Problema restringido de los tres cuerpos, parte 2*

Enrique Pazos

18 de marzo de 2020

1. Recapitulando

Anteriormente, en la clase por video establecimos la energía potencial para la masa m que quedó así

$$‘V’ = -\frac{mM_1G}{[(x-x_1)^2+y^2]^{1/2}} - \frac{mM_2G}{[(x-x_2)^2+y^2]^{1/2}} - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2), \tag{1}$$

donde ω es la velocidad angular de la órbita circular de M_1 y M_2, la cual estaba dada por[1]

$$\omega^2 = \frac{(M_1+M_2)G}{a^3}. \tag{2}$$

Ahora nos vamos a dar a la tarea de analizar qué tipo de órbitas puede tener m, cuando su energía potencial efectiva es ‘V’(x, y). Al igual que en el caso de las órbitas de fuerza central, nuestro análisis se basa en encontrar los puntos máximos y mínimos de la energía potencial (o simplemente “el potencial”, en forma corta). Los conceptos utilizados en aquel caso se siguen manteniendo:

1. Si ‘V’ tiene un mínimo, es un punto de **equilibrio estable**. Cualquier perturbación genera pequeñas oscilaciones alrededor de este punto.
2. Si ‘V’ tiene un máximo, es un punto de **equilibrio inestable**. Una perturbación hace que el objeto se aleje para siempre de tal lugar.

Nuestra tarea se dificulta un poco porque ahora ‘V’ depende de dos variables (x, y) y no solo de una. Por tal motivo nuestro análisis no será solamente algebraico sino que también gráfico.

*Notas de clase realizadas durante el cierre de la USAC debido a la pandemia de Coronavirus.

[1] Notemos que esta es una forma de enunciar la tercera ley de Kepler: el cuadrado el período $T^2 = (2\pi/\omega)^2$ es proporcional a la separación al cubo, a^3.

2. Análisis del potencial

Para hacer nuestros cálculos más simples hacemos un cambio de variable

$$\xi = x/a, \qquad \eta = y/a. \tag{3}$$

Interpretamos a ξ y η como variables adimensionales, que nos dan la distancia como una fracción de la separación a.

Las posiciones de M_1 y M_2 dadas por la ec. 7.62 del libro, son ahora

$$\xi_1 = \frac{x_1}{a} = \frac{M_2}{M_1+M_2}, \qquad \xi_2 = \frac{x_2}{a} = -\frac{M_1}{M_1+M_2} = \xi_1 - 1. \tag{4}$$

En estas nuevas coordenadas, la posición de M_1 es un número en el intervalo de 0 a 1, y la de M_2 se encuentra en el intervalo de -1 a 0.

A continuación sustituimos $x = \xi a$, $y = \eta a$ y también la velocidad angular ω en la ec. (1) para 'V'. Hacemos uso también de la ec. (4) para poder factorizar la suma $M_1 + M_2$. El resultado es la siguiente expresión

$$\boxed{\text{`}V\text{'} = \frac{m(M_1+M_2)G}{a}\left\{\frac{\xi_2}{[(\xi-\xi_1)^2+\eta^2]^{1/2}} - \frac{\xi_1}{[(\xi-\xi_2)^2+\eta^2]^{1/2}} - \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)\right\}.} \tag{5}$$

Esta ecuación es importante pues nuestro análisis se basa en ella.

2.1. Puntos máximos y mínimos

La forma de proceder es tomar las derivadas de 'V' dada por la ec. (5) respecto de ξ y η e igualar cada una a cero. Eso nos da las ecs. (7.71) del libro. De inmediato vemos que la segunda ecuación se satisface si $\eta = 0$, que al sustituir en la primera ecuación nos da la ec. (7.72) del libro, que es

$$-\frac{\xi_2(\xi-\xi_1)}{|\xi-\xi_1|^3} + \frac{\xi_1(\xi-\xi_2)}{|\xi-\xi_2|^3} = 0. \tag{6}$$

El valor absoluto sale de simplificar este tipo de expresión: $[(\xi-\xi_1)^2]^{3/2}$, pues elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada equivale a calcular el valor absoluto.

