



**Universidad de San Carlos de Guatemala**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Escuela de Ciencias**

**ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL EN UN CAMPO  
GRAVITACIONAL DÉBIL**

**José Rodrigo Sacahuí Reyes**

**Asesorado por: M.Sc. Enrique Pazos Ávalos**  
**Lic. Edgar Aníbal Cifuentes Anléu**

**Guatemala, mayo de 2006**

**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**



**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL EN UN CAMPO  
GRAVITACIONAL DÉBIL**

**TRABAJO DE GRADUACIÓN**

**PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POR**

**JOSÉ RODRIGO SACAHI REYES**

**ASESORADO POR:  
M.Sc. ENRIQUE PAZOS ÁVALOS**

**LIC. EDGAR ANIBAL CIFUENTES ANLÉU**

**AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

**GUATEMALA, MAYO DE 2006**

# UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

## FACULTAD DE INGENIERÍA



### NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	
VOCAL II	Lic. Amahán Sánchez Álvarez
VOCAL III	Ing. Julio David Galicia Celada
VOCAL IV	Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
VOCAL V	Br. Elisa Yazminda Vides Leiva
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivonne Véliz Vargas

### TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

DECANO	Ing. Sydney Alexander Samuels Milson
EXAMINADOR	Lic. Erick Estuardo Hernández García
EXAMINADOR	Lic. Jorge de la Torre Paniagua
EXAMINADOR	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón
SECRETARIO	Ing. Carlos Humberto Pérez Rodríguez

## **HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### **ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL EN UN CAMPO GRAVITACIONAL DÉBIL,**

tema que me fuera asignado por la Coordinación de la Carrera de Licenciatura en Física Aplicada y aprobado por la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería, el 21 de Septiembre de 2005.

  
**José Rodrigo Sacahui Reyes**



Guatemala, 21 de Abril de 2006

FACULTAD DE INGENIERIA

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta  
Director Escuela de Ciencias  
Facultad de Ingeniería  
USAC

Señor Director:

Por este medio informamos que el estudiante de la licenciatura en Física Aplicada, José Rodrigo Sacahui Reyes, fue asesorado por los suscritos en su trabajo de graduación **“ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL EN UN CAMPO GRAVITACIONAL DÉBIL”**.

Habiendo cumplido con los objetivos y metas propuestos para este trabajo, hemos procedido a la aprobación del mismo. Por lo que el contenido, conclusiones y recomendaciones de este trabajo es responsabilidad, tanto del autor como de sus asesores.

Atentamente,

  
Lic. Edgar Anibal Cifuentes Anléu



  
M.Sc. Enrique Pazos Ávalos

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



Guatemala, 21 de abril de 2006

FACULTAD DE INGENIERIA

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta  
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
USAC, Ciudad

Estimado Ingeniero Boy:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión al trabajo de graduación "ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL EN UN CAMPO GRAVITACIONAL DÉBIL", presentada por el estudiante **José Rodrigo Sacahui Reyes**, con carné No. 199911203; y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación.

Muy Atentamente,

"ID Y ENSEÑAD A TODOS"



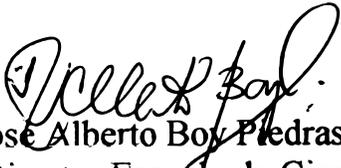
  
Lic. Edgar Aníbal Cifuentes Anléu  
Coordinador, Licenciatura en Física Aplicada  
Departamento de Física

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE CIENCIAS

El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen de los asesores, con el visto bueno del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada al trabajo de graduación del estudiante **JOSÉ RODRIGO SACAHUI REYES**, titulado "ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL EN UN CAMPO GRAVITACIONAL DÉBIL" procede a la autorización del mismo.

  
Ing. José Alberto Boy Piedrasanta  
Director Escuela de Ciencias



Guatemala, 24 de abril de 2006

JABP/scvs



El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de graduación titulado: **ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL EN UN CAMPO GRAVITACIONAL DÉBIL**, presentado por el estudiante universitario **José Rodrigo Sacahú Reyes**, precede a la autorización para la impresión del mismo.

IMPRÍMASE

Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos  
DECANO



Guatemala, mayo 5 de 2,006

/gdech

## **DEDICATORIA A**

**Mis padres, Oscar y Elisa,** por apoyarme en todo sentido ...

**Mi abuelo Raymundo,** un ejemplo de vida....

**Ellen,** por siempre confiar en mi...

**Los estudiantes de las Licenciaturas  
en Física y Matemática,** compañeros de aulas, camaradas de la  
vida...

**Mis amigos de ayer, hoy y siempre...**

## **AGRADECIMIENTOS A**

**La Universidad de San Carlos  
de Guatemala,**

por posibilitarme el desarrollo como profesional.

**Mis asesores de trabajo de  
graduación Enrique Pazos y  
Edgar Cifuentes:**

por su paciencia y sabios consejos.

**Mi familia,**

por el apoyo demostrado durante toda mi carrera.

**Mis catedráticos,**

por compartirme sus conocimientos.

# ÍNDICE GENERAL

<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b>	<b>III</b>
<b>GLOSARIO</b>	<b>VII</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>IX</b>
<b>OBJETIVOS</b>	<b>XI</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>XIII</b>
<b>1. ELECTROMAGNETISMO</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	1
1.2. Onda electromagnética . . . . .	2
1.2.1. Ondas planas . . . . .	5
1.3. Polarización de ondas electromagnéticas . . . . .	9
1.4. Efecto Faraday . . . . .	11
<b>2. GRAVITACIÓN</b>	<b>13</b>
2.1. Teoría general de la relatividad . . . . .	13
2.1.1. Principio de equivalencia . . . . .	14
2.1.2. Ecuación de campo de Einstein . . . . .	15
2.1.3. Solución de Schwarzschild . . . . .	17
2.2. Campo gravitacional débil . . . . .	19
2.3. Lentes gravitacionales . . . . .	22
2.3.1. Índice efectivo de refracción de un campo gravitacional . . . . .	22
2.4. Gravitoelectromagnetismo . . . . .	23
<b>3. ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL</b>	<b>27</b>
3.1. Derivación de la rotación Faraday gravitacional . . . . .	27
3.2. Límite gravitacional débil de rotación Faraday . . . . .	30
3.3. Rotación Faraday gravitacional en un espacio NUT . . . . .	32

3.4.	Rotación Faraday gravitacional en una métrica de Kerr . . . . .	34
3.4.1.	Órbitas en planos ecuatoriales . . . . .	34
3.4.2.	Órbita simétrica respecto al plano ecuatorial . . . . .	35
3.5.	Observaciones en sistemas astrofísicos . . . . .	36
3.5.1.	Sistema de lentes . . . . .	37
3.5.2.	Corteza rotando . . . . .	37
<b>CONCLUSIONES</b>		<b>41</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>		<b>43</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>		<b>45</b>
<b>APÉNDICE A:</b>		
	<b>DERIVADA COVARIANTE</b>	<b>47</b>
<b>APÉNDICE B:</b>		
	<b>PROYECCIÓN DE LA ÓRBITA</b>	<b>49</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>E</b>	Campo eléctrico
<b>B</b>	Campo magnético
$\rho$	Densidad de carga
$\epsilon_0$	Permitividad del espacio libre
$t, \tau$	Tiempo
$c$	Velocidad de la luz
$J$	Densidad de corriente
<b>A</b>	Potencial vectorial magnético
$\phi$	Potencial escalar eléctrico, ángulo de desfase
$r$	Radio vector
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas
$E_x$	Componente del campo eléctrico en el eje x

$\partial$	Derivada parcial
$i$	Imaginario
$E$	Amplitud vectorial de campo
$\mathbf{k}$	Vector de propagación
$w$	Velocidad angular
$\mu_0$	Constante de permeabilidad
$\mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{p}$	Vectores unitarios perpendiculares
$H$	Magnitud de campo magnético
$V$	Constante de Verdet
$n$	Índice de refracción
$d$	Distancia
$\lambda$	Longitud de onda
$\Sigma$	Sumatoria
$\mathbf{F}$	Fuerza
$m, M$	Masa

$g$	Aceleración de gravedad
$a$	Aceleración, constante
$T_{\mu\nu}$	Tensor energía momentum
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$R$	Escalar de curvatura
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$k$	Constante
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
$ds^2$	Intervalo invariante infinitesimal o métrica
$\theta$	Coordenada polar
$\varphi$	Coordenada azimutal
$A, B$	Coefficientes
$m_s$	Constante
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica de Minkowsky
$h_{\mu\nu}$	Perturbación gravitacional

$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$	Símbolos de Christoffel
$v$	Velocidad
$G$	Constante de gravitación universal
$\Phi$	Potencial newtoniano
$\mathbf{B}_g$	Campo gravitomagnético
$\mathbf{E}_g$	Campo gravitoelectrico
$h$	Componente de la métrica
$\mathbf{k}$	Vector de onda
$\mathbf{f}$	Vector de polarización
$\Sigma_3$	Triespacio
$\mathbf{L}$	Velocidad Angular
$\Omega$	Ángulo de rotación
$\vec{V}$	Potencial vectorial
$l, \xi_1, \xi_2$	Coordenadas ortogonales
$J$	Momentum angular

## GLOSARIO

<b>Relatividad general</b>	Teoría elaborada por Albert Einstein en la década de 1906-1916. Su idea esencial es que la gravedad es un efecto de la curvatura del espacio-tiempo.
<b>Métrica</b>	Es la conexión que existe entre las coordenadas de dos eventos y su distancia.
<b>Velocidad de la luz</b>	Constante fundamental de la relatividad especial, cuyo valor es de 299,729 Km/s. Es la velocidad de las partículas de masa cero, y se denota por la letra $c$ .
<b>Invariante</b>	Cantidad que conserva el mismo valor al ser transformado de un sistema de referencia a otro.
<b>Campos dinámicos</b>	Son los campos que varían en el tiempo.
<b>Singularidad</b>	Región donde la curvatura del espacio-tiempo es tan grande que sus leyes ya no operan. Punto casi cero con enorme cantidad de materia. Matemáticamente es una región donde no puede definirse una función, convergiendo hacia valores infinitos.
<b>Geodésica</b>	Es la trayectoria más corta entre dos puntos sobre una superficie.

<b>Transformación de Gauge</b>	Es una transformación de un grado de libertad que no modifica ninguna propiedad observable física
<b>Geodésica nula</b>	Es cuando la distancia entre cualquier dos puntos es cero.
<b>Espaciotiempo plano</b>	Es el que está descrito bajo la métrica de Minkowski.
<b>Fuerza tidal</b>	Se da cuando la fuerza no se aplica uniformemente sobre la superficie del objeto.
<b>Relatividad especial</b>	Teoría expuesta por Einstein en 1905, que presenta una nueva concepción del espacio-tiempo. En esta las transformaciones del espacio-tiempo dejan invariable la velocidad de la luz.
<b>Tensor</b>	El tensor se define mediante la transformación de un sistema inercial S a otro S'. Se define mediante la transformación: $T_{i'j'} = a_{i'i} a_{j'j} T_{ij}$ .
<b>Combinación lineal</b>	Es una expresión de tipo $x_1 + \dots + x_n v_n$ donde $v_1, \dots, v_n$ son elementos de un espacio vectorial V, y $x_1 + \dots + x_n$ son números.

# RESUMEN

El propósito del presente trabajo es presentar de manera detallada la derivación de la rotación del plano de polarización de una onda electromagnética, bajo la influencia de un campo gravitacional débil, el llamado efecto Faraday gravitacional por su analogía con el efecto Faraday electromagnético.

