Vibraciones normales de un fluido en una caja rectangular*

Enrique Pazos

11 de mayo de 2020

Este tema es importante porque el análisis que haremos aquí se aplica también a otras áreas de la física, por ejemplo:

- La ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica
- Cavidades resonantes y guías de onda en electrodinámica
- Cuantización del campo electromagnético en teoría cuántica de campos
- Solución a otros tipos de ecuaciones como la ecuación de Laplace, de Poisson, de Helmholtz, de conducción de calor, etc.

1. Ecuación de onda en tres dimensiones

Nuestro interés es resolver la ecuación de onda para la cantidad p', la cual representa la perturbación en la presión del fluido alrededor de un valor constante p_0, de forma que la presión total es $p = p_0 + p'$. Tal ecuación es [ec. (8.186) del libro]

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

La presión $p' = p'(x, y, z, t)$ es función de las tres coordenadas y del tiempo. El dominio o espacio en el cual deseamos la solución es el interior de una caja rectangular de dimensiones L_x, L_y, L_z. Colocamos un sistema de coordenadas cartesianas de forma que el dominio de las variables x, y, z sean los intervalos $[0, L_x]$, $[0, L_y]$, $[0, L_z]$; respectivamente.

1.1. Separando el tiempo

La solución a la ecuación de onda la encontramos por separación de variables. Vamos a separar las coordenadas espaciales del tiempo. Esto no tiene que ser así necesariamente,

*Notas de clase realizadas durante el cierre de la USAC debido a la pandemia de Coronavirus.

podríamos separar todas las variables a la vez. Asumimos que la solución tiene la forma

$$p' = U(x,y,z)\Theta(t). \tag{2}$$

Al sustituir en la ecuación de onda (1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla^2(U\Theta) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(U\Theta) &= 0,\\
\Theta\nabla^2 U - \frac{U}{c^2}\frac{d^2\Theta}{dt^2} &= 0,\\
\frac{1}{U}\nabla^2 U - \frac{1}{c^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{dt^2} &= 0, \quad \text{dividimos entre } p' = U\Theta\\
\frac{c^2}{U}\nabla^2 U - \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{dt^2} &= 0, \quad \text{multiplicamos por } c^2\\
\frac{c^2}{U}\nabla^2 U = \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{dt^2} &= -\omega^2. \quad \text{igualamos ambos lados a una constante}
\end{aligned}$$

La justificación para llamarle $-\omega^2$ a la constante es la misma de siempre: si no fuera negativa obtenemos soluciones que crecen exponencialmente en el tiempo, las cuales no representan al sistema físico.

Noten que multiplicar por c^2 en la cuarta línea del cálculo anterior se hace para que c no aparezca en la ecuación de Θ y de esa forma la constante ω represente la frecuencia, esto es solo por conveniencia. Al igualar cada ecuación a la constante obtenemos

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \omega^2\Theta = 0, \tag{3}$$

$$\nabla^2 U + \frac{\omega^2}{c^2}U = 0. \tag{4}$$

De la ecuación (3) sabemos inmediatamente que su solución es

$$\boxed{\Theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t.} \tag{5}$$

La ec. (4) es la **ecuación de Helmholtz**, la cual aparece en problemas de propagación de ondas. Para encontrar su solución vamos a utilizar separación de variables una vez más.

1.2. Separando las coordenadas espaciales

Asumimos que la solución U se puede escribir como

$$U(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Sustituimos esto en la ec. (4) para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
\nabla^2 U + \frac{\omega^2}{c^2} U &= 0, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} U &= 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XYZ) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(XYZ) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(XYZ) + \frac{\omega^2}{c^2} XYZ &= 0, \\
YZ\frac{d^2 X}{dx^2} + XZ\frac{d^2 Y}{dy^2} + XY\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} XYZ &= 0 \\
\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} &= 0. \quad \text{dividimos entre } U = XYZ
\end{aligned}$$

