Modelación Matemática

Enrique Pazos

Índice

1. Movimiento con resistencia del aire

Un proyectil de masa m que se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 está sujeto a la fuerza de gravedad $F_g = -mg$ y una fuerza de fricción debida al aire que puede ser proporcional a la velocidad

$$F_r = -kv, \tag{1}$$

o al cuadrado de la velocidad

$$F_r = -kv^2. \tag{2}$$

Cuando las velocidades del proyectil son pequeñas podemos utilizar el modelo lineal Ec. (1). Sin embargo, cuando las velocidades son altas, experimentalmente se ha encontrado que un modelo de resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad Ec. (2) es más certero.

El movimiento del proyectil está descrita por la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} mv'(t) &= -mg - F_r \qquad (3)\\ my''(t) &= -mg - F_r, \qquad (4)\end{aligned}$$

donde $v(t) = y'(t)$.

Vamos a resolver numéricamente la segunda ecuación. Asumiendo los siguientes valores: $m = 0{,}01$ Kg y $g = 9{,}8$ m/s^2 y el modelo cuadrático Ec. (2) para la resistencia del aire. Lo que desconocemos es la constante k. Por esa razón lo que haremos es resolver la Ec. (4) para diferentes valores de k hasta encontrar un valor que se asemeje al comportamiento que uno podría esperar en una situación real. Esto nos dará una estimación de k, cuyo valor nos es totalmente desconocido.

La Ec. (4) se puede escribir como

$$my'' = -mg - ky'|y'|. \qquad (5)$$

El valor absoluto se hace necesario puesto que necesitamos que el signo de F_r sea el negativo de la velocidad. En otras palabras, que la resistencia del aire se oponga al movimiento de la partícula.

La Ec. (5) se puede resolver fácilmente utilizando un método numérico como Runge-Kutta, que se encuentra disponible en muchos lenguajes de programación. También podemos utilizar Mathematica para tal propósito. Esta última opción es la forma más rápida de resolver el problema. Nuestra ecuación se puede resolver de la siguiente forma

```
m = 0.01; k = 0.000005; g = 9.8;
NDSolve[{m y''[t] == -m g - k y'[t] Abs[y'[t]], y[0] == 0,
    y'[0] == 500}, y, {t, 0, 100}]
```

Aquí hemos utilizado las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 500$, es decir, que la altura inicial de la partícula es cero y que su velocidad inicial es 500 m/s.

En la Fig. (1) se muestra una de las soluciones obtenidas, correspondiente al valor $k = 5 \times 10^{-6}$ N/(m/s)^2. Con este valor se logra una pequeña desviación de la solución que desprecia la resistencia del aire. Valores más grandes de k cambian significativamente el aspecto de la solución.

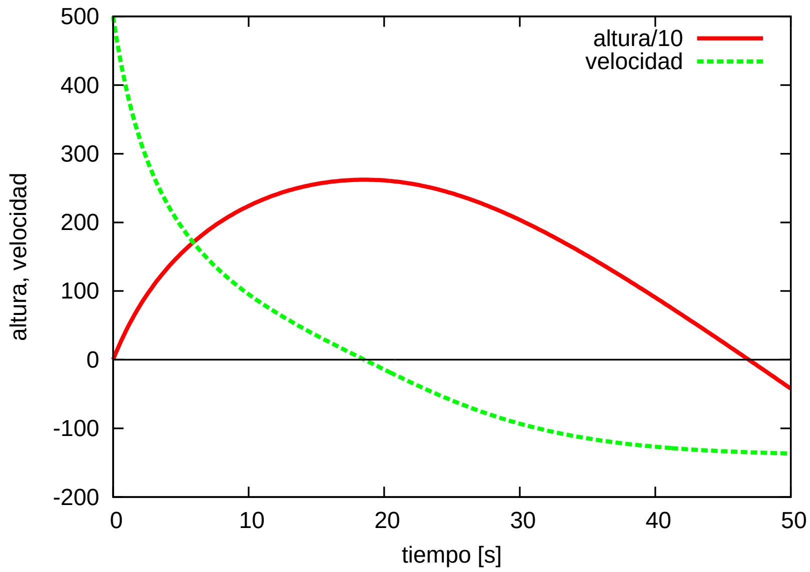

Figura 1: Posición (disminuida un factor de 10) y velocidad en función del tiempo.

1.1. Ejercicios

1. Comparar el modelo cuadrático de resistencia del aire con el modelo lineal, repitiendo lo que se hizo anteriormente pero resolviendo ahora la Ec. (1).

