Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

FUNCIÓN ESPECTRAL ZETA PARA OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS DE BANACH

Rafael Alejandro Martínez Márquez

Asesorado por Ph.D. Pedro Fernando Morales Almazán

Guatemala, agosto de 2016

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

FUNCIÓN ESPECTRAL ZETA PARA OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS DE BANACH

TRABAJO DE GRADUACIÓN
PRESENTADO A LA JEFATURA DEL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
POR

RAFAEL ALEJANDRO MARTÍNEZ MÁRQUEZ
ASESORADO POR PH.D. PEDRO FERNANDO MORALES ALMAZÁN

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

GUATEMALA, AGOSTO DE 2016

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CONSEJO DIRECTIVO

DIRECTOR	M.Sc. Edgar Anibal Cifuentes Anléu
SECRETARIO ACADÉMICO	Ing. José Rodolfo Samayoa Dardón

TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO

EXAMINADOR	Lic. Hugo Allan García Monterrosa
EXAMINADOR	Lic. José Carlos Bonilla Aldana
EXAMINADOR	Licda. Mariela Lizeth Benavides Lázaro

Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

Ref. D..DTG. 003-2016
Guatemala 01 de agosto de 2016

El Director de la Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Coordinador de la Licenciatura en Matemática Aplicada, al trabajo de graduación Titulado: **FUNCIÓN ESPECTRAL ZETA PARA OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS DE BANACH** presentado por el estudiante universitario **Rafael Alejandro Martínez Márquez,** autoriza la impresión del mismo.

IMPRIMASE.

MsC. Edgar Aníbal Cifuentes Anleu
Director
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
- DE GUATEMALA -

/pec

AGRADECIMIENTOS A:

Dios	Por darme la vida y permitirme descubrir el gusto por las matemáticas.
Mis padres	Rafael Martínez y Sonia Márquez, por apoyarme en todo momento y madrugar a diario conmigo.
Mi hermano	Diego Andrés, por su cariño y motivación constante y particular para terminar la tesis.
Mis abuelos	Fabián Márquez y Josefa Vásquez, por su amor, enseñanzas y seguir cuidándome desde el Cielo.
Mi asesor	Pedro Morales, por orientarme en la elaboración de la tesis, sin rendirse en el proceso.
El 304	Por presentarme la verdadera esencia de las matemáticas y las experiencias vividas en las olimpiadas.
Mis amigos	Por los momentos vividos dentro y fuera del salón de clase, que me hacen sonreír cada vez que los recuerdo.
Mis profesores	Por compartir sus conocimientos conmigo y motivarme a seguir aprendiendo.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\varnothing$	conjunto vacío
E^c	complemento de E
$\subseteq$	contenido
$\subset$	estrictamente contenido
$E \setminus F$	diferencia entre E y F
$\\|x\\|$	norma de x
$\mathcal{G}(T)$	gráfica de T
$\dim V$	dimensión del espacio V
V_λ	espacio propio asociado a λ
$R_\lambda(T)$	operador resolvente de T asociado a λ
$\rho(T)$	conjunto resolvente de T
$\sigma(T)$	espectro de T
$O(f(n))$	orden de crecimiento de $f(n)$
$\mathcal{N}(T)$	kernel del operador T
$f^*(s)$	transformada de Mellin de f
$E_p(z)$	factor elemental de orden p
$\Gamma(s)$	función Gamma
$\zeta_R(s)$	función zeta de Riemann
$\zeta_H(s,q)$	función zeta de Hurwitz
$\zeta_\sigma(P,s)$	función espectral zeta de P
$\zeta_{\vert\sigma\vert}(P,s)$	función espectral zeta absoluta de P

OBJETIVOS

General

Definir una función zeta para un operador lineal sobre un espacio de Banach por medio de sus valores propios y encontrar la región de convergencia de dicha función.

Específicos

1. Establecer los requerimientos mínimos de análisis funcional para la definición de funciones zeta.
2. Establecer los requerimientos mínimos de análisis complejo para el estudio de las funciones zeta.
3. Considerar casos de espectros de un operador lineal para encontrar la región de convergencia de su función zeta asociada.
4. Determinar si las funciones espectrales zeta pueden representarse integralmente de manera natural o por medio de alguna modificación.

INTRODUCCIÓN

El análisis funcional juega un papel muy importante en el desarrollo de diversos conceptos y aplicaciones en física y matemática, particularmente la *teoría espectral*, cuyo desarrollo se debe en gran parte a la investigación de problemas con valores en la frontera realizadas por Sturm y Liouville y a la famosa teoría de Fredholm de ecuaciones integrales [9].

La teoría espectral extiende la teoría de valores propios de una matriz a un operador lineal definido sobre un espacio normado. Además, es posible definir funciones de valor complejo y asociarlas con los operadores lineales, las cuales son representadas por medio de los valores propios del operador lineal considerado. Estas funciones son llamadas funciones espectrales y un ejemplo de ellas es el determinante de una matriz, el cual se obtiene multiplicando los valores propios de dicha matriz [2].

En el presente trabajo se definirá a una función espectral en particular, la función espectral zeta para un operador lineal definido en un espacio de Banach, la cual puede considerarse como una generalización de las funciones zetas asociadas con operadores diferenciales, utilizadas en el estudio del efecto Casimir y el efecto de condensación de Bose-Einstein [8], las cuales a su vez se apoyan en funciones zeta más elementales, como la función zeta de Riemann y la función zeta de Hurwitz.

Se analizarán distintos tipos de espectros y se obtendrá la región de convergencia de la función espectral zeta para cada uno de ellos, dependiendo del comportamiento asintótico de los valores propios.

Se utilizará a la transformada de Mellin, la cual está relacionada en gran manera con las transformadas de Laplace y Fourier [1], para encontrar representaciones integrales de la función espectral zeta. De igual manera, la teoría de productos infinitos de números complejos y las factorizaciones de Weierstrass para construir funciones enteras con ceros prescritos [5], serán de utilidad para encontrar otras representaciones. Se finalizará con ejemplos particulares de la función espectral zeta para distintos operadores lineales.

1. Productos infinitos de Weierstrass

1.1. Series de potencias y funciones analíticas

Para empezar, es necesario recordar que si (a_n) es una sucesión de números complejos, se dice que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

(o simplemente $\sum a_n$), converge a $a \in \mathbb{C}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\left| \sum_{n=0}^{m} a_n - a \right| < \epsilon \quad \text{para cada } m \geq N,$$

es decir, la sucesión de sumas parciales $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ converge.

Además, se dice que la serie $\sum a_n$ converge absolutamente si $\sum |a_n|$ converge. Si una serie no converge, se dice que es divergente.

Las siguientes proposiciones presentan la relación entre una serie y su convergencia absoluta y un criterio necesario para la convergencia de series.

Proposición 1.1. *Si $\sum a_n$ converge absolutamente entonces $\sum a_n$ converge.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $z_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Ya que la serie $\sum |a_n|$ converge, la sucesión de sumas parciales $c_n = |a_1| + \cdots + |a_n|$ es de Cauchy, de donde existe un entero N tal que $|c_n - c_m| < \epsilon$ para cada $m, n > N$. Luego, si $m > n > N$, se tiene que $|z_n - z_m| = |z_{n+1} + \cdots + z_m| \leq |z_{n+1}| + \cdots + |z_m| = |c_n - c_m| < \epsilon$, de donde la sucesión de sumas parciales (z_n) es de Cauchy, es decir $\sum a_n$ converge. $\square$

Proposición 1.2. *Si $\sum a_n$ converge, entonces $a_n \to 0$.*

Demostración. Sea $z_n = a_0 + \cdots + a_n$, como $\sum a_n$ converge, la sucesión de sumas parciales (z_n) es de Cauchy, de donde, para cada $\epsilon > 0$, existe N tal que si $n, m > N$, entonces $|z_n - z_m| < \epsilon$. Si $n > N$ y $m = n + 1$, se cumple que $|a_n| = |z_n - z_m| < \epsilon$, es decir, $a_n \to 0$. $\square$

Una serie de potencias alrededor de $a \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

cuya convergencia depende en general de z. Una de las series de potencias más conocidas es la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

la cual es convergente cuando $|z| < 1$, ya que

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{y} \quad \lim z^n = 0 \ \text{ si } \ |z| < 1.$$

En cambio, dado que $\lim |z|^{n+1} = \infty$ cuando $|z| > 1$, la serie diverge en este caso.

En general, dada una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

existe un único número $0 \leq R \leq \infty$ tal que la serie converge absolutamente si $|z-a| < R$ y diverge si $|z-a| > R$ debido a que sus términos crecen sin cota. A este número se le conoce como radio de convergencia y es igual a

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \tag{1.1}$$

(mientras el límite exista, siendo este finito o infinito).

Si $|z-a| = R$, no es posible concluir acerca de la convergencia o divergencia de la serie. Si $R = \infty$, se dice que la función definida por la serie es una función entera.

Definición 1.1. Si G es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ (la definición de conjunto abierto se encuentra en [5]) y $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es diferenciable en $a \in G$ si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Al valor de este límite se le conoce como la derivada de f en a y se denota por $f'(a)$. Se sigue que si una función es diferenciable en un punto a, también es continua en a.

Si f es diferenciable en todos los puntos de G, se dice que f es diferenciable en G y es posible definir una función $f'\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ por medio del límite anterior, la cual es llamada la derivada de f.

Además, si f' es continua, se dice que f es continuamente diferenciable y si una función diferenciable es tal que todas las derivadas son diferenciables, se dice que es infinitamente diferenciable.

Definición 1.2. Se dice que la función $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en G si es continuamente diferenciable en G.

Las siguientes proposiciones y el siguiente teorema, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [5], permiten calcular la derivada de una composición de funciones analíticas y caracterizan a las funciones con derivada igual a cero.

Además, se presenta la forma explícita de la derivada de una serie de potencias y se deduce que las series de potencias son funciones analíticas en cierto conjunto del plano complejo asociado con su radio de convergencia.

Proposición 1.3 (Regla de la cadena)**.** *Si f y g son analíticas en G y U, respectivamente, y además $f(G) \subset U$, entonces $g \circ f$ es analítica en G y para cada z en G se cumple que*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Proposición 1.4. *Si G es un conjunto abierto y conexo y $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable tal que $f'(z) = 0$ para cada $z \in G$, entonces f es constante.*

Teorema 1.1.1. *Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$, entonces:*

1) Para cada $k \geq 1$, las series

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}$$

tienen radio de convergencia R.

2) La función f es infinitamente diferenciable en

$$B(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\},$$

y además,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}$$

para cada $k \geq 1$ *y* $z \in B(a, R)$.

3) Para cada $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Como consecuencia del teorema anterior, si la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces la función definida por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

es analítica en $B(a, R)$, ya que todas sus derivadas existen, en particular la segunda derivada, por lo que f es continuamente diferenciable.

Proposición 1.5. *Sean* G *y* U *conjuntos abiertos en* $\mathbb{C}$. *Sean* $f \colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ *y* $g \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ *funciones continuas tales que* $f(G) \subset U$ *y* $g(f(z)) = z$ *para cada* $z \in G$. *Si* g *es diferenciable y* $g'(z) \neq 0$, *entonces* f *es diferenciable y su derivada es*

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}.$$

Demostración. Sea $a \in G$ y elíjase $h \in \mathbb{C}$ tal que $h \neq 0$ y $a + h \in G$. Como $h \neq 0$, $g(f(a)) = a$ y $g(f(a+h)) = a + h$ entonces $f(a) \neq f(a+h)$.

Además,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} \\ &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \frac{f(a+h) + f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Dado que el límite del lado izquierdo cuando $h \to 0$ existe y es igual a 1, también debe existir el límite del lado derecho y tener el mismo valor.

