λ . La norma de la función de onda está definida por

$$N(g) = [(g, g)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.100)$$

Primero definimos el vector $\mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{p})$ para $\lambda = 0, \pm 1$ por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0(\mathbf{p}) &= -(\mathbf{p}/p), \\ \mathbf{Q}_{\lambda=\pm 1} &= -\lambda(2)^{1/2} \left(\frac{p_1(p_1 + i\lambda p_2)}{p(p + p_3)} - 1, \frac{p_2(p_1 + i\lambda p_2)}{p(p + p_3)} - i\lambda, \frac{p_1 + i\lambda p_2}{p} \right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Ahora tomando en cuenta el siguiente teorema:

Teorema: La forma más general del potencial vectorial y escalar para el caso de corrientes y fuentes que no están presentes es

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \int \mathbf{Q}_\lambda(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-pt)} \frac{d\mathbf{p}}{p} + \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda \int \mathbf{Q}_\lambda^*(\mathbf{p}) g^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-pt)} \frac{d\mathbf{p}}{p} \right) \\ &\quad + \nabla F(\mathbf{x}, t), \\ \phi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + K \end{aligned} \quad (3.102)$$

donde la función $g(\mathbf{p}, \lambda)$ es la amplitud de Poincare, $F(\mathbf{x}, t)$ es cualquier función real de estos argumentos, y K es cualquier número real.

Este teorema es muy importante porque resuelve completamente la ambigüedad escogiendo los potenciales correspondientes para el campo de radiación. La función $F(\mathbf{x}, t)$ establece completamente la norma. Si $F(\mathbf{x}, t)$ satisface la ecuación de Laplace, la norma es la norma de radiación.

Las amplitudes de Poincaré $G(E, j, m, \lambda)$ en la base energía-momento angular está definida como

$$g(\mathbf{p}, \lambda) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j Y_j^{m, \lambda}(\theta, \phi) G(p, j, m, \lambda), \quad (3.103)$$

y la amplitud $G(E, j, m, \lambda)$ en términos de $g(\mathbf{p}, \lambda)$

$$G(E, j, m, \lambda) = E \int_0^\pi d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_j^{m, \lambda*}(\theta, \phi) g(\mathbf{p}, \lambda) \quad (3.104)$$

y $F(E, j, m, \lambda)$ de obtiene de $f(\mathbf{p}, \lambda)$ a través de (3.103).

La función de onda del fotón en la representación de energía-momento angular, y el producto interno es

$$(f, g) = \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \int F^*(E, j, m, \lambda) G(E, j, m, \lambda) \frac{dE}{E} \quad (3.105)$$

En términos de la representación de momento angular, el potencial vectorial toma la siguiente forma cuando $f(\mathbf{x}, t) = 0$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_1^*(\mathbf{x}, t), \quad (3.106)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(\mathbf{x}, t) = & -(2)^{1/2} \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-k}^k (i)^k \{ Y_{k, k, m}(\theta, \phi) A_{km\lambda, k}(x) \\ & - i\lambda \left[\frac{k}{2k+1} \right]^{\frac{1}{2}} Y_{k, k-1, m}(\theta, \phi) A_{km\lambda, k+1}(x) \\ & + i\lambda \left[\frac{k+1}{2k+1} \right]^{\frac{1}{2}} Y_{k, k-1, m}(\theta, \phi) A_{km\lambda, k-1}(s) \} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Finalmente

$$A_{km\lambda, k'}(x) = \int_0^\infty G(E, k, m, \lambda) j_k E r e^{-iEt} dE, \quad (3.108)$$

Utilizando esta definición de el vector potencial, puedo decir que para $j + l_1 + l_2$ impar

$$\begin{aligned} \langle 1 | H_I | 2 \rangle = & (-1)^{m_1 + \frac{1}{2}} i^{j+1} k \alpha \left(\frac{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j + 1)}{2\pi j(j + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} (\kappa_1 + \kappa_2) \begin{pmatrix} j & j_1 & j_2 \\ m & -m_1 & -m_2 \end{pmatrix} \\ & \times [[2l_1 + 1)(2l_2' + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j & j_1 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_2' & l_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j & l_1' & l_2' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty r^2 j_j(kr) g_1 r f_2(r) dr \\ & + [(2l_1' + 1)(2l_2 + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j & j_1 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_2 & l_1' \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j & l_1' & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty r^2 j_j(kr) g_2(r) f_1(r) dr]. \end{aligned} \quad (3.109)$$

