Ondas viajeras*

Enrique Pazos

15 de abril de 2020

Antes de leer este documento recomiendo ver la clase en video "Modos normales y ondas viajeras" `https://youtu.be/0FvaWEkC5oo`

1. Soluciones en forma de onda viajera

Cuando hicimos separación de variables de la ecuación de onda llegamos a las soluciones que llamamos modos normales, que son

$$u_n(x,t) = A\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{n\pi ct}{\ell} + B\sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{n\pi ct}{\ell}. \tag{1}$$

Usando las identidades trigonométricas del producto de dos funciones podemos escribir esta solución como una onda viajera también. Las identidades relevantes son

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\cos\phi &= \sin(\theta+\phi)+\sin(\theta-\phi), \\ 2\sin\theta\sin\phi &= \cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi). \end{aligned} \tag{2}$$

Podemos reescribir u_n de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{A}{2}\left[\sin\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)+\sin\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)\right]+\frac{B}{2}\left[\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)-\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)\right] \\ &= \underbrace{\frac{A}{2}\sin\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)-\frac{B}{2}\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+ct)}_{g(x+ct)}+\underbrace{\frac{A}{2}\sin\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)+\frac{B}{2}\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-ct)}_{f(x-ct)} \end{aligned} \tag{3}$$

Con esto lo que hemos hecho es escribir la solución como la suma de dos funciones f y g que representan ondas viajeras (ver la clase en video). Dado que f depende de $x-ct$, es una onda que se mueve hacia la derecha. Mientras que g, que depende de $x+ct$ se desplaza hacia la izquierda. Entonces nos queda que

$$u_n(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct). \tag{4}$$

*Notas de clase realizadas durante el cierre de la USAC debido a la pandemia de Coronavirus.

Lo que acabamos de hacer está presentado en el libro como la parte real e imaginaria de una solución compleja (pag. 301). La ecuación que acabamos de escribir es precisamente la ec. (8.39).

Lo que acabamos de ver aquí es otra forma de llegar a la misma conclusión.

2. Forma de la onda

Tal como argumentamos en la clase en video, cualquier función que dependa de la fase $x \pm ct$ va a ser una onda viajera. Eso quiere decir que f y g no tienen que ser funciones seno o coseno necesariamente.

Cualquier función $f(x - ct)$ y $g(x + ct)$ satisface la ecuación de onda.

La demostración está en la pag. 302 del libro de texto y se basa en la regla de la cadena, tomando $u = f(\xi) + g(\eta)$, donde $\xi = x - ct$ y $\eta = x + ct$. Entonces es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dg}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}. \qquad \text{(por regla de la cadena)}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos $\partial\xi/\partial x = 1$ y $\partial\eta/\partial x = 1$. Al sustituir en la ec. de arriba nos da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\eta}.$$

Calculemos una derivada más

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{df}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{dg}{d\eta}, \\
&= \frac{d}{d\xi}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{d\eta}\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \text{(cambiamos el orden de las derivadas)} \\
&= \frac{d}{d\xi}\frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d}{d\eta}\frac{dg}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \text{(otra vez regla de la cadena)} \\
&= \frac{d}{d\xi}\frac{df}{d\xi} + \frac{d}{d\eta}\frac{dg}{d\eta}, \qquad (\partial\xi/\partial x = 1, \partial\eta/\partial x = 1) \\
&= \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 g}{d\eta^2}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Para $\partial^2 u/\partial t^2$ hacemos un cálculo similar, y queda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 g}{d\eta^2}\right). \qquad (6)$$

Al sustituir (5) y (6) en la ecuación de onda llegamos a una identidad, lo cual confirma que

$$\boxed{u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)} \tag{7}$$

es una solución de la ecuación de onda, para cualquier función f y g.