Encontrar las raíces de la ecuación anterior no es sencillo. Es por eso que en el libro lo que se hace es graficar 'V' para $\eta = 0$. El resultado es la figura 7.7, en donde es evidente que hay tres valores de ξ donde 'V' es **máximo** (más adelante vamos a ver cómo hacer la gráfica). Estos valores se denotan como ξ_A, ξ_B y ξ_C.

Esto implica que hemos encontrado 3 puntos críticos

$$(\xi_A, 0) \qquad (\xi_B, 0) \qquad (\xi_C, 0)$$

Existen otros dos puntos críticos, los cuales se encuentran siguiendo la receta que nos da el libro: factorizamos η en la 2da. ecuación de (7.71), luego la multiplicamos por $(\xi - \xi_1)$ y restamos las ecuaciones, así

$$\begin{aligned} -\frac{\xi_2(\xi-\xi_1)}{[(\xi-\xi_1)^2+\eta^2]^{3/2}} + \frac{\xi_1(\xi-\xi_2)}{[(\xi-\xi_2)^2+\eta^2]^{3/2}} - \xi &= 0, \\ -(\xi-\xi_1)\left\{-\frac{\xi_2}{[(\xi-\xi_1)^2+\eta^2]^{3/2}} + \frac{\xi_1}{[(\xi-\xi_2)^2+\eta^2]^{3/2}} - 1\right\} &= 0. \end{aligned}$$

Simplificamos usando $\xi_2 = \xi_1 - 1$ y el resultado es

$$\boxed{(\xi-\xi_2)^2+\eta^2 = 1.} \tag{7}$$

La otra ecuación se encuentra multiplicando ahora por $(\xi - \xi_2)$, así

$$\begin{aligned} -\frac{\xi_2(\xi-\xi_1)}{[(\xi-\xi_1)^2+\eta^2]^{3/2}} + \frac{\xi_1(\xi-\xi_2)}{[(\xi-\xi_2)^2+\eta^2]^{3/2}} - \xi &= 0, \\ -(\xi-\xi_2)\left\{-\frac{\xi_2}{[(\xi-\xi_1)^2+\eta^2]^{3/2}} + \frac{\xi_1}{[(\xi-\xi_2)^2+\eta^2]^{3/2}} - 1\right\} &= 0. \end{aligned}$$

Al simplificar llegamos a

$$\boxed{(\xi-\xi_1)^2+\eta^2 = 1.} \tag{8}$$

Las ecs. (7) y (8) se resuelven como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: ξ y η. La forma gráfica de ver este sistema es notar que cada ecuación representa una circunferencia de radio 1. En el caso de la ec. (7) el centro está en $(\xi_2, 0)$ y para la ec. (8) el centro se ubica en $(\xi_1, 0)$. La gráfica de las circunferencias se muestra en la figura 1.

Lo más importante a notar en esta figura es que las distancias mutuas entre M_1, M_2 y el punto D son todas iguales a a. Igual para el punto E. En otras palabras, los puntos D y E los podemos encontrar formando triángulos equiláteros, tomando como base del triángulo la separación entre M_1 y M_2.

En total ahora tenemos 5 puntos críticos para el potencial 'V'. Lo que no hemos mencionado es la naturaleza de cada uno de ellos, es decir, si son máximos o mínimos. Para esto se requiere evaluar las segundas derivadas de 'V' respecto a ξ y η en cada uno de los puntos críticos. Dado que el potencial es una función de dos variables, tenemos que utilizar el criterio de la segunda derivada. Aquí nos encontramos con el problema evidente: no hemos podido despejar las coordenadas de los puntos críticos. En el libro de texto nos dicen cuál es la naturaleza de cada uno de los puntos, la cual resumimos en el cuadro 1.