y para $j + l_1 + l_2$ par

$$\begin{aligned}
\langle 1|H_I|2\rangle &= (-1)^{m_1 - \frac{1}{2}} i^j \alpha \lambda \left(\frac{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j + 1)}{2\pi j(j + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} j & j_1 & j_2 \\ m & -m_1 & -m_2 \end{pmatrix} \\
&\times [(2l'_1 + 1)(2l'_2 + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j & j_1 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l'_2 & l'_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j & l'_1 & l'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\times \int_0^\infty r j_j(kr) [j(j + 1) - (\kappa_1 - \kappa_2)] - (\kappa_1 - \kappa_2) k r j'_j(kr) g_1 r f_2(r) dr \\
&- [(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j & j_1 & j_2 \\ \frac{1}{2} & l_2 & l_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\times \int_0^\infty r j_j(kr) [j(j + 1) - (\kappa_1 - \kappa_2)] + (\kappa_1 - \kappa_2) k r j'_j(kr) g_2(r) f_1(r) dr.
\end{aligned} \tag{3.110}$$

De la misma forma que para el átomo de hidrógeno no relativista, las reglas de selección se obtienen de las propiedades de los símbolos $3j$, para los cuales deben de cumplirse las condiciones dadas en (3.51)

Definiendo de nuevo las transiciones 'permitidas' como aquellas en las que $j = 1$ (aproximación dipolar) llegamos a las siguientes conclusiones: Para el segundo y tercer símbolo $3j$ de la ecuación (3.109), $j = |l_1 - l'_2|, |l'_1 - l_2|$, entonces $\Delta l = 0, \pm 2$. Y para (3.110), $j = |l'_1 - l'_2|, |l_1 - l_2|$, entonces $\Delta l = \pm 1$. Pero el símbolo el primer símbolo $3j$ de ambas ecuaciones establece que $-1 \leq \Delta j \leq 1$. Por lo tanto $\Delta j = 0, \pm 1$.

Tomando en cuenta la conservación del espín, concluimos que las reglas de selección son

$$\begin{aligned}
\Delta j &= 0, \pm 1 & \Delta m_j &= 0, \pm 1 \\
\Delta l &= 0, \pm 1 & \Delta m_l &= 0, \pm 1
\end{aligned} \tag{3.111}$$

4. DISPERSIÓN INELÁSTICA NEUTRINO ELECTRÓN PARA EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

Después de haber discutido en los capítulos anteriores la teoría necesaria para calcular las secciones eficaces en el caso de partículas libres y de discutir el caso de transiciones del electrón ligado al potencial de un átomo de Hidrógeno relativista y sus reglas de selección, será fácil ahora describir la dispersión de un neutrino con dicho electrón y encontrar las reglas de selección para este caso, que resultan ser la mismas que las mostradas en el capítulo anterior.

Vale la pena remarcar que el hecho de encontrar las mismas reglas de selección no quiere decir que las secciones eficaces sean las mismas en los dos casos, pues es necesario todavía evaluar las integrales, que serán obviamente diferentes.

Hemos discutido ya el caso de la sección eficaz para la dispersión $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$ en el caso de partículas libres. Las diferencias principales entre una función de onda libre y un estado ligado son dos:

La normalización de la función de onda de un estado ligado es

$$\int |\psi|^2 dV = 1 \quad (4.1)$$

y no $2E$ como en el caso libre (2.8).

La función delta es el resultado de la integración sobre el espacio, pero en este caso la delta será solo sobre la energía porque la expresión $e^{-\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ no se conserva en el resto de la expresión y no puede ser integrada.

Como hemos mencionado ya considerando que la partícula 1, el neutrino (ν_1), está libre y la partícula 2, el electrón (e_1), está ligada, la función de onda de la partícula libre está normalizada de modo que $\int \rho dV = 2E$, y en el caso de una partícula ligada $|\psi|^2 dV = 1$,

entonces ahora en flujo incidente está dado por

$$\frac{|\mathbf{v}_1|2E_1}{V^2} = \frac{|\mathbf{v}_{\nu_1}|2E_{\nu_1}}{V^2} \quad (4.2)$$

considerando el sistema de laboratorio.