Como f es continua, se cumple que

$$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = 0,$$

de donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} = g'(f(a)).$$

Por lo tanto, la derivada de f en a,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a)}{h},$$

también existe y se cumple que $1 = g'(f(a))f'(a)$.

Como $g'(f(a)) \neq 0$, se tiene que

$$f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}.$$

Si además g es analítica, g' es continua, y por lo tanto f también es analítica. $\square$

Es necesario mencionar que al calcular una derivada, el límite $h \to 0$ puede evaluarse de distintas maneras, pero el valor del límite siempre debe ser el mismo.

Como consecuencia de lo anterior, si $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica y si se definen las funciones

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \quad \text{y} \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

para cada $z = x+iy \in G$, en donde $\operatorname{Re} f(z)$ e $\operatorname{Im} f(z)$ son la parte real e imaginaria de $f(z)$, respectivamente, al evaluar el límite $h \to 0$ para valores reales de $h \neq 0$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{f(x+h+iy)-f(x+iy)}{h}\\ &= \frac{u(x+h,y)+v(x+h,y)-u(x,y)-v(x,y)}{h}\\ &= \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h},\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \qquad (1.2)\end{aligned}$$

Por otro lado, si se calcula el límite para valores de la forma ih con $h \neq 0$ real, se obtiene que

$$\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = \frac{f(x+i(y+h))-f(x+i(y+h))}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{u(x, y+h) + v(x, y+h) - u(x, y) - v(x, y)}{ih} \\
&= \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{ih} + i\frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{ih} \\
&= -i\frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h},
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\
&= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y). \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Como ambas formas de calcular el límite no modifica el valor de la derivada, las partes reales e imaginarias de 1.2 y 1.3 deben ser iguales.

De esta manera se obtienen las denominadas ecuaciones de Cauchy-Riemann para una función analítica:

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1.4)
$$

Recíprocamente, si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces la función definida por

$$
f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)
$$

es una función analítica.

1.2. Función exponencial y potencias complejas

Para definir a la función exponencial compleja, se usará una serie analítica usando como inspiración a la función exponencial real.

Para $z \in \mathbb{C}$ se define:

$$
e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \qquad (1.5)
$$

De hecho, la definición anterior coincide con la función exponencial real cuando $z \in \mathbb{R}$ y como consecuencia del teorema 1.1.1, la ecuación 1.5 define una función analítica en todo $\mathbb{C}$, ya que su radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \infty,$$

es decir, la función exponencial es entera. Además, la derivada de $f(z) = e^z$ es

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n} \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Proposición 1.6. *Si $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $e^a e^b = e^{a+b}$.*

Demostración. Sea $g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por $g(z) = e^z e^{a-z}$, para algún $a \in \mathbb{C}$. Se sigue que $g'(z) = e^z e^{a-z} + e^z(-e^{a-z}) = 0$.

Luego, por la proposición 1.4, la función $g(z)$ es constante y existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = w$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

En particular $w = g(0) = e^0 e^{a-0} = 1 \cdot e^a = e^a$, de donde $e^z e^{a-z} = e^a$ para cada $z \in \mathbb{C}$, por lo que $e^{a+b} = e^a e^b$ para cada $a, b \in \mathbb{C}$. $\square$

De lo anterior, se deduce que $1 = e^z e^{-z}$, por lo que $e^z \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

evidenciando la similitud de la función exponencial definida en 1.5 con su contraparte real.

De manera análoga a como se definió la función exponencial, se define el seno y el coseno para $z \in \mathbb{C}$ como

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{y} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \tag{1.6}$$

Estas funciones también son enteras, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(2n+1)!}{1/(2(n+1)+1)!} = \lim_{n\to\infty} (2n+3)(2n+2) = \infty,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(2n)!}{1/(2(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+1) = \infty,$$

y por la ecuación 1.1, el radio de convergencia de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ es infinito.

Además, debido al teorema 1.1.1,

$$(\operatorname{sen} z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos z,$$

y

$$(\cos z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n)!} z^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \operatorname{sen} z.$$

También, nótese que

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{iz^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{iz^{4n+3}}{(4n+3)!},$$

y

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{iz^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{iz^{4n+3}}{(4n+3)!},$$

de donde

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z^{4n}}{(4n)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos z, \tag{1.7}$$

y

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \operatorname{sen} z. \tag{1.8}$$

Las igualdades 1.7 y 1.8 son conocidas como las fórmulas de Euler para el coseno y seno, respectivamente, y además implican que

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z. \tag{1.9}$$

Por otro lado, todo número complejo $z \in \mathbb{C}$ con $\arg z = \theta \in \mathbb{R}$, puede escribirse como $z = |z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, en donde $|z|$ es el módulo de z, que es equivalente a

$$z = |z| \, e^{i\theta}. \tag{1.10}$$

Por lo tanto, si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, con $e^x > 0$, de donde

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad \text{y} \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z, \tag{1.11}$$

es decir,

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos \operatorname{Im} z + i \operatorname{sen} \operatorname{Im} z). \tag{1.12}$$

A diferencia de su contraparte real, la función exponencial compleja no es inyectiva, ya que $e^0 = 1 = \cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi)i = e^{2\pi i}$, esto sugiere la siguiente definición.

Definición 1.3. Una función $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama periódica con período $c \in \mathbb{C}$ si $f(z + c) = f(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Proposición 1.7. *La función exponencial compleja $f(z) = e^z$ es periódica con período $2\pi i$.*

Demostración. Si c es un período de e^z, entonces debe cumplir que $e^z = e^{z+c} = e^z e^c$ para cada $z \in \mathbb{C}$, de donde $e^c = 1$. Como $1 = |e^c| = e^{\operatorname{Re} c}$, entonces $\operatorname{Re} c = 0$, de donde $c = i\theta$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$.

Luego $1 = e^c = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, de donde $\theta = 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y los períodos de $f(z) = e^z$ son los múltiplos enteros de $2\pi i$.

Si en particular se elige $c = 2\pi i$, entonces para $z = x + iy$ se tiene que

$$\begin{aligned} e^{z+c} &= e^{x+(y+2\pi)i} \\ &= e^x(\cos(y + 2\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2\pi)) \\ &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^z. \end{aligned}$$

□

Para definir al logaritmo como la operación inversa de la exponencial, es necesario tener ciertas consideraciones adicionales, ya que la periodicidad de la función exponencial implica que no es una función inyectiva.

Dado que $e^z \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$, no es posible definir $\log 0$. Además, si $w \neq 0$, entonces cualquier elemento del conjunto $\{\log|w| + i(\arg w + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es solución de $e^z = w$, en donde $\log|w|$ es el logaritmo real.

Definición 1.4. Si G es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$ y $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua tal que $z = e^{f(z)}$ para cada $z \in G$, entonces f es llamada una rama de logaritmo en G. Nótese que $0 \notin G$.

Proposición 1.8. *Si G es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$ y f es una rama de logaritmo en G, entonces la totalidad de ramas de logaritmo en G es el conjunto* $\{f(z) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.

Demostración. Sea $g(z) = f(z) + 2k\pi i$, entonces $\exp g(z) = \exp f(z) = z$ para cada $z \in G$ y como $g(z)$ es un elemento arbitrario de $\{f(z) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$, cualquier elemento de dicho conjunto es una rama de logaritmo en G.

Recíprocamente, sea $g\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ una rama de logaritmo en G. Se sigue que $\exp g(z) = \exp f(z)$ para cada $z \in G$. Como la función exponencial tiene períodos múltiplos de $2\pi i$, existe un $k \in \mathbb{C}$ que depende de z, tal que $f(z) = g(z) + 2k\pi i$.

En realidad, el mismo valor de k funciona para cada $z \in G$, ya que como f y g son continuas en G, la función $h\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z))$$

también es una función continua en G y $h(G) \subset \mathbb{Z}$.

Como G es conexo y h es continua en G, también $h(G)$ debe ser conexo, pero $\mathbb{Z}$ es un espacio totalmente inconexo, por lo que los únicos conjuntos conexos en $\mathbb{Z}$ son los conjuntos unitarios $\{k\}$ con k entero, es decir, $h(z) = k$ para cada $z \in G$ y k un entero fijo.

De lo anterior, si g es una rama de logaritmo en G, debe ser un elemento de

$$\{f(z) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}. \qquad \square$$

Si $G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$, se tiene que G es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$ en el cual es posible definir una rama de logaritmo. La definición de G es equivalente a $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \pi\}$.

Defínase $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ como $f(z) = \log|z| + i\theta$, en donde $\theta = \arg z$ y $\log|z|$ es el logaritmo real, dicha función es continua en G y es tal que $\exp f(z) = z$ para cada $z \in G$. Se sigue que la función f es una rama de logaritmo, llamada la rama principal de logaritmo, la cual se utiliza para definir a $\log z$, con $z \in \mathbb{C}$, como

$$\log z = \log|z| + i \arg z \quad \text{para} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\} \text{ con } \arg z \in (-\pi, \pi). \tag{1.13}$$

La definición del logaritmo complejo incluso es válida para los números reales negativos, los cuales son de la forma $|z|\, e^{i\pi}$, por lo que el valor del logaritmo para $z \in \mathbb{R}^-$ sería

$$\log z = \log|z| + i\pi. \tag{1.14}$$

Teorema 1.2.1. *La derivada de la función* $\log z$ *es*

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}.$$

Demostración. Por definición de rama de logaritmo, se tiene que

$$e^{\log z} = z \quad \text{para cada} \quad z \neq 0.$$

Como $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$, por la proposición 1.5 se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\log z &= \frac{1}{e^{\log z}} \\ &= \frac{1}{z}.\end{aligned}$$

□

Como corolario del teorema 1.2.1 y haciendo uso de la regla de la cadena, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.1. *Si* f *es una función analítica, entonces*

$$\frac{d}{dz}\log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Por medio del logaritmo complejo es posible definir a las potencias complejas, es decir, números de la forma z^b con $z, b \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$. Esto es

$$z^b = \exp\left[b \log z\right]. \tag{1.15}$$

Esta definición no debe parecer sorpresiva, ya que coincide con el valor de z^b cuando z, b son números reales. Además, si $z = 0$ y $b \neq 0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, simplemente $z^b = 0$.

1.3. Integración compleja

Además de las series analíticas, otro objeto de estudio muy importante en análisis complejo es la integración, debido a la variedad de resultados que es posible obtener, especialmente por el Teorema de Cauchy, el cual se enunciará más adelante.

Definición 1.5. Si G es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{C}$, se dice que G es una región en $\mathbb{C}$.

Definición 1.6. Si G es una región en $\mathbb{C}$ y $\gamma\colon\ [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow G$ es una función continua, se dice que γ es una curva en G.

Si γ' existe en $[a,b]$ y $\gamma'\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua, se dice que γ es una curva suave en G.

Además, si una curva γ es tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$, es llamada curva cerrada. Usualmente se dice que la curva γ empieza en $\gamma(a)$ y termina en $\gamma(b)$.

A la imagen $\gamma([a,b])$ de γ se le llama la traza de γ y se denota por $\{\gamma\}$.

Definición 1.7. Sea $\gamma\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva suave en $\mathbb{C}$. Se define como la longitud de la curva γ a la expresión

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt. \tag{1.16}$$

Definición 1.8. Sea $\gamma\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva suave en $\mathbb{C}$ y f una función continua y definida en la traza de γ, la integral de f sobre γ se define como

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(w)dw = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{1.17}$$

La siguiente proposición, cuya demostración puede encontrarse en [5], presenta algunas propiedades de la integral de una función sobre una curva suave.

Proposición 1.9. *Sea γ una curva suave en $\mathbb{C}$ y supóngase que f es una función continua en la traza de γ, entonces:*

1) $\int_\gamma f = -\int_{-\gamma} f$.

2) $\left|\int_\gamma f\right| \leq L(\gamma)\sup\{|f(z)| : z \in \{\gamma\}\}$.