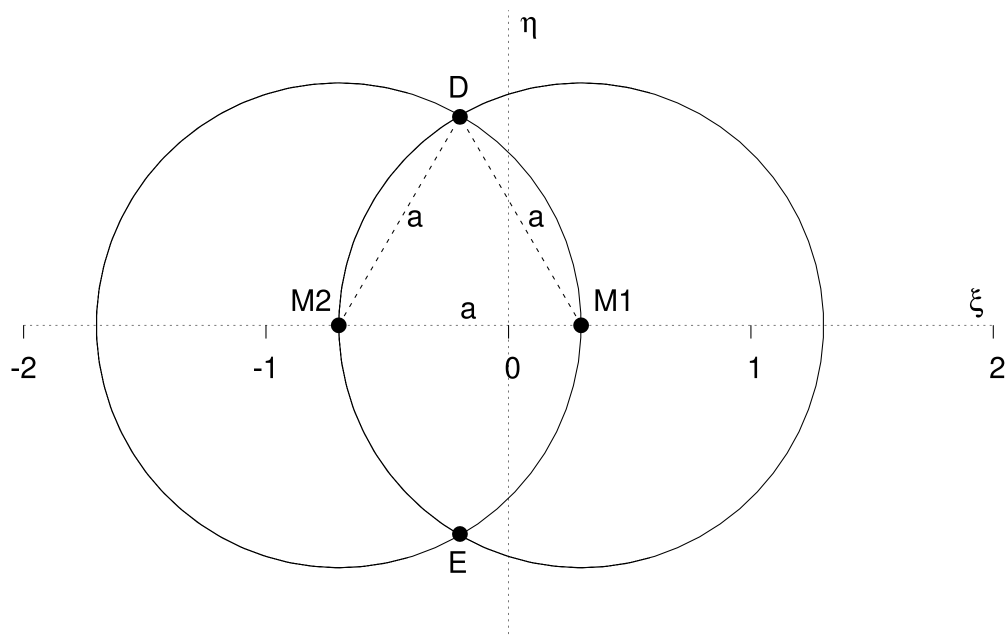


Figura 1: Gráfica del sistema de las ecs. (7) y (8). La intersección de las circunferencias nos da otros dos puntos críticos, D y E.

Punto	tipo
A	punto silla
B	punto silla
C	punto silla
D	máximo
E	máximo

Cuadro 1: Naturaleza de los puntos críticos de 'V'.

Vamos a analizar los puntos críticos en forma gráfica. Para esto utilizaremos el paquete Gnuplot, el cual se puede bajar para sistema Windows y Linux también.

Para bajar versión Windows: https://sourceforge.net/projects/gnuplot/files/

En Linux se puede bajar de los repositorios estándar de cada distribución.

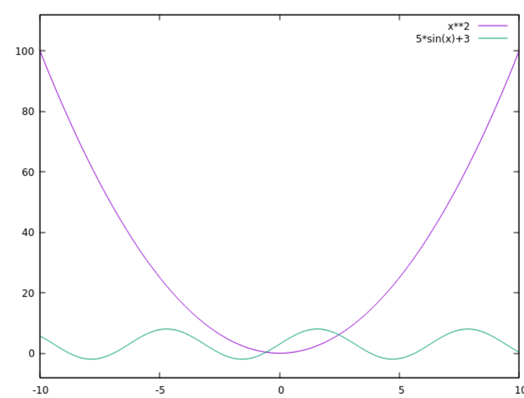
3. Graficando el potencial

En esta sección vamos a ver cómo extraer información de la energía potencial efectiva, calculada desde el sistema estrella, el que gira con M_1 y M_2.

Ya sea desde Linux o Windows, Gnuplot se controla desde la consola de comandos. Desde Windows basta con abrir la aplicación para que aparezca la consola. Desde Linux hay que escribir el comando `gnuplot`.

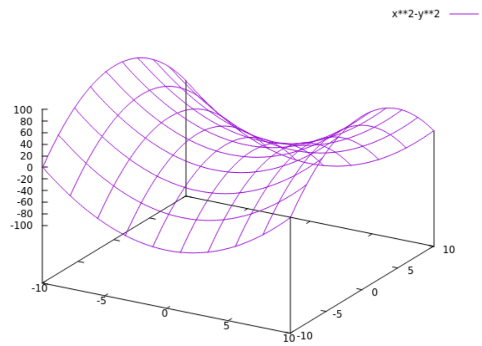
Una vez que estamos en el ambiente de Gnuplot podemos utilizar varias expresiones para graficar funciones. Por ejemplo, si escribimos lo siguiente, el resultado es una gráfica como se ve a la derecha.

```
plot x**2, 5*sin(x)+3
```



La función que queremos graficar depende de dos variables. En Gnuplot las variables siempre son x y y. Por ejemplo, para graficar $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, escribimos

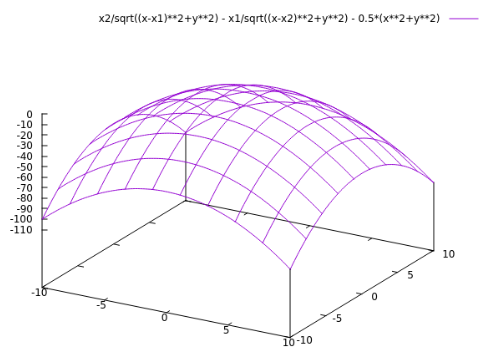
```
splot x**2-y**2
```



Si los rangos de x y y no son los que se muestran, hay que escribir `reset` antes de graficar. Eso reinicia los rangos a los valores por default.