Tomando en cuenta también que la delta del cuadrimomento ahora es una delta de energía, la sección diferencial eficaz está dada por

$$d\sigma = \frac{d^3p_{e_2} dp_{\nu_2} \delta(E_{\nu_2} + E_{e_2} - E_{\nu_1} - E_{e_1})}{2^4(2\pi)^2 E_{\nu_1} E_{\nu_2} E_{e_2}}. \quad (4.3)$$

Ahora bien, sabemos que

$$\begin{aligned} pdp &= E dE \\ d^3p &= p^2 dp d\Omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

con la ayuda de (4.4) y tomando en cuenta que $E_{e_2} = m_e + T_e$, $dE_{e_2} = dT_e$, reescribimos (4.3)

$$d\sigma = \frac{p_{e_2} E_{e_2} dT_{e_2} do_{e_2} p_{\nu_2} E_{\nu_2} dE_{\nu_2} do_{\nu_2} \delta(E_{\nu_2} + E_{e_2} - E_{\nu_1} - E_{e_1})}{2^4(2\pi)^2 E_{\nu_1} E_{\nu_2} E_{e_2}} |M|^2 \quad (4.5)$$

en el caso del neutrino, $E_{\nu_1} = p_{\nu_1}$. Integrando sobre dE_{ν_2} utilizando la función delta,

$$d\sigma = \frac{p_{e_2} p_{\nu_2} dT_{e_2} do_{e_2} do_{\nu_2}}{2^4(2\pi)^2 p_{\nu_1}} |M|^2 \quad (4.6)$$

Ahora tomando un promedio de la proyección del momento angular inicial, que contribuye con un factor $\left(\frac{1}{2j_1+1}\right)$, y la suma de espines sobre los estados finales del neutrino y el electrón que contribuye con un factor $\frac{1}{4}$ al hacer la suma sobre las helicidades se tiene

$$\frac{d\sigma}{dT_e} = \frac{p_{\nu_e} p_{e_2}}{2^8 \pi^2 p_{\nu_1} (2j_1 + 1)} \sum_{m_1} \sum_{\lambda_{e_2}} \sum_{\lambda_{\nu_2}} \int d(\cos \theta_{e_2}) d\phi_{e_2} \int d(\cos \theta_{\nu_2}) d\phi_{\nu_2} |M|^2 \quad (4.7)$$

donde hemos considerado que $d\Omega = d(\cos \theta) d\phi$.

Del lagrangiano (1.43), utilizando teoría de perturbación de segundo orden, se obtiene la matriz de elementos para la dispersión inelástica νe :

$$\begin{aligned} M &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\mathbf{p}\lambda_{\nu_2}} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u_{\mathbf{p}\lambda_{\nu_1}} \int d^3r \bar{\psi}_{\mathbf{p}\lambda_{e_2}}(\mathbf{r}) \\ &\quad \times \gamma_\mu (g_V + g_A \gamma^5) \psi_{n_j l m_{e_1}}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $q^\mu = [(E_{\nu_2} - E_{\nu_1}), \mathbf{p}_{\nu_2} - \mathbf{p}_{\nu_1}]$.

El electrón inicial (e_1) se supone como un estado ligado con números cuánticos n_1 y número cuántico angular $j_1 l_1 m_1$. En este marco de referencia, el modelo de potencial esférico simétrico describe el estado como el biespinor

$$\psi_{n_j l m_{e_1}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} f_{n_1 j_1 l_1}(r) \Omega_{j_1 l_1 m_1}(\mathbf{r}/r) \\ i^{1+l_1+l'_1} g_{n_1 j_1 l'_1}(\mathbf{r}) \Omega_{j_1 l'_1 m_1}(\mathbf{r}/r) \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\infty dr (f_{n_1 j_1 l_1}^2 + g_{n_1 j_1 l'_1}^2) = 1.$$