3) Si $c \in \mathbb{C}$, entonces $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma+c} f(z-c)dz$.

(La función $-\gamma$ está definida por $(-\gamma)(x) = -\gamma(x)$, para cada x en el dominio de la función γ).

El siguiente teorema puede considerarse como una generalización del teorema fundamental del cálculo para integrales de funciones de variable y valor real.

En este caso se consideran funciones de valor y variable compleja sobre una curva suave en $\mathbb{C}$, no necesariamente sobre un intervalo real.

Teorema 1.3.1. *Sea G una región en $\mathbb{C}$ y γ una curva suave en G que empieza en $\gamma(a) = \alpha$ y termina en $\gamma(b) = \beta$. Si $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función con primitiva $F\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_\gamma f = F(\beta) - F(\alpha).$$

Demostración. Haciendo uso de que F es una primitiva de f y del teorema fundamental del cálculo, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(\beta) - F(\alpha).\end{aligned}$$

□

Proposición 1.10 (Regla de Leibniz)**.** *Sea $\phi\colon\ [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si $g\colon\ [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ es la función definida por*

$$g(t) = \int_a^b \phi(s,t)ds,$$

entonces g es continua.

Además, si existe $\dfrac{\partial\phi}{\partial t}(s,t)$ y es continua en $[a,b]\times[c,d]$, entonces g es continuamente diferenciable y

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,t)ds.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como ϕ es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\phi(s_1,t_1) - \phi(s_2,t_2)| < \epsilon \quad \text{si} \quad (s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2 < \delta^2.$$

En particular,

$$|\phi(s,t_1) - \phi(s,t_2)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |t_1 - t_2| < \delta,$$

de donde

$$\begin{aligned}|g(t_1) - g(t_2)| = \left|\int_a^b [\phi(s,t_1) - \phi(s,t_2)]\,ds\right| &< \int_a^b |\phi(s,t_1) - \phi(s,t_2)|\,ds \\ &< \int_a^b \epsilon\ ds = \epsilon(b-a).\end{aligned}$$

Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, la función g es continua. Solamente hace falta verificar la fórmula para $g'(t)$.

Sean $\epsilon > 0$ y $t_0 \in [c,d]$ y denótese $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ por ϕ_2. Se tiene que ϕ_2 es uniformemente continua en $[a,b] \times [c,d]$, ya que es continua y está definida sobre un conjunto compacto. Por lo tanto, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\phi_2(s_1,t_1) - \phi_2(s_2,t_2)| < \epsilon,$$

cuando $(s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2 < \delta^2$, en particular $|\phi_2(s,t) - \phi_2(s,t_0)| < \epsilon$ cuando $|t - t_0| < \delta$ y $a \leq s \leq b$.

Esto implica que si $|t - t_0| < \delta$ y $s \in [a,b]$, entonces

$$\left| \int_{t_0}^{t} [\phi_2(s,\tau) - \phi_2(s,t_0)]\, d\tau \right| \leq \epsilon \, |t - t_0| \, .$$

Por otro lado, para un número real $s \in [a,b]$ fijo, se tiene que la función $\Phi(t) = \phi(s,t) - t\phi_2(s,t_0)$ es una primitiva de $\phi_2(s,t) - \phi_2(s,t_0)$, así que por el teorema fundamental del cálculo se obtiene que

$$|\Phi(t) - \Phi(t_0)| \leq \epsilon \, |t - t_0| \, ,$$

es decir,

$$|\phi(s,t) - \phi(s,t_0) - (t - t_0)\phi_2(s,t_0)| \leq \epsilon \, |t - t_0| \, ,$$

para cualquier $s \in [a,b]$ y $|t - t_0| < \delta$. Luego, para $0 < |t - t_0| < \delta$ se tiene que

$$\left| \frac{\phi(s,t) - \phi(s,t_0)}{t - t_0} - \phi_2(s,t_0) \right| \leq \epsilon.$$

De lo anterior y de la definición de g se obtiene que

$$\left| \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b \phi_2(s,t_0) ds \right| \leq \epsilon(b - a)$$

cuando $0 < |t - t_0| < \delta$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$g'(t) = \int_a^b \phi_2(s,t) ds = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t) ds,$$

la cual es continua por la primera parte de la demostración, es decir, g es continuamente diferenciable. $\square$

La regla de Leibniz se utiliza en la demostración de la siguiente proposición, la cual será de utilidad para demostrar el importante Teorema de Cauchy.

Proposición 1.11. *Si* $|z| < 1$*, entonces*

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi.$$

Demostración. Considere la función

$$\phi(s,t) = \frac{e^{is}}{e^{is} - tz}$$

definida sobre $[0,1] \times [0,2\pi]$. Nótese que ϕ es continua porque su numerador y denominador son funciones continuas, además el denominador nunca es cero, ya que $|z| < 1$ y si $e^{is} - tz = 0$, se cumpliría que

$$1 = \left|e^{is}\right| = |tz| < |t| \leq 1,$$

lo cual es una contradicción.

Por la misma razón, la derivada parcial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t) = \frac{ze^{is}}{(e^i s - tz)^2}$$

existe y es continua en $[a,b] \times [c,d]$, de donde la función

$$g(t) = \int_0^{2\pi} \phi(s,t) ds$$

es continuamente diferenciable y por la regla de Leibniz se obtiene que,

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{ze^{is}}{(e^i s - tz)^2} ds.$$

Por otro lado, para un t fijo, se tiene que la función $\Phi(s) = zi(e^{is} - tz)^{-1}$ es una primitiva de la función

$$h(s) = \frac{ze^{is}}{(e^i s - tz)^2},$$

de donde $g'(t) = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = 0$, por lo que $g(t)$ es constante. Finalmente,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = g(1) = g(0) = 2\pi. \qquad \square$$

Teorema 1.3.2 (Teorema de Cauchy)**.** *Sea $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y supóngase que para algún $r > 0$, $\overline{B}(a,r) \subset G$. Si $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad \text{para } |z-a| < r.$$

Demostración. Al considerar al conjunto $G_1 = \{\frac{1}{r}(z-a) : z \in G\}$ y a la función $g(z) = f(a+rz)$ se sigue que sin pérdida de generalidad es posible suponer que $a = 0$ y $r = 1$.

Es decir, supóngase que $\overline{B}(0,1) \subset G$. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número fijo tal que $|z| < 1$. Se debe mostrar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z}ds,$$

esto es equivalente a mostrar que

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z}ds - 2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z} - f(z)\right] ds.$$

Sea

$$\phi(s,t) = \frac{f(z+t(e^{is}-z))}{e^{is}-z} - f(z)$$

para $0 \leq t \leq 1$ y $0 \leq s \leq 2\pi$. La función ϕ está bien definida, ya que

$$\left|z + t(e^{is}-z)\right| = \left|z(1-t) + te^{is}\right| \leq \left|z - e^{is}\right| \leq 1$$

y $\overline{B}(0,1) \subset G$, además es continuamente diferenciable.

Considere la función

$$g(t) = \int_0^{2\pi} \phi(s,t)ds.$$

Por la definición de $\phi(s,t)$ y la proposición 1.11, se tiene que

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^{2\pi} \phi(s,0)ds \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{f(z)e^{is}}{e^{is}-z} - f(z)\right] ds \\ &= f(z)\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z}ds - 2\pi f(z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, por la regla de Leibniz,

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} e^{is} f'(z + t(e^{is} - z))ds.$$

Por otro lado, para $0 < t \leq 1$ la función $\Phi(s) = -it^{-1} f(z + t(e^{is} - z))$ es una primitiva de $e^{is} f'(z + t(e^{is} - z))$, así que $g'(t) = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = 0$ para $0 < t \leq 1$, pero como g' es continua, también debe cumplirse que $g'(0) = 0$, de donde $g' = 0$ y g debe ser una función constante. De lo anterior, $g(t) = 0$ para cada $0 \leq t \leq 1$, en particular,

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is} - z} - f(z) \right] ds = g(1) = 0. \qquad \square$$

La definición de convergencia uniforme se encuentra en [5] y se utilizará en el siguiente lema.

Lema 1.1. *Sea $\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva suave en $\mathbb{C}$ y supóngase que los términos de la sucesión (F_n) y F son funciones continuas en la traza de γ tales que la sucesión (F_n) converge uniformemente a F en γ, entonces*

$$\int_\gamma F = \lim \int_\gamma F_n.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como (F_n) converge uniformemente a F, entonces existe un entero N tal que

$$|F_n(w) - F(w)| < \frac{\epsilon}{L(\gamma)}$$

para cada $w \in \{\gamma\}$ y $n \geq N$. Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma F - \int_\gamma F_n \right| &= \left| \int_a^b [F(\gamma(t)) - F_n(\gamma(t))] \, \gamma'(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |F(\gamma(t)) - F_n(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)| \, dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{L(\gamma)} \, |\gamma'(t)| \, dt \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

para cada $n \geq N$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

$$\int_\gamma F = \lim \int_\gamma F_n. \qquad \square$$

Como consecuencia del teorema 1.1.1, la función definida por una serie de potencias alrededor de a y radio de convergencia R es analítica en $B(a,R)$. El siguiente teorema es de cierta forma, el recíproco de dicho teorema. Además, es una caracterización de las funciones analíticas, ya que presenta una forma explícita de representar a una función analítica.

Teorema 1.3.3. *Si f una función analítica en $B(a,R)$, entonces*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

para $|z-a| < R$, en donde

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

y dicha serie de potencias tiene radio de convergencia mayor o igual a R.

Demostración. Sea $0 < r < R$ de tal manera que $\overline{B}(a,r) \subset B(a,R)$. Considere la curva suave $\gamma(t) = a + re^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

Por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{ para } |z-a| < r.$$

Dado que w está en la circunferencia $\{\gamma\}$, se tiene que $|w-a| = r$, pero como también $|z-a| < r$, se obtiene que

$$\frac{|f(w)|\,|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leq \frac{M}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n,$$

en donde $M = \max\{|f(w)| : |w-a| = r\}$. Ya que $\dfrac{|z-a|}{r} < 1$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n$$

es convergente, así que por la prueba M de Weierstrass, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

converge uniformemente en $\{\gamma\}$ (el enunciado y la demostración de la prueba M de Weierstrass se encuentra en [5]).

Además,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n,$$

ya que $\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right| < 1$, de donde

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Luego, por el lema 1.1 y el Teorema de Cauchy se sigue que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw\right] (z-a)^n.$$

Sea

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

el cual es independiente de z; se sigue que $f(z)$ es una serie de potencias que converge para $|z-a| < r$ y por el teorema 1.1.1, se tiene que

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

de donde el valor de a_n es independiente de γ, es decir, independiente de r. De lo anterior,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{1.18}$$

para $|z-a| < r$. Dado que $r < R$ es arbitrario, se tiene que la ecuación 1.18 es válida para $|z-a| < R$, de donde, el radio de convergencia de 1.18 debe ser mayor o igual que R, por definición de radio de convergencia. □

A partir del teorema 1.3.3, se deduce inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.2. *Si $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica y $\overline{B}(a,r) \subset G$, entonces*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \tag{1.19}$$

en donde $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Por consiguiente, las funciones analíticas son infinitamente diferenciables.

Proposición 1.12 (Estimación de Cauchy). *Sea f una función analítica en $B(a,R)$ y supóngase que $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in B(a,R)$. Entonces*

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Demostración. Sean $r < R$ y $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Por el corolario 1.2 y la proposición 1.9, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(a)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \left|\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \sup\left[\left|\frac{f(z)}{(w-a)^{n+1}}\right| : z \in \{\gamma\}\right] L(\gamma) \\
&\leq \left(\frac{n!}{2\pi}\right) \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r \\
&= \frac{n!M}{r^n}.
\end{aligned}$$

Dado que $r < R$ es arbitrario, se sigue que

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

□

Proposición 1.13. *Sea f una función analítica en $B(a,R)$ y supóngase que γ es una curva suave cerrada en $B(a,R)$, entonces*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Demostración. Por el teorema 1.3.3, $f(z) = \sum a_n (z-a)^n$ para $|z-a| < R$. Sea

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1}\right)(z-a)^{n+1} = (z-a)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}\right)(z-a)^n.$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1,$$

se sigue que la serie de potencias $F(z)$ tiene el mismo radio de convergencia que $\sum a_n(z-a)^n$.

