Proyecto: Transformada Discreta de Fourier
Matemática Aplicada 2

Dr. Enrique Pazos

8 de octubre de 2012

La Transformada Discreta de Fourier (TDF) se utiliza ampliamente en el análisis de señales, donde se tiene una serie de datos que dependen del tiempo, es decir, una serie de tiempo. Estos datos pueden ser los valores medidos de un potencial eléctrico o las intensidades de un sonido. Cuando se tiene información representada de esta manera, uno de los datos conocidos es la llamada *frecuencia de muestreo*. Esta es la frecuencia a la cuál se hicieron las mediciones en la toma de datos. Por ejemplo, para grabar 10 segundos de un sonido, la computadora graba la intensidad del mismo con una frecuencia de 44100 Hz. Es decir que hace 44100 mediciones en cada segundo. Por tanto, una grabación de 10 segundos se puede representar como una serie de 441000 mediciones de la intensidad de dicho sonido. La pregunta entonces es: ¿Cómo podemos calcular la serie de Fourier en este caso?

1. De lo continuo a lo discreto

Si una función $f(t)$ es periódica con período T, entonces la función se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \tag{1}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental y c_n son los coeficientes complejos de Fourier dados por

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t}dt \tag{2}$$

Si la función no es continua y con lo único que contamos es un cierto número N de puntos, cuya separación entre ellos es una distancia Δt; entonces podemos utilizar la fórmula anterior con las siguientes modificaciones: El período de la función es $T = N\Delta t$ y la variable continua t se cambia por $m\Delta t$, donde m es un número entero. (Ver fig. 1) Al hacer estos cambios de variable, y utilizando la relación $\omega_0 = 2\pi/T$; la ec. (2) se transforma en

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{N\Delta t}\sum_{m=0}^{N-1} f(m\Delta t)e^{-in\frac{2\pi}{N\Delta t}m\Delta t}\Delta t \\ c_n &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{2\pi imn/N} \end{aligned} \tag{3}$$

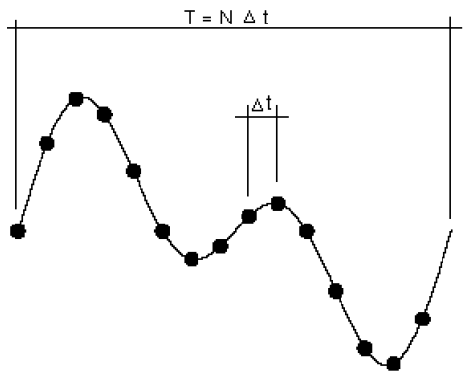

Figura 1: Relación entre variables continuas y discretas

donde f_m representa el m-ésimo valor de la función. A esta expresión se le llama *transformada discreta de Fourier*. De esta manera la integral del la ec. (2) se transforma en una sumatoria sobre cada uno de los valores conocidos de la función dada. A continuación se muestra un ejemplo de cómo utilizar la fórmula dada por la ec. (3).

2. Espectro de amplitud de una guitarra eléctrica

La figura 2 muestra la forma de la onda producida por una nota musical en una guitarra eléctrica. El eje vertical mide el voltaje generado por la onda al pasar a través de un micrófono. El período (y por lo tanto la frecuencia) se puede medir directamente de la gráfica, observando cuánto tiempo se necesita para que la onda se repita a sí misma. El timbre característico de cada instrumento está asociado con la forma de la onda. Lo que deseamos es encontrar los 10 primeros armónicos del espectro de amplitud de la onda mostrada en la figura 2. Como no conocemos la expresión matemática para esta onda entonces recurrimos a la transformada de Fourier discreta. Se puede demostrar que el número N de puntos que necesitamos obtener de la gráfica es el doble del número de armónicos que queremos calcular. Es decir, si queremos saber los 10 primeros armónicos, entonces necesitamos 20 puntos. Con esto, procedemos a hacer un muestreo de la señal; o sea, de la onda.

