Leyes de conservación para el movimiento de un fluido*

Enrique Pazos

30 de abril de 2020

1. Ley de conservación

Vamos a partir de la ecuación de continuidad, la cual también le podemos llamar la **ley de conservación de masa** para un fluido. La afirmación inicial fue que la cantidad de masa en un volumen permanece constante en el tiempo, es decir

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\,\delta V\right) = 0. \tag{1}$$

De forma equivalente logramos reescribir esta ecuación [ver ec. (3) de las notas *Cinemática de fluidos, parte 2*] de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{2}$$

Esta expresión es una ley de conservación en su forma más estricta, es decir, cuando el lado derecho es igual a cero. Una ley de conservación nos dice que hay cantidades que cumplen con un balance. Si esta cantidad está aumentando adentro de un cierto volumen, es porque está fluyendo hacia el interior de dicho volumen. Esto lo podemos entender integrando la ec. (2) en un volumen V

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\,dV &= 0, \\
\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV + \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\rho\,dS &= 0, \quad \text{usando teorema de Gauss} \\
\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\,dV + \iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\rho\,dS &= 0.
\end{aligned}$$

Observaciones:

*Notas de clase realizadas durante el cierre de la USAC debido a la pandemia de Coronavirus.

1. Cuando sacamos la derivada parcial respecto del tiempo, ésta queda como derivada total porque después de hacer la integral sobre el volumen la única variable independiente que queda es el tiempo.

2. La segunda integral se hace sobre la superficie S que encierra el volumen V.

3. La cantidad $\mathbf{v}\rho$ tiene unidades de kg/(s m^2), es decir, es la cantidad de masa que atraviesa una superficie por unidad de área y unidad de tiempo. En otras palabras, si integramos $\mathbf{v}\rho$ sobre la superficie S obtenemos el flujo de masa (cantidad de masa por unidad de tiempo) que ingresa o sale del volumen V a través de su superficie S.

Escribamos de nuevo la última ecuación e identifiquemos cada integral

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\iiint_V \rho\, dV}_{\text{masa}} + \underbrace{\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}\rho\, dS}_{\text{flujo de masa}} = 0.$$

Esto dice que la forma de una ley de conservación es

$$\frac{d}{dt}X + \text{razón de cambio de debida al flujo de } X = 0, \tag{3}$$

donde X es cualquier cantidad física que nos interese, por ejemplo: masa, momentum, energía, momentum angular, etc.

2. Ley de conservación generalizada

Recordemos que en mecánica de partículas, el momentum se conserva cuando no existe ninguna fuerza externa, es decir

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Si $\mathbf{F} = 0$ entonces $\mathbf{P}$ es constante. De forma similar, la ley de conservación (3) puede tener un lado derecho diferente de cero si existe algún mecanismo (fuerza externa) que modifique la cantidad X.

Supongamos por el momento que ρ es la densidad de cualquier cantidad física (momentum, energía o momentum angular).

Si tomamos en cuenta que una cantidad física está siendo producida o reducida por fuerzas que actúan sobre el fluido, debemos generalizar la ley de conservación (1). Esto lo hacemos así:

$$\frac{d}{dt}(\rho\,\delta V) = Q\,\delta V, \tag{4}$$

donde Q representa la razón de cambio por unidad de volumen a la cual la cantidad que ρ representa, está cambiando.

La en la forma de la ec. (2) esto queda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = Q.$$

Algunas veces a Q se le llama **fuente** o **sumidero**, dependiendo de si es positiva o negativa, respectivamente. Si es positiva la cantidad física asociada a ρ aumenta y si es negativa, disminuye.

3. Conservación de momentum lineal y energía

Veamos cómo podemos deducir una ley de conservación para el momentum lineal de un fluido. El momentum $\delta \mathbf{p}$ de un elemento de volumen δV es (ahora ρ vuelve a ser la densidad de masa)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p} &= (\delta m)\mathbf{v}, \\ &= \mathbf{v}\rho\, \delta V. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior notamos que la cantidad de momentum por unidad de volumen es

$$\frac{\delta \mathbf{p}}{\delta V} = \rho \mathbf{v}.$$

La cantidad $\rho \mathbf{v}$ es la **densidad de momentum lineal**. Ahora utilizamos la segunda ley de Newton en la forma dada por le ec. (8.138) del libro, la cual también vimos en la video clase `https://youtu.be/-FSBnMCHVEI`, tal ecuación es

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{f}.$$

Multiplicamos la ecuación por δV

$$\begin{aligned} \rho\, \delta V \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p\, \delta V &= \mathbf{f}\, \delta V, \\ \frac{d}{dt}\left(\rho \mathbf{v}\, \delta V\right) + \nabla p\, \delta V &= \mathbf{f}\, \delta V, \quad \text{como } \delta m = \rho\, \delta V \text{ es constante,} \\ & \quad\quad \text{lo metemos a la derivada} \end{aligned}$$

pasando el gradiente de la presión al lado derecho nos queda

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\rho \mathbf{v}\, \delta V\right) = (\mathbf{f} - \nabla p)\, \delta V.} \tag{5}$$

Comparando esta expresión con la ec. (4), vemos que $Q = \mathbf{f} - \nabla p$. Esto significa que si nosotros queremos que la densidad de momentum sea constante en un elemento de volumen Q debe ser igual a cero o bien, que $\mathbf{f} = \nabla p$. Esta condición rara vez se cumple. Lo más común es que $\mathbf{f}$ sea igual a cero, lo que implica que el gradiente de presión hace que la densidad de momentum tenga que cambiar.