En la primera parte se presenta el efecto Faraday electromagnético, para esto se introducen conceptos de la teoría electromagnética clásica, tratándose las ecuaciones de Maxwell y el desarrollo del concepto de onda electromagnética.

En la segunda parte se incluyen conceptos de Relatividad General, debido a lo extenso de este tema únicamente se tocarán brevemente ciertos puntos importantes. Entre estos destacamos el concepto de lentes gravitacionales, que constituyen una de las principales pruebas de la validez de la teoría de gravitación de Einstein. Se introduce en esta parte el concepto de gravitoelectromagnetismo, junto a sus principales ideas.

En la última parte se presenta la derivación de la rotación Faraday gravitacional en un campo gravitacional débil, además incluye ciertas observaciones particulares en diversos sistemas astrofísicos.

El efecto Faraday gravitacional demuestra la influencia de la geometría del espacio-tiempo en las propiedades de la luz que pasa cerca de una cantidad de masa.



# OBJETIVOS

## **General**

Realizar un estudio detallado de la obtención relativista (gravitacional) de un fenómeno análogo a uno electromagnético clásico, el efecto Faraday.

## **Específicos**

1. Analizar las propiedades clásicas del efecto Faraday electromagnético.
2. Desarrollar la derivación de la rotación Faraday gravitacional para un campo gravitacional débil.
3. Presentar aplicaciones observacionales de la rotación Faraday gravitacional.



# INTRODUCCIÓN

Es ya conocido que la teoría de gravedad aceptada luego de la desarrollada por Newton, la Relatividad General, predice una curvatura del espacio-tiempo. Cuando existen objetos supermasivos, a éstos se les asocian corrientes de masa-energía entre ellos, las cuales originan diversos fenómenos físicos. El estudio de esto es conocido como gravitoelectromagnetismo.

La teoría electromagnética aplicada en óptica geométrica para un espacio curvo ha sido una de las principales pruebas de la teoría de la Relatividad General. En las últimas décadas, observaciones tanto de curvatura de la luz y un retraso de tiempo gravitacional han sido herramientas útiles tanto en Astrofísica como en Cosmología.

También es conocido que el plano de polarización de rayos de luz que atraviesan plasma en presencia de un campo magnético sufre una rotación, llamada rotación Faraday.

Como consecuencia de la Relatividad General se sabe que rayos que pasan cerca de un objeto masivo son curvados hacia el mismo. Esta influencia gravitacional sobre la luz presenta muchos fenómenos, asociados al gravitoelectromagnetismo, que tienen sus análogos en la teoría electromagnética clásica. Muchos estudios se han realizado sobre el efecto de la gravedad en el plano de polarización de un rayo de luz, siendo Skrotskii en 1957, aplicando un método desarrollado por Rytov, quien desarrolló la primera discusión de este fenómeno.

Ahora se sabe que el vector de polarización de una onda electromagnética rota debido a las propiedades del espacio-tiempo. Esta rotación gravitacional del plano de polarización constituye un análogo a la rotación Faraday electromagnética.

El propósito del presente trabajo es desarrollar la derivación de la rotación relativista del plano de polarización, para rayos de luz linealmente polarizada en un

campo gravitacional débil.

Este trabajo se compone de tres capítulos, en el primero se desarrolla el fenómeno electromagnético, donde se presentan las principales ideas de electromagnetismo que llevaron al entendimiento de la rotación Faraday.

El segundo capítulo contiene las ideas de Relatividad General, aplicadas en especial a un campo gravitacional débil, y se presenta un poco sobre los lentes gravitacionales, que son una de las principales pruebas de la validez de esta teoría. Además incluye una breve presentación de los conceptos de gravitoelectromagnetismo.

En el tercer capítulo se presenta de manera detallada la derivación de la rotación Faraday gravitacional, aplicando los conceptos presentados en los anteriores capítulos, así como se presentan casos particulares en sistemas astrofísicos. Este fenómeno gravitacional es análogo al electromagnético, pero con un origen distinto.

Finalmente, el trabajo contiene dos apéndices, el primero acerca de la derivada covariante, un concepto necesario para el desarrollo de las ecuaciones relativistas. El segundo apéndice es acerca de la proyección de la órbita, en el plano polar, seguida por el haz de luz que rodea un objeto masivo rotando. Este es un concepto útil para el desarrollo del fenómeno en sistemas astrofísicos.

# 1. ELECTROMAGNETISMO

Teoría que describe de manera clásica las interacciones entre la electricidad y el magnetismo. Pese a que algunos efectos magnéticos se conocen desde épocas antiguas, su teoría fue principalmente desarrollada en el siglo XIX, tuvo en las ecuaciones de Maxwell los principales fundamentos para su desarrollo. James Clerk Maxwell desarrolló estas ecuaciones basandose en los estudios previos desarrollados por Ampere y Faraday, llevando a impresionantes descubrimientos como el hecho de que la luz es de origen electromagnético y predijo la existencia de ondas electromagnéticas (verificado posteriormente con experimentos desarrollados por Hertz). Esta teoría es uno de los pilares de la física clásica, junto con la mecánica de Newton. Una de las tantas contribuciones de esta teoría fue el desarrollo de otra teoría igual de notable, como lo es la Relatividad desarrollada por Einstein.

## 1.1. Ecuaciones de Maxwell

El conjunto de ecuaciones que describen la teoría electromagnética son las llamadas ecuaciones de Maxwell, las cuales son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

donde  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ <sup>1</sup> son los campos eléctrico y magnético respectivamente,  $\rho$  representa las fuentes de carga y  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente.

---

<sup>1</sup>Se colocarán en negrilla las variables que representan cantidades vectoriales, esta notación se utilizará en los desarrollos posteriores.

Cada una de estas ecuaciones representa una generalización de ciertas observaciones experimentales, la primera representa una extensión de la ley de Gauss válida para campos dinámicos como estáticos, la segunda es la forma diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday, la tercera representa la inexistencia de monopolos magnéticos y la última representa la ley de Ampère.

Una consecuencia de aceptar estas cuatro leyes como válidas es la conservación de la carga.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.4) son las llamadas ecuaciones inhomogéneas, éstas determinan como los campos electromagnéticos son producidos por cargas y corrientes. Las restantes son las ecuaciones homogéneas, que describen el comportamiento de campos electromagnéticos independientemente de las cargas y corrientes. Estas ecuaciones reflejan la ausencia experimental de cargas y corrientes magnéticas. La separación de ecuaciones en homogéneas e inhomogéneas no quiere decir que se utilicen las ecuaciones por aparte, ya que en el vacío se utilizan las cuatro con la condición de hacer cero tanto la carga como la corriente.

## 1.2. Onda electromagnética

Juntando las ecuaciones de Maxwell se pueden obtener diversas situaciones, empezaremos con:  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , lo que implica que  $\mathbf{B}$  es el rotor de algún campo vectorial:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (1.6)$$

Tomamos en cuenta a continuación la ley de Faraday,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ , donde no intervienen ni corrientes ni cargas. Luego escribiendo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , donde  $\mathbf{A}$  representa al potencial vectorial magnético, y derivando posteriormente respecto a

$t$ , escribimos ahora la ley de Faraday como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.7)$$

y al no importar el orden de derivación entre la coordenada temporal y las espaciales se puede colocar la ecuación de la sig. manera:

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Ya que  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  es un vector cuyo rotor es igual a 0 este es el gradiente de alguna función escalar, por lo que definimos:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (1.9)$$

que es equivalente a:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (1.10)$$

Continuamos sustituyendo la ec. (1.10) en la ec. (1.1) se obtiene:

$$\nabla \cdot \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.11)$$

lo que equivale a:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

Ahora reexpresamos la cuarta ecuación de Maxwell y expresando a  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$  en términos de los potenciales, usando las ecuaciones (1.6) y (1.10):

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

utilizando identidades algebraicas:  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  obtenemos:

$$-c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \quad (1.14)$$

la cual no resulta simple de resolver. Ahora ya tenemos reducidas las ecuaciones de Maxwell a dos ecuaciones, las ecs. (1.12) y (1.14), aunque aún están acopladas. El desacoplamiento se puede obtener mediante las transformaciones de gauge[7], que son consecuencia de la definición de  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , la cual permite que la elección de la divergencia sea aleatoria, manteniéndose a  $\mathbf{B}$  inalterado. Las elecciones tomadas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.15)$$

y para que el campo eléctrico sea inalterado también, el potencial escalar debe transformarse simultáneamente:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (1.16)$$

La libertad en las anteriores ecuaciones, ecs. (1.15) y (1.16), implica que los potenciales elegidos cumplen con la condición:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (1.17)$$

esto desacopla el par de ecuaciones, y dejará un par de ecuaciones de ondas inhomogéneas, una en términos de  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0 c^2} \quad (1.18)$$

y la ecuación para  $\phi$ , la ec. (1.12) asume una forma similar:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.19)$$

Estas dos últimas ecuaciones nos permiten observar una separación; que con la densidad de carga se asocia  $\phi$  y con la corriente de carga a  $\mathbf{A}$ . Además estas ecuaciones son muy similares a la que describe la propagación de ondas en dirección  $\mathbf{r}$  a una rapidez  $c$ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

### 1.2.1. Ondas planas

Una onda plana se define como una onda que, en cierto instante, presenta la misma fase para todos los puntos de cada plano perpendicular a alguna dirección específica [15].

Al colocar las ecuaciones de Maxwell juntas, sucede un nuevo fenómeno notable; campos producidos por las cargas en movimiento pueden abandonar las fuentes y viajar a través del espacio. Discutiremos el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en el espacio vacío muy lejos de las fuentes que lo generan. Se analizarán estos casos cuando están en regiones sin corrientes ni cargas. Esto se obtiene cuando  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  son igual a 0, por lo que las ecuaciones (1.18) y (1.19) toman la siguiente forma:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.22)$$

Por lo que en espacio libre el potencial escalar  $\phi$  y cada componente del potencial vectorial  $\mathbf{A}$  satisfacen todos la misma ecuación matemática. Suponemos ahora que  $\psi$  representa cualquiera de las anteriores cantidades, entonces:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.23)$$

En el espacio libre, los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  también satisfacen la ecuación de onda. Esto lo podemos obtener partiendo de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre. Para realizar esto haremos las cargas y corrientes iguales a 0:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.26)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.27)$$

desglosando la primera ecuación en componentes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1.28)$$

Asumiendo que no hay variación en  $y$ ,  $t$  y  $z$ , por lo que los dos últimos terminos son 0, entonces:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (1.29)$$

lo que implica que  $E_x$  es una constante en el espacio. Considerando la ecuación (1.27) y suponiendo que no hay variación alguna en  $\mathbf{B}$ , en  $y$  ni en  $z$ , se observa que  $E_x$  también es constante en el tiempo. Se obtiene también que para la propagación de ondas planas en cualquier dirección, el campo eléctrico debe ser perpendicular a la dirección de propagación.

Resolveremos ahora un campo  $\mathbf{E}$  transversal el cual tiene sólo una componente transversal. Se considerará un campo que siempre está en la dirección  $y$ , con la componente  $z$  nula. Resolviendo este problema, se puede luego generalizar para cualquier otra componente. En este caso se considera entonces que la única componente que no es cero es la componente  $E_y$  y todas las derivadas, excepto en  $x$ , también son cero.

Consideremos ahora la ecuación (1.25) Escribiendo las componentes del rotor tenemos:

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (1.30)$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \quad (1.31)$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (1.32)$$

Ahora de la ecuación (1.25) igualando las componentes del rotor de  $\mathbf{E}$  a las de la derivada temporal de  $\mathbf{B}$ , tenemos que:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (1.34)$$

En esta última ecuación se puede observar que el campo eléctrico tiene sólo componente en  $y$  así como el campo magnético únicamente componente en  $z$ , de modo que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares entre sí y a la vez perpendiculares con la dirección de propagación.

