Cinemática de fluidos, parte 2*

Enrique Pazos

24 de abril de 2020

Antes de leer este documento recomiendo ver la clase en video "Cinemática de fluidos" `https://youtu.be/icNOUZkPAjA`

1. Derivada parcial y total

En la clase en video vimos la relación entre derivada total y parcial de las propiedades del fluido. En el caso de la presión p tenemos

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p.$$

Esto es válido para cualquier cantidad que sea una propiedad del fluido, por ejemplo: presión, temperatura o densidad. Podemos expresar esta relación en forma de operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \tag{1}$$

las derivadas totales y parciales tienen el significado que discutimos en la video-clase: la derivada total es la razón de cambio en un punto que se mueve con el fluido, la derivada parcial es la razón de cambio en una posición (x, y, z) fija.

2. Fluido incompresible

En la clase en video sobre cinemática de fluidos, vimos el significado de la divergencia de la velocidad $\nabla \cdot \mathbf{v}$ como parte de la derivada en el tiempo de un elemento de volumen δV. La fórmula es

$$\frac{d}{dt}(\delta V) = (\nabla \cdot \mathbf{v})\delta V. \tag{2}$$

*Notas de clase realizadas durante el cierre de la USAC debido a la pandemia de Coronavirus.

Observación: la delta δ puede ser un poco confusa cuando le tomamos la derivada a δV, pero solo la estamos utilizando para enfatizar que δV es un volumen pequeño.

Un caso importante a considerar es cuando $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, en cuyo caso vemos que la derivada del volumen es igual a cero, o bien que δV se mantiene constante. En otras palabras, decimos que el fluido es **incompresible**.

$$\boxed{\text{Un fluido es incompresible si cumple con } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.}$$

Esta condición se cumple cuando el fluido es un líquido. Un gas se expande y se contrae, pero en ciertos casos se puede considerar incompresible también. Sin embargo, recordemos también que ningún objeto (incluso sólido) es totalmente rígido.

3. Masa

Consideremos cuánta masa contiene el elemento de volumen δV. Asumimos que **la masa de un elemento de volumen es constante** y está dada como

$$\delta m = \rho\, \delta V.$$

Si δm es constante su derivada es cero, lo cual implica lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\delta m &= 0, \\
\frac{d}{dt}(\rho\, \delta V) &= 0, \\
\rho \frac{d}{dt}\delta V + \frac{d\rho}{dt}\delta V &= 0, && \text{derivada de un producto} \\
\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})\, \delta V + \frac{d\rho}{dt}\delta V &= 0, && \text{usando la ec. (2)} \\
\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{d\rho}{dt} &= 0, && \text{dividimos entre } \delta V \\
\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho &= 0, && \text{usando la ec. (1)} \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\nabla\rho) \cdot \mathbf{v} &= 0, && \text{reordenando} \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0. && \text{utilizando identidades vectoriales} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Esta última expresión se conoce como la **ecuación de continuidad** y expresa el hecho de que la masa de cada elemento de volumen es constante, por lo tanto la masa total de todo el fluido también es constante. En otras palabras, la masa se conserva, no se crea ni se destruye.

4. Vorticidad

En el libro de texto no está con este nombre, sin embargo la vorticidad es el rotacional de la velocidad proyectado en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$

$$\text{Vorticidad} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Si integramos la vorticidad en una superficie con vector normal $\hat{\mathbf{n}}$, podemos utilizar el teorema de Stokes para transformar la integral de superficie en una integral de línea

$$\iint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\, dS = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

En la segunda integral, C es el contorno de la superficie S. Si estas integrales son diferentes de cero es porque la velocidad tiene una componente que es paralela al vector tangente $d\mathbf{r}$ de la curva. Esto se ilustra en la figura 8.7(a) del libro de texto y ejemplifica la situación en que la curva encierra un vórtice. La otra forma de hacer que la integral sea diferente de cero es que la velocidad varíe en la forma que se muestra en la figura 8.7(b).

Si las integrales son cero podemos decir que la vorticidad es cero y esto nos dice que el fluido es **irrotacional**. Esta propiedad es importante porque ilustra situaciones simples como el flujo laminar en un fluido.

Ejemplo: Calculemos la vorticidad de un disco sólido ubicado en el plano xy que gira con una velocidad angular ω alrededor del eje z. La velocidad de cada punto del disco está dada como

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \omega r \hat{\theta}, \\
\mathbf{v} &= \omega r(-\sin\theta \hat{\mathbf{x}} + \cos\theta \hat{\mathbf{y}}), \quad \text{usamos la ec. (3.74) del libro} \\
\mathbf{v} &= \omega r \left(-\frac{y}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{r}\hat{\mathbf{y}} \right), \quad \text{usamos } x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta \\
\mathbf{v} &= -\omega y \hat{\mathbf{x}} + \omega x \hat{\mathbf{y}}.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos el rotacional de la velocidad

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}, \\
&= (0, 0, 2\omega).
\end{aligned}$$

El vector normal en este caso es $\hat{\mathbf{z}}$, por lo que la vorticidad es simplemente 2ω. Lo que esto nos dice que es la velocidad angular ω es una medida de la circulación de las partículas que componen el disco.