La ley de conservación para la energía la encontramos multiplicando ambos lados de la ec. (5) por $\mathbf{v}$, así

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\rho \mathbf{v}\, \delta V\right) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} - \nabla p)\, \delta V, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\, \delta V\right) &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} - \nabla p)\, \delta V. \qquad (6)
\end{aligned}$$

En la última ecuación utilizamos la derivada de un producto

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

4. Fuerza gravitacional

Ahora vamos a darle un valor concreto a la fuerza de volumen $\mathbf{f}$. Si esta fuerza es el peso del fluido entonces será igual la fuerza que la gravedad ejerce sobre un elemento de volumen

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \frac{(\delta m)\mathbf{g}}{\delta V}, \\
&= \frac{\rho\, \delta V \mathbf{g}}{\delta V}, \\
&= \rho \mathbf{g}.
\end{aligned}$$

La fuerza de volumen debida al peso del fluido por acción de la gravedad es

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} = \rho \nabla \mathcal{G}.$$

Aquí, $\mathcal{G}$ es el potencial gravitacional. En la vecindad de la superficie de la tierra es suficiente con tomar $\mathcal{G} = -gz$, donde z es la altura vertical sobre la superficie.

Tomemos el término $\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}\, \delta V$ en el lado derecho de la ec. (6) y sustituyamos $\mathbf{f} = \rho \nabla \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}\, \delta V &= \mathbf{v} \cdot \left(\rho \nabla \mathcal{G}\right)\, \delta V, \\
&= (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{G})\, \rho\, \delta V, \\
&= \left(\frac{d\mathcal{G}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{G}}{dt}\right) \rho\, \delta V, \quad \text{usando } \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{G} \\
&= \frac{d\mathcal{G}}{dt} \rho\, \delta V - \frac{\partial \mathcal{G}}{dt} \rho\, \delta V, \\
&= \frac{d}{dt}\left(\rho \mathcal{G}\, \delta V\right) - \frac{\partial \mathcal{G}}{dt} \rho\, \delta V. \quad \rho\, \delta V = \delta m = \text{constante} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Ahora nos ocupamos del segundo término $-\mathbf{v}\cdot\nabla p\,\delta V$ en el lado derecho de la ec. (6). Vamos a reescribirlo partiendo de la derivada en el tiempo de la cantidad $p\,\delta V$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(p\,\delta V) &= \frac{dp}{dt}\delta V + p\frac{d}{dt}(\delta V), \quad \text{derivada de un producto} \\
&= \frac{\partial p}{\partial t}\,\delta V + \mathbf{v}\cdot\nabla p\,\delta V + p\frac{d}{dt}(\delta V), \quad \text{usando}\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p \\
&= \frac{\partial p}{\partial t}\,\delta V + \mathbf{v}\cdot\nabla p\,\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\,\delta V, \\
-\mathbf{v}\cdot\nabla p\,\delta V &= -\frac{d}{dt}(p\,\delta V) + \frac{\partial p}{\partial t}\,\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\,\delta V. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Utilizando los resultados (7) y (8) la ley de conservación de energía (6) la podemos escribir así

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\,\delta V\right) &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}\,\delta V - \nabla p\,\delta V, \\
&= \frac{d}{dt}\,(\rho\mathcal{G}\,\delta V) - \frac{\partial\mathcal{G}}{dt}\rho\,\delta V - \frac{d}{dt}(p\,\delta V) + \frac{\partial p}{\partial t}\,\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\,\delta V,
\end{aligned}$$

pasamos todas las derivadas totales al lado izquierdo

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p - \rho\mathcal{G}\right)\,\delta V\right] = \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \rho\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right)\,\delta V + p\nabla\cdot\mathbf{v}\,\delta V. \qquad (9)$$

Esta expresión puede ser simplificada asumiendo tres cosas:

1. Si la presión en cada punto del espacio no depende del tiempo, entonces $\partial p/\partial t = 0$. Lo que es equivalente a decir que la presión es constante. Esto solo implica que la presión no cambia en el tiempo, pero puede cambiar de un lugar a otro en el espacio.
2. Si el campo gravitacional tampoco depende del tiempo entonces $\partial\mathcal{G}/\partial t = 0$. Esto se cumple siempre que estemos sobre la superficie terrestre.
3. Si nuestro fluido es incompresible entonces $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$.

Bajo estas condiciones llegamos a la conclusión de que el lado izquierdo de la ec. (9) es igual a cero, lo que equivale a decir que la suma de tales cantidades es constante. Por lo tanto tenemos que

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + p - \rho\mathcal{G} = \text{constante.}} \qquad (10)$$

Esta es la **ecuación de Bernoulli** para un fluido incompresible. Si consideramos que el fluido es compresible entonces nos queda un término adicional en la ecuación, tal como se muestra en la ec. (8.163) del libro de texto.

Cada término en esta expresión tiene unidades de energía por unidad de volumen. El primer término es la densidad de energía cinética. El último término es la densidad de energía potencial gravitacional. El segundo término es la presión p la cual juega un papel de densidad de energía potencial asociada a la fuerza de volumen debida al gradiente de presión.