Ahora utilizamos la última ecuación de Maxwell para espacio libre, escribiendo en componentes tenemos:

$$c^2(\nabla \times \mathbf{B})_x = c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (1.35)$$

$$c^2(\nabla \times \mathbf{B})_y = c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (1.36)$$

$$c^2(\nabla \times \mathbf{B})_z = c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2 \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (1.37)$$

recordemos que de las seis derivadas de  $\mathbf{B}$ , únicamente el término  $\frac{\partial B_z}{\partial x}$  no es igual a cero. Entonces nos queda únicamente:

$$-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (1.38)$$

Entonces concluimos que solamente una componente del campo eléctrico y una del campo magnético no son cero, y estas componentes deben satisfacer las ecuaciones (1.32) y (1.36). Estas ecuaciones se combinan derivando la primera respecto a  $x$  y la segunda respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (1.40)$$

combinando ambos resultados podemos llegar a:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.41)$$

la cual es completamente análoga a la ecuación de propagación de ondas en una dirección. Ahora colocando una dirección de propagación  $\mathbf{r}$  cualquiera, se puede llegar a una solución para la anterior:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.42)$$

donde  $E$  es una amplitud vectorial constante y compleja de la onda plana,  $\mathbf{k}$  representa un vector de propagación. Con esta solución podemos llegar a las ecuaciones de Maxwell en la forma:

$$K \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.43)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.44)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\omega}{c^2} K \mathbf{E} \quad (1.46)$$

Donde la relación de  $\mathbf{k}$  se obtiene de  $\epsilon = K\epsilon_0$  y recordando que  $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$  [15]. Aunque las soluciones de onda planas son una solución restringida de las ecuaciones de Maxwell, son muy importantes formando bases de soluciones más amplias. Puesto que las ecuaciones son lineales, una combinación lineal de las mismas (una superposición de ondas planas) es también una solución, por lo que se formarán otras soluciones haciendo una sumatoria de ondas planas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{E}(k_i, w_i) e^{-i(w_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} \quad (1.47)$$

Donde cada coeficiente  $\mathbf{E}$  dependerá de  $k_i$  y de  $w_i$ . Esta superposición de ondas planas tiene la forma de una serie de Fourier [1], por lo que podría representar cualquier solución que fuera periódica. Cada término de la serie deberá satisfacer por separado las condiciones de las ecuaciones (1.43) a la (1.46). Para una solución que no es periódica ni par, la sumatoria puede convertirse en una integral de Fourier.

### 1.3. Polarización de ondas electromagnéticas

Los vectores complejos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  pueden ser expresados de diversas maneras, una es con una cantidad real y otra imaginaria:

$$\mathbf{E} = E_r + iE_i \quad (1.48)$$

o puede expresarse al vector cuyas componentes (con respecto a los vectores base reales) son escalares complejos:

$$\mathbf{E} = E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s} + E_u \mathbf{u} \quad (1.49)$$

Tomaremos a  $\mathbf{u}$  como la dirección de propagación de la onda plana, por lo que  $E_u = 0$ , de acuerdo al resultado  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = 0$ , pero  $E_p$  y  $E_s$  son arbitrarios. El vector unitario  $\mathbf{p}$  puede elegirse en cualquier dirección perpendicular a  $\mathbf{u}$ . Además resulta más conveniente expresar las componentes complejas en forma polar:

$$\mathbf{E}_p = E_p e^{i\phi_p}, \mathbf{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \quad (1.50)$$

Se puede tener la condición de que  $\phi_s = 0$  simplemente con una elección adecuada del origen de  $t$ . Realizando esta elección tenemos:

$$\mathbf{E} = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s} \quad (1.51)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi)} + E_s \mathbf{s} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.52)$$

o la parte real es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (1.53)$$

El campo  $\mathbf{E}$  se divide en sus componentes en dos direcciones, con amplitudes reales  $E_p$  y  $E_s$ , que pueden tener cualquier valor. Por otro lado ambas componentes pueden estar oscilando fuera de fase por  $\phi$ , osea en cualquier punto dado  $r$ , el máximo de  $\mathbf{E}$  en la dirección  $\mathbf{p}$  puede alcanzarse a un tiempo distinto del máximo de  $\mathbf{E}$  en la dirección  $\mathbf{s}$ .

Podemos analizar un caso en particular, el caso en que  $r = 0$  y suponiendo que  $\phi = 0$ . Entonces:

$$\mathbf{E}(0, t) = (E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos(\omega t) \quad (1.54)$$

En este caso el campo  $\mathbf{E}$  varía  $\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ , pasando por cero, hasta  $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$  y regresando a su valor original, siempre apuntando a lo largo de la dirección  $E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$ . Este caso se conoce como polarización lineal. También se da si  $E_p = 0$  o  $E_s = 0$  y en este caso  $\phi$  es indefinido. Ahora para  $\phi = \pi$  también se tiene una polarización lineal:

$$\mathbf{E}(0, t) = (-E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos(\omega t) \quad (1.55)$$

ahora en el caso de que  $\phi = \frac{\pi}{2}$  tenemos:

$$\mathbf{E}(0, t) = E_p \mathbf{p} \sin(\omega t) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t) \quad (1.56)$$

La punta del vector  $\mathbf{E}$  sigue una trayectoria elíptica en el sentido de las manecillas del reloj. En este caso se llama polarización dextrógira. Para  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , la trayectoria es la misma pero con el sentido cambiado, llamándose polarización levógira. En el caso especial cuando  $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$  y  $E_p = E_s$  se tiene una polarización circular. Para otros valores de  $\phi$  tenemos una polarización elíptica. La amplitud compleja del vector  $\mathbf{B}$  está dada por la sig. ecuación:

$$\mathbf{B} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{E} \quad (1.57)$$

de esto se obtiene que:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.58)$$

En general de la ecuación anterior no se puede concluir que las partes reales de los anteriores vectores sean perpendiculares, pero en este caso si se cumple, como lo hemos visto anteriormente.

#### 1.4. Efecto Faraday

Una onda electromagnética linealmente polarizada atravezando una sustancia ubicada en un campo magnético  $H$  constante, en la dirección del vector de onda, sufre un cambio en la dirección del plano de polarización. El efecto Faraday queda definido por el ángulo  $\Omega$  entre los planos de polarización inicial y final, dado por[4]:

$$\Omega = VdH \quad (1.59)$$

donde  $d$  representa la longitud recorrida por la onda en la materia sometida al campo magnético de magnitud  $H$  y con  $V$  siendo la llamada constante de Verdet, la cual mide la sensibilidad magneto-óptica del medio en cuestion. Una onda linealmente polarizada se puede presentar como la superposición de dos ondas circularmente polarizadas, una derecha y otra izquierda. Si bien los vectores eléctricos  $E_1$  y  $E_2$  de ambas ondas, rotan en sentido contrario, la suma de ellos se mantiene constante sobre la dirección que define la polarización lineal. Por otro lado, la presencia de un campo magnético tiene como efecto tornar diferentes los índices de refracción de

las ondas polarizadas a derecha y a izquierda, provocando que  $n_{der}$  sea diferente a  $n_{izq}$  en una cantidad proporcional a  $H$ , por lo que ambas componentes circulares al recorrer una distancia  $d$ , sufren un desfase:

$$\Delta\Phi = \frac{w}{c}d(n_{der} - n_{izq}) \quad (1.60)$$

Debido a este desfase, la suma de los vectores eléctricos correspondientes a las dos ondas circularmente polarizadas cambiará de dirección en un ángulo  $\Omega = \frac{\Delta\Phi}{2}$ . Se concluye entonces que el efecto Faraday es explicado por la diferencia de velocidades de propagación de las ondas polarizadas a derecha y a izquierda como consecuencia de la acción del campo magnético aplicado a la sustancia. Esta variación de velocidades se asocia con el hecho de que las frecuencias de absorción y por ende de dispersión del medio, dependen de la polarización de la luz. Lejos de la banda de absorción, la constante de Verdet es aproximadamente proporcional a  $\frac{1}{\lambda^2}$ .

Este fenómeno es ampliamente conocido, y también presenta una forma integral[13]:

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi e^3}{m^2 c^2 w^2} \int_a^b n B_{||} dl \quad (1.61)$$

Donde  $B_{||}$  es la componente del campo magnético sobre la línea de visión,  $a$  el punto inicial y  $b$  el punto final del recorrido del vector de polarización. Es de notar que este fenómeno presenta una dependencia de la frecuencia de la onda  $w$ .

La rotación Faraday también es observada en distintas situaciones, tanto de Astrofísica como de Cosmología, en las cuales este origen electromagnético no puede ser considerado debido a las características del medio, por lo que su origen se atribuye a situaciones distintas a ser tratadas en el tercer capítulo.

## 2. GRAVITACIÓN

Se conoce como Gravitación a la rama de la física que se dedica al estudio de la Relatividad General desarrollada por Einstein. El desarrollo de esta surge con la incompatibilidad de la Relatividad Especial en la descripción de la gravedad, ya que esta no puede lograrse en un espacio-tiempo plano. La teoría de Relatividad General extiende los principios de la Relatividad Especial, teniendo su pieza clave en el principio de equivalencia. Una aplicación de esta teoría se da en el estudio de los lentes gravitacionales. Debido a lo extenso del tema en este capítulo se desarrollarán únicamente las ideas principales y ecuaciones aplicables en el fenómeno del efecto Faraday Gravitacional, a tratarse en el siguiente capítulo. En este capítulo se introduce también otra rama desarrollada con la Relatividad General, que presenta analogías con la teoría electromagnética clásica, el llamado Gravitoelectromagnetismo.

### 2.1. Teoría general de la relatividad

En el año 1905 Einstein publica su Teoría Especial de la Relatividad e inmediatamente después empieza a pensar en gravedad y cómo presentar una formulación relativísticamente invariante. Su trabajo le llevó los siguientes 10 años, hasta culminar con su teoría General de la Relatividad, presentada en 1915/1916. Esta es una de los principales logros científicos de todos los tiempos, una teoría derivada de la intuición física, capaz de explicar detalladamente los aspectos de la física gravitacional.

La principal idea que le llevó al desarrollo de esta teoría fue el considerar a la gravedad no como una fuerza externa, sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. Las observaciones hicieron que extendiese los principios de Relatividad Especial y los elevara hacia el principio de equivalencia.

Esta teoría ha tenido varias aplicaciones, desarrollando predicciones comprobadas experimentalmente. Entre sus principales aplicaciones se encuentran su apli-

cación en la física de los agujeros negros, cosmología, ondas gravitacionales y otras teorías gravitacionales en más dimensiones.

### 2.1.1. Principio de equivalencia

Existen muchas maneras de expresar este principio. Una manera de enunciarlo es que requiere que la masa pasiva gravitacional ( $\mathbf{F} = mg$ ) sea la misma que la masa inercial (la masa que aparece en la ec.  $\mathbf{F} = ma$ ). Si la equivalencia de masa inercial/gravitacional se mantiene, entonces no se podrían diferenciar experimentalmente dos situaciones equivalentes. Tal sería el caso si se colocara una masa dentro de un elevador (en espacio sin gravedad) que se acelera a  $9,8\mathbf{m/s^2}$ , un investigador dentro del mismo no podría distinguir entre la fuerza inercial presionando hacia abajo o el peso producido por un campo uniforme gravitacional de  $9,8\mathbf{m/s^2}$ , es decir no podría notar la diferencia entre un campo gravitacional uniforme y un marco uniformemente acelerado.