El electrón dispersado (e_2) se considera que está en el continuo con helicidad λ_2 y momentum \mathbf{p}_2 . su función de onda se representa por una expansión en el biespinor esférico,

$$\psi_{\mathbf{p} \lambda_{e_2}}(\mathbf{r}) = \sum_{j_2 l_2 m_2} \frac{2\pi}{p_2} i_2^l (\Omega_{j_2 l_2 m_2}^*(\mathbf{p}_2 p_2) w_{\lambda_2}) e^{-i\delta_{j_2 l_2}} \frac{1}{r}$$

$$\times \begin{pmatrix} f_{E_2 j_2 l_2}(r) \Omega_{j_2 l_2 m_2}(\mathbf{r}/r) \\ i^{1+l_2-l'_2} g_{E_2 j_2 l'_2}(r) \Omega_{j_2 l'_2 m_2}(\mathbf{r}/r) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

con la normalización definida por la forma asintótica

$$f_{E j l}(r)_{r \rightarrow \infty} = 2(E + m_e)^{\frac{1}{2}} \sin \left(pr - \frac{\pi l}{2} + \delta_{j l} \right)$$

entonces la sección diferencial eficaz se expresa como

$$\frac{d\sigma}{dT_e}(T_e, E_{\nu_1}, n_j l_{e_1}) = \frac{p_{\nu_2} p_{e_2}}{2^8 \pi^2 p_{\nu_1} (2j_1 + 1)} \sum_{m_1} \sum_{\lambda_{e_2}} \int d\omega_{e_2} |M|^2 \quad (4.10)$$

Antes de presentar la forma explicita de la sección eficaz, haremos una pequeña descripción de su derivación. En la matriz de elementos (4.8) la función exponencial de la integral se expande en multipolos esféricos, después, utilizando la expresión (4.9) la función con dependencia angular puede separarse e integrarse. Esto se realiza utilizando el teorema de Wigner-Eckart:

$$\begin{aligned}
& \int d\Omega_{j_2 l_2 m_2}^* Y_{JM \Sigma_{j_1 l_1 m_1}} \\
&= (-1)^{j_2 - m_2} \begin{pmatrix} j_2 & J & j_1 \\ -m_2 & M & m_1 \end{pmatrix} \langle j_2 l_2 \| J \| j_1 l_1 \rangle \\
& \int d\Omega_{j_2 l_2 m_2}^* Y_{LJM \Sigma_{j_1 l_1 m_1}} \\
&= i(-1)^{j_2 - m_2} \begin{pmatrix} j_2 & J & j_1 \\ -m_2 & M & m_1 \end{pmatrix} \langle j_2 l_2 \| JL \| j_1 l_1 \rangle
\end{aligned}$$

El teorema de Wigner-Eckart muestra una relación directa entre una matriz reducible y una irreducible. Ahora, de la referencia [12], obtenemos las de matrices reducibles,

$$\begin{aligned}
\langle \kappa \mu | \sigma \cdot \mathbf{Y}_{JJM} | \kappa' \mu' \rangle &= (\kappa' - \kappa) (-1)^{\mu+1/2} \left(\frac{(2l+1)(2l'+1)(2j+1)(2J+1)}{4\pi J(J+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \begin{pmatrix} J & j & j' \\ M & -\mu & \mu' \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} J & j & j' \\ \frac{1}{2} & l' & l \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} J & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
\langle \kappa \mu | \sigma \cdot \mathbf{Y}_{J,J+1,M} | \kappa' \mu' \rangle &= (-1)^{\mu+1/2} (J + \kappa + \kappa' + 1) \left(\frac{(2\bar{l}+1)(2l'+1)(2j+1)(2j'+1)}{4\pi(J+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \begin{pmatrix} J & j & j' \\ M & -\mu & \mu' \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} J & j & j' \\ \frac{1}{2} & l' & \bar{l} \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} J & \bar{l} & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
\langle \kappa \mu | \sigma \cdot \mathbf{Y}_{J,J-1,M} | \kappa' \mu' \rangle &= -(-1)^{\mu+1/2} (J - \kappa - \kappa') \left(\frac{(2\bar{l}+1)(2l'+1)(2j+1)(2j'+1)}{4\pi J} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \begin{pmatrix} J & j & j' \\ M & -\mu & \mu' \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} J & j & j' \\ \frac{1}{2} & l' & \bar{l} \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} J & \bar{l} & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