Grafiquemos ahora el potencial dado por la ec. (5). Primero, hay que darle valores a las masas y a las distancia a. Lo más fácil es hacer $a = 1$ y que el producto $m(M_1 + M_2)G$ sea también igual a 1. Más adelante daremos valores a estas cantidades, para explorar casos reales. Segundo, la variables ξ y η serán sustituidas por x y y, ya que esas son las variables que usa Gnuplot. Y tercero, necesitamos definir un par de valores para ξ_1 y ξ_2. Recordemos que $\xi_1 = M_2/(M_1 + M_2)$ es un número que va desde 0 hasta 1, y que $\xi_2 = \xi_1 - 1$. Vamos a tomar $\xi_1 = 0.3$, $\xi_2 = -0.7$. Aprovechando que en Gnuplot podemos definir variables, la gráfica nos queda así (la línea de `splot` debe ser continua, aquí se parte en tres para que el texto sea legible).

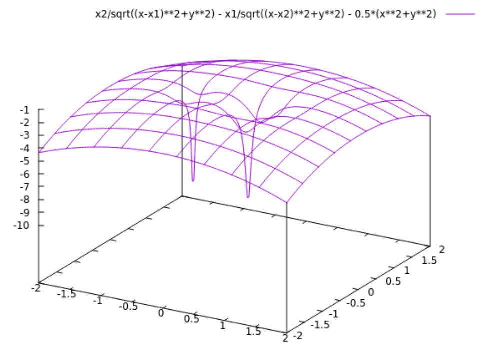
```
x1=0.3
x2=x1-1
splot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2)
- x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2)
```



Tip: para cambiar el punto de vista de la gráfica en 3D, simplemente hay que hacer click izquierdo y mover el mouse para girar la gráfica y verla desde otros ángulos.

Ahora necesitamos enfocarnos en el área que nos interesa. Para eso vamos a cambiar el rango de x y y. Escribimos

```
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
splot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2)
- x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2)
```

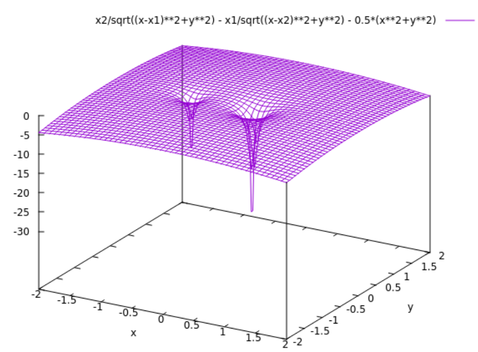


Tip: no hay que escribir todos los comandos de nuevo, basta con usar las teclas del cursor (arriba, abajo) para ver el historial de lo que hemos escrito.

Esto va tomando más forma. Ya podemos ver los dos pozos del potencial generados por M_1 y M_2. Podemos darle más detalle a la superficie incrementando el número de líneas: `set isosamples 50` y volviendo a graficar. También es importante saber cuál es el eje x y el y. Antes de continuar nos damos cuenta que una buena gráfica necesita de varias instrucciones para que quede bien. En este punto es bueno escribir todas esas instrucciones en un archivo y simplemente cargar el archivo en Gnuplot. Para eso abrimos un archivo de texto (con su editor de texto favorito) y en lugar de escribir los comandos en la terminal de Gnuplot, los vamos a escribir en el archivo. La gran ventaja de esto es que no hay que escribirlo todo de nuevo cuando necesitamos graficar varias veces la misma función.