El principio puede expresarse como:

"No existe experimento que permita distinguir entre un observador en un elevador que se acelera uniformemente con aceleración  $g$ , y uno que está estacionario en un campo gravitacional con aceleración uniforme  $g$  sobre las dimensiones del elevador"[11].

Se sabe que ningún campo gravitacional "real" es uniforme sobre grandes distancias, debido a que el campo gravitacional diverge desde el centro de masa, así que las líneas de campo no son generalmente paralelas entre sí. Si se caminara en un planeta con los pies por delante, se sentiría una aceleración gravitacional mayor en los pies que en la cabeza, originando una fuerza llamada tidal.

Otra diferencia entre un campo gravitacional divergente y uno uniforme es que dado que la gravedad del espacio-tiempo se manifiesta a través de las propiedades geométricas del mismo, en general, no existe un sistema de coordenadas que cubra todo el espacio-tiempo sin encontrar singularidades en el mismo. En otras palabras,

un marco global o único sistema de coordenadas no es suficiente para describir la geometría (campo gravitacional) del espacio-tiempo. En una región lo suficientemente pequeña del espacio-tiempo se puede encontrar un sistema de coordenadas (marco inercial) tal que la métrica toma la forma de un espacio plano o de Minkowski.

Puede existir una analogía, entre la diferencia entre un campo gravitacional divergente y uno uniforme, y la diferencia entre un espacio plano y uno curvo. La métrica de un campo divergente no puede ponerse en correspondencia global con la métrica de un sistema uniformemente acelerado únicamente coinciden en un punto. El postulado formal del principio de equivalencia dice:

“Existe un plano tangente en cada punto en un campo gravitacional tal que la métrica del campo gravitacional local y sus primeras derivadas pueden ponerse en correspondencia con la métrica del plano tangente y sus primeras derivadas”[11].

### 2.1.2. Ecuación de campo de Einstein

Las ecuaciones que describen el comportamiento de partículas y de campos en un campo gravitacional involucran a la métrica y las ecuaciones que describen el comportamiento del campo gravitacional deben ser ecuaciones diferenciales covariantes. Se desea realizar una conexión entre materia y energía que lleve a una teoría gravitacional satisfactoria. De parte de la geometría se tienen suficientes herramientas, entre ellas el tensor métrico, el tensor de Riemann-Christoffel y los símbolos de Christoffel (determinados por la métrica). Para realizar la equivalencia en la parte de materia, lo único comparable es el tensor de energía-momentum  $T_{\mu\nu}$ , la cual incluye contribuciones del campo electromagnético y la materia ordinaria. Entonces lo que se busca es una igualdad entre el tensor de energía momentum en cada punto con otro tensor representando la geometría en cada punto, el tensor necesario no debe restringir muy fuerte la métrica pero debe tener una divergencia igual a cero. El tensor que presenta estas cualidades es el llamado tensor de Einstein.

En un principio esto parecía una situación inexistente, pero fue Einstein quien notó que existen tensores que pueden ser contruidos de la derivada de la métrica

que no son cero y los cuales pueden ser utilizados para escribir las ecuaciones diferenciales covariantes para la métrica. El más importante era el tensor de curvatura de Riemman y sus diversas contracciones.

Se utilizará el Tensor de Ricci (que es una contracción del Tensor de Riemman), debido a que el escalar de Ricci o de curvatura  $R$  (que representa la contracción del tensor de Ricci) es un invariante. En principio Einstein supuso que este tensor (de Ricci) se debía igualar al tensor de materia, así la materia sería la fuente de gravedad. Esto no funcionó debido a que la divergencia del tensor de Ricci no siempre es cero. Por lo que se buscó un tensor que si cumpliera esta condición, recurriéndose a las identidades de Bianchi[14]. Mediante estas se puede llegar a:

$$R^\nu_{\mu;\nu} - \frac{1}{2}R_{;\mu} = 0 = (R^\nu_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^\nu_{\mu}R)_{;\nu} \quad (2.1)$$

donde la cantidad en paréntesis es el *tensor de Einstein*, además el ; representa la derivada covariante (ver Apéndice A).

$$G^\nu_{\mu} = R^\nu_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^\nu_{\mu}R \quad (2.2)$$

Este tiene una divergencia igual a 0, y es necesario debido a que  $T_{\mu\nu}$  también tiene una divergencia 0, esto representa la conservación de la energía (un pilar en la física) y por esto se busca construir un tensor con divergencia 0 y  $G^\nu_{\mu}$  califica como el tensor geométrico, de manera que:

$$G^\nu_{\mu} = -kT^\nu_{\mu} \quad (2.3)$$

lo que equivale a:

$$R^\nu_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^\nu_{\mu}R = -kT^\nu_{\mu} \quad (2.4)$$

En este caso la constante  $k$  debe ser evaluada. Esta es la llamada ecuación de campo de Einstein, este es el postulado fundamental de la teoría gravitacional de Einstein. La ecuación se especifica con el requerimiento que la energía y el momentum son conservados covariantemente en cada punto; esto viene de la exigencia de que

se aplique la conservación de la energía en cualquier sistema inercial del plano tangente local alcanzable por el principio de equivalencia. La ec. (2.4) también puede presentarse de forma covariante, únicamente al bajar el índice del anterior tensor mixto:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Además existe la forma contravariante al subir el índice inferior del tensor mixto. Al contraer la ec. (2.4) sumando sobre  $\mu$  y  $\nu$ , la resultante ecuación escalar es:

$$R = kT \quad (2.6)$$

donde  $T = T_{\mu}^{\mu}$ .

### 2.1.3. Solución de Schwarzschild

Al aplicar la teoría gravitacional a un fenómeno dentro del sistema solar siempre se analizan fenómenos de cuerpos bajo influencias de un cuerpo gravitacional cercano. Para el espacio vacío se aplica:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.7)$$

Las soluciones a esta ecuación dan el comportamiento de los planetas, lunas, cometas, etc. La solución más importante de esta ecuación es la solución de Schwarzschild[11], la cual refleja la simetría esférica del campo que rodea un objeto gravitacional esférico. Una métrica esféricamente simétrica puede ponerse en la forma:

$$ds^2 = adr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) - bd\tau^2 \quad (2.8)$$

Debido al coeficiente que antecede a  $dr^2$ , la circunferencia no siempre será igual a  $2\pi$  veces el radio. En la ecuación anterior conviene más redefinir los coeficientes  $a$

y  $b$ :

$$ds^2 = e^A dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^B d\tau^2 \quad (2.9)$$

así los elementos diagonales del tensor métrico serán:

$$g_{\mu\nu} = (e^A, r^2, r^2 \sin^2 \theta, -e^B) \quad (2.10)$$

Con esta métrica, sólo los términos diagonales del tensor de Ricci sobreviven y se igualan a cero de acuerdo con la ec. (2.7):

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2}B'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}(B')^2 - \frac{A'}{r} = 0 \\ R_{22} &= e^{-A} \left[ 1 + \frac{1}{2}r(B' - A') \right] - 1 = 0 \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta = 0 \\ R_{44} &= -e^{B-A} \left[ \frac{1}{2}B'' - \frac{1}{4}A'B' + \frac{1}{4}(B')^2 + \frac{B'}{r} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se aclara que lo primado representa la primera derivada parcial respecto al radio  $r$ . De la primera y cuarta ecuación concluimos que:

$$A' = -B' \quad (2.12)$$

Por lo que podemos concluir que la cantidad  $A + B = \text{const.}$

Por otro lado como la métrica de la ec. (2.9) debe convertirse en la métrica de la relatividad especial (+1, +1, +1, -1) cuando  $r$  tiende a infinito, entonces tanto A como B deben ser cero en ese límite, así la constante anterior debe ser cero. Entonces  $A = -B$ . Sustituyendo esto y la ec. (2.12) en la segunda ecuación de las ec. (2.11) obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$e^B[1 + rB'] = 1 \quad (2.13)$$

Esta ecuación tiene la solución  $e^B = 1 - \frac{2m_s}{r}$ , donde  $m_s$  es una constante. Ahora combinando esto con la condición de  $A = -B$  se llega a:

$$\begin{aligned} g_{11} &= e^A = \left(1 - 2\frac{m_s}{r}\right)^{-1} \\ g_{44} &= -e^B = \left(1 - 2\frac{m_s}{r}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

por lo que entonces ahora la simetría esférica, ec. (2.9), queda de la siguiente manera:

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{m_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left(1 - 2\frac{m_s}{r}\right) d\tau^2 \quad (2.15)$$

Esta métrica es válida para un campo gravitacional débil a grandes distancias del origen. Relacionando con la forma del potencial gravitacional en un campo gravitacional débil, podemos obtener el valor de la constante  $m_s$ , el cual debe ser igual a  $GM/c^2$ , quedando ahora la métrica de la siguiente manera:

$$ds^2 = \sigma^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \sigma d\tau^2 \quad (2.16)$$

Donde:  $\sigma = (1 + 2\Phi/c^2) = (1 - 2m_s/r)$ , donde a su vez  $m_s = GM/c^2$ , y  $M$  representa la masa del objeto gravitacional. Esta solución es válida para cualquier  $r$ , excluyendo la singularidad en  $r = 2m_s$ , este punto es llamado el *horizonte de Schwarzschild*. También se excluye el punto  $r = 0$ , que es una singularidad física, la curvatura en este punto es infinita. En  $r = 2M$  la singularidad es de las coordenadas y puede ser eliminada cambiando el sistema de coordenadas.

## 2.2. Campo gravitacional débil

Debido al lenguaje geométrico y las abreviaciones utilizadas al escribir la ecuación de campo de Einstein, ec.(2.3), difícilmente se observan ecuaciones diferenciales, mucho menos algunas con propiedades familiares. La mejor forma de observarlas es aplicandolas a una situación de campo gravitacional débil[10], debido a que estamos

familiarizados con sistemas de este tipo, ya que vivimos inmersos en uno (el caso del sistema solar).

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Esta representa una métrica para una situación donde la métrica de Minkowski ( $\eta_{\mu\nu}$ ) es afectada por la presencia de una fuente gravitacional. Al ser en este caso una perturbación gravitacional débil se asume que:  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

En una situación de campo débil, la métrica se puede descomponer en una parte que es el espacio de fondo  $\eta_{ab}$  más una perturbación  $h_{ab}$  y resolver las ecuaciones de Einstein para  $h_{ab}$  como si fuera un campo sobre un espacio de fondo plano, pudiendo mantener únicamente los términos lineales sin perder mucha precisión. El formalismo resultante es llamado frecuentemente “teoría linealizada de gravedad”. Esta teoría linealizada de gravedad puede ser derivada de la teoría general de la relatividad. Los coeficientes de conexión, al linealizar en la perturbación de la métrica  $h_{\mu\nu}$  quedan [10]:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu;\beta} + h_{\beta\nu;\alpha} - h_{\alpha\beta;\nu}) \quad (2.18)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha;\beta}^{\mu} + h_{\beta;\alpha}^{\mu} - h_{\alpha\beta}^{;\mu}) \quad (2.19)$$

se utilizará ; para representar la derivada covariante.