en una transición de un estado inicial con números cuánticos κ , μ (donde μ es el número cuántico m), a un estado final con números cuánticos κ' , μ' , donde $l = j + 1/2S_\kappa$ y

$$\bar{l} = j - 1/2S_\kappa.$$

Ahora hacemos uso de la expresión que se encuentra en la referencia [13] y escribimos la sección diferencial eficaz como

$$\frac{d\sigma}{dT_e} = \int_{-1}^1 dz \sum_{j_2 l_2} \sum_J \frac{G_F^2 p_{\nu_2}^2}{2\pi(2j_{e_1} + 1)p_{e_2} q^2} Q^{(w)}(j_2 l_2, J, j_2 l_2; z) \quad (4.14)$$

donde $z = \cos \theta_{\nu_2}$, y θ_{ν_2} es el ángulo de dispersión del neutrino.

La expresión explícita de $Q^{(w)}$ depende de la paridad $(-1)^{l_2+L+l_1}$ y esta dividida en dos tipos:

Tipo E: $(-1)^{l_2+L+l_1} = 1$, con $J_V^{(2)} = 0$, $J_A^{(0)} = J_A^{(1)} = J_A^{(3)} = 0$, en donde

$$\begin{aligned} Q^{(w)} = & \left\{ \left[\frac{4J}{2J+1} (1-z^2) p_{\nu_1}^2 p_{\nu_2}^2 \right. \right. \\ & + \frac{J+1}{2J+1} (p_{\nu_1}^2 + p_{\nu_2}^2 + p_{\nu_1} - p_{\nu_2}(1-z))(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})^2 \left. \right] g_V^2 J_V^{(1)2} \\ & + \left[\frac{J}{2J+1} (p_{\nu_1}^2 + p_{\nu_2}^2 + p_{\nu_1} p_{\nu_2} (1-z))(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})^2 \right. \\ & + \frac{4(J+1)}{2J+1} (1-z^2) p_{\nu_1}^2 p_{\nu_2}^2 \left. \right] g_V^2 J_V^{(3)2} \\ & + [(p_{\nu_1}^2 + p_{\nu_2}^2 + p_{\nu_1} p_{\nu_2} (1-z))(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})^2] g_A^2 J_A^{(2)2} \\ & + \left[\frac{2(J(J+1))^{\frac{1}{2}}}{2J+1} ((p_{\nu_1}^2 + p_{\nu_2}^2 + p_{\nu_1} p_{\nu_2} (1-z))(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})^2 \right. \\ & - (1-z^2) 4p_{\nu_1}^2 p_{\nu_2}^2) \left. \right] g_V^2 J_V^{(1)} J_V^{(3)} \\ & + \left[2 \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} q(p_{\nu_1} + p_{\nu_2})(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})^2 \right] \\ & \left. \times g_V g_A J_V^{(3)} J_A^{(2)} \right\} \frac{(1-z)}{(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Tipo M: $(-1)^{l_2+L+l_1} = -1$, con $J_V^{(0)} = J_V^{(1)} = J_V^{(3)} = 0, J_A^{(2)} = 0$,

$$\begin{aligned}
Q^{(w)} = & [(p_{\nu_1}^2 + p_{\nu_2}^2 + p_{\nu_1}p_{\nu_2}(1-z))(1-z)]g_V^2 J_V^{(2)2} \\
& + [(p_{\nu_1}^2 - 2p_{\nu_1}p_{\nu_2}z + p_{\nu_2}^2)(1+z)]g_A^2 J_A^{(0)2} \\
& + \left[\frac{J}{2J+1}(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})^2(1+z)\right] \\
& + \left[\frac{J+1}{2J+1}(p_{\nu_1}^2 + p_{\nu_2}^2 + p_{\nu_1}p_{\nu_2}(1-z))(1-z)\right]g_A^2 J_A^{(1)2} \\
& + \left[\frac{J}{2J+1}(p_{\nu_1}^2 + p_{\nu_2}^2 + p_{\nu_1}p_{\nu_2}(1-z))(1-z)\right] \\
& + \left[\frac{J+1}{2J+1}(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})^2(1+z)\right]g_A^2 J_A^{(3)2} \\
& + \left[2\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} q(p_{\nu_1} + p_{\nu_2})(1-z)\right]g_V g_A J_V^{(2)} J_A^{(1)} \\
& + \left[2\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} q(p_{\nu_1} + p_{\nu_2})(1-z)\right]g_V g_A J_V^{(2)} J_A^{(3)} \\
& - \left[2\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} q(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})(1+z)\right]g_A^2 J_A^{(0)} J_A^{(1)} \\
& + \left[2\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} q(p_{\nu_1} - p_{\nu_2})(1+z)\right]g_A^2 J_A^{(0)} J_A^{(3)} \\
& + \left[2\frac{(J(J+1))^{\frac{1}{2}}}{2J+1}((3+z^2)p_{\nu_1}p_{\nu_2} - 2z(p_{\nu_1}^2 + p_{\nu_2}^2))\right]g_A^2 J_A^{(1)} J_A^{(3)}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Donde $q = (p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2z)^{1/2}$. La corrientes J_V y J_A están dadas por

