Observaciones generales de la propagación de ondas*

Enrique Pazos

20 de abril de 2020

Estas notas corresponden a la sección 8.5 del libro de texto.

Vamos a terminar la parte de la ecuación de onda haciendo comentarios muy generales de otros sistemas físicos en los cuales también se observan fenómenos ondulatorios, estos son: ondas sonoras y ondas electromagnéticas.

1. Ecuaciones de onda para velocidad y fuerza

Recordemos lo que vimos cuando dedujimos la ecuación de onda para una cuerda. Veamos la figura 1.

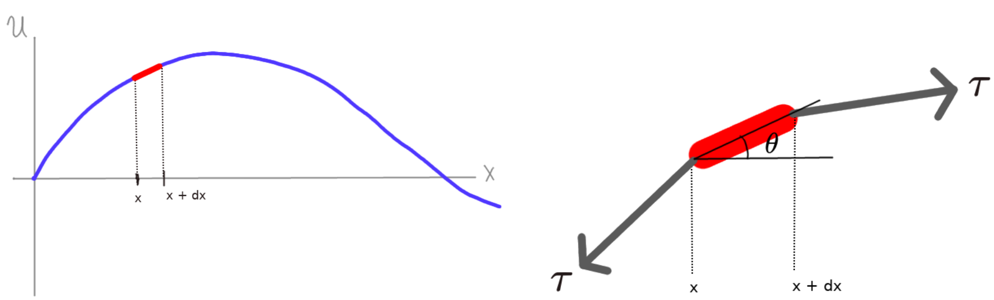

Figura 1: Un elemento de longitud dx con las fuerzas que actúan sobre el mismo.

Le llamaremos F a la componente vertical **hacia arriba** de la tensión. Entonces tenemos que

$$F = -\tau \sin\theta \approx -\tau \tan\theta = -\tau \frac{\partial u}{\partial x}.$$

*Notas de clase realizadas durante el cierre de la USAC debido a la pandemia de Coronavirus.

También vimos que la fuerza neta dF sobre el elemento de cuerda de longitud dx estaba dado por la segunda derivada de u respecto de x. Escribiendo dF en términos de F nos queda

$$\begin{aligned} dF &= \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx, \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\tau \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx, \\ dF &= -\frac{\partial F}{\partial x}\, dx, \end{aligned}$$

donde hemos asumido que la tensión τ es constante. Si llamamos v a la velocidad vertical entonces $v = \partial u/\partial t$. Combinando esto con dF, la segunda ley de Newton para el movimiento del elemento de cuerda es

$$\begin{aligned} dm\, a &= dF, \\ \sigma\, dx \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial F}{\partial x}\, dx, \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial F}{\partial x}.} \tag{1}$$

Si derivamos la fuerza vertical $F = -\tau \partial u/\partial x$, respecto del tiempo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -\tau \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}, \\ &= -\tau \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = -\tau \frac{\partial v}{\partial x}.} \tag{2}$$

Observaciones:

1. Las ecs. (1) y (2) son típicas de fenómenos de propagación de ondas en donde la amplitud es pequeña.
2. Si la amplitud es grande aparecen términos no lineales en la ecuación de onda. Esos términos pueden representar efectos como ondas de choque, las cuales son discontinuidades abruptas en la solución u. En los puntos donde eso sucede la función u deja de ser diferenciable.
3. Siempre que las ecs. (1) y (2) se cumplan, es posible encontrar una ecuación de onda para cualquiera de las dos cantidades.

Encontremos la ecuación de onda para F. Tomamos la ec. (1), la derivamos respecto de x y multiplicamos por $-\tau$, luego derivamos la ec. (2) respecto de t.

$$-\tau\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\sigma}\frac{\partial F}{\partial x}\right]\longrightarrow -\tau\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}=\frac{\tau}{\sigma}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial F}{\partial t}=-\tau\frac{\partial v}{\partial x}\right]\longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=-\tau\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}$$

Al sumar ambos resultados obtenemos que

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

donde hemos utilizado la velocidad de propagación $c^2=\tau/\sigma$. De forma similar podemos encontrar que la velocidad v también satisface una ecuación de onda que es

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

2. Ondas sonoras

El caso de las ondas sonoras lo vamos a ver en detalle más adelante. Por momento solo haremos la comparación de las ecuaciones correspondiente con (1) y (2). En este caso en lugar de la fuerza F tenemos la perturbación a la presión atmosférica p', la cual se define de tal forma que la presión total p es igual a la presión atmosférica p_{atm} más una pequeña perturbación p'.

$$p=p_{\text{atm}}+p'.$$

En este sentido p' es un pequeño incremento o disminución alrededor del valor de la presión atmosférica, lo cual es consistente con la presión que ejerce una onda sonora. Tanto p' como v satisfacen ecuaciones de onda

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0.$$

En este sistema la velocidad de propagación c es la velocidad del sonido.

3. Ondas electromagnéticas

En el libro este ejemplo está muy escueto. Aquí vale la pena mencionar que para una onda electromagnética no importa si las amplitudes son pequeñas o grandes, ya que la ecuación de onda surge directamente como una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, las cuales son ecuaciones lineales.

El ejemplo del libro lo podemos entender muy fácilmente aplicando dos de las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

Ahora la velocidad de propagación c es la velocidad de la luz. La versión más simple de la ecuación de onda sale de considerar un campo $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$ y $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$. Ambos campos dependen del tiempo t y de la coordenada x.

Aplicando la ec. (3) a los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ tenemos

$$\begin{gathered}
\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}(0, 0, B_z), \\
\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z},\, 0,\, \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\left(0,\, 0,\, \frac{\partial B_z}{\partial t}\right).
\end{gathered}$$

Igualando las componentes z obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.} \tag{5}$$

Ahora aplicamos la ec. (4)

$$\begin{gathered}
\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\
\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(0, E_y, 0), \\
\left(\frac{\partial B_z}{\partial y},\, -\frac{\partial B_z}{\partial x},\, 0\right) = \frac{1}{c^2}\left(0,\, \frac{\partial E_y}{\partial t},\, 0\right).
\end{gathered}$$

Igualando las componentes y obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}.} \tag{6}$$

Las ecs. (5) y (6) son el equivalente las ecs. (1) y (2). Tomando derivadas respecto de x y t y sumándolas llegamos a que tanto E_y como B_z satisfacen ecuaciones de onda con una velocidad de propagación c igual a la velocidad de la luz.

En el libro utilizan las ecuaciones de Maxwell en unidades gaussianas. En las unidades SI los factores de c quedan ligeramente diferentes.