El archivo de texto debería contener:

```
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
set isosamples 50
set xlabel 'x'
set ylabel 'y'

x1=0.3
x2=x1-1

splot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2) -
x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2)
```

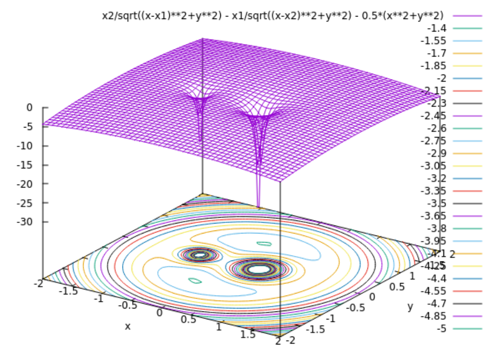


Guardemos el archivo como `potencial.gp` y para graficar, escribimos en la consola de Gnuplot `load 'potencial.gp'`

Tal como está, la gráfica no nos va a ser de mucha utilidad. Por eso vamos a agregar curvas de nivel, es decir, vamos a graficar los contornos en donde el potencial es constante.

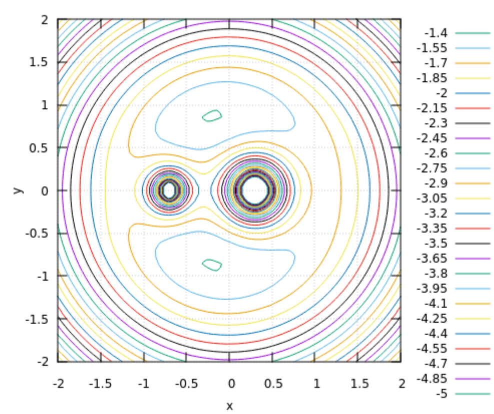
Agregamos a nuestro archivo dos líneas más

```
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
set isosamples 50
set xlabel 'x'
set ylabel 'y'
set contours
set cntrparam levels incremental -5,0.15,0
x1=0.3
x2=x1-1

splot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2) -
x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2)
```



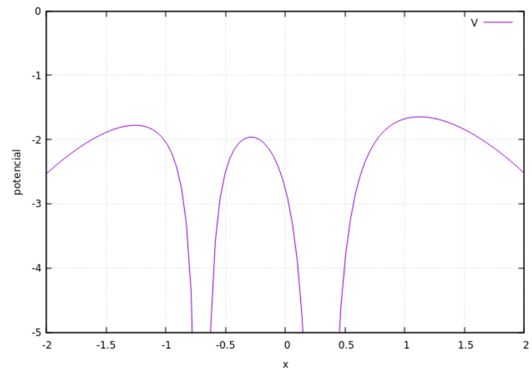
Hemos graficado contornos de potencial constante desde -5 hasta 0 en intervalos de 0.15. El mapa de contornos es precisamente lo que en el libro de texto se muestra en la figura 7.8. Ahora vamos a enfocarnos en los contornos y vamos a quitar la superficie.

```
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
set isosamples 50
set xlabel 'x'
set ylabel 'y'
set size ratio -1
set grid
set view map
set key outside
unset surface
set contour base
set cntrparam levels incremental -5,0.15,0
x1=0.3
x2=x1-1

splot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2) -
x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2) t ''
```



De nuestro análisis previo de los puntos máximos y mínimos sabemos que hay cinco puntos críticos. Tres están en el eje x y dos más en los lugares que muestra la figura 1. Para encontrar los puntos que están en el eje x vamos a graficar el potencian para $y = 0$. Esta es una gráfica diferente a la anterior. Abrimos otro archivo de texto y escribimos allí lo siguiente

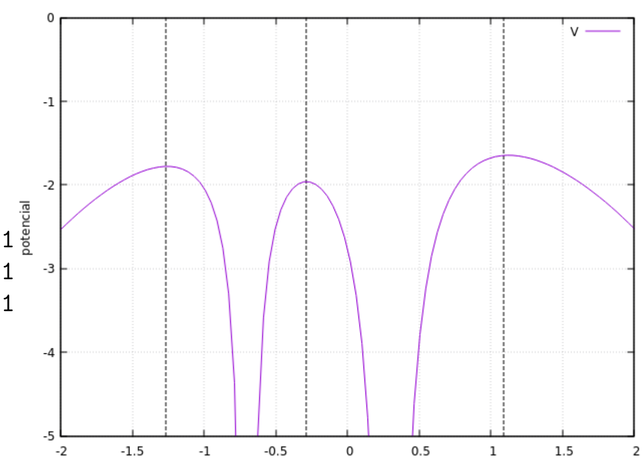
```
reset
set xrange [-2:2]
set yrange [-5:0]
set xlabel 'x'
set ylabel 'potencial'
set grid
x1=0.3
x2=x1-1
y=0

plot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2) -
x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2) t 'V'
```