De la gráfica (fig. 2) notamos que podemos considerar un período de la función desde un tiempo de 0.000 s hasta 0.013 s aproximadamente. Con lo cuál averiguamos el período, es decir, $T = 0.013$ segundos. Si queremos conocer los diez primeros armónicos, entonces debemos obtener veinte puntos de la gráfica. Estos puntos deben cubrir un período de la onda y estar uniformemente espaciados. La gráfica 3 muestra los veinte puntos. Debemos notar que la coordenada t no importa. Únicamente nos interesa la altura de cada punto. La lista de valores graficados es: 2.628, 2.604, 2.581, 2.55, 2.542, 2.548, 2.56, 2.58, 2.578, 2.579, 2.611, 2.559, 2.545, 2.583, 2.555, 2.535, 2.567, 2.561, 2.533, 2.593. Estos números corresponden

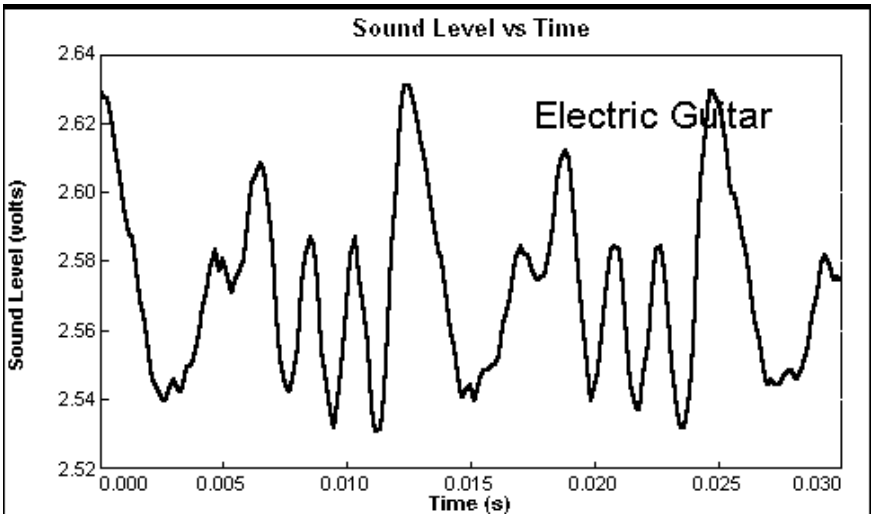

Figura 2: Onda producida por una guitarra eléctrica

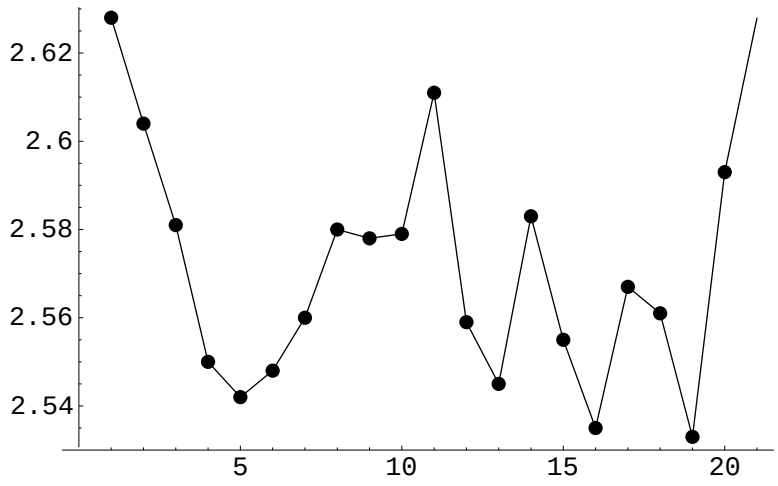

Figura 3: Muestreo sobre un período de la onda de la gráfica 2

n	X	Y	$\lvert c_n \rvert = \sqrt{X^2 + Y^2}$
0	2.5696	0	2.5696
1	0.0016706	0.0019921	0.00259992
2	0.0117184	−0.0008133	0.01174660
3	0.0054384	0.0048272	0.00727181
4	0.0040666	0.0016745	0.00439792
5	0.001	0.0029	0.00306757
6	0.0075816	−0.0020602	0.00785659
7	−0.0029749	−0.0040519	0.00502675
8	0.0013833	−0.0004765	0.00146314
9	−0.0008841	−0.0008668	0.00123817
10	0.0004	0	0.0004

Cuadro 1: Coeficientes complejos y su valor absoluto para los diez primeros armónicos

a los valores que toma la variable f_m.