$$\begin{aligned}
J_V^{(1)} &= i^{1+l_1-l'_1} \int_0^\infty dr f_2(r) g_{1'}(r) j_{J-1} q r \langle 2 \| JJ - 1 \| 1' \rangle \\
&\quad + i^{l'_2-l_2-1} \int_0^\infty dr g_{2'}(r) f_1(r) j_{J-1} q r \langle 2' \| JJ - 1 \| 1 \rangle \\
J_V^{(2)} &= i^{1+l_1-l'_1} \int_0^\infty dr f_2(r) g_{1'}(r) j_J q r \langle 2 \| JJ \| 1' \rangle \\
&\quad + i^{l'_2-l_2-1} \int_0^\infty dr g_{2'}(r) f_1(r) j_J q r \langle 2' \| JJ \| 1 \rangle \\
J_V^{(3)} &= i^{1+l_1-l'_1} \int_0^\infty dr f_2(r) g_{1'}(r) j_{J+1} q r \langle 2 \| JJ + 1 \| 1' \rangle \\
&\quad + i^{l'_2-l_2-1} \int_0^\infty dr g_{2'}(r) f_1(r) j_{J+1} q r \langle 2' \| JJ + 1 \| 1 \rangle \\
J_A^{(0)} &= -i^{1+l_1-l'_1} \int_0^\infty dr f_2(r) g_{1'}(r) j_J q r \langle 2 \| J \| 1' \rangle \\
&\quad - i^{l'_2-l_2-1} \int_0^\infty dr g_{2'}(r) f_1(r) j_J q r \langle 2' \| J \| 1 \rangle \\
J_A^{(1)} &= - \int_0^\infty dr f_2(r) f_1(r) j_{J-1} q r \langle 2 \| JJ - 1 \| 1' \rangle \\
&\quad - i^{l'_2-l_2+l_1-l'_1} \int_0^\infty dr g_{2'}(r) g_{1'}(r) j_{J-1} q r \langle 2' \| JJ - 1 \| 1' \rangle \\
J_A^{(2)} &= - \int_0^\infty dr f_2(r) f_1(r) j_J q r \langle 2 \| JJ \| 1 \rangle \\
&\quad - i^{l'_2-l_2+l_1-l'_1} \int_0^\infty dr g_{2'}(r) g_{1'}(r) j_J q r \langle 2' \| JJ \| 1' \rangle \\
J_A^{(3)} &= - \int_0^\infty dr f_2(r) f_1(r) j_{J+1} q r \langle 2 \| JJ + 1 \| 1 \rangle \\
&\quad - i^{l'_2-l_2+l_1-l'_1} \int_0^\infty dr g_{2'}(r) g_{1'}(r) j_{J+1} q r \langle 2' \| JJ + 1 \| 1' \rangle
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Donde las representaciones de las corrientes dependen de matrices irreducibles de la forma $\langle 2 \| JJ - 1 \| 1' \rangle$, $\langle 2' \| JJ - 1 \| 1$ para el caso de $J_V^{(1)}$ y de matrices similares para las demas corrientes J_V y J_A , dichas matrices representan transiciones de estados $1'$, con números cuánticos j'_1 , l'_1 , m_1 , y $2'$ con números cuánticos j'_2 , l'_2 , m_2 .