Tenemos tres funciones independientes cuya suma es igual a una constante (ω^2/c^2). Este caso difiere de los anteriores puesto que ahora tenemos tres funciones en lugar de dos. La forma de separar cada función es la siguiente: pasamos el término de x al lado derecho e igualamos ambos lados a una **nueva constante**. No tiene que ser el término de x, puede ser cualquiera, al final da lo mismo.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} &= -\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}, \\
\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} &= -\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = k_x^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

De la ec. (6), obtenemos dos ecuaciones al igualar cada lado a k_x^2 y son

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X &= 0, \\
\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} &= k_x^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Al igual que la ecuación para Θ, la ecuación para X tiene una solución conocida que es

$$\boxed{X(x) = C_x \cos k_x x + D_x \sin k_x x.} \tag{8}$$

Continuamos separando variables en la ec. (7). Ahora pasamos el término de y a la derecha e igualamos ambos lados a **una nueva constante**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} &= k_x^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2}, \\
\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 &= -\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = k_y^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

En la segunda línea pasamos k_x^2 al lado izquierdo. Este paso es por conveniencia también, ya que deja a la ecuación de y solo con k_y^2. Al final veremos que no importa qué constante quede con qué variable.

De la ec. (9) salen dos ecuaciones más, al igualar cada lado a k_y^2

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0,$$
$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2\right) Z = 0.$$

Ya casi sin pensarlo, escribimos la solución para Y

$$\boxed{Y(y) = C_y \cos k_y y + D_y \sin k_y y.} \tag{10}$$

Vemos que la ecuación para Z también puede ser resuelta de una vez. Sin embargo, introducimos una nueva constante que llamamos

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2, \tag{11}$$

lo cual le da a la ecuación para Z la misma forma que las dos anteriores, es decir

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0,$$

cuya solución es

$$\boxed{Z(z) = C_z \cos k_z z + D_z \sin k_z z.} \tag{12}$$

Vemos que la ec. (11) se puede escribir así

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \tag{13}$$

Aquí hay un punto importante qué notar: en realidad no era necesaria una nueva constante k_z, es decir que el método de separación de variables realmente solo requiere de tres constantes: ω, k_x y k_y. Ahora bien, si introducimos k_z, necesitamos la ec. (13), la cual nos da k_z en función de las otras tres y de esa manera seguimos teniendo solo tres constantes de separación.

El punto clave de la ec. (13) es que nos da una constante (cualquiera de ellas) en función de las otras tres. Siempre llegaremos a la relación (13) sin importar qué variable separemos primero o si dejamos una constante de un lado o del otro, como sucedió en la ec. (9).

Aquí termina la separación de variables y ahora que conocemos las soluciones (5), (8), (10) y (12); el producto de todas ellas nos da la solución para $p'(x, y, z, t)$.

2. Condiciones de frontera

2.1. Coordenada x

La condición de frontera sale de la naturaleza física del sistema. Nos vemos en la necesidad de saber qué condición imponer sobre cada uno de los seis planos que limitan la caja rectangular. La ecuación de onda nos da una solución para la presión p'. Consideremos por el momento la dirección x. La condición de frontera consiste en dar el valor de p' evaluada en $p'(0, y, z, t)$ y $p'(L_x, y, z, t)$. De forma similar para las coordenadas y, z.

No es del todo evidente qué valor puede tener la presión p' en los planos que limitan el volumen. Lo que es más fácil de ver es el valor que debe tener la **velocidad del fluido** en las paredes de la caja y ésta debe ser cero, ya que la rigidez de la pared impide que el fluido se mueva. Por lo tanto, nuestra condición de frontera la aplicamos a través de la velocidad del fluido.

Recordemos que existe una relación entre velocidad y presión, la cual fue encontrada cuando dedujimos la ecuación de onda para p' y es la ec. (8.181) del libro

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p'. \tag{14}$$

Lo que haremos es utilizar esta fórmula para encontrar la velocidad en términos de p' y una vez que tengamos tal velocidad imponemos la condición de frontera $\mathbf{v} = 0$ en cada plano (o pared) que limita el volumen de interés.