Por lo tanto, F está definida en $B(a,R)$, además $F'(z) = f(z)$ para $|z-a| < R$. Como γ es una curva suave cerrada definida sobre algún intervalo $[a,b]$, se tiene que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Además, como F es una primitiva de f, por el teorema 1.3.1 se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

1.4. Factorización con productos infinitos

Es conocido que si $P(x)$ es un polinomio y a es un número tal que $P(a) = 0$, entonces existe un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x - a)Q(x)$, en donde $Q(a)$ podría ser también 0. También es conocido que es posible encontrar un polinomio $P(x)$ tal que $P(a_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ con $a_1, \ldots, a_n$ números dados.

En el caso de una función analítica $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$, se dice que $a \in G$ es un cero de f o que f se cancela en a, si $f(a) = 0$ y es posible encontrar resultados similares a los enunciados en la discusión anterior, incluso para una cantidad infinita de $a_i's$.

Definición 1.9. Si $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica y $a \in G$ es tal que $f(a) = 0$, entonces a es un cero de f de multiplicidad $m \in \mathbb{Z}^+$ si existe una función analítica $g\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z - a)^m g(z)$ y $g(a) \neq 0$.

Teorema 1.4.1. *Sea G una región en $\mathbb{C}$ y sea $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) f es idénticamente cero.

2) Existe un punto $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para cada $n \geq 0$.

3) El conjunto $Z = \{z \in G : f(z) = 0\}$ tiene un punto de acumulación en G.

Demostración. Es claro que 1) implica 2) y 3).

Para mostrar 3) $\Rightarrow$ 2), sea $a \in G$ un punto de acumulación de Z. Como G es abierto, existe $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$. Como a es un punto de acumulación de Z y f es continua, se sigue que $f(a) = 0$.

Supóngase que existe un entero $n \geq 1$ tal que

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

es decir,

$$0 \neq a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Como f es analítica en G, es posible expandirla como serie de potencias alrededor de a en $B(a,R) \subset G$, es decir,

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k \qquad \text{para } \ |z-a| < R.$$

Considere la función

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n}.$$

Se tiene que g es analítica en $B(a,R)$, $f(z) = (z-a)^n g(z)$ y $g(a) = a_n \neq 0$.

Como g es continua en $B(a,R)$, existe un r, $0 < r < R$ tal que $g(z) \neq 0$ para $|z-a| < r$. Pero como a es un punto de acumulación de Z, existe un b tal que $f(b) = 0$ y $0 < |b-a| < r$. De donde $0 = (b-a)^n g(b)$ y $g(b) = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto, no existe tal entero n, probando la parte 2).

Para probar 2) $\Rightarrow$ 1), sea $A = \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \text{ para cada } n \geq 0\}$. Por hipótesis, $A \neq \varnothing$. Sea $z \in \overline{A}$ y sea (z_k) una sucesión en A tal que $z = \lim z_k$. Como cada $f^{(n)}$ es continua, se sigue que $f^{(n)}(z) = f^{(n)}(z_k) = 0$, de donde $z \in A$ y A es cerrado.

Por otro lado, sea $a \in A$, como $A \subset G$ y G es abierto, existe un $R > 0$ tal que $B(a,R) \subset G$. Como f es analítica, se tiene que $f(z) = \sum a_n (z-a)^n$ para $|z-a| < R$, en donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0,$$

para cada $n \geq 0$, de donde $f(z) = 0$ para cada $z \in B(a,R)$ y $B(a,R) \subset A$. Como $a \in A$ es arbitrario, se tiene que A es abierto.

Finalmente, A es un subconjunto no vacío, abierto y cerrado en G, que es conexo, así que necesariamente $A = G$, es decir, $f(z) = 0$ para cada $z \in G$. □

Como consecuencia del teorema 1.4.1, se obtienen los siguientes corolarios.

Corolario 1.3. *Si f y g son funciones analíticas en una región G, entonces, $f \equiv g$ si y solo si el conjunto $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en G.*

Corolario 1.4. *Sea G una región en $\mathbb{C}$. Si $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica distinta de la función constante cero, entonces para cada $a \in G$ tal que $f(a) = 0$, existe un único entero $n \geq 1$ y una función analítica $g\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^n g(z)$ para cada $z \in G$, es decir, cada cero de F tiene multiplicidad finita.*

Corolario 1.5. *Si $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica no constante y $a \in G$ es tal que $f(a) = 0$, entonces existe un $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset G$ y $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - a| < R$, es decir, los ceros de una función analítica están aislados.*

Proposición 1.14. *Si f es una función entera distinta de la función constante cero, con infinitos ceros, entonces sus ceros no están acotados.*

Demostración. Si f no tiene ceros, no hay nada que probar. Sea (a_n) la sucesión de ceros de f. Como cada cero de una función analítica tiene multiplicidad finita, existen infinitos términos distintos en la sucesión (a_n).

Si (a_n) está acotada, entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass, la sucesión (a_n) tiene un punto de acumulación, pero por el teorema 1.4.1 se tiene que f es idénticamente cero, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la sucesión (a_n) no está acotada, es decir $\lim |a_n| = \infty$. □

Además de los ceros de una función analítica, las singularidades son otro objeto de estudio en el análisis complejo.

Definición 1.10. Una función f tiene una singularidad en $z = a$ si existe un $R > 0$ tal que f está definida y es analítica en $B(a, R) \setminus \{a\}$ pero no en $\{a\}$.

Definición 1.11. Sea f una función con una singularidad en $z = a$, se dice que dicha singularidad es removible si $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0$.

Definición 1.12. Si $z = a$ es una singularidad de f, entonces se dice que a es un polo de f si $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$.

No es posible clasificar todas las singularidades en las dos categorías anteriores, por lo que si una singularidad no es removible ni es un polo, entonces se dice que es una singularidad esencial.

La siguiente proposición presenta la relación que existe entre los polos de una función y las singularidades de su función inversa.

Proposición 1.15. *Si la función f tiene un polo en $z = a$, entonces la función $[f(z)]^{-1}$ tiene una singularidad removible en $z = a$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana de los números reales, existe un entero positivo n tal que

$$\frac{1}{n} < \epsilon.$$

Por otro lado, como f tiene un polo en $z = a$, se cumple que $\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$, por lo que existe un $\alpha > 0$ tal que $n < |f(z)|$ si $|z - a| < \alpha$, es decir,

$$\left|[f(z)]^{-1}\right| < \frac{1}{n} < \epsilon$$

para $|z - a| < \alpha$. Sea $\delta = \min\{1, \alpha\}$, si $|z - a| < \delta$, se tiene que

$$\left|(z - a)\, [f(z)]^{-1}\right| < \epsilon,$$

es decir, $\lim_{z \to a}(z - a)\, [f(z)]^{-1} = 0$, de donde $[f(z)]^{-1}$ tiene una singularidad removible en $z = a$. $\square$

Teorema 1.4.2. *Si G es una región en $\mathbb{C}$ y $a \in G$ es tal que f es analítica en $G \setminus \{a\}$ con polo en $z = a$, entonces existe un entero positivo m y una función analítica $g\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ sin ceros tal que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m}.$$

Demostración. Como f tiene un polo en $z = a$, entonces $[f(z)]^{-1}$ tiene una singularidad removible en $z = a$, por lo tanto, la función $h(z) = [f(z)]^{-1}$ para $z \neq a$ y $h(a) = 0$ es analítica en $B(a, R)$ para algún $R > 0$.

Como $h(a) = 0$, por el corolario 1.4, existe un entero $m \geq 1$ y una función analítica h_1 tal que $h_1(a) \neq 0$ y $h(z) = (z - a)^m h_1(z)$. Al definir g como $[h_1(z)]^{-1}$ y despejar $[h(z)]^{-1}$, se obtiene lo deseado, ya que $h_1(z)$ nunca es cero, en caso contrario, existiría un $z_0 \in G$ tal que $[f(z_0)]^{-1} = 0$, lo cual es un absurdo. $\square$

En este caso se dice que f tiene un polo de orden m en $z = a$. Si $m = 1$, se dice que f tiene un polo simple en $z = a$.

Teorema 1.4.3. *Sea G una región, $a \in G$ y f una función analítica en $G \setminus \{a\}$. Si f tiene un polo de orden n en $z = a$, entonces existen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{C}$ tales que*

$$f(z) = \frac{A_n}{(z - a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(z - a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(z - a)} + G(z),$$

en donde $G(z)$ es analítica en $B(a, r)$ para algún $r > 0$.

Demostración. Por el teorema 1.4.2, existe una función analítica $g(z)$ tal que

$$f(z) = (z - a)^{-n} g(z).$$

Como $g(z)$ es analítica, puede escribirse en $B(a,r)$ como una serie de potencias

$$g(z) = A_n + A_{n-1}(z-a) + \cdots + A_1(z-a)^{n-1} + (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k,$$

para algún $r > 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^{-n}(A_n + A_{n-1}(z-a) + \cdots + A_1(z-a)^{n-1} + (z-a)^n G(z)) \\ &= \frac{A_n}{(z-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(z-a)} + G(z), \end{aligned}$$

en donde $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ es una función analítica en $B(a,r)$. □

La expresión

$$\frac{A_n}{(z-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(z-a)} \tag{1.20}$$

es conocida como la parte principal de f en el polo $z = a$ y el coeficiente A_1 se llama el residuo de f en $z = a$ y se escribe

$$\operatorname{Res}(f,a) = A_1. \tag{1.21}$$

Del teorema 1.4.3 es inmediato que si f tiene un polo simple en $z = a$, entonces

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \tag{1.22}$$

De igual manera, se deduce una fórmula más general para polos de orden $n > 1$, en este caso se tiene que

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (z-a)^n f(z). \tag{1.23}$$

La importancia de los residuos se encuentra en el resultado conocido como la fórmula del residuo, la cual se deduce a partir del Teorema de Cauchy y relaciona la integral alrededor de un círculo de una función analítica y los residuos de los polos encerrados por dicho círculo.

Teorema 1.4.4. *Sea f una función analítica en una región G, excepto en un polo $z = a$. Si γ es un círculo contenido en G que encierra a $z = a$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a).$$

Demostración. Por el Teorema de Cauchy aplicado a la función constante $f(z) = A_1$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{A_1}{(z-a)}dz = A_1.$$

De igual manera, por el corolario 1.2 aplicado a la función constante $f(z) = A_k$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{A_k}{(z-a)^k} = 0$$

para $k > 1$. Sea n el orden del polo $z = a$.

Por el teorema 1.4.3, la función f se puede escribir como

$$f(z) = \frac{A_n}{(z-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(z-a)} + G(z),$$

en donde $G(z)$ es una función analítica en $B(a, r)$ para algún $r > 0$. Luego, por la proposición 1.13 se tiene que

$$\int_\gamma G(z)dz = 0.$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{A_k}{(z-a)^k}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{A_1}{(z-a)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(z)dz\\ &= 0 + A_1 + 0\\ &= \operatorname{Res}(f, a).\end{aligned}$$

De donde

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a). \qquad \square$$

El teorema anterior puede generalizarse para una cantidad contable de polos (finita o infinita), de la siguiente manera.

Teorema 1.4.5 (Fórmula del residuo)**.** *Sea f una función analítica en una región G, excepto en una sucesión de polos (a_n). Si γ es un círculo contenido en G que encierra a los polos (a_n), entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Res}(f, a_k).$$

El círculo γ podría ser de radio infinito si la sucesión de polos no está acotada, siempre y cuando el límite de la integral exista cuando el radio del círculo tiende a infinito.