Para determinar las reglas de selección debemos encontrar las transiciones para las cuales $Q^{(w)}$. Utilizando el teorema de Wigner-Eckart y las ecuaciones (4.11), (4.12), (4.13) podemos analizar $Q^{(w)}$, para obtener una dependencia directa de los coeficientes de Clebsch-Gordan quienes son los que determinarán cuales son las transiciones válidas. De la misma

forma como se trabajó en el capítulo anterior.

Luego de analizar las condiciones que deben de cumplirse para que los coeficientes de Clebsch-Gordan no desaparezcan, notamos que la solo hay una condición que determina las reglas de selección para este caso, y es la desigualdad triangular.

Evaluando las condiciones se obtienen las siguientes desigualdades triangulares para Δl impar: $|j'_2 - j_1| \leq J \leq j'_2 + j_1$ y $|l''_2 - l_1| \leq J \leq l''_2 + l_1$ o $|j_2 - j'_1| \leq J \leq j_2 + j'_1$ y $|l_2 - l''_1| \leq J \leq l_2 + l''_1$ o $|j'_2 - j'_1| \leq J \leq j'_2 + j'_1$ o $|j_2 - j_1| \leq J \leq j_2 + j_1$; y para Δl par: $|j_2 - j_1| \leq J \leq j_2 + j_1$ y $|l_2 - l_1| \leq J \leq l_2 + l_1$ o $|j'_2 - j'_1| \leq J \leq j'_2 + j'_1$ y $|l''_2 - l''_1| \leq J \leq l''_2 + l''_1$ o $|j'_2 - j_1| \leq J \leq j'_2 + j_1$ y $|l''_2 - l_1| \leq J \leq l''_2 + l_1$.

Realizando la aproximación dipolar y simplificando las desigualdades, obtenemos entonces las reglas de selección para la dispersión neutrino electrón con un electrón ligado a un átomo de hidrógeno,

$$\begin{aligned} \Delta l &= 0, \pm 1 & \Delta m_l &= 0, \pm 1 \\ \Delta j &= 0, \pm 1 & \Delta m_j &= 0, \pm 1 \end{aligned} \tag{4.18}$$

CONCLUSIONES

1. En este trabajo de graduación hemos descrito la dispersión inelástica del neutrino con un electrón. Para ello hemos estudiado el electrón del átomo de Hidrógeno en un caso poco común, que es el caso en que un neutrino tiene tan baja energía que la dispersión con el electrón puede considerarse como inelástica. La descripción de este problema puede hacerse considerando al electrón dispersado como una combinación lineal de funciones de onda del átomo original, por lo que en este problema es útil saber cuales de estos términos contribuirán de manera significativa y cuales pueden despreciarse.
2. Con esta motivación encontramos las reglas de selección en la aproximación dipolar para esta dispersión. Estas reglas de selección pueden extenderse a otros potenciales centrales, es decir, a átomos hidrogenoides más pesados. Además, estas reglas pueden constituir una guía útil para resolver éste y otros problemas numéricos relacionados con la dispersión inelástica neutrino-electrón.

RECOMENDACIONES

1. Como una perspectiva a largo plazo de este trabajo de graduación queda el estudio numérico completo de la dispersión inelástica neutrino-electrón considerando distintos detectores como blanco, como puede ser el caso de Helio o Germanio.