Para poder calcular ahora los coeficientes c_n debemos separar la ec. (3) en parte real y parte imaginaria. Recurriendo la relación $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \cos \frac{2\pi nm}{N} + i f_m \sin \frac{2\pi nm}{N} \\ c_n &= \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \cos \frac{2\pi nm}{N} \right) + i \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \sin \frac{2\pi nm}{N} \right) \end{aligned} \tag{4}$$

la expresión dentro del primer paréntesis es la parte real y la del segundo paréntesis es la parte imaginaria. Llamando X a la parte real y Y a la parte imaginaria. Los coeficientes se pueden escribir como $c_n = X + iY$. Al expandir la suma, digamos para X, ésta quedaría así:

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{N} \Bigg(& f_0 \cos \frac{2\pi n(0)}{N} + f_1 \cos \frac{2\pi n(1)}{N} + f_2 \cos \frac{2\pi n(2)}{N} + \\ & f_3 \cos \frac{2\pi n(3)}{N} + \ldots + f_{N-1} \cos \frac{2\pi n(N-1)}{N} \Bigg) \end{aligned} \tag{5}$$

esta suma debe evaluarse para cada uno de los valores de n y de manera similar se efectúa una suma para la parte imaginaria que contiene seno en lugar de coseno.

Ahora estamos listos para calcular los coeficientes c_n, con ayuda de una hoja electrónica (o bien a mano). Sabemos que $N = 20$ y conocemos los valores de f_m que obtuvimos de la gráfica 2. La tabla 1 muestra parte de los resultados del cálculo de los coeficientes c_n.

La figura 4 muestra el espectro de amplitud obtenido al graficar el valor absoluto de c_n contra n. La escala vertical muestra está en el rango apropiado para mostrar todos los coeficientes excluyendo $n = 0$, cuyo valor es de 2.5696.

Teniendo en cuenta que cada valor de n es representa un múltiplo de la frecuencia fundamental ω_0, el espectro se puede graficar contra $n\omega_0$ o contra $n\nu_0$, donde ν_0 es la frecuencia fundamental en Hertz. Para este caso conocemos el período de la onda, que es $T = 0.013$

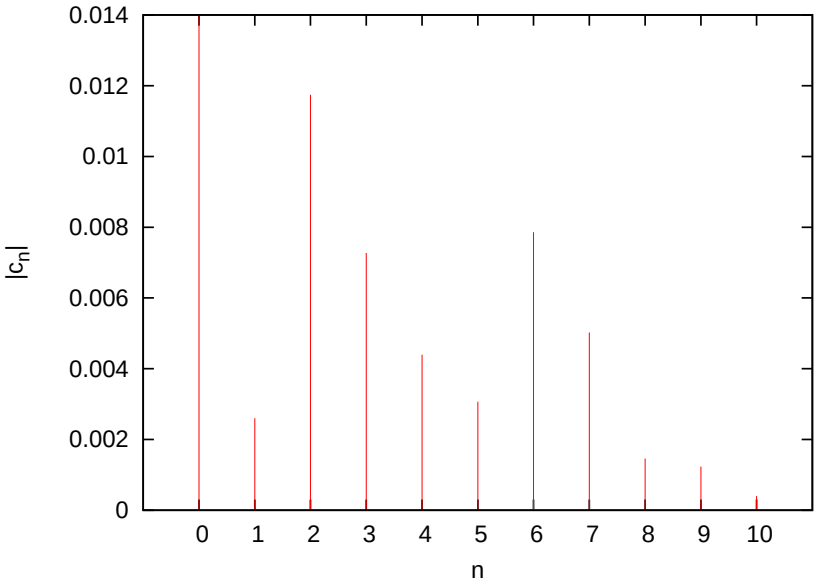

Figura 4: Espectro de amplitud, $|c_n|$ contra n.