2. En el modelo de tiro vertical sin resistencia del aire, el tiempo que tarda un objeto en alcanzar su altura máxima es el mismo que tarde en caer. Asímismo, la velocidad inicial de salida es igual que la velocidad final al caer. Compruebe estos resultados.

3. Considerando ahora el movimiento de tiro parabólico con resistencia del aire, investigue qué sucede con el tiempo que tarda la partícula en alcanzar la altura máxima y el tiempo que tarde en caer. ¿Cuál es mayor? Realice el mismo análisis para saber si la velocidad inicial con que sube es igual a la velocidad final con que cae. ¿Cuál de ellas es mayor? Verifique estos resultados para el modelo lineal y cuadrático de resistencia del aire.

4. Considere la ecuación del tiro parabólico para el caso de una partícula

lanzada horizontalmente con una cierta velocidad inicial y desde cierta altura. Para una altura dada, determine cuál es el alcance horizontal de la partícula para diferentes velocidades iniciales. ¿Existe un rango de velocidades para el cuál el modelo del tiro parabólico es aplicable? ¿Qué sucede cuando la velocidad es muy grande? ¿Cuál sería la extensión del modelo para poder describir el movimiento de la partícula de forma correcta?

2. Oscilador Armónico

El oscilador armónico es un modelo simple pero de mucho alcande de diferentes fenómenos de vibración. La ecuación general de un oscilador armónico puede incluir fricción y una fuerza externa que actúa sobre el mismo. La ecuación de movimiento de un oscilador armónico amortiguado forzado es

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = f(t) \tag{6}$$

Aquí, m es la masa de la partícula, b es la constante de fricción, k es la constante elástica del resorte, $f(t)$ es una fuerza externa que actúa sobre la partícula y $x(t)$ es la posición de la misma en cualquier instante de tiempo.

Para ciertas formas de la fuerza externa $f(t)$ es posible encontrar soluciones exactas para la Ec. (6).

La importancia de este sencillo modelo radica en que muchas ecuaciones más sofisticadas tienen soluciones que se pueden expresar como osciladores armónicos.

2.1. Pulsaciones

Cuando ignoramos la fricción, podemos analizar un sistema forzado haciendo $b = 0$ en la Ec. (6). Asumiendo una fuerza externa de la forma $f(t) = f_0 \cos \gamma t$, tenemos que

$$x'' + \omega^2 x = f_0 \cos \gamma t, \tag{7}$$

donde $\omega^2 = k/m$. La solución de tal ecuación, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ es

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos \omega t). \tag{8}$$

2.2. Resonancia

En el caso más general mostrado en la Ec. (6) la amplitud resultante del movimiento depende de la frecuencia de la fuerza externa. Tal amplitud $g(\gamma)$ está dada por

$$g(\gamma) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \tag{9}$$

donde $2\lambda = b/m$. El valor máximo de las oscilaciones se encuentra para $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$. A este valor se le llama *frecuencia de resonancia* del sistema.

2.3. Ejercicios

1. ¿Pueden haber pulsaciones cuando se agrega una fuerza de fricción al modelo de la Ec. (7)? Encuentre una solución numérica y explore los resultados.

2. Cuando $f_0 = 2$, $m = 1$ y $k = 4$, g se convierte en

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4-\gamma^2)^2 + b^2\gamma^2}}. \tag{10}$$

Construya una tabla de valores de γ_1 y $g(\gamma_1)$ que corresponden a los coeficientes de amortiguamiento $b = 2, 1, 3/4, 1/2, 1/4$. Usando un programa de graficación, obtenga las gráficas de g que corresponden a estos coeficientes de amortiguamiento. Use los mismos ejes de coordenadas. Esta familia de gráficas se llama *curvas de resonancia* o *curva de respuesta de frecuencia* del sistema. ¿A qué valor se aproxima γ_1 conforme $b \to 0$? ¿Qué sucede con la curva de resonancia conforme $b \to 0$?

3. Ecuación de calor

La ecuación de propagación de calor o simplemente ecuación de calor es un modelo matemático que nos da la temperatura de un objeto en cualquier punto para cualquier instante de tiempo. La ecuación tiene la forma

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} - \alpha \nabla^2 u(x,y,z,t) = 0, \tag{11}$$

donde u es la temperatura del objeto. En el caso unidimensional tal ecuación se reduce a

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{12}$$

La constante α es llamada *difusividad térmica* y depende de las propiedades físicas del material. La difusividad térmica está dada por

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \tag{13}$$

donde k es la conductividad térmica, ρ es la densidad y c_p es la capacidad calorífica espefífica.