La segunda ecuación introduce la convención utilizada usualmente al expandir en potencias de  $h_{\mu\nu}$ , acá los índices de  $h_{\mu\nu}$  son subidos o bajados utilizando  $\eta^{\mu\nu}$  y  $\eta_{\mu\nu}$ . Una lienealización similar en el tensor de Ricci lleva a:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha;\nu}^{\alpha} \quad (2.20)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\mu;\nu\alpha}^{\alpha} + h_{\nu;\mu\alpha}^{\alpha} - h_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha} - h_{;\mu\nu}) \quad (2.21)$$

donde:

$$h \equiv h_\alpha^\alpha = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

Después de más contracciones se puede formar  $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , uno encuentra que la ecuación de Einstein,  $2G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$ , se lee:

$$h_{\mu\alpha;\nu}^\alpha + h_{\nu\alpha;\mu}^\alpha - h_{\mu\nu;\alpha}^\alpha - h_{;\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}^{;\alpha\beta} - h_{;\beta}^\beta) = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

El número de términos ha aumentado al pasar de ec. (2.21) a la ec. (2.23). Esto puede contrarrestarse con una nueva definición:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.24)$$

La barra implica la operación correspondiente en otro tensor simétrico y  $h$  viene dada por la ec. (2.22). Con esta notación las ecuaciones de campo linealizadas se convierten en:

$$-\bar{h}_{\mu\nu;\alpha}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}^{;\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha;\nu}^\alpha + \bar{h}_{\nu\alpha;\mu}^\alpha = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

El primer término de esta ecuación es el usual d'Álembertiano[1] de un espacio plano y los otros términos sirven para mantener las ecuaciones como gauge-invariantes. También se sabe que sin perder generalidad uno puede imponer las condiciones de gauge:

$$\bar{h}_{;\alpha}^{\mu\alpha} = 0 \quad (2.26)$$

por lo que las ecuaciones de campo se convierten en:

$$-\bar{h}_{\mu\nu;\alpha}^\alpha = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

y ahora podemos definir a la métrica como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \quad (2.28)$$

Las condiciones gauge, las ecuaciones de campo y la definición de la métrica son las ecuaciones fundamentales de la teoría linealizada de gravedad.

### 2.3. Lentes gravitacionales

La teoría general de la relatividad ha demostrado que la presencia de gran cantidad de masa puede deformar el espacio-tiempo y así variar el recorrido de la luz. La presencia de esta masa afecta no sólo el recorrido sino también la sección eficaz del haz de luz proveniente de la fuente. Para la mayoría de propósitos prácticos se puede asumir que la acción de lente se produce por alguna inhomogeneidad de materia en algún lugar del trayecto entre la fuente y el observador, así toda la acción de deflexión se produce en una distancia única. Esta aproximación es válida únicamente cuando la velocidad relativa de la fuente, observador y lente es pequeña en relación a la velocidad de la luz,  $v \ll c$ , y si el potencial newtoniano es pequeño  $|\Phi| \ll c^2$ . Estas dos asunciones son justificables en los casos astronómicos de interés. Se asume que el espacio recorrido está descrito por la métrica de Friedmann-Robinson-Walker perturbada [16]:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - a^2(t) \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\sigma^2 \quad (2.29)$$

El recorrido de la luz al propagarse desde la fuente y pasar por el lente puede separarse en tres zonas distintas. En la primera, la luz viaja desde la fuente hasta un punto cercano al lente a través de espaciotiempo no perturbado. En la segunda zona, cercana al lente, la luz es deflectada, y finalmente en la tercera la luz viaja de nuevo por espaciotiempo no perturbado. Para estudiar la deflexión de la luz cercana al lente asumiremos un espaciotiempo de Minkowski local plano, el cual es débilmente perturbado por el potencial gravitacional newtoniano de la distribución de masa que constituye el lente.

#### 2.3.1. Índice efectivo de refracción de un campo gravitacional

Como mencionamos anteriormente la propagación de la luz cercana al lente puede ser descrita en un espaciotiempo de Minkowski local perturbado por el poten-

cial gravitacional del lente. El efecto de la curvatura del espaciotiempo en el recorrido de la luz puede ser expresado en términos de un índice de refracción  $n$  [16]:

$$n = 1 - \frac{2}{c^2}\Phi = 1 + \frac{2}{c^2} |\Phi| \quad (2.30)$$

Nótese que el potencial gravitacional es negativo si se define de tal forma que se aproxime a cero al acercarse a infinito. Ahora, la velocidad efectiva de propagación en un campo gravitacional para la luz es:

$$v = \frac{c}{n} \simeq c - \frac{2}{c} |\Phi| \quad (2.31)$$

Se puede notar que al igual que al pasar la luz por un medio distinto al vacío, la velocidad efectiva de la luz es menor que  $c$ , por lo que la luz viene con un retraso en relación a su propagación en el vacío. El tiempo total de retraso  $\Delta t$  se obtiene al integrar sobre la trayectoria de la luz de la fuente al observador:

$$\Delta t = \int_{fuente}^{obs} \frac{2}{c^3} |\Phi| \quad (2.32)$$

este es llamado el retraso Shapiro [3].

## 2.4. Gravitoelectromagnetismo

Teorías post-Newtonianas de gravedad, tal como la Relatividad General, predicen curvaturas de espacio-tiempo por corrientes de masa-energía relativas a otras masas. Esta interacción se conoce como Gravitomagnetismo [19].

Durante las enseñanzas de física en universidades, el campo electromagnético y el campo gravitacional son tratados como dos tópicos completamente separados, de hecho son diferentes; el campo gravitacional es ímplicito de las propiedades geométricas del espaciotiempo, mientras el campo electromagnético reacciona ante esta geometría como cualquier otro campo. Sin embargo es de notar que existen fuertes analogías entre las dos teorías, existe una gran analogía entre las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones linealizadas de Einstein. Se ha observado que el linealizar estas

ecuaciones (las de Einstein) en el vacío lleva a una forma casi idéntica a las ecuaciones de Maxwell de electromagnetismo. En la aproximación lineal la interacción gravitacional puede considerarse como si fuera efecto de un campo gravitoelectromagnético.

Los campos gravitoelectromagnéticos quedarán definidos de la siguiente manera [9]:

$$\mathbf{B}_g = \nabla \times \mathbf{A}_g \quad (2.33)$$

$$\mathbf{E}_g = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_g}{\partial t} \quad (2.34)$$

donde:

$$\mathbf{A}_g = \frac{G}{c} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.35)$$

$$\Phi = \frac{GM}{r} \quad (2.36)$$

acá  $M$  y  $\mathbf{J}$  son la masa y momentum angular de la fuente. Se observa que los campos gravitoelectromagnéticos tienen dimensionales de aceleración. De las anteriores definiciones se pueden generar 4 ecuaciones análogas a las electromagnéticas.

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_g = 4\pi G\rho, \quad (2.37)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_g = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}_g \right), \quad (2.38)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}_g \right) = 0, \quad (2.39)$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}_g \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_g + \frac{4\pi G}{c} \mathbf{j}, \quad (2.40)$$

Una vez establecida la analogía existen muchas consecuencias, por ejemplo la inducción gravitomagnética que se puede expresar en analogía a la ley de Faraday-Henry [19]:

$$\nabla \times \mathbf{E}_g = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}_g}{\partial t} \quad (2.41)$$

En este caso  $\mathbf{E}_g$  es la parte gravitoelectrónica del campo gravitacional, mientras  $\mathbf{B}_g$  es la parte gravitomagnética. Aparte de esta analogía se han observado otras, como el efecto Meissner gravitacional y el efecto de rotación Faraday (que será tratado con mayor detalle en el capítulo 3). Es de notar de la relación anterior que un campo gravitomagnético que varíe en el tiempo inducirá un campo gravitoelectrónico y viceversa. Se debe tener en cuenta que a diferencia de la teoría electromagnética ahora el parámetro de acoplamiento entre los campos es la masa. Pese a todas las analogías existentes debemos mencionar que la teoría de Gravitoelectromagnetismo tiene muchas limitaciones, ya que lleva a una teoría inconsistente. Esto se observa al momento de considerar condiciones energéticas, debido a que el tensor de esfuerzo-energía  $T^{\mu\nu}$  se conserva independientemente de la acción de campos gravitacionales. Aparte las fuerzas gravitacionales no realizan un trabajo significativo.

El estudio de la teoría gravitoelectromagnética puede aplicarse en fenómenos presentados en las propiedades de la luz al pasar por el campo gravitacional de objetos en rotación, donde se observan fenómenos análogos a los vistos en superconductores, únicamente que con un origen distinto.



### 3. ROTACIÓN FARADAY GRAVITACIONAL

Este es un efecto gravitacional muy conocido, que se origina por la curvatura del espaciotiempo por corrientes de masa. Consiste en la rotación del plano de polarización de un rayo de luz.

En el electromagnetismo clásico, bajo la óptica geométrica, un rayo de luz sigue una geodésica nula sin importar su estado de polarización y el vector de polarización es transportado paralelamente sobre el rayo.

Bajo la presencia de un campo gravitacional se origina una rotación en el plano de polarización, tal rotación es un análogo al efecto Faraday electromagnético, es decir la rotación que sufre un rayo al pasar por plasma en la presencia de un campo magnético. Este efecto gravitacional es conocido como la Rotación Faraday Gravitacional o efecto Skrotskii o Rytov.

#### 3.1. Derivación de la rotación Faraday gravitacional

Consideremos un espaciotiempo estacionario<sup>1</sup> definido con una métrica  $g_{\alpha\beta}$ . Tal métrica puede ser descrita por [17]:

$$ds^2 = h(dx^0 - A_\alpha dx^\alpha)^2 - dl^2 \quad (3.1)$$

donde:

$$A_\alpha \equiv g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, \quad h = g_{00} \quad (3.2)$$

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \left( -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>El espaciotiempo estacionario es el producido por un campo gravitacional constante, no necesariamente de un objeto en reposo, también puede ser un campo producido por un cuerpo axialmente simétrico rotando uniformemente sobre su eje.

Tomamos también que el plano de polarización de una onda electromagnética tiene como base a dos vectores  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{f}$ , el vector de onda, y el vector de polarización, respectivamente. Los cuadvectores correspondientes a estos trivectores tienen las siguientes relaciones:

$$k^a k_a = 0, \quad k^a f_a = 0, \quad f^a f_a = 1, \quad a = 0, 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

Ambos de estos cuadvectores son transportados paralelamente sobre una geodésica nula, es decir:

$$\frac{\partial k^a}{\partial \lambda} + \Gamma_{mn}^a k^n k^m = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial f^a}{\partial \lambda} + \Gamma_{mn}^a f^n f^m = 0 \quad (3.6)$$

Acá  $\lambda$  representa un parámetro afin que varía sobre el rayo. Utilizando una descomposición ortogonal basada en coordenadas adaptadas, los anteriores trivectores definidos en el triespacio  $\Sigma_3$  pueden ser llevados a un equivalente a las componentes contravariantes de  $k^a$  y  $f^a$ . Uno debe notar que las contrapartes covariantes de estos trivectores no son las componentes espaciales de los cuadvectores covariantes  $k_a$  y  $f_a$ , pero:

$${}^{(3)}k_b = \gamma_{\alpha\beta} {}^{(3)}k^{\alpha} = {}^{(4)}k_{\beta} + k_0 g_{\beta} \quad (3.7)$$

$${}^{(3)}f_b = \gamma_{\alpha\beta} {}^{(3)}f^{\alpha} = {}^{(4)}f_{\beta} + f_0 g_{\beta} \quad (3.8)$$

De la ec. (3.4) se puede notar que al vector de polarización se le puede agregar una constante múltiplo del vector de onda, es decir que ambos  $f_a$  y  $f'_a = f_a + Ck_a$  satisfacen dicha ecuación. Esto demuestra que existe una especie de libertad gauge al elegir  $f$  el cual permite hacer  $f_0 = 0$  sin perder generalidad. Aplicando esta descomposición y las ecuaciones de transporte paralelo, ecs. (3.5) y (3.6), se puede

arribar a las siguientes dos ecuaciones para describir la evolución de estos trivectores  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{f}$  en el rayo [13]:

$${}^3\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k} = \mathbf{L} \times \mathbf{k} + (\mathbf{E}_g \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \quad (3.9)$$

$${}^3\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{f} = \mathbf{L} \times \mathbf{f} \quad (3.10)$$

donde:

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{2}k_o \left[ \mathbf{B}_g - \frac{1}{2}(\mathbf{B}_g \cdot \mathbf{f})\mathbf{f} + \frac{1}{|\mathbf{f}|}\mathbf{E}_g \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{f})\mathbf{f} \right] \quad (3.11)$$

En este caso  $\mathbf{L}$  representa la velocidad de rotación del plano originada por efectos gravitacionales. Nótese que se han escrito los resultados en términos de los campos gravitoelectromagnéticos,  $\mathbf{E}_g$  y  $\mathbf{B}_g$ , presentados en el capítulo II. Si sólo tuviesemos el segundo término del lado derecho de la ec. (3.9) hubiese significado, por la comparación de la definición del transporte paralelo cuadrimensional, que el vector tridimensional  $\mathbf{k}$  es transportado paralelamente sobre la proyección de la geodésica nula en el espacio  $\Sigma_3$ . Pero el hecho que esté el primer término muestra que  $\mathbf{k}$  también ha sido rotado con una velocidad angular  $\mathbf{L}$ . La misma rotación le sucede al vector de polarización  $\mathbf{f}$  como puede verse en la ec. (3.10). La combinación de estas dos ecuaciones lleva al hecho de que el plano de polarización ha sido rotado por una velocidad angular  $\mathbf{L}$  sobre la geodésica nula proyectada. El ángulo de rotación sobre el vector tangente  $\hat{\mathbf{k}}$  sobre el recorrido entre la fuente y el observador está dado por:

$$\Omega = \int_{fuente}^{obs} \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{k}} d\lambda = -\frac{1}{2} \int_{fuente}^{obs} k_o \mathbf{B}_g \cdot \hat{\mathbf{k}} d\lambda \quad (3.12)$$

En este caso hemos utilizado el hecho de que  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0$ , que viene de la ec. (3.4) y la elección de que  $f_0 = 0$ . Ahora combinando las dos ecuaciones:

$$k_0 = g_{0a}k^a = h(k^0 - g_a k^a) \quad (3.13)$$

$$k^a k_a = 0 \equiv h(k^0 - g_a k^a)^2 - \gamma_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0 \quad (3.14)$$

tenemos:

$$\frac{k_0^2}{h} = \left( \frac{dl}{d\lambda} \right)^2 \quad (3.15)$$

Finalmente sutituyendo en ec. (3.12) la ec. (3.15) y colocando a  $\widehat{\mathbf{k}}dl = \mathbf{dl}$ , encontramos:

$$\Omega = -\frac{1}{2} \int_{fuente}^{obs} \sqrt{h} \mathbf{B}_g \cdot \mathbf{dl} \quad (3.16)$$

lo cual también utilizando la definición en la ec. (2.33) puede expresarse como:

$$\Omega = -\frac{1}{2} \int_{fuente}^{obs} \sqrt{h} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} \quad (3.17)$$

Donde este constituye el ángulo de rotación Faraday gravitacional, se observa que es proporcional a la integral de la componente del campo gravitomagnético sobre la línea de propagación. Tiene una forma similar al efecto Faraday electromagnético, ec. (1.61), pero la diferencia principal es que la rotación faraday gravitacional es un efecto puramente geométrico, mientras el electromagnético tiene dependencia de la frecuencia del rayo de luz.

La primera discusión de este efecto relativista fue realizada en 1957, cuando Skrotskii aplicó un método previamente desarrollado por Rytov para considerar óptica geométrica en un espacio-tiempo curvo. Es por esta razón histórica que el efecto gravitacional en la polarización de la luz es conocido como el efecto Skrotskii o efecto Rytov.

### 3.2. Límite gravitacional débil de rotación Faraday

Las hipótesis estándar de lentes gravitacionales asumen que el lente gravitacional está localizado en una pequeña región del cielo y que su efecto es débil. El deflector cambia su posición lentamente respecto al sistema de coordenadas, es decir, que la velocidad de materia es mucho menor que  $c$ , por lo que la materia se deforma muy poco. En este régimen de campo débil y aproximación a movimiento lento, el

espacio-tiempo es casi plano cerca del lente. Como puede verse en la ec.(3.17) el orden de aproximación está determinado por las componentes no diagonales de la métrica. Podemos escribir [18]:

$$ds^2 \simeq \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2} + \vartheta(\varepsilon^4)\right) c^2 dt^2 - 8cdt \frac{\mathbf{V} \cdot d\vec{x}}{c^3} - \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2} + \vartheta(\varepsilon^4)\right) d\mathbf{x}^2 \quad (3.18)$$

donde  $\varepsilon \ll 1$  denota el orden de aproximación,  $\Phi$  es el potencial Newtoniano, y  $\Phi/c^2$  es del orden  $\sim \vartheta(\varepsilon^2)$ .

$\mathbf{V}$  es un potencial vectorial que toma en cuenta el campo gravitomagnético producido por corrientes de masa. Para  $\vartheta(\varepsilon^3)$ :

$$\mathbf{V} \simeq -G \int_{R^3} \frac{(\rho \mathbf{v})(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (3.19)$$

en este caso  $\mathbf{v}$  representa el campo de velocidades de los elementos de masa del deflector.

Se asume que durante el recorrido de la luz a través del lente, el potencial en la ec. (3.19) sufre una variación insignificante, por lo que el lente puede ser tratado como estacionario.

En el límite de campo débil,  $h$  y  $\mathbf{A}$  se relacionan con el potencial gravitacional de la sig. manera [17]:

$$h \simeq 1 + 2\frac{\Phi}{c^2} + \vartheta(\varepsilon^4) \quad (3.20)$$

$$A_i \simeq \frac{4}{c^3} V_i + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.21)$$

y la longitud de arco propia está dada por:

$$dl_p \simeq \left\{ 1 - \frac{\Phi}{c^2} + \vartheta(\varepsilon^3) \right\} dl_E \quad (3.22)$$

donde  $dl_E \equiv \sqrt{\delta_{ij}dx^i dx^j}$ , es la longitud de arco Euclideana. Insertando ahora las ecuaciones (3.20), (3.21) y (3.22) en la ec. (3.17) tenemos:

$$\Omega = -\frac{2}{c^3} \int_p \nabla \times \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl_E + \vartheta(\varepsilon^5) \cdot dl \quad (3.23)$$

en este caso  $p$  constituye la proyección espacial de la geodésica nula y  $\hat{\mathbf{k}}$  es el vector unitario tangente.

Es útil el utilizar las coordenadas espaciales ortogonales  $(l, \xi_1, \xi_2) \equiv (l, \xi)$ , centradas en el lente y tal que el eje  $l$  esté sobre la dirección del rayo proveniente sin perturbación  $\mathbf{e}_{in}$ . El plano del lente  $(\xi_1, \xi_2)$ , corresponde a  $l = 0$ . El vector de posición tridimensional del rayo de luz  $\mathbf{x}$  puede ser escrito como  $\mathbf{x} = \xi + l\mathbf{e}_{in}$ .

Para calcular el efecto Skrotskii del orden de  $\vartheta(\varepsilon^3)$  podemos adoptar la aproximación de Born, la cual asume que los rayos de radiación electromagnética se propagan sobre líneas rectas, es decir que el curvamiento de la luz puede ser desechado. La resolución de la integral sobre la línea de visión (l.o.s, por sus siglas en inglés) es suficientemente precisa para evaluar la contribución principal a la rotación neta. Para este orden podemos utilizar la métrica de Minkowski sin perturbación y un vector unitario de propagación de la señal. La rotación Faraday gravitacional de este orden es:

$$\Omega = -\frac{2}{c^3} \int_{l.o.s} \nabla \times \mathbf{V}|_{l.o.s} dl_E + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.24)$$

### 3.3. Rotación Faraday gravitacional en un espacio NUT

No existe una rotación Faraday Gravitacional inducida por un espacio NUT(Newman-Tamburino-Unti), donde el espacio NUT[8] está descrito por la siguiente métrica:

$$ds^2 = f(r)(dt - 2l \cos \theta d\phi)^2 - f(r)^{-1} dr^2 - (r^2 + l^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.25)$$

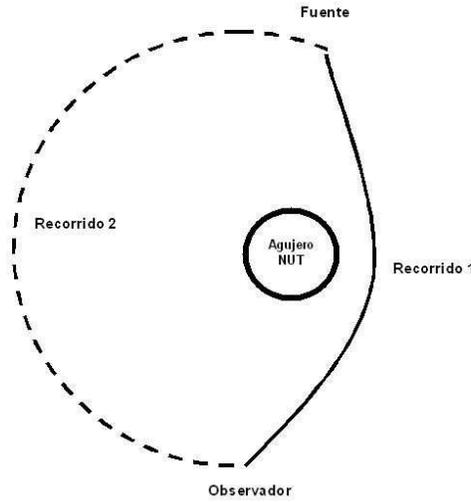
donde:

$$f(r) = 1 - \frac{2(mr + l^2)}{(r^2 + l^2)} \quad (3.26)$$

además  $m$  representa la masa y  $l$  es el llamado parámetro NUT, conocido también como monopolo gravitomagnético[8].

Demostraremos lo anterior mediante lo siguiente. Tomemos ahora un recorrido cerrado  $C$  alrededor de un agujero NUT el cual consiste en dos trayectorias (véase figura): la trayectoria 1, una geodésica nula la cual pasa cerca del agujero negro, y la trayectoria 2, que pasa lo suficientemente lejos para que el efecto del campo gravitacional (incluyendo la rotación Faraday, debido al hecho que  $\mathbf{B}_g \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ ) de los rayos de luz sea despreciable.

Agujero negro NUT



Ahora utilizando el teorema de Stokes[1], se puede escribir la ec. (3.16) en la forma:

$$\Omega = -\frac{1}{2} \oint_C (\sqrt{h}\mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{2} \int_S \nabla \times (\sqrt{h}\mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.27)$$

lo que puede ser transformado a:

$$-\frac{1}{2} \int_1 (\sqrt{h}\mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{l} - \frac{1}{2} \int_2 (\sqrt{h}\mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{l} = - \int_S (E_g \times \sqrt{h}\mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.28)$$

El segundo término del lado izquierdo de la anterior ecuación es cero por construcción. Por otro lado para los campos Gravitoelectromagnéticos en un espacio NUT tenemos:

$$\mathbf{E}_g = -\frac{1}{2}\partial_r [\ln f(r)] \hat{\mathbf{r}} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{B}_g = \frac{2lf(r)^{1/2}}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.30)$$

Los cuales juntos muestran que el lado derecho de la ec. (3.28) es también cero, por lo que:

$$-\frac{1}{2} \int_1 (\sqrt{h}\mathbf{B}_g) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.31)$$

lo que nos demuestra que no existe efecto Faraday gravitacional en rayos de luz que pasan cerca de un agujero negro NUT.

### 3.4. Rotación Faraday gravitacional en una métrica de Kerr

Se ha observado que cuando rayos de luz pasan por la región de vacío fuera de la materia en rotación sufre una rotación en su plano de polarización. Este efecto Faraday en una métrica de Kerr puede ser estudiado en dos casos diferentes: cuando la órbita está en el plano ecuatorial, es decir para  $\theta = \pi/2$ ; y una órbita más general la cual intersecta el plano ecuatorial y es simétrico respecto a esto.

