Equilibrio de fluidos*

Enrique Pazos

21 de abril de 2020

Vamos a regresar al capítulo 5 para ver algunos conceptos sobre equilibrio de fluidos. Mi recomendación en esta parte es que lean estas notas primero y luego lean la sección 5.11 del libro. Aquí he hecho énfasis en los conceptos más importantes y he traído también definiciones previas, pero no dejen de leer el libro en donde hay algunos detalles que he omitido.

1. Presión

El **esfuerzo** o **tensión mecánica** (*stress* en inglés) se define como la fuerza que se aplica sobre una superficie dividida entre el área de la superficie

$$\text{esfuerzo} = \frac{F}{A}.$$

Si el objeto sobre el que se aplica esta fuerza es un líquido o un gas al esfuerzo le llamamos **presión** p y la definimos de igual forma

$$p = \frac{F}{A}. \tag{1}$$

2. Deformación

Cuando un objeto sólido o un fluido se somete a una fuerza, el objeto se deforma elásticamente, es decir que el objeto recupera su forma original cuando la fuerza desaparece. Para el caso de los fluidos esta deformación (*strain* en inglés) es en realidad un **cambio de volumen** y se define como ese cambio en el volumen producido por la fuerza dividido entre el volumen original

$$\text{deformación} = \frac{\Delta V}{V}. \tag{2}$$

*Notas de clase realizadas durante el cierre de la USAC debido a la pandemia de Coronavirus.

3. Módulo volumétrico

El **módulo volumétrico** B o **módulo de compresibilidad** (*bulk modulus* en inglés) es una cantidad que relaciona la deformación en un fluido cuando se le aplica una presión. Esta relación está dada como

$$\text{esfuerzo} = B \times \text{deformación},$$
$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}, \tag{3}$$

donde hemos usado (1) y (2). El signo menos toma en cuenta el hecho que aplicar presión sobre un fluido (por ejemplo un gas en un pistón) hace que éste se comprima y reduzca su volumen, es decir que ΔV es negativo. También hemos usado Δp en lugar de p. Esto es para enfatizar que normalmente los objetos que vamos a estudiar ya están siendo afectados por una presión (por ejemplo, la presión atmosférica). Entonces lo que nos interesa en realidad es la deformación producida por un incremento en la presión.

La fórmula (3) se parece mucho a la ley de Hooke, $F = -kx$ y en esencia representan el mismo fenómeno. En la ley de Hooke nosotros podemos aplicar una fuerza F a un resorte y éste se comprime una longitud x. Al quitar la fuerza el resorte recupera su longitud original. De esta misma forma entendemos la deformación sobre un fluido producida por una presión. El módulo volumétrico B lo podemos interpretar como la constante elástica k, pero el objeto ahora es un cuerpo líquido o gaseoso.

4. Fuerzas de volumen

Fuerza de volumen $\mathbf{f}$, es la traducción común de *body force*. Es la fuerza que experimenta un fluido por unidad de volumen, de tal forma que un elemento de volumen dV experimenta un fuerza dada por $\mathbf{f}\,dV$. El ejemplo más común es la fuerza de volumen ejercida por la gravedad, que está dada como

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{g},$$

donde ρ es la densidad del fluido.

5. Relación entre presión y energía potencial

En la pag. 249 hay párrafo que merece atención:

> Encontrar la presión dentro de un fluido en equilibrio sabiendo la fuerza de volumen $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es equivalente a encontrar la **energía potencial** para un fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Primero verificamos que $\nabla \times \mathbf{f}$ sea cero en todo el fluido. Luego tomamos un punto $\mathbf{r}_1$ en donde la presión es conocida y utilizamos la expresión
>
> $$p(\mathbf{r}) = p_1 + \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r},$$

que es una integral de línea a lo largo de una trayectoria.

Si $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ implica que $\mathbf{f}$ se puede expresar como el gradiente de una cantidad. De la expresión anterior y utilizando la analogía entre presión y energía potencial vemos que la relación entre la fuerza de volumen $\mathbf{f}$ y la presión p es

$$\mathbf{f} = \nabla p. \tag{4}$$

En el caso de la fuerza de gravedad, sabemos que ésta apunta de arriba hacia abajo. El gradiente de la presión apunta en la misma dirección ya que la presión aumenta de arriba hacia abajo.

6. Ejemplo: gas en equilibrio con la gravedad

Veamos el caso del aire en la atmósfera, el cual podemos considerar como un gas ideal. La fuerza de volumen es $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. Después de verificar que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ [esta es la ec. (5.189) del libro] y dado que la gravedad actúa en la dirección normal a la superficie del planeta, la presión en el aire depende solo de la altura z. De la ec. (4) vemos que solo la componente en z del gradiente es diferente de cero, por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right) &= \rho(0, 0, -g), \\ \frac{dp}{dz} &= -\rho g. \end{aligned} \tag{5}$$

Si asumimos que la densidad ρ es constante podemos encontrar la presión integrando (5), así

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p} dp &= \int_0^z -\rho g \, dz, \\ p - p_0 &= -\rho g(z - 0), \\ p &= p_0 - \rho g z. \end{aligned} \tag{6}$$

Aquí hemos utilizado como condición inicial que la presión en $z = 0$ (la superficie de la tierra) es p_0. Esto nos dice que la presión decrece linealmente con la altura, lo cual es válido si z no es muy grande.

Podemos obtener un resultado más preciso si consideramos que la densidad del aire varía con la altura. Para esto usamos la **ecuación de estado** de los gases ideales

$$pV = nRT,$$

donde p es la presión, V es el volumen, T es la temperatura absoluta, R es la constante de los gases ideales y n es el número de moles. La ecuación de estado se puede reescribir así

$$
\begin{aligned}
nRT &= pV, \\
\frac{n}{V} &= \frac{p}{RT}, \\
\frac{nM}{V} &= \frac{pM}{RT}, \quad M \text{ es el peso molecular} \\
\frac{m}{V} &= \frac{pM}{RT}, \quad m \text{ es la masa del gas} \\
\rho &= \frac{pM}{RT}.
\end{aligned}
$$

Lo importante de esta expresión es que la densidad ρ depende de la presión p. Regresemos de nuevo a la ec. (5) y sustituyamos la densidad dada por la ecuación de estado.

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{dz} &= -\rho g, \\
\frac{dp}{dz} &= -\frac{pM}{RT} g, \\
\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} &= -\int_0^z \frac{Mg}{RT}\, dz, \\
\ln \frac{p}{p_0} &= -\frac{Mg}{RT} z, \\
p &= p_0 e^{-\frac{Mg}{RT} z}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Vemos que ahora la presión disminuye exponencialmente con la altura, lo cual es una muy buena aproximación, válida para prácticamente todo el rango de alturas en la atmósfera.