La ecuación de calor es una ecuación diferencial parcial. En general, las ecuaciones diferenciales parciales son utilizadas para modelar una amplia gama de fenómenos y situaciones físicas. Algunas de ellas son:

- Ecuación de calor
- Ecuación de onda
- Ecuación de Laplace
- Ecuación de advección
- Ecuación de Ginzburg-Landau para modelar superconductividad
- Ecuación de Dym para el estudio de solitones
- Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo
- Ecuaciones de Euler usadas en mecánica de fluidos

La lista es extensa e incluye también muchos modelos para el estudio y predicción climática.

La ecuación de calor Ec. (12) se puede resolver analíticamente utilizando el método de separación de variables. Otra forma de solución es vía métodos numéricos.

Para resolver una ecuación diferencial parcial necesitamos condiciones iniciales y condiciones de frontera. La condición inicial—en este caso—nos dice cuál es la temperatura del objeto en el instante $t = 0$,

$$u(x, 0) = f(x). \tag{14}$$

Donde $f(x)$ es el perfil inicial de la termperatura. Las condiciones de frontera nos dicen cuál es el valor de la temperatura en los extremos del objeto. En el caso unidimensional, podemos imaginar que estamos hablando de una barra de longitud L. Por lo que las condiciones de frontera consisten es especificar

$$u(0, t) = a \qquad u(L, t) = b. \tag{15}$$

Los valores a y b no tienen que ser constantes. La solución analítica más sencilla se obtiene cuando $a = b = 0$. En un caso más general a y b pueden ser funciones del tiempo.

3.1. Ejercicios

1. Encontrar la solución analítica de la ecuación unidimensional de calor, Ec. (12) en forma analítica, utilizando condiciones iniciales y de frontera generales.

2. Encontrar la solución de la Ec. (12) para los siguientes casos:

   a) $f(x) = \sin(\pi x/L)$ y $u(0, t) = u(L, t) = 0$
   b) $f(x) = \sin(\pi x/L)$, $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 10$
   c) $f(x) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 10$
   d) Temperatura cero a lo largo de la longitud L y uno de los extremos oscila entre 10 y -10 grados con una frecuencia dada.

4. Ecuación de Onda

La ecuación de onda es otra ecuación diferencial parcial que aparece en muchas aplicaciones físicas. Como en el caso anterior, aquí también nos centraremos en analizar la ecuación de onda en una dimensión.

La ecuación de onda unidimensional tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{16}$$

Podemos suponer que $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical de cada punto en una cuerda suspendida horizontalmente y sujetada en sus extremos. Esta ecuación es suficientemente general como para poder ser aplicada a una amplia gama de fenómenos que presenten un comportamiento ondulatorio. Dependiendo de la situación física, la cantidad u podría representar la presión del aire, si estuviésemos hablando de ondas sonoras. O bien el campo eléctrico o magnético de una onda electromagnética. Así como también podría describir la propagación de ondas en la superficie del agua (con ciertas modificaciones).

En nuestro caso asumiremos que estamos hablando de una cuerda horizontal. En tal caso, la cantidad v la indentificamos con la velocidad de propagación de la onda, la cual depende de la tensión y la densidad lineal de la cuerda. Misma que está dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \tag{17}$$

donde T es la tensión y μ es la densidad lineal.

La Ec. (16), al igual que la ecuación de calor, se puede resolver analíticamente usando el método de separación de variables. También podemos obtener una solución numérica, la cual es conveniente dependiendo de las condiciones iniciales y de frontera.

Para encontrar una solución única de la Ec. (16) necesitamos especificar dichas condiciones iniciales y de frontera. El caso más sencillo para encontar una solución analítica consiste en decir que los extremos de la cuerda están fijos. Matemáticamente lo expresamos como

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{18}$$

donde L es la longitud de la cuerda.

4.1. Ejercicios

1. Encuentre la solución analítica general de la ecuación de onda Ec. (16) asumiendo condiciones iniciales y de frontera generales.

2. Encuentra una solución única a la Ec. (16) asumiendo que la cuerda está fija en sus extremos y que la forma inicial es un triángulo isóceles. Asuma que la velocidad inicial es cero.

3. Encuentre una solución numérica a la Ec. (16) que modele un pulso entrando a la cuerda por uno de sus extremos. La cuerda está en reposo antes que el pulso entre. Asuma que después de que el pulso entra ambos extremos de la cuerda quedan fijos.

4. Encuentre una solución numérica a la Ec. (16) que modele una situación en donde la cuerda está inicialmente en reposo y en uno de sus extremos se aplica un movimiento periódico que hace que la cuerda se mueva continuamente.

5. Suponga que la cuerda está formada de dos materiales con diferente densidad lineal. Modele la propagación de un pulso que entra por uno de los extremos. Explique cuál es el efecto introducido por la diferencia de densidades lineales en los dos segmentos de la cuerda.