#### 3.4.1. Órbitas en planos ecuatoriales

En este caso utilizando las definiciones de  $\mathbf{E}_g$  y  $\mathbf{B}_g$  y la ec. (3.28) uno puede ver que el análogo gravitacional del vector de Poynting definido por  $\mathbf{E}_g \times \sqrt{h}\mathbf{B}_g$  tiene una única componente, la cual está sobre la dirección  $\phi$  por lo que es normal al plano de la órbita( $r, \theta$ ), el cual lleva el caso especial que acá no existe efecto Faraday gravitacional en los rayos de luz[13].

### 3.4.2. Órbita simétrica respecto al plano ecuatorial

En este caso necesitamos encontrar la órbita y veremos que únicamente se necesita encontrar la órbita de orden cero en  $a/r$  y  $m/r$ , es decir una aproximación a línea recta.

Escribiendo la métrica de Kerr, ec. (3.1) en coordenadas Boyer-Lindquist se puede ver que:

$$A = A_\phi = \frac{2amr \sin^2 \theta}{2mr - \rho^2} \quad (3.32)$$

de la cual tenemos que:

$$\mathbf{B}_g^r = \frac{2amr \sin 2\theta [2mr - r^2 - a^2]}{\sqrt{\gamma}(2mr - r^2 - a^2 \cos^2 \theta)} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{B}_g^\theta = \frac{2am \sin^2 \theta (a^2 \cos^2 \theta - r^2)}{\sqrt{\gamma}(2mr - r^2 - a^2 \cos^2 \theta)^2} \quad (3.34)$$

donde  $\gamma = \det \gamma_{\alpha\beta}$  y  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$

Procederemos ahora a redefinir los campos gravitoelectromagnéticos en términos de la métrica de Kerr, quedando el campo gravitoelectrónico de la siguiente manera [13]:

$$\mathbf{E}_g = -\nabla \ln h^{1/2} = -\frac{1}{2} \frac{\nabla h}{h} \quad (3.35)$$

utilizando esta anterior definición, tenemos que:

$$\mathbf{E}_g^r = \frac{\Delta m (a^2 \cos^2 \theta - r^2)}{\rho^4 (\rho^2 - 2mr)} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{E}_g^\theta = \frac{rma^2 \sin 2\theta}{\rho^4 (\rho^2 - 2mr)} \quad (3.37)$$

en este caso  $\Delta = r^2 + a^2 - 2mr$ . Substituyendo las anteriores definiciones del campo en la ec. (3.28) y colocando  $\mu = \cos \theta$  tenemos:

$$\Omega = - \int_S (\mathbf{E}_g \times \sqrt{h} \mathbf{B}_g)_\phi dS^\phi \quad (3.38)$$

$$\Omega = 2am^2 \int_{-\mu_0}^{\mu_0} \int_{r_{ORB}(\mu)}^{\infty} \frac{drd\mu}{(r^2 + a^2\mu^2 - 2mr)^2} \quad (3.39)$$

donde  $r_{ORB}(\mu)$  es la ecuación de la proyección de la órbita en el plano  $(r, \theta)$  (ver apéndice B).

Para encontrar el menor orden del efecto Faraday podemos calcular la integral anterior despreciando el término  $a^2/r^2$  y  $m/r$ . En cuyo caso tenemos:

$$\Omega = 2am^2 \int_{-\mu_0}^{\mu_0} \int_{r_{ORB}(\mu)}^{\infty} \frac{1}{r^4} drd\mu = -\frac{4}{3}am^2 \int_0^{\mu_0} \frac{1}{r_{ORB}^3} d\mu \quad (3.40)$$

Para la evaluación de la anterior integral utilizaremos la proyección de una órbita en el plano  $(r, \theta)$  definida por:

$$r_{ORB} = \frac{r_{min}}{\sqrt{1 - (r_{min}^2/\eta)\cos^2\theta}} \quad (3.41)$$

en la cual  $\eta$  es una constante del movimiento (ver Apéndice B) elegida  $\eta > 0$ . Entonces ahora la integral quedará como:

$$\Omega = -\frac{4}{3}am^2 \int_{\mu_0=\sqrt{\eta}/r_{min}}^0 \left(1 - \frac{r_{min}^2}{\eta}\mu^2\right)^{3/2} d\mu \quad (3.42)$$

$$\Omega = (1/4)\pi \cos\theta_0 \frac{am^2}{r_{min}^3} \quad (3.43)$$

y esta es la expresión de tercer orden para el efecto Faraday en este caso.

### 3.5. Observaciones en sistemas astrofísicos

Alta calidad de datos provenientes de sistemas astrofísicos llegan a nosotros, con flujos de alta densidad en cuanto a información. Parte de la información que nos llega es la polarización, en sí su ángulo de polarización. Existen muchos datos, principalmente en frecuencias de radio donde se pueden observar imágenes múltiples, tal es el caso del sistema B0218+357.

En esta sección proveeremos de fórmulas explícitas para calcular la Rotación Faraday Gravitacional en sistemas astrofísicos de importancia.

### 3.5.1. Sistema de lentes

Un sistema de lentes puntuales[16], que se mueven a velocidad constante inducen una rotación Faraday gravitacional. Las estrellas en movimiento, donde las velocidades pueden ser tratadas como lentas, constituyen una representación de dicho sistema.

El potencial gravitomagnético generado por una lente puntual de masa  $M$ , con un vector de posición  $\mathbf{x}_i$ , moviéndose a velocidad constante  $\mathbf{v}_i$  se reduce a[17]:

$$\mathbf{V}_i(\mathbf{x}) \simeq -GM_i \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \quad (3.44)$$

El ángulo de rotación Faraday para un sistema de  $N$  lentes que se mueven está dado por:

$$\Omega = -\frac{2}{c^3} \sum_i^N \int_{l.o.s} \nabla \times \mathbf{V}_i|_{l.o.s} dl_E + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.45)$$

$$\Omega = -\frac{4G}{c^3} \sum_i^N M_i \frac{\Delta\xi_{(i)1}v_{(i)2} - \Delta\xi_{(i)2}v_{(i)1}}{|\Delta\xi_{(i)}|^2} + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.46)$$

donde  $\Delta\xi_{(i)} \equiv \xi - \xi_{(i)}$ . Al nivel más bajo únicamente la proyección sobre la línea de visual del momento angular total entra en efecto.

### 3.5.2. Corteza rotando

El potencial gravitomagnético toma una forma muy simple en el caso de una distribución de simetría esférica de materia en rotación rígida. Nos limitaremos a una rotación lenta para que la deformación causada por esta sea despreciable y el cuerpo tenga casi simetría esférica. Tomando el centro de la fuente como el origen de un sistema inercial de fondo tenemos:

$$\mathbf{V} = -\frac{4\pi}{3}G \left\{ \frac{1}{x^3} \int_0^x \rho(r)r^4 dr + \int_x^{+\infty} \rho(r)r dr \right\} \mathbf{w} \times \mathbf{x} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{V} = -\frac{G}{2}\mathbf{J}(x) \times \frac{\mathbf{x}}{x^3} - \frac{4\pi}{3}G \left( \int_x^{+\infty} \rho(r)rdr \right) \mathbf{w} \times \mathbf{x} \quad (3.48)$$

donde  $\mathbf{w} = \text{const}$  es la velocidad angular y  $\mathbf{J}(x) = \frac{8\pi}{3} \left( \int_0^x \rho(r)r^4dr \right) \mathbf{w}$  es la contribución de momentum angular de la materia en un radio  $x = |\mathbf{x}|$ .

La teoría gravitacional de Einstein predice un fenómeno peculiar dentro de una corteza rotando. Es interesante calcular el potencial gravitomagnético para tal sistema. El potencial gravitomagnético, ec. (3.48), dentro de una corteza esférica de masa  $M$  y radio  $R$ , que rota con una frecuencia constante, se reduce a:

$$\mathbf{V}^{In}(\mathbf{x}) \simeq -\frac{GM}{3R}\mathbf{w} \times \mathbf{x} \quad (3.49)$$

Esta se da en el interior de la corteza, mientras que para la parte exterior, ( $x > R$ ), se obtiene:

$$\mathbf{V}^{Out}(\mathbf{x}) \simeq -\frac{GM R^2}{3} \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{x}}{x^3} = -\frac{G}{2} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{x}}{x^3} \quad (3.50)$$

en la cual  $\mathbf{J} = (2/3)MR^2\mathbf{w}$ . Aplicando el rotor a ambos se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{V}^{In}(\mathbf{x}) \simeq -\frac{2GM}{3R}\mathbf{w} \quad (3.51)$$

$$\nabla \times \mathbf{V}^{Out}(\mathbf{x}) \simeq -\frac{G}{2} \left[ \frac{\mathbf{J} - 3(\mathbf{J} \cdot \hat{x})\hat{x}}{x^3} \right] \quad (3.52)$$

Consideremos un rayo de luz el cual entra a la corteza, es decir que tiene un parámetro de impacto  $\xi \leq R$ ; el rayo de luz entra y deja la esfera a  $l_{in} = -\sqrt{R^2 - \xi^2}$  y  $l_{out} = +\sqrt{R^2 - \xi^2}$ , respectivamente. La rotación neta del vector de polarización será:

$$\Omega \simeq -\frac{2}{c^3} \left\{ \int_{-\infty}^{l_{\text{in}}} \nabla \times \mathbf{V}^{\text{out}}|_{\text{l.o.s}} dl_E + \int_{l_{\text{in}}}^{l_{\text{out}}} \nabla \times \mathbf{V}^{\text{in}}|_{\text{l.o.s}} dl_E + \int_{l_{\text{out}}}^{+\infty} \nabla \times \mathbf{V}^{\text{out}}|_{\text{l.o.s}} dl_E \right\} + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.53)$$

$$\Omega = \frac{4GM}{c^3} w_{\text{l.o.s}} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{R}\right)^2} + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.54)$$

El resultado varía si la velocidad angular se encuentra en el plano del lente ya que la corteza actúa como lente gravitacional. También se tiene que la rotación Faraday Gravitacional fuera de un cuerpo rotando, cuando la luz no entra en el lente, es  $\sim (G^2 M_{TOT}/c^5)(J_{\text{l.o.s}}/\xi^3)$ , es decir del orden de  $\vartheta(\varepsilon^5)$ , el efecto sobre el rayo de luz puede ser despreciado en este orden de aproximación.

El caso de una esfera rotante externa de espesor finito puede ser fácilmente resuelto únicamente integrando el resultado en la ec. (3.53). Cada corteza infinitesimal de radio  $r'$  con masa  $dM = 4\pi\rho(r')r'^2 dr'$  y velocidad angular  $w(r')$  contribuye con un ángulo:

$$d\Omega \simeq \frac{16\pi G}{c^3} \rho(r') w_{\text{l.o.s}}(r') \sqrt{r'^2 - \xi^2} r' dr' + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.55)$$

Integrando desde el parámetro de impacto  $\xi$ , al radio externo de la corteza  $R$ , tenemos la rotación Faraday Gravitacional total que sufre un rayo debido al giro de la corteza externa. Tenemos:

$$\Omega = \int d\Omega \quad (3.56)$$

$$\Omega = \frac{16\pi G}{c^3} \int_{\xi}^R \rho(r') w_{\text{l.o.s}}(r') \sqrt{r'^2 - \xi^2} r' dr' + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.57)$$

Consideremos una esfera homogénea de densidad constante en rotación rígida. El plano de polarización de un rayo de luz, que penetre a este cuerpo, es rotado en:

$$\Omega = \frac{16\pi G}{c^3} \rho w_{\text{l.o.s}} (R^2 - \xi^2)^{3/2} + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.58)$$

$$\Omega = \frac{10G}{c^3} J_{l.o.s} \frac{(R^2 - \xi^2)^{3/2}}{R^5} + \vartheta(\varepsilon^5) \quad (3.59)$$

donde  $J_{l.o.s}$  es la componente sobre la línea de visión del momentum angular total de la esfera.