Nótese que en caso de una cantidad finita de polos $a_1, \ldots, a_n$, basta con definir $a_k = a$ para cada $k > n$, en donde la función $f(z)$ es analítica en $z = a$, ya que $\mathrm{Res}(f, a) = 0$.

Teorema 1.4.6. *Sea f una función analítica con un cero de orden n en $z = a$. Si $g(z)$ es una función analítica en $z = a$, entonces la función*

$$L(z) = g(z) \frac{d}{dz} \log f(z)$$

tiene residuo $n\ g(a)$ en el polo $z = a$.

Demostración. Por el corolario 1.1 se tiene que

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Como $z = a$ es un cero de orden n de f, existe una función analítica $h(z)$ en $z = a$, tal que $h(a) \neq 0$ y

$$f(z) = (z - a)^n h(z).$$

Luego,

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1} h(z) + (z - a)^n h'(z)$$

y por lo tanto

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{(z-a)} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

de donde

$$L(z) = \frac{n\ g(z)}{(z-a)} + \frac{h'(z)}{h(z)} g(z).$$

La función $L(z)$ tiene un polo simple en $z = a$, ya que $g(z)$ es analítica en $z = a$ y $h(a) \neq 0$. Luego, por la ecuación 1.22 se tiene que

$$\mathrm{Res}(L, a) = n\ g(a).$$ □

Además de las series de números complejos, resulta de interés definir el producto infinito de números complejos, ya que esto será de utilidad para construir funciones analíticas cuyos ceros formen cualquier sucesión deseada, gracias a los productos de Weierstrass.

Definición 1.13. Sea (z_n) una sucesión de números complejos. Si el límite

$$z = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k$$

existe, se dice que z es el producto infinito de los números (z_n) y se denota por

$$z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n.$$

De la definición de producto infinito, se sigue que si alguno de los números z_n es igual a cero, entonces el límite existe y es cero, sin importar los términos restantes de la sucesión.

Proposición 1.16. *Sea (z_n) una sucesión de números complejos distintos de cero tales que*

$$z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$$

existe y es distinto de cero, entonces $z_n \to 1$.

Demostración. Sea

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$$

para $n \geq 1$. Como todos los z_n son distintos de cero, se sigue que ningún p_n es cero, de donde

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = z_n$$

para $n \geq 2$. Como $z = \lim_{n\to\infty} p_n$ existe y es distinto de cero, entonces

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{z}{z} = 1. \qquad \square$$

Nótese que si el límite de p_n es cero, no necesariamente $z_n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, por ejemplo, la sucesión $z_n = a$ con $0 < |a| < 1$ es tal que $\lim p_n = 0$ pero ninguno de los z_n es cero.

Las siguientes proposiciones serán utilizadas en la construcción de funciones enteras con ceros dados.

Proposición 1.17. *Si (z_n) es una sucesión de números complejos tal que* $\operatorname{Re} z_n > 0$ *para cada $n \geq 1$, entonces $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ converge a un número distinto de cero si y solo si* *la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$$

converge.

Demostración. Considérese la sucesión

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$$

tal que $p_n \to z = re^{i\theta}$ con $-\pi < \theta \leq \pi$ y $r \neq 0$.

Si $s_n = \log z_1 + \cdots + \log z_n$, entonces

$$\exp(s_n) = \prod_{k=1}^{n} \exp(\log z_k) = p_n,$$

de donde $s_n = \log p_n + 2\pi i k_n$ para algún entero k_n. Como $p_n \to z \neq 0$, entonces $z_n \to 1$, de donde $s_n - s_{n-1} = \log z_n \to 0$. Además, también $\log p_n - \log p_{n-1} \to 0$, ya que $\log p_n \to \log z$. Por lo tanto,

$$(k_n - k_{n-1}) = \frac{s_n - s_{n-1} + \log p_{n-1} - \log p_n}{2\pi i} \to 0.$$

Como cada k_n es un entero, se sigue que existe un N tal que $k_n = k$ para cada $n \geq N$, por lo tanto $s_n \to \log z + 2\pi i k$, es decir, $\sum \log z_n$ converge.

Recíprocamente, si $s_n = \sum_{k=1}^{n} \log z_k \to s$, entonces $\exp s_n \to \exp s$. Pero

$$\exp s_n = \prod_{k=1}^{n} z_k,$$

de donde $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a $z = \exp s \neq 0$. $\square$

La siguiente proposición servirá para demostrar un lema sobre convergencia de productos infinitos, el cual a su vez será de utilidad para probar que bajo ciertas condiciones, el producto infinito de funciones analíticas es una función analítica, cuyos ceros son los ceros de los factores.

Proposición 1.18. *Si* $|z| \leq \frac{1}{2}$, *entonces*

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

Demostración. Si $z = 0$ el resultado es trivial. Sea $z \neq 0$ y considérese la serie de potencias de $\log(1+z)$ alrededor de $a = 0$,

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}.$$

Como $|z| \leq \frac{1}{2} < 1$, entonces

$$\begin{aligned}\left|1 - \frac{\log(1+z)}{z}\right| &= \left|\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2 + \dots\right| \\ &\leq \frac{1}{2}(|z| + |z|^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|z|}{1-|z|} \\ &\leq \frac{1}{2},\end{aligned}$$

de donde

$$\left|\frac{\log(1+z)}{z}\right| \leq \left|1 - \frac{\log(1+z)}{z}\right| + 1 \leq \frac{1}{2} + 1$$

y

$$1 \leq \left|1 - \frac{\log(1+z)}{z}\right| + \left|\frac{\log(1+z)}{z}\right| \leq \frac{1}{2} + \left|\frac{\log(1+z)}{z}\right|,$$

es decir

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

□

Proposición 1.19. *Si* (z_n) *es una sucesión en* $\mathbb{C}$ *tal que* $\operatorname{Re} z_n > -1$ *para cada* $n \geq 1$, *entonces,* $\sum \log(1+z_n)$ *converge absolutamente si y solo si* $\sum z_n$ *converge absolutamente.*

Demostración. Si $\sum |z_n|$ converge, entonces por la proposición 1.2 $|z_n| \to 0$, así que existe un entero N tal que $|z_n| < \frac{1}{2}$ para cada $n \geq N$.

Por la proposición 1.18,

$$\sum |\log(1+z_n)| \leq \sum_{n=1}^{N-1} |\log(1+z_n)| + \frac{3}{2}\sum_{n=N}^{\infty} |z_n| < \infty,$$

es decir $\sum |\log(1+z_n)|$ converge.

Recíprocamente, si $\sum |\log(1+z_n)|$ converge, entonces $|\log(1+z_n)| \to 0$, de donde $|z_n| \to 0$ y existe un entero N tal que $|z_n| < \frac{1}{2}$ para cada $n \geq N$, así que

$$\sum |z_n| \leq 2 \left(\sum_{n=1}^{N-1} |z_n| + \sum_{N}^{\infty} |(1+z_n)| \right) < \infty,$$

es decir, $\sum |z_n|$ converge. □

Al igual que ocurre con las series infinitas, es posible definir la convergencia absoluta de un producto infinito, de manera que esta implique la convergencia del producto, sin embargo, esta definición no puede ser que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

sea convergente, ya que si $z_n = -1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, el producto $\prod |z_n|$ converge a 1, pero los valores del $\prod_{k=1}^{n} z_k$ alternan los valores de 1 y -1 dependiendo de la paridad de n, por lo que el producto $\prod z_n$ no es convergente.

Por lo tanto, usando la proposición 1.17 como inspiración, se utiliza la siguiente definición.

Definición 1.14. Si $\operatorname{Re} z_n > 0$ para cada n, entonces se dice que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si la serie $\sum \log z_n$ converge absolutamente.

De la definición de convergencia absoluta de un producto y por la proposición 1.19, se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 1.6. *Si* $\operatorname{Re} z_n > 0$ *para cada* n*, entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n$$

converge absolutamente si y solo si la serie $\sum (z_n - 1)$ *converge absolutamente.*

Lema 1.2. *Sea* X *un conjunto y sean* $f, f_1, f_2, \ldots$ *funciones de* X *a* $\mathbb{C}$ *tales que la sucesión* (f_n) *converge uniformemente a* f *en* X*. Si existe una constante* C *tal que* $\operatorname{Re} f(x) \leq C$ *para cada* $x \in X$*, entonces* $(\exp f_n)$ *converge uniformemente a* $\exp f$ *en* X*.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como e^z es una función continua en $\mathbb{C}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|e^z - 1| = \left|e^z - e^0\right| < \epsilon e^{-C},$$

si $|z| = |z - 0| < \delta$.

Como (f_n) converge uniformemente a f en X, existe un entero N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ para cada $x \in X$ si $n \geq N$, de donde

$$\left|\frac{\exp f_n(x)}{\exp f(x)} - 1\right| = |\exp\left[f_n(x) - f(x)\right] - 1| < \epsilon\, e^{-C},$$

para cada $n \geq N$ y $x \in X$.

Luego,

$$\begin{aligned}|\exp f_n(x) - \exp f(x)| &< \epsilon\, e^{-C}\, |\exp f(x)| \\ &= \epsilon\, e^{-C} \exp \operatorname{Re} f(x) \\ &\leq \epsilon\, e^{-C} e^{C} \\ &= \epsilon,\end{aligned}$$

para cada $n \geq N$ y $x \in X$, es decir, $\exp f_n(x)$ converge uniformemente a $\exp f(x)$ en X. □

La definición de espacio métrico compacto se encuentra en [5] y será utilizada en el siguiente lema.

Lema 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea (g_n) una sucesión de funciones continuas de X a $\mathbb{C}$ tal que $\sum g_n(x)$ converge absolutamente y uniformemente en X. Entonces el producto*

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + g_n(x))$$

converge absolutamente y uniformemente en X.

Además, existe un entero positivo M tal que $f(x) = 0$ si y solo si $g_n(x) = -1$ para algún entero positivo $n \leq M$.

Demostración. Como $\sum g_n(x)$ converge uniformemente en X, existe un entero N tal que

$$|g_n(x)| = \left|\sum_{n=1}^{n} g_n(x) - \sum_{n=1}^{n-1} g_n(x)\right| < \frac{1}{2},$$

para cada $n \geq N$ y $x \in X$, por lo tanto $\operatorname{Re}[1+g_n(x)] > 0$, ya que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[1+g_n(x)] &= 1+\operatorname{Re}[g_n(x)]\\ &\geq 1-|\operatorname{Re}[g_n(x)]|\\ &\geq 1-|g_n(x)|\\ &\geq 1-\frac{1}{2}\\ &> 0.\end{aligned}$$

Por la proposición 1.18, $|\log(1+g_n(x))| \leq \frac{3}{2}|g_n(x)|$, para cada $n \geq N$ y $x \in X$. Luego,

$$h(x) = \sum_{n=N}^{\infty} \log(1+g_n(x))$$

converge uniformemente en X. Como $h(x)$ es continua sobre X compacto, debe ser acotada, por lo que existe un $a > 0$ tal que $\operatorname{Re} h(x) \leq |h(x)| < a$ para cada $x \in X$.

Por el lema 1.2,

$$\exp h(x) = \prod_{n=N}^{\infty}(1+g_n(x))$$

converge uniformemente en X. Finalmente, el producto

$$f(x) = [1+g_1(x)]\cdots[1+g_{N-1}(x)]\exp h(x)$$

converge absolutamente debido al corolario 1.6, porque por hipótesis $\sum g_n(x)$ converge absolutamente. Además $\exp h(x) \neq 0$ para cada $x \in X$, así que $f(x) = 0$ si y solo si $g_n(x) = -1$ para algún entero positivo $n \leq N-1$. □

Teorema 1.4.7. *Sea G una región en $\mathbb{C}$ y sea (f_n) una sucesión de funciones analíticas en G, tal que ninguna f_n es idénticamente cero. Si la serie $\sum[f_n(z)-1]$ converge absolutamente y uniformemente en los subconjuntos compactos de G, entonces*

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge a una función $f(z)$, analítica en G.