3. Ondas viajeras y estacionarias

Veamos cuál es la relación entre ondas viajeras y estacionarias. Para esto regresemos a los modos normales, ec. (1). Esta vez tomemos el segundo término (para variar un poco) y utilicemos la identidad trigonométrica (2) para escribirlo como una suma

$$\underbrace{B \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi ct}{\ell}}_{\text{onda estacionaria}} = \underbrace{\frac{B}{2} \cos \frac{n\pi}{\ell}(x - ct)}_{\text{onda viajera hacia}\rightarrow} - \underbrace{\frac{B}{2} \cos \frac{n\pi}{\ell}(x + ct)}_{\text{onda viajera hacia}\leftarrow}. \tag{8}$$

Esta igualdad es la que nos dice qué relación hay entre ondas estacionarias y viajeras.

Para formar una onda estacionaria tenemos que superponer dos ondas viajeras con igual amplitud y que se muevan en direcciones opuestas con igual velocidad.

4. Condiciones de frontera con ondas viajeras

Consideremos el problema de imponer condiciones de frontera utilizando la solución en forma de ondas viajeras. Esta parte está desarrollada en la pag. 304, justo después de la ec. (8.50). Vamos a simplificar un poco la discusión del libro tomando solo el concepto esencial.

Nuestro sistema es una cuerda que se extiende desde $x = -\infty$ hasta $x = 0$. Esto lo hacemos para considerar solamente un extremo, el cual se encuentra en $x = 0$. La condición de frontera es que este extremo está fijo, es decir, $u(0,t) = 0$.

Tomamos la solución escrita como onda viajera, ec. (7), e imponemos la condición de frontera. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ f(0 - ct) + g(0 + ct) &= 0, \\ f(-ct) + g(ct) &= 0, \\ g(ct) &= -f(-ct). \end{aligned} \tag{9}$$

Esta última línea es la condición que f y g deben cumplir para satisfacer la condición de frontera.

Recordemos que las fases de f y g son $\xi = x - ct$ y $\eta = x + ct$. Para $x = 0$, las fases se reducen a $\xi = -ct$ y $\eta = ct$, decir que $\xi = -\eta$. La condición (9) en términos de la fase es

$$\begin{aligned} g(\eta) &= -f(\xi), \\ g(\eta) &= -f(-\eta). \end{aligned} \tag{10}$$

Esta última ecuación es nuestra condición de frontera. Lo que significa es que si nosotros queremos que el extremo $x = 0$ quede fijo, entonces g ya no es una función arbitraria, sino que queda en términos de f.

En otras palabras, si $f(x - ct)$ es una solución a la ecuación de onda, entonces la función g que satisface la condición de frontera es

$$\begin{aligned} g(\eta) &= -f(-\eta) \\ g(\eta) &= -f(-x - ct). \end{aligned} \tag{11}$$

Usando este valor de g en la solución $u(x,t) = f(\xi) + g(\eta)$ nos queda

$$u(x,t) = f(x - ct) - f(-x - ct). \tag{12}$$

Esta es la solución que satisface la ecuación de onda y la condición de frontera impuesta. Vemos que para $x = 0$, u es automáticamente igual cero.

Veamos un ejemplo, si $f(\xi) = A\cos\xi$, la solución sería

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A\cos(x - ct) - A\cos(-x - ct), \\ u(x,t) &= A\cos(x - ct) - A\cos(x + ct). \end{aligned} \tag{13}$$

En esta solución estamos sumando dos ondas viajeras que van en direcciones opuestas. Ahora ya sabemos que esto resulta en una onda estacionaria del tipo de los modos normales, que son funciones que satisfacen la condición de frontera que hemos impuesto aquí.

La discusión en el libro se centra en calcular los tiempos en que la fase de las ondas viajeras llegan a $x = 0$ y demostrar que la suma de las funciones en ese punto es cero. Aquí hemos tomado un camino ligeramente diferente.

4.1. Rebote de la onda en un extremo

Una de las consecuencias más sorprendentes que podemos sacar del análisis anterior es que cuando una onda llega al extremo fijo de la cuerda, la onda se refleja de tal forma que invierte su dirección de movimiento y su amplitud cambia de signo.

Esa es la situación ilustrada en la figura 8.2 del libro. Esto es más revelador cuando lo vemos con una animación, la cual les enviaré en un video cortito.