Proyecto 1: Péndulo Doble

Simulación de Fenómenos Físicos

Dr. Enrique Pazos

26 de agosto de 2012

1. Introducción

El péndulo doble compuesto consta de dos barras rígidas unidas en sus extremos, siendo libres de oscilar bajo la influencia de la gravedad, ver Fig. 1.

Las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse formulando el Lagrangiano del sistema. Aunque el péndulo doble no parezca un sistema muy complejo, las ecuaciones de movimiento no pueden resolverse en forma analítica, por lo que necesitamos recurrir a un método numérico para investigar su comportamiento.

Vamos a considerar un péndulo doble compuesto en donde la longitud l y la masa m de cada una de las barras son iguales. El Lagrangiano del sistema está dado por

$$L = \frac{1}{6}ml^2\left[\dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right] + \frac{1}{2}mgl(3\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \tag{1}$$

Las ecuaciones de movimiento están dadas como

$$\dot{\theta}_1 = \frac{6}{ml^2}\frac{2p_1 - 3p_2\cos(\theta_1-\theta_2)}{16 - 9\cos^2(\theta_1-\theta_2)}, \tag{2}$$

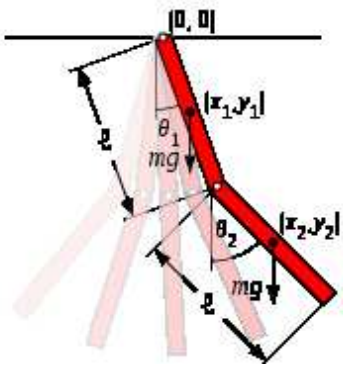

Figura 1: Péndulo doble compuesto. Fuente: wikipedia

$$\dot{\theta}_2 = \frac{6}{ml^2}\frac{8p_2 - 3p_1\cos(\theta_1-\theta_2)}{16-9\cos^2(\theta_1-\theta_2)}, \tag{3}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{1}{2}ml^2\left[\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + 3\frac{g}{l}\sin\theta_1\right], \tag{4}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{1}{2}ml^2\left[-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + \frac{g}{l}\sin\theta_2\right]. \tag{5}$$

Donde p_1 y p_2 es el momentum canónicamente conjugado con θ_1 y θ_2, respectivamente.

En síntesis, lo que tenemos es un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales pueden ser resueltas numéricamente con un método estándar como Runge-Kutta.

2. Solución ejemplo

El problema consiste en resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (2)-(5), planteando condiciones iniciales razonables para posteriormente, visualizar la solución.

Por ejemplo, para valores de $m = 1$ Kg, $l = 1$ m y $g = 1$ m/s^2, e imponiendo como condición inicial que las barras empiezan el movimiento desde una posición horizontal desde el reposo, tenemos que

$$\theta_1(0) = \pi/2, \tag{6}$$

$$\theta_2(0) = \pi/2, \tag{7}$$

$$p_1(0) = 0, \tag{8}$$

$$p_2(0) = 0. \tag{9}$$

Con esta configuración, los ángulos θ_1 y θ_2 se muestran en la Fig. 2

3. Proyecto

El proyecto se trata de encontrar soluciones similares a las anteriores usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y el de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF).

Es importante comparar los dos métodos y asegurarse que la solución numérica que obtenemos es la misma. En el caso anterior se puede observar que las soluciones dejan de concordar después de un tiempo de $\sim$45 segundos. Esto se debe a la naturaleza caótica del movimiento del sistema, es decir, una pequeña variación en las condiciones iniciales hará que la solución cambie radicalmente.

Para hacer del problema un poco más realista utilicemos los valores $m = 0.1$ Kg, $l = 0.2$ m y $g = 9.8$ m/s^2.

El proyecto debe contener *como mínimo* las siguientes secciones:

1. Marco teórico (similar a la Introducción de este documento).

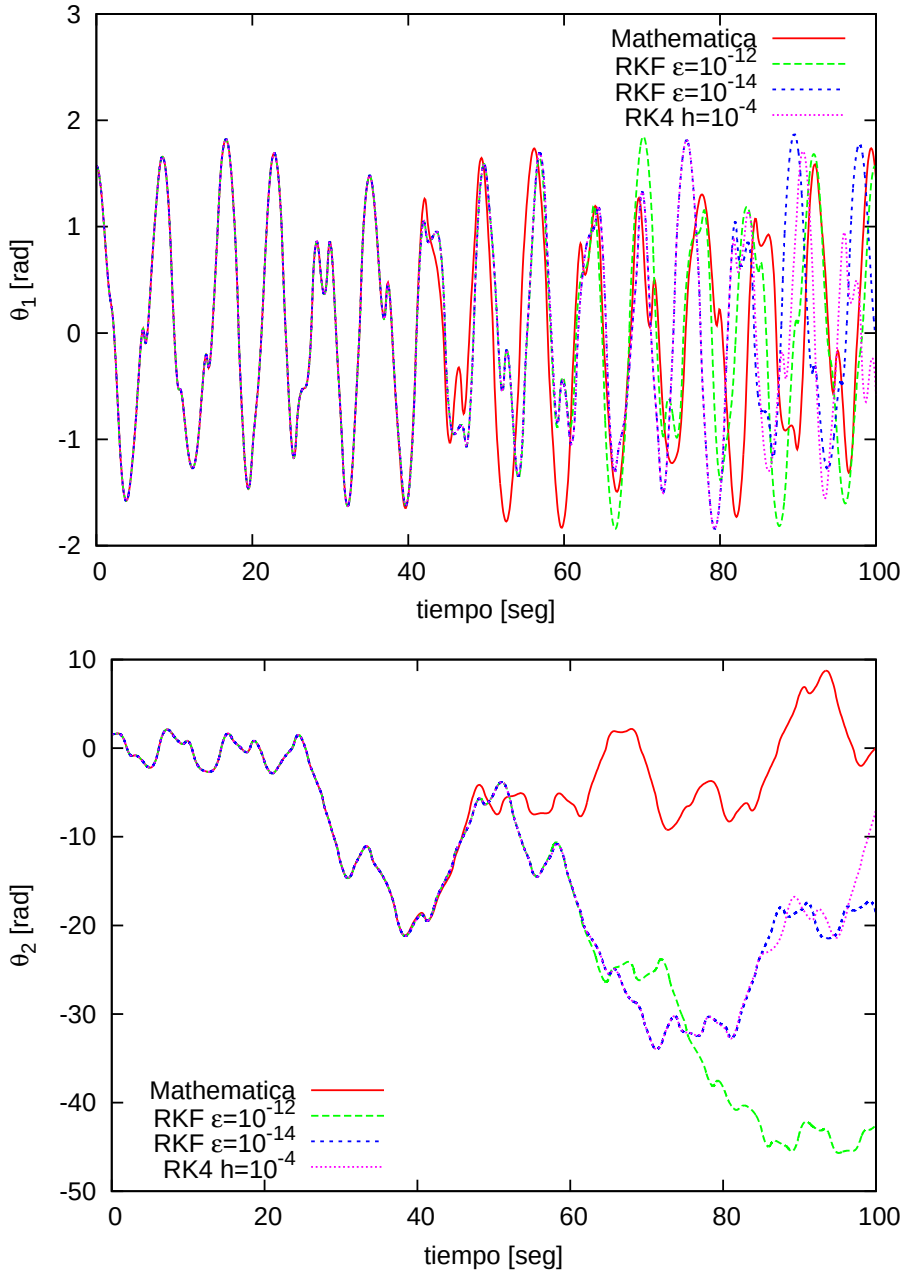

Figura 2: Soluciones para θ_1 y θ_2 en función del tiempo utilizando diferentes métodos numéricos.

2. Mostrar la función en código fuente que calcula las derivadas del sistema de ecuaciones (ver Sec. 4).

3. Las gráficas de las soluciones numéricas para θ_1 y θ_2, para **cuatro** configuraciones iniciales diferentes, las cuales quedan al criterio de cada persona.

4. Discusión de resultados y conclusiones. Aquí vale la pena comentar sobre las discrepancia de las soluciones al variar la resolución (tamaño de paso en RK4 o tolerancia en RKF) y las diferencias entre los valores de θ_1 y θ_2. Por ejemplo, ¿cómo interpretamos que θ_2 alcanza valores mucho más grandes que θ_1?

4. Sugerencias

4.1. Insertar código

Para que LaTeX ignore los caracteres especiales de un texto y lo despliegue tal como se ve en el editor, podemos usar el ambiente *verbatim*. El párrafo del código fuente se inicia con la línea `\begin{verbatim}` y se cierra con `\end{verbatim}`. Tal ambiente produce un resultado como el siguiente:

```
void gravedad( double x, double *y, double *dydx )
{
  const double G = 6.67e-11;
  const double M = 2e30;
  double r;

  r = sqrt( y[0]*y[0] + y[1]*y[1] );

  dydx[0] = y[2];
  dydx[1] = y[3];
  dydx[2] = -G*M*y[0]/(r*r*r);
  dydx[3] = -G*M*y[1]/(r*r*r);
}
```

4.2. Gráficas en LaTeX

Una forma de incluir gráficas de datos en un documento de LaTeX es generando tal gráfica en formato `eps`. En Gnuplot lo podemos lograr escribiendo un archivo que contenga las instrucciones necesarias para procesar los datos. Esto es ligeramente diferente a lo que se hace cuando uno genera la gráfica desde la línea de comandos de Gnuplot. Allí escribimos los comandos uno por uno y se van ejecutando hasta que obtenemos el resultado que queremos. La alternativa es escribir todas las instrucciones en un archivo y hacer que la gráfica se guarde en el disco duro, en lugar de que salga en la pantalla.

Por ejemplo, para generar la gráfica superior de la Fig. 2, escribimos un archivo de texto como el siguiente

```
set term postscript eps enhanced color
set output 'theta1.eps'
set size 0.7

set xlabel 'tiempo [seg]'
set ylabel '{/Symbol q}_1 [rad]'

set yrange [-2:3]

p \
'./pendulo.dat'  u 1:2 w l lw 2 t 'Mathematica', \
'./sol111.dat'   u 1:2 w l lw 2 t 'RKF {/Symbol e}=10^{-12}', \
'./sol112.dat'   u 1:2 w l lw 2 t 'RKF {/Symbol e}=10^{-14}', \
'./solucion.dat' u 1:2 w l lw 2 t 'RK4 h=10^{-4}'
```

Guardamos este texto y llamamos el archivo `theta1.gp` (Emacs tiene syntax highlight para Gnuplot), para generar la gráfica, escribimos en la terminal de linux:

```
gnuplot theta1.gp
```

El resultado es un archivo llamado `theta1.eps` que lo podemos abrir con una aplicación como `gv` (PostScript and PDF viewer).

Una vez la gráfica está lista puede ser insertada en el documento, procesarlo escribiendo `latex archivo.tex` y generar un pdf con `dvipdf archivo.dvi`.