Además, si $z=a$ es un cero de f, entonces $z=a$ es un cero de únicamente una cantidad finita de funciones f_n y la multiplicidad de dicho cero es la suma de multiplicidades de $z=a$ como cero de las funciones f_n.

Demostración. Como $\sum[f_n(z)-1]$ converge uniformemente y absolutamente en los subconjuntos compactos de G, por el lema 1.3 se sigue que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente y absolutamente en los subconjuntos compactos de G, es decir, el producto infinito converge a una función $f(z)$, analítica en G.

Por otro lado, si $f(a) = 0$, sea $r > 0$ tal que $\overline{B}(a, r) \subset G$. Por hipótesis, $\sum [f_n(z) - 1]$ converge uniformemente en $\overline{B}(a, r)$, ya que este conjunto es cerrado y acotado (consultar el Teorema de Heine Borel en [5]).

Por el lema 1.3 existe un entero n tal que $f(z) = f_1(z) \cdot \dots \cdot f_n(z) g(z)$ en donde la función g no se cancela en $\overline{B}(a, r)$, es decir, $z = a$ es un cero de únicamente una cantidad finita de funciones f_n y su multiplicidad es la suma de multiplicidades de $z = a$ como cero de dichas funciones. □

Antes de aplicar el teorema 1.4.7 para construir funciones enteras con ceros dados, es necesario definir a los factores elementales, los cuales son la base de los productos de Weierstrass.

Definición 1.15. Para $p \in \mathbb{N}$, un factor elemental $E_p(z)$ es una función que se define como:

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1 - z \\ E_p(z) &= (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right), \text{ si } p \geq 1. \end{aligned}$$

Es inmediato que para cada $a \neq 0$, la función $E_p(z/a)$ tiene un cero de multiplicidad uno en $z = a$ y no tiene más ceros. Además, si $b \in \mathbb{C} \setminus G$, la función

$$E_p\left(\frac{a - b}{z - b}\right)$$

tiene un cero de multiplicidad uno en $z = a$ y es analítica en G.

Lema 1.4. *Si* $|z| \leq 1$ *y* $p \in \mathbb{N}$, *entonces* $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

Demostración. Si $p = 0$ el resultado es trivial. Si $p \geq 1$, su expansión en serie de potencias alrededor de $a = 0$ es

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,$$

de donde,

$$E_p'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Por otro lado, al derivar la expresión original de $E_p(z)$ se obtiene que,

$$E_p'(z) = -z^p \left(z + \cdots + \frac{z^p}{p} \right).$$

Al igualar coeficientes de ambas expresiones de $E_p'(z)$, se sigue que

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0.$$

Además, dado que todos los coeficientes de $\exp\left(z + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$ son positivos, se tiene que $a_k < 0$ para cada $k \geq p+1$, de donde $|a_k| = -a_k$ para $k \geq p+1$.

Por otro lado,

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k,$$

de donde,

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1.$$

Por lo tanto, si $|z| \leq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &= \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| = |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| \, |z|^{k-p-1} \leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| \\ &\leq |z|^{p+1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.8. *Sea (a_n) una sucesión de números complejos distintos de cero tal que* $\lim |a_n| = \infty$. *Si (p_n) es cualquier sucesión de enteros tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < \infty, \tag{1.24}$$

para cada $r > 0$, entonces

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

converge a una función entera cuyos únicos ceros son los números a_n.

Además, si $z = a$ aparece m veces en la sucesión (a_n), entonces f tiene un cero en $z = a$ de multiplicidad m.

Demostración. Supóngase que existe una sucesión de enteros (p_n) que satisface la desigualdad 1.24. Sea $r > 0$. Como $|a_n| \to \infty$, existe un entero positivo N tal que $r < |a_n|$ para cada $n \geq N$. Entonces, por el lema 1.4 se tiene que

$$|1 - E_{p_n}(z/a_n)| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1},$$

cuando $|z| \leq r$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - E_{p_n}(z/a_n)| \leq \sum_{n=1}^{N-1} |1 - E_{p_n}(z/a_n)| + \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty,$$

cuando $|z| \leq r$, es decir, la serie $\sum |1 - E_{p_n}(z/a_n)|$ converge absolutamente y uniformemente en $\overline{B}(0,r)$. Como $r > 0$ es arbitrario, la serie $\sum [1 - E_{p_n}(z/a_n)]$ converge absolutamente y uniformemente en los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Por el teorema 1.4.7, el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

converge a una función analítica en $\mathbb{C}$, es decir, $f(z)$ es una función entera. Todos los números a_n son ceros de f, ya que $E_{p_n}(1) = 0$ para cada p_n.

Además por el teorema 1.4.7, si $z = a$ es un cero de f, debe ser cero de una cantidad m finita de funciones $E_{p_n}(z/a_n)$, las cuales tienen a $z = a_n$ como único cero, es decir, $z = a$ es un término que aparece m veces en la sucesión (a_n) y su multiplicidad como cero de f es m. □

Del teorema 1.4.8 se sigue que si (a_n) es una sucesión de números complejos, distintos de cero, tal que $\lim |a_n| = \infty$, entonces la función definida por el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n) \tag{1.25}$$

es una función entera cuyos únicos ceros son los términos de la sucesion (a_n).

En efecto, ya que $\lim |a_n| = \infty$, entonces para cualquier $r > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > 2r$ para cada $n \geq N$, de donde

$$\left(\frac{r}{|a_n|}\right) < \frac{1}{2},$$

para cada $n \geq N$, por lo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{n+1}$$

es convergente, ya que la cola final está dominada por la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \infty.$$

Además, si se desea que la función definida en 1.25 tenga a $z = 0$ como un cero de multiplicidad m, basta con agregar un factor z^m, de esta manera se obtiene a una función entera cuyos únicos ceros son los términos de la sucesión (a_n) tal que $\lim |a_n| = \infty$ y $z = 0$.

Dicha función es

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n). \tag{1.26}$$

El recíproco del teorema 1.4.8 asegura que cualquier función entera puede escribirse haciendo uso del producto infinito de factores elementales, este resultado se conoce como el Teorema de factorización de Weierstrass.

Teorema 1.4.9 (Factorización de Weierstrass)**.** *Sea f una función entera y sea (a_n) la sucesión de sus ceros distintos de cero repetidos de acuerdo a su multiplicidad. Supóngase que f tiene un cero en $z = 0$ de multiplicidad $m \geq 0$.*

Entonces existe una función entera g y una sucesión de enteros (p_n) tal que

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n).$$

Demostración. Por la proposición 1.14, la sucesión (a_n) es tal que $\lim |a_n| = \infty$. Sea (p_n) una sucesión de enteros tal que $p_n = n - 1$.

para cada $r > 0$, existe un entero N tal que $|a_n| > 2r$ para cada $n \geq N$, de donde

$$\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

para cada $n \geq N$.

Por lo tanto, la sucesión (p_n) satisface la desigualdad 1.24 para cada $r > 0$, ya que el miembro izquierdo está dominado por la serie

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

la cual es una serie convergente.

Por el teorema 1.4.8 el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

converge a una función entera, de manera que la función entera

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

tiene los mismos ceros que f, con las mismas multiplicidades. Se sigue que $f(z)/h(z)$ tiene singularidades removibles en $z = 0, a_1, a_2, \ldots$, de donde f/h es una función entera, además, no tiene ceros. Como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo (la definición de un conjunto simplemente conexo se encuentra en [5]), entonces existe una función entera g tal que

$$\frac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)},$$

es decir,

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n). \qquad \square$$

2. Transformada de Mellin

2.1. Comportamiento asintótico

En ocasiones, se requiere conocer qué tan rápido crecen los valores de una sucesión o función, por ejemplo, las sucesiones $a_n = n$ y $b_n = n^3$ crecen indefinidamente, sin embargo, la sucesión (b_n) alcanza los miles a partir de su décimo término, mientras que (a_n) lo alcanza hasta en su milésimo término; esto es lo que se conoce como comportamiento asintótico de una sucesión o función.

Definición 2.1. Sean (a_n) una sucesión en $\mathbb{C}$ y $f(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Se dice que la sucesión (a_n) tiene orden de crecimiento de $f(n)$ y se escribe

$$(a_n) = O(f(n)),$$

si existe una constante $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq c\,|f(n)|$, para cada $n \geq n_0$.

Proposición 2.1. *Sea (a_n) una sucesión de números complejos y $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(n) \neq 0$ para cada $n \geq k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Si*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|f(n)|} \in \mathbb{R}^+,$$

entonces $(a_n) = O(f(n))$.

Demostración. Por hipótesis, el límite L es un real positivo, así que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a_n|}{|f(n)|} < L + 1,$$

para cada $n \geq m$. De no ser cierto el enunciado que se quiere probar, se tendría que para cada $c > 0$ y para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $|a_n| > c\,|f(n)|$.

En particular, para $c = L + 1$ y $n_0 = \max\{m, k\}$, existe $n \geq n_0$ tal que

$|a_n| > (L+1)\,|f(n)|$. Como $n \geq k$, se tiene que $|f(n)| \neq 0$, y por lo tanto

$$\frac{|a_n|}{|f(n)|} > L+1,$$

pero esto es una contradicción porque $n \geq m$. Por lo tanto, existen $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq c\,|f(n)|$ para cada $n \geq n_0$, es decir, $(a_n) = O(f(n))$. $\square$

Definición 2.2. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas. Se dice que la función f es de orden g cuando x crece indefinidamente y se escribe

$$f(x) = O(g(x)) \;\text{ con } x \to \infty,$$

si existen números $c, x_0 > 0$ tales que $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$ para cada $x > x_0$.

En el caso de las funciones, es posible que también sea de interés conocer el comportamiento de sus valores cerca de un punto en particular, así que es posible referirse al orden de $f(x)$ cuando x se acerca a un valor b, para cual es útil la siguiente definición.

Definición 2.3. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas. Se dice que la función f es de orden g cuando x se acerca a b y se escribe

$$f(x) = O(g(x)) \;\text{ con } x \to b,$$

si existen números $c, \delta > 0$ tales que $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$ para cada x tal que $|x - b| < \delta$.

Se esperaría conocer una proposición similar a la proposición 2.1 que también sea válida para conocer el orden de una función $f(x)$ cuando x crece indefinidamente.

Esto se logra gracias a algunos resultados de continuidad, incluso es posible encontrar una generalización para conocer el orden de una función cerca de algún valor en particular.

Proposición 2.2. *Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas y $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ para cada $x > r$. Si*

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \in \mathbb{R}^+,$$

entonces $f(x) = O(g(x))$ con $x \to \infty$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como el límite L es un número real positivo, existe $t > 0$ tal que

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} < L + \epsilon,$$

para cada $x > t$. Supóngase por el absurdo que para cada $c > 0$ y $x_0 > 0$ existe $z > x_0$ tal que $|f(z)| > c\,|g(z)|$.

En particular, para $c = L + \epsilon$ y $x_0 = \max\{r, t\}$, existe $z > x_0$ tal que $|f(z)| > (L + \epsilon)\,|g(z)|$. Como $z > r$, entonces $f(z) \neq 0$ y por lo tanto

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} > L + \epsilon,$$

pero esto es una contradicción porque $z > t$. Por lo tanto, existen $c, x_0 > 0$ tales que $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$ para cada $x > x_0$, es decir, $f(x) = O(g(x))$ con $x \to \infty$. $\square$

Proposición 2.3. *Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas, $b \in \mathbb{R}$ y $d > 0$ tal que $g(x) \neq 0$ siempre que $|x - b| < d$. Si*

$$L = \lim_{x \to b} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \in \mathbb{R}^+,$$

entonces $f(x) = O(g(x))$ con $x \to b$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como el límite L es un número real positivo, existe $r > 0$ tal que

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} < L + \epsilon,$$

siempre que $|x - b| < r$. Supóngase por el absurdo que para cada $c > 0$ y $\delta > 0$ existe z tal que $|z - b| < \delta$ y $|f(z)| > c\,|g(z)|$.