## CONCLUSIONES

1. El llamado efecto Faraday gravitacional no es equivalente al efecto Faraday electromagnético, únicamente constituye un análogo del mismo, ya que ambos tienen orígenes distintos; el electromagnético es debido a la interacción del plano de polarización con un campo magnético, mientras el gravitacional es debido a las propiedades geométricas del espacio-tiempo. Ambos se explican mediante distintas teorías físicas.
2. La rotación Faraday electromagnética tiene dependencia de la frecuencia del rayo de luz que atraviesa el medio, y es explicado por la diferencia de velocidades de propagación de ondas con distinta polarización, a derecha e izquierda, que constituyen el haz y su interacción con el campo magnético aplicado.
3. El gravitoelectromagnetismo estudia fenómenos análogos a los electromagnéticos con un origen gravitacional. Se explica mediante la existencia de corrientes de masa-energía, entre dos objetos masivos. Es una teoría ajena al electromagnetismo y a la Relatividad, que combina efectos de una y causas de la otra, sin embargo, es una teoría con limitantes, ya que lleva a inconsistencias.
4. La rotación Faraday gravitacional depende de la geometría del espacio-tiempo, por lo que su comportamiento no será el mismo en los distintos sistemas astrofísicos, destacando el hecho que no existirá rotación Faraday en un agujero NUT.



## RECOMENDACIONES

1. Presentar de manera clara los conceptos de los fenómenos análogos al estudiar analogías entre distintas teorías, separando los fundamentos e ideas de estas y resaltando que el hecho que sean similares no constituye que sean equivalentes, en este caso la rotación del plano de polarización por origen electromagnético es distinta a la de origen gravitacional, observándose con el hecho que el electromagnético tiene dependencia de la frecuencia de la onda mientras el gravitacional únicamente depende de la geometría del espacio-tiempo.
2. Desarrollar estudios posteriores con los datos experimentales obtenidos para una mayor comprensión del fenómeno gravitacional, y aprovechar los mismos para determinar características propias del sistema astrofísico del que provienen.



# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Arfken, George. **Mathematical Methods for Physicists**. 3ra. edición. Academic Press, Estados Unidos, 1985. 985pps.
- [2] Blau, Matthias. **Lectures on General Relativity**.  
<http://www.unine.ch/phys/string/lecturesGR.ps.gz>
- [3] Ciufolini et al. **On the Gravitomagnetic Time Delay**. arXiv:gr-qc/0210015 v2. 2002. 16pps.
- [4] Epele, L. Fanchiotti, H. García, C. **Electrodinámica**. Alianza Editorial S.A., España, 1996. 327pps.
- [5] Feynman, R., Leighton, R. y Sands, M. **The Feynman LECTURES ON PHYSICS, Mainly Electromagnetism and Matter, Volume II. (Versión en español: Feynman, FÍSICA, Volumen II: Electromagnetismo y Materia**. Edición Bilingüe. Fondo Educativo Interamericano, S.A. Estados Unidos, 1972. 814pps.
- [6] Jackson, John. **Classical Electrodynamics**. 2da Edición. John Wiley & Sons, Estados Unidos, 1962. 848pps.
- [7] Landau, L., Lifshitz, E. **The Classical Theory of Fields, Vol. 2** 4ta Edición. Butterworth Heinemann, Estados Unidos, 1999. 401pps.
- [8] Manko et al. **Interpretation of a NUT Solution**. Springer Netherlands, volume 24, number 5, 2005. 23pps.
- [9] Mashhoon, Bahram. **GRAVITOELECTROMAGNETISM, a Brief Review**. Arxiv preprint gr-qc/0311030, 2003.15pps.
- [10] Misner, C., Thorne, K.S., Wheeler, J.A., **Gravitation**. Freeman and Company, Estados Unidos, 1973. 1279pps. 1973, Estados Unidos.

- [11] Mould, Richard. **Basic Relativity**. Springer-Verlag, Estados Unidos, 1995. 492pps.
- [12] Narayan, Ramesh. **Lectures on Gravitational Lensing**. Arxiv preprint astro-ph/9606001, 1996. 77pps.
- [13] Nouri-Zonoz, M. **Gravitoelectromagnetic Approach to the Gravitational Faraday Rotation in Stationary Spacetimes**. Phys. Rev. D 60, 024013. 1999. 5pps.
- [14] Pazos, Enrique. **Aplicación del Formalismo Lagrangiano ADM a un Modelo Cosmológico**. Tesis Lic. en Física Aplicada. Universidad de San Carlos de Guatemala, Facultad de Ingeniería, 2000. 56pp.
- [15] Reitz, J., Milford, F., Christy, R. **Fundamentos de la Teoría Electromagnética**. 4ta Edición. Edit Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1996. 641pps.
- [16] Schneider, P., Ehlers, J., Falco, E.. **Gravitational Lenses**. Springer-Verlag, Estados Unidos. 1999. 576pps.
- [17] Sereno, Mauro. **Gravitational Faraday Rotation in a Weak Gravitational Field**. Phys. Rev. D 69, 087501. 2004. 4pps.
- [18] Sereno, M. **Detecting Gravito-Magnetism with Rotation of Polarization by a Gravitational Lens**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 357:4,2005. 5pps.
- [19] Tartaglia et al. **Gravito-Electromagnetism versus Electromagnetism**. Eur. J. Phys. 25. 2004. 7pps.

# APÉNDICE A:

## DERIVADA COVARIANTE

Consideremos un vector contravariante  $A^{i'}$  en el sistema cartesiano que se transforma a un sistema no cartesiano de la siguiente manera:

$$A^i = a_{i'}^i A^{i'} \quad (1)$$

Tomando la derivada ordinaria obtenemos:

$$dA^i = d(a_{i'}^i)A^{i'} + a_{i'}^i dA^{i'} \quad (2)$$

Si el vector cartesiano no cambia sus componentes en cualquier forma  $dA^{i'} = 0$  y  $dA^i$  es debido únicamente al desplazamiento paralelo, entonces  $d(a_{i'}^i)A^{i'} = \delta A^i$ . Por lo que ahora tenemos:

$$dA^i = \delta A^i + a_{i'}^i dA^{i'} \quad (3)$$

$$a_{i'}^i dA^{i'} = dA^i - \delta A^i \quad (4)$$

multiplicando la ecuación por la transformación inversa nos da:

$$dA^{i'} = a_i^{i'} (dA^i - \delta A^i) \quad (5)$$

Una ecuación similar puede tenerse para un sistema estrellado,  $dA^{i'} = a_{i^*}^{i'} (dA^{i^*} - \delta A^{i^*})$ , que al igualarlos obtenemos:

$$a_i^{i'} (dA^i - \delta A^i) = a_{i^*}^{i'} (dA^{i^*} - \delta A^{i^*}) \quad (6)$$

$$a_{i'}^j a_i^{i'} (dA^i - \delta A^i) = a_{i^*}^j a_{i^*}^{i'} (dA^{i^*} - \delta A^{i^*}) \quad (7)$$

$$(dA^i - \delta A^i) = \alpha_{i*}^j (dA^{i*} - \delta A^{i*}) \quad (8)$$

La primera de las cantidades anteriores en paréntesis se transforma de un sistema de coordenadas a otro como un vector, así que este es un vector. Se designa como:

$$DA^i = dA^i - \delta A^i \quad (9)$$

Este vector diferencial representa el cambio  $dA^i$  que se observa en el sistema de coordenadas menos el cambio  $\delta A^i$  debido al desplazamiento paralelo. Esta diferencia da el cambio en el vector debido a las características curvilíneas del sistema de coordenadas, dejando el cambio *real* en el vector. La ec. (9) escribirse como:

$$DA^i = \left( \frac{dA^i}{dx^j} + \Gamma_{jk}^i \right) dx^j \quad (10)$$

la cantidad entre paréntesis es la llamada *derivada covariante* y es un tensor mixto.

La ecuación anterior puede ser expresada como:

$$A_{;j}^i = A_{,j}^i + \Gamma_{jk}^i A^k \quad (11)$$

Donde la coma representa la derivada ordinaria, el punto y coma representa la derivada covariante y esto puede expresarse de manera similar para un vector covariante. Todos estos conceptos pueden generalizarse para la geometría del espacio-tiempo, simplemente extendiendo todo a cuatro dimensiones, lo cual no es muy complicado.

## APÉNDICE B: PROYECCIÓN DE LA ÓRBITA

La ecuación que gobierna la proyección de una órbita en el plano  $(r, \theta)$  para la métrica de Kerr está dada por:

$$\int^r \frac{dr}{\sqrt{r^4 + (a^2 - \xi^2 - \eta)r^2 + 2m[\eta + (\xi - a)^2]r - a^2\eta}} = \quad (1)$$

$$= \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\eta + a^2 \cos^2 \theta - \xi^2 \cot^2 \theta}} \quad (2)$$

Donde  $\xi$  y  $\eta$  son constantes de movimiento y elegimos el caso para  $\eta > 0$ , que corresponde a la geodésica nula que intersecta el plano ecuatorial y es simétrico respecto a este. Desarrollamos las anteriores integrales para el caso en que  $a/r \ll 1$  y  $m/r \ll 1$ , es decir para deflexiones débiles. Primero evaluamos el lado izquierdo de la ecuación anterior, el cual puede reescribirse descartando los términos pequeños:

$$\int dr/r^2 \sqrt{1 - r_{min}^2/r^2} = (1/r_{min}) \arccos(r_{min}/r) \quad (3)$$

Donde  $r_{min} = \sqrt{\xi^2 + \eta}$  es el término principal en el desarrollo de la expansión de la raíz de  $r^4 + (a^2 - \xi^2 - \eta)r^2 + 2m[\eta + (\xi - a)^2]r - a^2\eta = 0$  para pequeñas deflexiones. Ahora evaluamos el lado derecho (LD) de la misma ecuación, para el mismo límite, y esta puede escribirse como:

$$LD = - \int \frac{d\mu}{\sqrt{\eta + \mu^2(a^2 - \xi^2 - \eta) - a^2\mu^4}} \quad (4)$$

Ahora utilizando el hecho de que  $a/r_{min} \ll 1$  y  $r_{min} = \sqrt{\xi^2 + \eta}$  se puede aproximar para evaluar la integral anterior, quedando:

$$LD = - \int \frac{d\mu}{\sqrt{\eta - \mu^2 r_{min}^2}} = -(1/r_{min}) \arcsen\left(\mu \sqrt{r_{min}^2/\eta}\right) \quad (5)$$

igualando las ecs. (2) y (5) tenemos:

$$r_{orb} = \frac{r_{min}}{\sqrt{1 - (r_{min}^2/\eta) \cos^2 \theta}} \quad (6)$$

Que es la proyección de la órbita en el plano  $(r, \theta)$  para pequeñas deflexiones y en el caso, como este, donde no hay deflexiones porque no hay ningún término dependiente de  $m$  o  $a$ . Se puede observar también que  $r \rightarrow \infty$  cuando  $\cos \theta = \pm \sqrt{\eta}/r_{min}$  donde los signos más y menos corresponden a los ángulos de posición  $\theta_{obs}$  y  $\theta_{fuente}$  del observador y la fuente, respectivamente.