Le llamamos a este archivo `potencial2.gp` y lo graficamos con `load 'potencial2.gp'`. Al colocar el cursor sobre la ventana de la gráfica, Gnuplot nos muestra las coordenadas de su ubicación. Con esto encontramos los puntos máximos que habíamos llamado ξ_A, ξ_B y ξ_C. Sus coordenadas x en la gráfica son: -1.27, -0.29 y 1.09, aproximadamente.

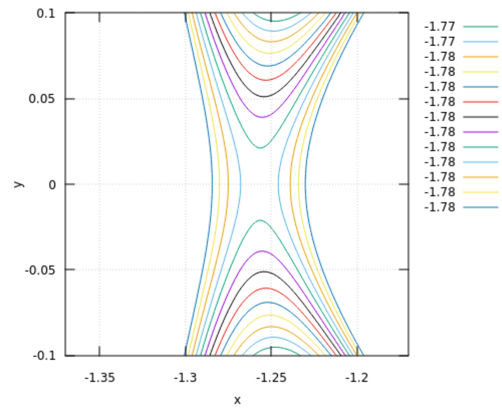
Una vez que sabemos esos valores, podríamos identificar cada punto, por ejemplo dibujando líneas verticales en cada ubicación. Para esto agregamos a nuestro archivo de texto lo siguiente

```
reset
set xrange [-2:2]
set yrange [-5:0]
set xlabel 'x'
set ylabel 'potencial'
set grid
xA=-1.27
xB=-0.29
xC=1.09
set arrow from xA,-5 to xA,0 nohead dt 2 lc -1
set arrow from xB,-5 to xB,0 nohead dt 2 lc -1
set arrow from xC,-5 to xC,0 nohead dt 2 lc -1
x1=0.3
x2=x1-1
y=0

plot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2) -
x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2) t 'V'
```



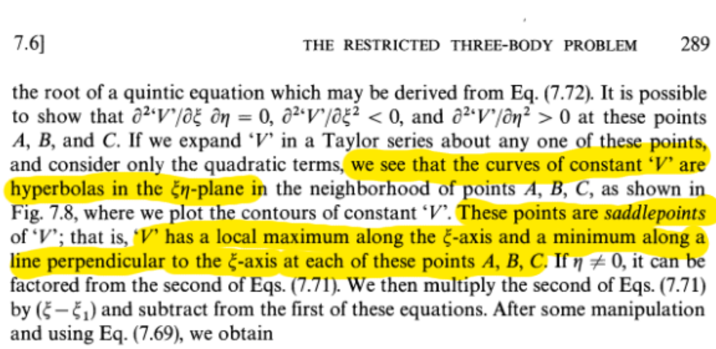
Regresemos a nuestro gráfico de los contornos. Vamos a hacer un acercamiento al primero de los puntos. Esto lo logramos modificando el rango de las variables x, y. Es conveniente abrir otro archivo de texto para esta nueva gráfica, le llamaremos `potencialXA.gp` y colocamos esto

```
reset
xA=-1.27
xB=-0.29
xC=1.09
d=0.1
set xrange [xA-d:xA+d]
set yrange [-d:d]
set isosamples 50
set xlabel 'x'
set ylabel 'y'
set size ratio -1
set grid
set view map
set key outside
unset surface
set contour base
set cntrparam levels incremental -1.78,0.0005,
x1=0.3
x2=x1-1

splot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2) -
x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2) t ''
```



Para hacer más fácil colocar los rangos de x, y utilizamos las variables `xA` y `d=0.1`. El valor de `d` se encuentra a prueba y error. Podemos empezar desde `d=0.6` por ejemplo y vamos viendo cómo van saliendo los contornos. Estos se controlan con la instrucción `... incremental -1.78,0.0005,0`, lo cual significa que los contornos van desde -1.78 en intervalos de 0.0005 hasta un valor final de 0. Estos valores los vamos cambiando también a prueba y error hasta que obtenemos una gráfica como la que se muestra, o similar a ella.