En particular, para $c = L + \epsilon$ y $\delta = \min\{d, r\}$, existe z tal que $|z - b| < \delta$ y $|f(z)| > (L + \epsilon)\,|g(z)|$. Como $|z - b| < d$, entonces $f(z) \neq 0$ y por lo tanto

$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} > L + \epsilon,$$

pero esto es una contradicción porque $|z - b| < r$. Por lo tanto, existen $c, \delta > 0$ tales que $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$ siempre que $|x - b| < \delta$, es decir, $f(x) = O(g(x))$ con $x \to b$. $\square$

2.2. La transformada de Mellin

Definición 2.4. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua a trozos. La transformada de Mellin de f se define como

$$\mathcal{M}\left[f(x), s\right] = f^*(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx.$$

En la definición anterior, s es un número complejo y es posible que la transformada de Mellin de f no exista para cada valor de s debido a que la integral puede no ser convergente; sin embargo, a partir del comportamiento asintótico de f en cero y en el infinito, es posible establecer una región en el plano complejo, en la cual la transformada de Mellin siempre existe.

Proposición 2.4. *Si $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que*

$$f(x) = \begin{cases} O(x^\alpha), & con \quad x \to 0 \\ O(x^\beta), & con \quad x \to \infty \end{cases}$$

entonces la transformada de Mellin $f^*(s)$ existe para cadas los $s \in \mathbb{C}$ tales que $-\alpha < \operatorname{Re}(s) < -\beta$.

A esta región se le conoce como la franja fundamental de $f^*(s)$.

Demostración. Como $f(x) = O(x^\alpha)$ con $x \to 0$, existen $c_1, \delta > 0$ tal que $f(x) \leq c_1 x^\alpha$ cuando $0 < x < \delta$. De igual manera, como $f(x) = O(x^\beta)$ con $x \to \infty$, existen c_2, x_0 tal que $|f(x)| \leq c_2 x^\beta$ cuando $x > x_0$.

Si $\delta < 1$, la función $g(x) = f(x)/x^\alpha$ está acotada en $[\delta, 1]$ por un número $M > 0$, es decir, $|f(x)| \leq M x^\alpha$ para $x \in [\delta, 1]$, ya que g es continua.

De igual manera, si $x_0 > 1$, la función $f(x)/x^\beta$ está acotada en $[1, x_0]$ por un número $N > 0$, de donde $|f(x)| \leq N x^\beta$ para $x \in [1, x_0]$.

Por otro lado, si $-\alpha < \operatorname{Re}(s) < -\beta$, entonces las integrales

$$\int_0^1 x^{\operatorname{Re}(s)+\alpha-1} dx \quad \text{y} \quad \int_1^\infty x^{\operatorname{Re}(s)+\beta-1} dx$$

convergen.

Defínase

$$A = \begin{cases} \text{máx}\{c_1, M\}, & \text{si} \quad \delta < 1 \\ c_1, & \text{si} \quad 1 \leq \delta \end{cases} \quad \text{y} \quad B = \begin{cases} c_2, & \text{si} \quad x_0 \leq 1 \\ \text{máx}\{c_2, N\}, & \text{si} \quad 1 < x_0. \end{cases}$$

De esta manera se obtiene que

$$\int_0^1 |f(x)|\, x^{\operatorname{Re}(s)-1} dx \leq A \int_0^1 x^{\operatorname{Re}(s)+\alpha-1} dx$$

y

$$\int_1^\infty |f(x)|\, x^{\operatorname{Re}(s)-1} dx \leq B \int_1^\infty x^{\operatorname{Re}(s)+\beta-1} dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx\right| &= \left|\int_0^1 f(x)x^{s-1}dx + \int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx\right| \\
&\leq \left|\int_0^1 f(x)x^{x-1}dx\right| + \left|\int_1^\infty f(x)x^{s-1}dx\right| \\
&= \int_0^1 |f(x)|\left|x^{s-1}\right| dx + \int_1^\infty |f(x)|\left|x^{s-1}\right| dx \\
&= \int_0^1 |f(x)|\, x^{\mathrm{Re}(s)-1}dx + \int_1^\infty |f(x)|\, x^{\mathrm{Re}(s)-1}dx \\
&\leq A\int_0^1 x^{\mathrm{Re}(s)+\alpha-1}dx + B\int_1^\infty x^{\mathrm{Re}(s)+\beta-1}dx \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

de donde la transformada de Mellin $f^*(s)$ existe cuando $-\alpha < \mathrm{Re}(s) < -\beta$. $\square$

De lo anterior, se sigue que$f^*(s)$ es una función analítica en su franja fundamental, además la transformada de Mellin de un polinomio no existe, ya que la integral que la define es divergente.

A continuación se presenta una tabla de algunas funciones básicas con su respectiva transformada de Mellin y su franja fundamental.

Tabla 2.1. Funciones y transformadas

No.	**Función**	**Transformada de Mellin**	**Franja fundamental**
1.	e^{-x}	$\Gamma(s)$	$\langle 0, \infty \rangle$
2.	$e^{-x} - 1$	$\Gamma(s)$	$\langle -1, 0 \rangle$
3.	$e^{-x} - 1 + x$	$\Gamma(s)$	$\langle -2, -1 \rangle$
4.	e^{-x^2}	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$	$\langle 0, \infty \rangle$
5.	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi s}$	$\langle 0, 1 \rangle$
6.	$\log(1+x)$	$\frac{\pi}{s \operatorname{sen} \pi s}$	$\langle -1, 0 \rangle$
7.	$\frac{1}{(1+x)^p}$	$B(s, p-s)$	$\langle 0, p \rangle \quad p > 0$
8.	$H(x) = I(0 \leq x \leq 1)$	$1/s$	$\langle 0, \infty \rangle$

(continúa)

Tabla 2.1. (continuación)

No.	Función	Transformada de Mellin	Franja fundamental
9.	$1 - H(x)$	$-1/s$	$\langle -\infty, 0\rangle$
10.	$x^a \log^k(x)H(x)$	$\dfrac{(-1)^k k!}{(s+a)^{k+1}}$	$\langle -a, \infty\rangle \quad k \in \mathbb{N}$
11.	$x^a \log^k(x)(1 - H(x))$	$-\dfrac{(-1)^k k!}{(s+a)^{k+1}}$	$\langle -a, \infty\rangle \quad k \in \mathbb{N}$
12.	$\dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$	$\Gamma(s)\zeta(s)$	$\langle 1, \infty\rangle$
13.	$\log\left(\dfrac{1 - e^{-x}}{x}\right)$	$-\dfrac{\Gamma(s+1)\zeta(s+1)}{s}$	$\langle -1, 0\rangle$
14.	$\log(1 - e^{-x})$	$-\Gamma(s)\zeta(s+1)$	$\langle 0, \infty\rangle$

También es necesario conocer algunas propiedades de la transformada de Mellin de una función, las cuales son en su mayoría una consecuencia directa de la definición, y en algunas otras es necesario usar integración por partes para deducirlas.

Tabla 2.2. Propiedades de $f^*(s)$

No.	Función	Transformada de Mellin
1.	$x^p f(x)$	$f^*(s+p)$
2.	$f(\mu x)$	$\mu^{-s} f^*(s) \quad \mu > 0$
3.	$f(x^p)$	$\dfrac{1}{p} f^*(s/p) \quad p > 0$
4.	$f(x)\log x$	$\dfrac{d}{ds} f^*(s)$
5.	$\dfrac{d}{dx} f(x)$	$-(s-1)f^*(s-1)$
6.	$x\dfrac{d}{dx} f(x)$	$-sf^*(s)$
7.	$\displaystyle\int_0^x f(t)dt$	$-\dfrac{1}{s} f^*(s+1)$
8.	$f(x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathcal{A}} \lambda_k g(\mu_k x)$	$f^*(s) = g^*(s)\displaystyle\sum_{k\in\mathcal{A}} \lambda_k \mu_k^{-s}$, $\mathcal{A}$ finito

La propiedad 8 se puede generalizar para sumas infinitas del tipo

$$F(x) = \sum_k \lambda_k f(\mu_k x),$$

las cuales son conocidas como sumas armónicas.

Teorema 2.2.1. *La transformada de Mellin de una suma armónica está definida en la intersección de la franja fundamental de $f(x)$ y el dominio de convergencia absoluta de la serie $\sum_k \lambda_k \mu_k^{-s}$.*

Demostración. Si la intersección de la franja fundamental de $f(x)$ y el dominio de convergencia absoluta de la serie $\sum_k \lambda_k \mu_k^{-s}$ es no vacía, entonces $f^*(s)$ y $\sum_k \lambda_k \mu_k^{-s}$ son analíticas en dicha intersección, por lo tanto por el teorema de Fubini y por la propiedad 2, se obtiene que

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \int_0^\infty F(x) x^{s-1} dx \\ &= \int_0^\infty \sum_k \lambda_k f(\mu_k x) x^{s-1} dx \\ &= \sum_k \int_0^\infty \lambda_k f(\mu_k x) x^{s-1} dx \\ &= \sum_k \lambda_k \int_0^\infty f(\mu_k x) x^{s-1} dx \\ &= \sum_k \lambda_k \mu_k^{-s} f^*(s). \end{aligned}$$

□

3. El espectro de operadores acotados

3.1. Espacios de Banach

Definición 3.1. Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación tal que

1) $\|x\| \geq 0$ para cada $x \in X$.

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in X$.

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada $x, y \in X$.

Se dice que $\|\cdot\|$ es una norma definida sobre X y que X es un espacio normado.

Definición 3.2. Se dice que un subconjunto $M \subseteq X$ de un espacio normado X es acotado si existe $C > 0$ tal que $\|x\| \leq C$ para cada $x \in M$.

Definición 3.3. Sea $z \in X$ con X espacio normado. Sea $r > 0$. Al conjunto

$$B(z, r) = \{x : \|x - z\| < r\}$$

se le conoce como bola abierta de radio r centrada en z.

Definición 3.4. Sea $z \in X$ con X espacio normado. Sea $r > 0$. Al conjunto

$$\overline{B}(z, r) = \{x : \|x - z\| \leq r\}$$

se le conoce como bola cerrada de radio r centrada en z.

Definición 3.5. Un subconjunto A de un espacio normado X se dice que es abierto si todo punto en A pertenece a una bola abierta centrada en dicho punto, contenida en A. Un subconjunto C de X se dice que es cerrado si $X \setminus C$ es abierto.

Resulta que efectivamente las bolas abiertas son conjuntos abiertos y las bolas cerradas, conjuntos cerrados. Estos conjuntos serán de utilidad en lo que sigue.

Definición 3.6. Un punto $x \in A$ se dice que es un punto interior de A si existe una bola abierta centrada en x contenida en A, es decir

$$B(x, \epsilon) \subseteq A \text{ para algún } \epsilon > 0.$$

Definición 3.7. Sea M un subconjunto de un espacio normado X. Si un elemento $x \in X$ es tal que toda bola abierta centrada en x tiene al menos un elemento de M distinto de x, se dice que x es punto de acumulación de M, es decir, si

$$\big(B(x, \epsilon) \setminus \{x\}\big) \cap M \neq \varnothing, \text{ para cada } \epsilon > 0.$$

Definición 3.8. Sea X un espacio normado. A la unión de un conjunto $M \subseteq X$ con sus puntos de acumulación se le conoce como la clausura de M y se escribe $\overline{M}$. Si $\overline{M} = X$, se dice que el conjunto M es denso en X.