La ec. (14) representa tres ecuaciones, una para cada coordenada espacial. Por simplicidad vamos hacer los cálculos para la componente x y luego extendemos el resultado a y, z. La componente x de la ec. (14) es

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}. \tag{15}$$

La solución que encontramos es $p' = X(x)Y(y)Z(z)\Theta(t)$. Las variables relevantes aquí serán x, t y serán las que vamos a escribir explícitamente. Sustituyendo p' en la ec. (15) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}(XYZ\Theta), \\
&= -\frac{YZ\Theta}{\rho_0}\frac{dX}{dx}, \\
&= -\frac{YZ\Theta}{\rho_0}\frac{d}{dx}\left(C_x \cos k_x x + D_x \sin k_x x\right), \\
&= -\frac{YZ\Theta}{\rho_0}\left(-C_x k_x \sin k_x x + D_x k_x \cos k_x x\right), \\
&= -\frac{k_x YZ}{\rho_0}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)\left(-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x\right),
\end{aligned}$$

integramos en t para encontrar v_x

$$
\begin{aligned}
v_x &= -\int \frac{k_x YZ}{\rho_0} (A\cos\omega t + B\sin\omega t)(-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x)\ dt, \\
&= -\frac{k_x YZ}{\rho_0}(-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x)\int (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\, dt, \\
&= -\frac{k_x YZ}{\rho_0}(-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x)\left(\frac{A}{\omega}\sin\omega t - \frac{B}{\omega}\cos\omega t\right), \\
&= -\frac{k_x YZ}{\omega\rho_0}(-C_x \sin k_x x + D_x \cos k_x x)(A\sin\omega t - B\cos\omega t). \qquad (16)
\end{aligned}
$$

En la última línea habría que agregar una "constante" de integración, la cual con justa razón es una función de x, y, z; dado que al calcular la derivada parcial respecto de t, tal función se anularía. Diremos que tal función es cero, puesto que estamos interesados únicamente en el comportamiento oscilatorio de v_x el cual ya está descrito con la solución existente.

Ahora que conocemos la velocidad v_x, imponemos condiciones de frontera en $x = 0$, $x = L_x$; demandando que $v_x = 0$. Veamos la primera

$$
\begin{aligned}
v_x(0, y, z, t) &= 0, \\
-\frac{k_x YZ}{\omega\rho_0}(-C_x \sin k_x 0 + D_x \cos k_x 0)(A\sin\omega t - B\cos\omega t) &= 0, \\
-\frac{k_x YZ}{\omega\rho_0} D_x (A\sin\omega t - B\cos\omega t) &= 0, \\
D_x &= 0.
\end{aligned}
$$

Esto es muy similar a cuando impusimos condiciones de frontera para la cuerda en vibración. Aquí concluimos que la constante $D_x = 0$.

Imponemos la otra condición en $x = L_x$ y utilizamos el hecho de que $D_x = 0$, para obtener

$$
\begin{aligned}
v_x(L_x, y, z, t) &= 0, \\
-\frac{k_x YZ}{\omega\rho_0}(-C_x \sin k_x L_x)(A\sin\omega t - B\cos\omega t) &= 0, \\
\sin k_x L_x &= 0, \\
k_x L_x &= l\pi, \\
k_x &= \frac{l\pi}{L_x}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Encontramos que k_x no puede tomar cualquier valor, sino que debe ser un múltiplo entero l de π/L_x.

Observación: Aquí un hay un detalle que pasa desapercibido. Si comparamos este resultado con el que obtuvimos para la cuerda, vemos que aquí el entero l va desde 0, mientras que para la cuerda ese entero n iba desde 1 ¿por qué? La razón es que si el entero n empieza en 0 para la cuerda, toda la solución $u(x,t)$ es cero. Mientras que aquí, k_x puede ser cero y la solución para p' no se anula. Esto lo podemos ver en la solución para $X(x)$, ec. (8), donde $X(x)$ sería una constante cuando $k_x = l\pi/L_x = 0$.