Aquí notamos algo muy importante. El libro de texto dice:



7.6] THE RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM 289

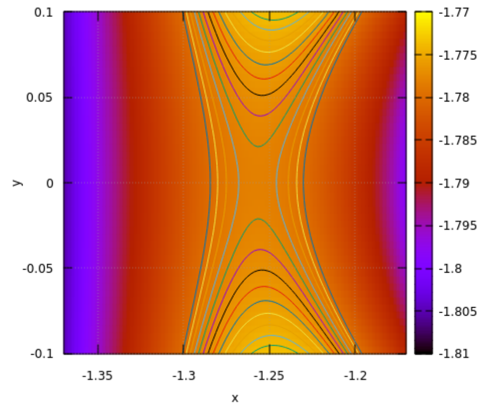
the root of a quintic equation which may be derived from Eq. (7.72). It is possible to show that $\partial^2 `V'/\partial\xi\,\partial\eta = 0$, $\partial^2 `V'/\partial\xi^2 < 0$, and $\partial^2 `V'/\partial\eta^2 > 0$ at these points A, B, and C. If we expand 'V' in a Taylor series about any one of these points, and consider only the quadratic terms, we see that the curves of constant 'V' are hyperbolas in the $\xi\eta$-plane in the neighborhood of points A, B, C, as shown in Fig. 7.8, where we plot the contours of constant 'V'. These points are *saddlepoints* of 'V'; that is, 'V' has a local maximum along the ξ-axis and a minimum along a line perpendicular to the ξ-axis at each of these points A, B, C. If $\eta \neq 0$, it can be factored from the second of Eqs. (7.71). We then multiply the second of Eqs. (7.71) by $(\xi - \xi_1)$ and subtract from the first of these equations. After some manipulation and using Eq. (7.69), we obtain

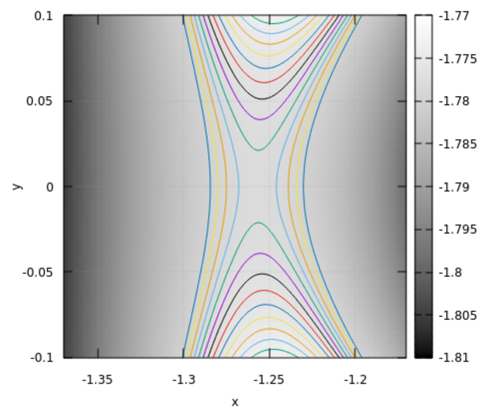
Con la gráfica anterior hemos demostrado que las curvas de 'V' = constante alrededor del punto $(\xi_A, 0)$ tienen forma de hipérbolas y por lo tanto es un **punto silla**. Mientras más *zoom* hagamos en la gráfica (valores más pequeños para `d`) más simétricas quedarán tales hipérbolas.

El mismo ejercicio lo podemos hacer para los puntos ξ_B y ξ_C.

Para distinguir más fácilmente dónde es que el potencial se incrementa o disminuye podemos graficar en escala de colores o de grises, así:

```
reset
xA=-1.27
xB=-0.29
xC=1.09
d=0.1
set pm3d
set palette color
set xrange [xA-d:xA+d]
set yrange [-d:d]
set isosamples 50
set xlabel 'x'
set ylabel 'y'
set size ratio -1
set grid
set view map
unset key
unset surface
set contour base
set cntrparam levels incremental -1.78,0.0005,
x1=0.3
x2=x1-1

splot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2) -
x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2) t ''
```