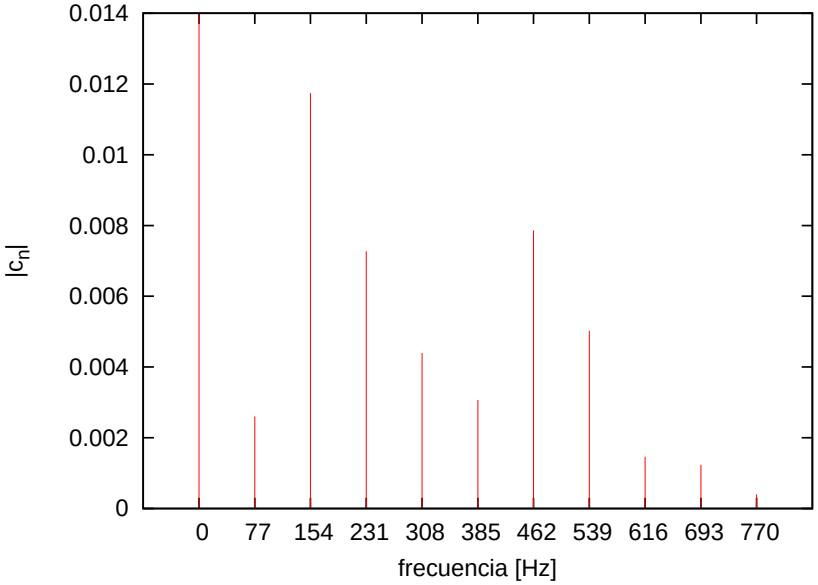

Figura 5: Espectro de amplitud, $|c_n|$ contra los múltiplos de la frecuencia fundamental (llamados armónicos), $\nu_0 = 77$ Hz. La frecuencia dominante es 154 Hz

segundos. Usando la fórmula $\omega_0 = 2\pi/T$, tenemos que $\omega_0 = 483.3$ rad/s. La frecuencia angular y la frecuencia se relacionan por medio de $\nu_0 = \omega_0/2\pi = 1/T$. Así es que la frecuencia fundamental es $\nu_0 \approx 77$ Hz. El mismo espectro se ve ahora en la gráfica 5, en donde en el eje horizontal hemos puesto la variable $n\nu_0$, es decir, múltiplos de la frecuencia fundamental.

3. Proyecto

Dadas las gráficas de las ondas sonoras de una guitarra acústica (fig. 6) y de un trombón (fig. 7),

1. Calcular los 15 primeros armónicos para cada instrumento.
2. Graficar los datos y su respectivo espectro de amplitud. Colocando $|c_n|$ en el eje vertical y los múltiplos de la frecuencia fundamental en Hertz en el eje horizontal.

4. Presentación

El proyecto debe contener:

1. Marco Teórico (breve introducción de lo que es la TDF).
2. Descripción del procedimiento utilizado para hacer los cálculos.
3. Resultados (gráficas de los espectros)
4. Conclusiones.
5. Apéndice (si escribe un programa para hacer los cálculos inclúyalo en esta sección).
6. Bibliografía.

5. Entrega

La fecha de entrega será el día lunes **29 de octubre de 2012**.

El proyecto se puede trabajar en forma individual, en parejas o en grupos de tres alumnos como máximo.

Referencias

[1] J. F. James, *A student's guide to Fourier Transforms*, Cambridge University Press, 1995.

[2] *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with audio applications*, Julius O. Smith III, https://ccrma.stanford.edu/∼jos/log/

[3] Discrete Fourier Transform http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform

[4] Discrete Fourier Transform Tutorial http://www.fourier-series.com/fourierseries2/DFT_tutorial.html