2.2. Coordenadas y, z

La forma de imponer condiciones de frontera para y, z es exactamente la misma que para x. Las velocidades v_y y v_z las tomamos de la ec. (14) y realizamos el mismo procedimiento. Llegaremos a la conclusión de que $D_y = D_z = 0$ y que k_y, k_z satisfacen las condiciones

$$k_y = \frac{m\pi}{L_y}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

$$k_z = \frac{n\pi}{L_z}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Para cada valor de los enteros l, m, n, existe un **modo normal de vibración**. Utilizando la ec. (13), la frecuencia de vibración de cada modo la encontramos en términos de estos enteros. Sustituyendo (17), (18) y (19) en la ec. (13) nos da

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{c^2} &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \\
\omega^2 &= c^2\left(\frac{l^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_y^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_z^2}\right), \\
\omega_{lmn} &= \pi c\left(\frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Observación: Los enteros l, m, n pueden ser cero pero no los tres al mismo tiempo, porque de ser así la solución $p' = \text{const}$ y no representa ninguna vibración.

3. Solución final

Recolectando todos los resultados que hemos obtenido, llegamos a que la solución para p' es la siguiente

$$\begin{aligned}
p'(x,y,z,t) &= X(x)Y(y)Z(z)\Theta(t), \\
&= \left(C_x \cos\frac{l\pi x}{L_x}\right)\left(C_y \cos\frac{m\pi y}{L_y}\right)\left(C_z \cos\frac{n\pi z}{L_z}\right)(A\cos\omega_{lmn}t + B\sin\omega_{lmn}t), \\
&= \cos\frac{l\pi x}{L_x}\cos\frac{m\pi y}{L_y}\cos\frac{n\pi z}{L_z}\left(AC_xC_yC_z\cos\omega_{lmn}t + BC_xC_yC_z\sin\omega_{lmn}t\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, dado que las constantes A, B y todas las C son arbitrarias, renombramos los productos simplemente como A y B. La solución final queda

$$\boxed{p' = (A\cos\omega_{lmn}t + B\sin\omega_{lmn}t)\cos\frac{l\pi x}{L_x}\cos\frac{m\pi y}{L_y}\cos\frac{n\pi z}{L_z}}. \tag{21}$$

Veamos qué consecuencias tiene haber impuesto velocidad cero en cada pared del volumen. Cuando hacemos cero las coordenadas, coseno tiene su valor máximo, que es 1. Lo mismo sucede cuando estamos en los extremos L_x, L_y, L_z. Esto implica que la presión en las paredes oscila en el tiempo con un amplitud que es su valor máximo. A diferencia de lo que sucede con la cuerda en donde tener los extremos fijos significaba que $u = 0$, aquí la presión p' no es cero en la frontera. El caso equivalente en la cuerda habría sido decir que los extremos están libres, en cuyo caso la condición de frontera sería $\partial u/\partial x = 0$. En el lenguaje de las ondas estacionarias, decimos que la presión tiene un antinodo en la frontera, mientras que la velocidad del fluido, la cual sí es cero en las paredes, tiene un nodo.

Observaciones finales:

1. La solución más general que podemos tener es la superposición de varios modos normales, es decir, soluciones p' diferentes para diferentes valores de l, m, n. Las amplitudes A y B de cada modo normal se encuentran de forma que se satisfagan las condiciones iniciales.

2. Las frecuencias ω_{lmn} no son múltiplos enteros de una misma cantidad, como en el caso de la cuerda, donde $\omega_n = n\pi c/\ell$. Esto es importante porque es la razón por la cual una cuerda puede producir notas musicales. En otras palabras, las soluciones para la cuerda siempre tienen frecuencias que son múltiplos de $\pi c/\ell$, a la cual se le denomina **frecuencia fundamental**.

3. Si la caja rectangular tiene una dimensión mucho más larga que las otras dos, digamos que $L_x = L_y = 1$ cm y $L_z = 1$ m. Entonces las frecuencias más pequeñas están determinadas por el entero n, así

$$\begin{aligned} \omega_{lmn} &= \pi c\left(\frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2}\right)^{1/2}, \\ &\approx \frac{n\pi c}{L_z}, \quad L_z \gg L_x, L_y. \end{aligned}$$

   Esta expresión es precisamente igual a la de una cuerda. En este caso, la caja es más bien un tubo cuadrado y es la razón por la cual también se puede producir tonos musicales en un órgano de tubos.