REFERENCIAS

1. B. T. Cleveland *et al.*, *Astrophys. J.* **496** (1998) 505; K.S. Hirata *et al.*, Kamiokande Coll., *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 1683; W. Hampel *et al.*, GALLEX Coll., *Phys. Lett. B* **447** (1999) 127; D.N. Abdurashitov *et al.*, SAGE Coll., *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 4686; *Phys. Rev.* **C 60** (1999); J.Ñ. Abdurashitov *et al.* [SAGE Collaboration], arXiv:astro-ph/0204245; M. Altmann *et al.* (GNO Collaboration), *Phys. Lett.* **B 490** (2000) 16; E. Bellotti *et al.* (GNO Collaboration), *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B 91** (2001) 44; Y. Suzuki (Super-Kamiokande Collaboration), *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B 91** (2001) 29. Q. R. Ahmad *et al.* [SNO Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **89**, 011301 (2002).
2. Super-Kamiokande Collaboration (Y. Fukuda *et al.*), *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998).
3. K. Eguchi *et al.* [KamLAND Collaboration], *First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance*, *Phys. Rev. Lett.* **90** 021802 (2003).
4. E. Aliu *et al.* [K2K Collaboration], *Evidence for muon neutrino oscillation in an accelerator-based experiment*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081802 (2005). M. H. Ahn *et al.* [K2K Collaboration], *Indications of neutrino oscillation in a 250-km long-baseline experiment*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 041801 (2003).
5. P. Gorodetzky [NOSTOS Collaboration], *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **151** (2006) 410 [arXiv:physics/0502037].
6. L.Ñ. Bogdanova [MAMONT Collaboration], *Nucl. Phys. B* **143** (2005) 485; *Nucl. Phys. A* **721** (2003) 499.
7. V. I. Kopeikin, L. A. Mikaelyan, V. V. Sinev, *Inelastic Scattering of Tritium-Source Antineutrinos on Electrons of Germanium Atoms*, *Phys. Of At. Nuclei* Vol. 66 707 (2003).
8. Y. Giomataris, J. D. Vergados, *Neutrino properties studied with a triton source using large TPC detectors*, hep-ex/0303045.

9. Griffiths, David *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1987
10. Garcia Hidalgo, Rosa Magdalena *Producción de Bosones de Norma Masivos en la Colisión Neutrino-Protón con Neutrinos Cósmicos Ultra-energéticos*, tesis doctoral, asesor: Dr. Alfonso Rosado Sánchez, Benemérita Universidad de Puebla, Instituto de Física 'Luis Rivera Terrazas', 2003
11. H. E. Moses, *Photon Wave Function and Exact Electromagnetic Matrix Elements for Hydrogenic Atom*, Physical Review A, Vol. 8, No.4 1710 (1973)
12. H. E. Moses, *Exact Electromagnetic Matrix Elements and Selection Rules for Relativistic Hydrogenic Atoms*, Physical Review A, Vol. 11, No.1 387 (1975)
13. V. Yu. Dobretsov, A.B. Dobrotsvetov, S. A. Fayans, *Inelastic Neutrino Scattering by Atomic Electron*, Sovietic Journal Nuclear Physics 55(8) 1180 (1992)

BIBLIOGRAFÍA

1. Wook Kim, Chung. Pevsner, Aihud. **Neutrinos in Physics and Astrophysics**, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, USA, 1993
2. Griffiths, David **Introduction to Elementary Particles**, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1987
3. Kane, Gordon **Modern Elementary Particle Physics**, Perseus Books Publishing, Universidad de Michigan, Michigan, USA, 1993
4. Garcia Hidalgo, Rosa Magdalena **Producción de Bosones de Norma Masivos en la Colisión Neutrino-Protón con Neutrinos Cósmicos Ultra-energéticos**, tesis doctoral, asesor: Dr. Alfonso Rosado Sánchez, Benemérita Universidad de Puebla, Instituto de Física 'Luis Rivera Terrazas', 2003
5. Klaus Winter. **Neutrinos Physics**, Cambridge University Press, USA, 1991
6. V. Barger, R. Phillips, **Collider Physics**, Addison-Wesley Publication Company, 1987
7. W. Greiner, **Relativistic Quantum Mechanics**, Springer-Verlag, Alemania, 1990
8. D.Varshalovich, A. Moskalev, V. Khersonskii, **Quantum Theory of Angular Moment**, World Scientific, Singapore, 1988
9. Claude Itzykson, Jean-Bernard Zuber, **Quantum Field Theory** McGraw Hill, USA, 1980
10. Condon, Shortley, **The Theory of Atomic Spectra**, Cambridge, Londres, 1963
11. Edmonds, **Angular Momentum in Quantum Mechanics**, Princeton University Press, USA, 1960
12. M. E. Rose, **Elementary Theory of Angular Moment**, John Wiley & Sons Inc., USA, 1961

13. D. Varshalovick, A. Moskalov, V. Khersonski, **Quantum Theory of Angular Moment**, World Scientific, Singapur, 1988
14. Miranda Romagnoli, Omar **Estudio de la Dispersión Débil Neutrino-Electrón por Corrientes Neutras**, tesis de licenciatura, asesor: Mario Maya Mendieta, Benemérita Universidad de Puebla, Mexico.