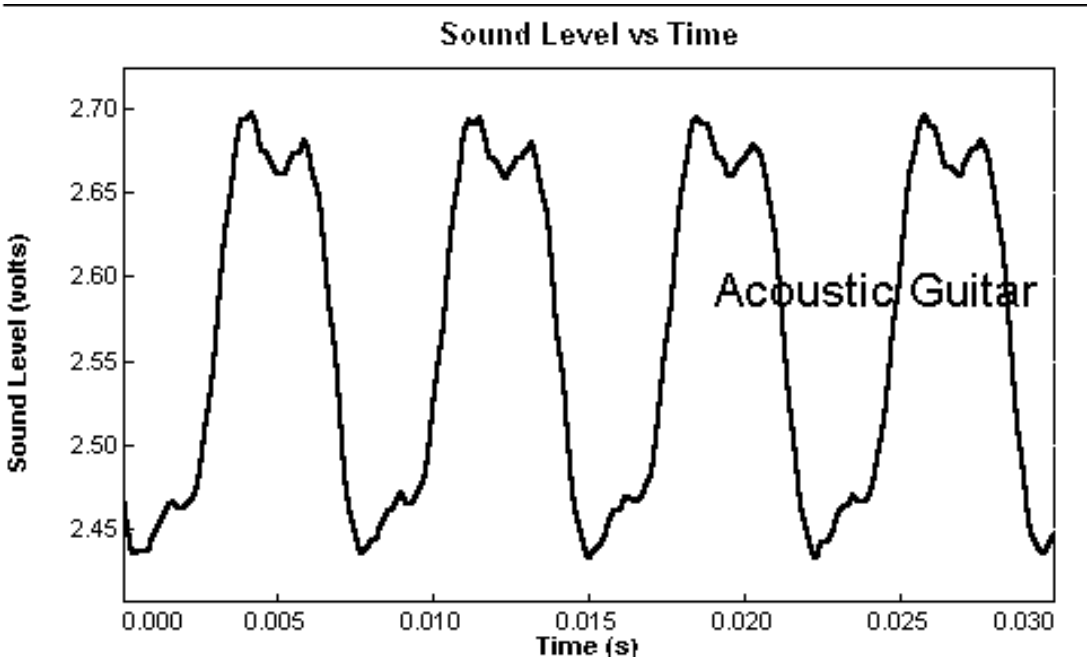

Figura 6: Onda sonora producida por una nota ejecutada en una guitarra acústica

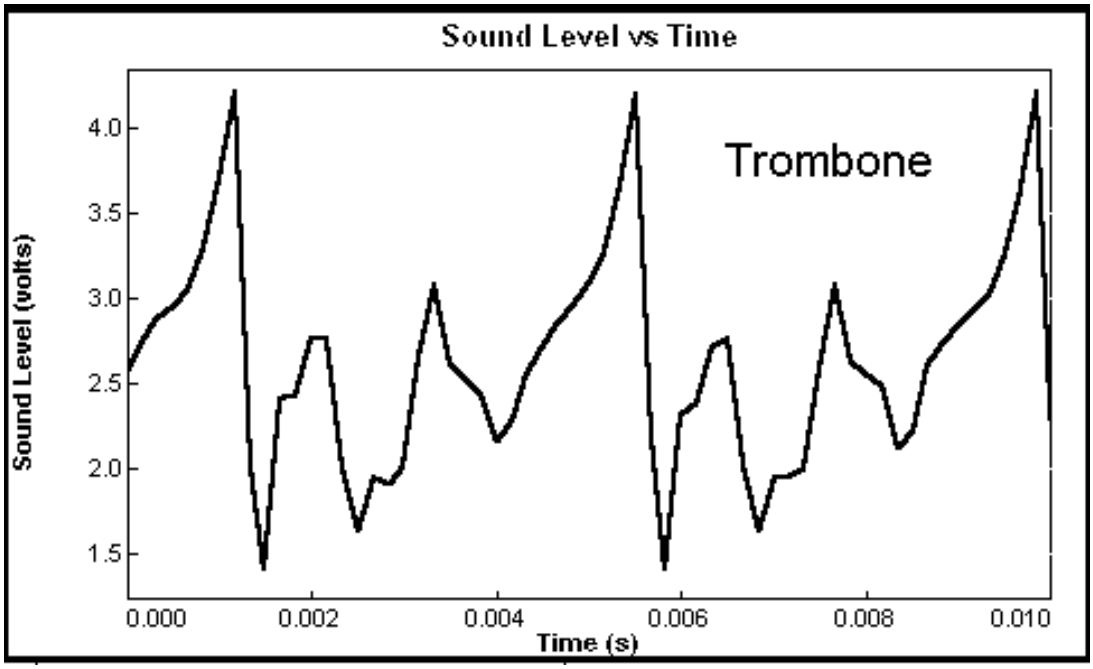

Figura 7: Onda sonora producida por una nota ejecutada en un trombón