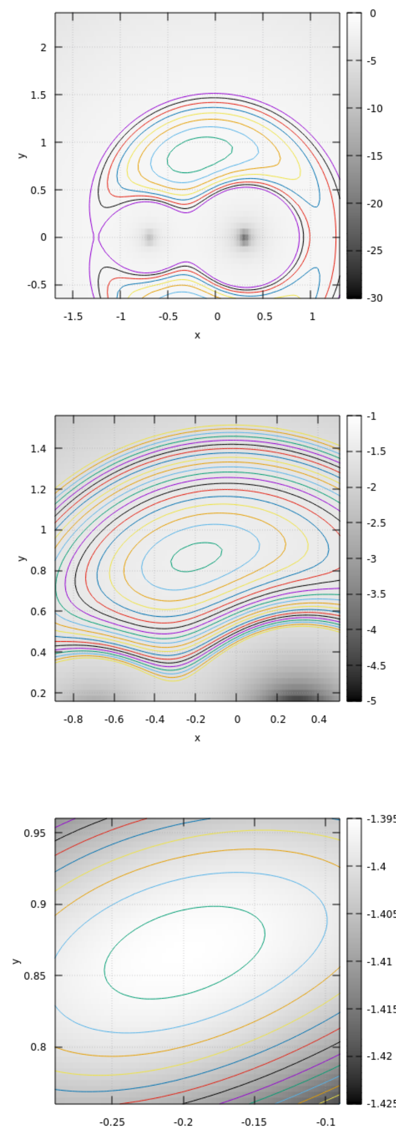




Para la gráfica en gris solo cambiamos a `set palette gray`. De esta forma es más evidente que estamos en un punto silla.

Veamos ahora uno de los puntos que no están sobre el eje x, por ejemplo el punto ξ_D. Para ubicarlo basta con pasar el cursor sobre la ventana de la gráfica 2D en la página 8. Obtenemos que el punto se encuentra aproximadamente en $(-0.19, 0.86)$. Ahora hacemos *zoom* alrededor de ese lugar. Las tres gráficas corresponden a valores `d` de 1.5, 0.7 y 0.1; cambiando el incremento de los contornos desde 0.05, 0.02 hasta 0.002.

```
reset
xD=-0.19
yD=0.86
d=0.1
set pm3d
set palette gray
set xrange [xD-d:xD+d]
set yrange [yD-d:yD+d]
set isosamples 50
set xlabel 'x'
set ylabel 'y'
set xtics 0.05
set ytics 0.05
set size ratio -1
set grid
set view map
unset key
unset surface
set contour base
set cntrparam levels incremental -1.78,0.002,0
x1=0.3
x2=x1-1

splot x2/sqrt((x-x1)**2+y**2) -
x1/sqrt((x-x2)**2+y**2) -
0.5*(x**2+y**2) t ''
```

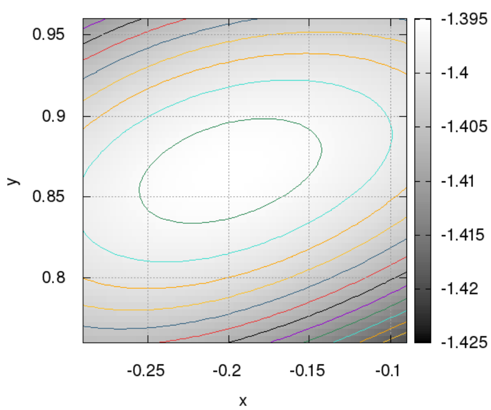


De nuevo, recordamos aquí lo que dice el primer párrafo de la página 290 del libro de texto: los contornos de potencial constante alrededor de los puntos D y E tienen forma de elipses. Al ver el color de la escala de grises vemos que se trata de un punto máximo. Podemos repetir el mismo procedimiento para explorar la naturaleza del punto E.

Con esto concluimos el análisis gráfico de los puntos críticos. Para terminar solo nos falta saber cómo exportamos nuestra gráfica a un archivo. Se puede hacer desde la ventana de la misma gráfica, pero lo mejor es hacerlo desde el mismo archivo de texto. Lo único que hay que hacer es agregar dos líneas al inicio:

```
reset
set terminal png size 800,600 font "Helvetica,16"
set output 'potXD.png'
xD=-0.19
yD=0.86
d=0.1
.
.
.
```

La primera línea establece el formato de la imagen como PNG, con algunas opciones para el tamaño, tipo de letra y tamaño de la letra. La segunda línea coloca el nombre del archivo de salida. La gráfica generada se ve así



Importante: El texto en la gráfica debe ser siempre legible. Por eso conviene agrandar el tamaño del font cuando sea necesario. En este caso el tamaño del font es más grande que en todos los casos previos.

Las instrucciones de Gnuplot que hemos utilizado aquí son solo un ejemplo entre varias opciones más que podemos cambiar. Si uno quiere adornar más la gráfica o cambiar cosas, Google encuentra siempre lo que uno quiere hacer. No duden en experimentar y cambiar las opciones si lo desean.