Teorema 3.1.1. *Un subconjunto $M \subseteq X$ de un espacio normado X es cerrado si y solo si $M = \overline{M}$, es decir, contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Demostración. Sea $x \in \overline{M}$, si $x \notin M$ entonces es un punto de acumulación de M, además $x \in X \setminus M$ que es abierto, ya que por hipótesis M es cerrado, de donde existe una bola abierta centrada en x contenida en $X \setminus M$, es decir, dicha bola abierta no contiene ningún punto de M, pero esto contradice que x sea punto de acumulación de M, por lo tanto $x \in M$, es decir, $\overline{M} \subseteq M$.

Por otro lado, por definición de clausura se tiene que $M \subset \overline{M}$, de donde $M = \overline{M}$. □

Definición 3.9. Se dice que una sucesión (x_n) de elementos de un espacio normado X es convergente, si existe $x \in X$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$ para cada $n > N$, es decir $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$. A x se le conoce como el límite de la sucesión (x_n) y se escribe $x_n \to x$.

Teorema 3.1.2. *Sea M un subconjunto no vacío de un espacio normado X y sea $x \in X$. Se tiene que $x \in \overline{M}$ si y solo si existe una sucesión (x_n) contenida en M tal que $x_n \to x$.*

Demostración. Considérese a las bolas abiertas $B_n = (x, \frac{1}{n})$. Nótese que

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots\ .$$

Como x es un punto de acumulación de M, se tiene que $(B_n \setminus \{x\}) \cap M \neq \varnothing$ para cada $n \geq 1$, es decir, existe una sucesión (x_n) de elementos de M tal que $\|x - x_n\| < \frac{1}{n}$.

Sea $\epsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana de los números reales, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \epsilon$, por lo tanto $\|x - x_m\| < \epsilon$, pero como $B_k \subseteq B_m$ para cada $k > m$, entonces $\|x - x_k\| < \epsilon$ para cada $k > m$, es decir, la sucesión (x_k) converge a x.

Recíprocamente, sea (x_n) una sucesión contenida en M tal que $x_n \to x \in X$. Si x pertenece a M entonces también pertence a $\overline{M}$. Si $x \notin M$ entonces cualquier bola abierta centrada en x contiene puntos $x_n \in M$ distintos de x, por lo que x es un punto de acumulación y por lo tanto pertenece a $\overline{M}$. $\square$

Teorema 3.1.3. *Sea X un espacio normado. Si (x_n) es una sucesión contenida en X que es convergente, entonces es acotada.*

Demostración. Sea x el límite de la sucesión (x_n). Como la sucesión es convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < 1$ para cada $n > N$. Luego,

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| < 1 + \|x\|, \text{ para cada } n > N.$$

Sea $C = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_N\|, 1 + \|x\|\}$. Se sigue que $\|x_n\| < C$ para cada $n \geq 1$, es decir, la sucesión (x_n) es acotada. $\square$

Definición 3.10. Se dice que una sucesión (x_n) de elementos de un espacio normado X es de Cauchy, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, para cada $n, m > N$.

Proposición 3.1. *Si (x_n) es una sucesión convergente contenida en un espacio normado X, entonces también es de Cauchy.*

Demostración. Sea $x \in X$ el límite de (x_n). Sea $\epsilon > 0$. Como (x_n) es convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \|x_m - x\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ cuando } n, m > N.$$

Entonces, si $n, m > N$, se tiene que

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es decir, (x_n) es de Cauchy. $\square$

Definición 3.11. Se dice que un subconjunto $M \subseteq X$ de un espacio normado X es compacto si toda sucesión de elementos de M contiene una subsucesión que converge a un elemento de M.

Proposición 3.2. *Un subconjunto compacto $M \subseteq X$ de un espacio normado X es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea $x \in \overline{M}$, por el teorema 3.1.2 existe una sucesión (x_n) contenida en M tal que $x_n \to x$. Por definición de conjunto compacto se tiene que $x \in M$, es decir, M contiene a todos sus puntos de acumulación, así que por el teorema 3.1.1, M es un conjunto cerrado.

Supóngase que M no es acotado. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $y \in M$, debe existir $x_m \in M$ tal que $\|x_m - y\| > m$, en caso contrario, M estaría contenido en la bola cerrada $\overline{B}(y, m)$ y M sería acotado. Luego, existe una sucesión (x_n) tal que $\|x_n - y\| > n$ y por lo tanto

$$\|x_n\| \geq \|x_n - y\| - \|y\| \geq n - \|y\|$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión (x_n) no es acotada. Por el teorema 3.1.3, la sucesión (x_n) no puede tener una subsucesión convergente, ya que no es acotada, es decir, el espacio M no es compacto. Por lo tanto, el conjunto M debe ser acotado. $\square$

Sería ideal tener una caracterización para conjuntos compactos en espacios normados en general, sin embargo el recíproco de la proposición anterior no es siempre cierto.

El siguiente teorema, cuya demostración puede ser hallada en [9], presenta una caracterización para conjuntos compactos en espacios de dimensión finita.

Teorema 3.1.4. *En un espacio normado X de dimensión finita, un subconjunto $M \subseteq X$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Lema 3.1 (Lema de Riesz)**.** *Sean Y, Z subespacios de un espacio normado X de cualquier dimensión. Supóngase que Y es un conjunto cerrado en X y además es un subconjunto propio de Z. Entonces para cada $\theta \in (0, 1)$ existe $z \in Z$, con $\|z\| = 1$, tal que*

$$\|z - y\| \geq \theta \quad \textit{para cada } y \in Y.$$

Demostración. Sea $v \in Z \setminus Y$ y defínase su distancia hacia Y como

$$d = \inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$

Se tiene que $d > 0$, de lo contrario para cada $\epsilon > 0$ existe $y \in Y$ tal que $\|v - y\| < \epsilon$. En particular, existe una sucesión (y_n) contenida en Y tal que

$$\|v - y_n\| < \frac{1}{n},$$

de donde $y_n \to v$ y como Y es cerrado, se sigue que $v \in Y$, en contradicción con $v \in Z \setminus Y$. Sea $\theta \in (0, 1)$.

Se tiene que

$$d < \frac{d}{\theta},$$

ya que $0 < \theta < 1$, luego por definición de d, existe $y_0 \in Y$ tal que

$$d \leq \|v - y_0\| \leq \frac{d}{\theta}. \tag{3.1}$$

Sea $z = c(v - y_0)$ con

$$c = \frac{1}{\|v - y_0\|}.$$

Se tiene un $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$. Falta probar que $\|z - y\| \geq \theta$ para cada $y \in Y$.

Nótese que

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| \\ &= c \left\|v - y_0 - c^{-1}y\right\| \\ &= c \|v - y_1\|, \end{aligned}$$

en donde $y_1 = y_0 + c^{-1}y \in Y$. Por lo tanto $\|v - y_1\| \geq d$, por definición de d.

Finalmente, usando la desigualdad en 3.1 se obtiene que

$$\|z - y\| = c \|v - y_1\| \geq cd = \frac{d}{\|v - y_0\|} \geq \frac{d}{d/\theta} = \theta. \qquad \square$$

Teorema 3.1.5. *Si un espacio normado X tiene la propiedad de que la bola cerrada unitaria*

$$E = \{x \in X \colon \|x\| \leq 1\}$$

es compacta, entonces es de dimensión finita.

Demostración. Supóngase que E es un conjunto compacto pero X es de dimensión infinita. Sea $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$. Este x_1 genera un subespacio X_1 de X de dimensión 1, el cual es cerrado y además es subconjunto propio de X, ya que X es de dimensión infinita.

Por el Lema de Riesz, existe $x_2 \in X$ de norma 1 tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}.$$

Los elementos x_1, x_2 generan un subespacio X_2 de X de dimensión 2. Nuevamente por el Lema de Riesz, existe $x_3 \in X$ de norma 1 tal que $\|x_3 - x\| \geq \dfrac{1}{2}$ para cada $x \in X_2$, en particular

$$\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Inductivamente se obtiene una sucesión (x_n) contenida en la bola cerrada unitaria tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{para } m \neq n.$$

Esta sucesión no puede tener una subsucesión convergente, ya que por la proposición 3.1, debería ser de Cauchy y en algún momento la norma de las diferencias debe ser menor que $\dfrac{1}{2}$, contradiciendo que E es un conjunto compacto, por lo tanto X debe ser de dimensión finita. □

Definición 3.12. Sea x un espacio vectorial normado. Se dice que X es un espacio de Banach, si todas las sucesiones de Cauchy contenidas en X convergen.

Teorema 3.1.6. *Un subespacio M de un espacio de Banach X es cerrado si y solo si es un espacio de Banach.*

Demostración. Supóngase que M es espacio de Banach. Sea $x \in \overline{M}$. Por el teorema 3.1.2, existe una sucesión (x_n) contenida en M tal que $x_n \to x$. Como la sucesión es convergente, también es de Cauchy y como M es de Banach, se tiene que $x \in M$, es decir, M contiene a todos sus puntos de acumulación, por lo que es cerrado.

Recíprocamente, supóngase que M es cerrado y sea (x_n) una sucesión de Cauchy en M, luego (x_n) también es de Cauchy en X, que es espacio de Banach, por lo que $x_n \to x \in X$. Por el teorema 3.1.2, se sigue que $x \in \overline{M}$, pero por el teorema 3.1.1 se tiene que $M = \overline{M}$, ya que M es cerrado, de donde $x_n \to x \in M$ y M es un espacio de Banach. □

El siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [9], garantiza que algunos espacios normados en particular, siempre serán espacios de Banach.

Teorema 3.1.7. *Si X es un espacio normado de dimensión finita, entonces es un espacio de Banach.*

Definición 3.13. Un subconjunto B de un espacio normado X se dice que es

1) *Raro* (o *en ninguna parte denso*) en X, si su clausura $\overline{B}$ no tiene puntos interiores.

2) *Magro* (o *de primera categoría*) en X, si B es la unión contable de conjuntos raros en X.

3) *No magro* (o *de segunda categoría*) en X, si B no es de primera categoría en X.

Teorema 3.1.8 (Teorema de categoría de Baire)**.** *Si X es un espacio de Banach, entonces es no magro en sí mismo.*

Demostración. Supóngase que el espacio X es magro en sí mismo. Se sigue que

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k,$$

en donde M_k es un conjunto raro en X para cada $k \geq 1$. Como M_1 es raro en X, $\overline{M_1}$ no contiene ninguna bola abierta. Como X sí contiene bolas abiertas, se tiene que $\overline{M_1} \neq X$. De donde $\overline{M_1}^C = X \setminus \overline{M_1}$ es no vacío y abierto.

Luego, es posible elegir un $p_1 \in \overline{M}^C$ y un $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$B_1 = (p_1, \epsilon_1) \subset \overline{M_1}^C \qquad \text{con } \epsilon_1 < \frac{1}{2}.$$

De igual manera, $\overline{M_2}$ no contiene bolas abiertas, así que $B(p_1, \frac{\epsilon_1}{2})$ no está contenida en $\overline{M_2}$, de donde $\overline{M_2}^C \cap B(p_1, \frac{\epsilon_1}{2})$ es no vacío y abierto, así que se puede elegir una bola abierta

$$B_2 = B(p_2, \epsilon_2) \subset \overline{M_2}^C \cap B(p_1, \frac{\epsilon_1}{2}) \subset B(p_1, \frac{\epsilon_1}{2}) \subset B_1 \qquad \text{con } \epsilon_2 < \frac{\epsilon_1}{2}.$$

Inductivamente, se obtiene una sucesión de bolas $B_k = (p_k, \epsilon_k)$ con $\epsilon_k < 2^{-k}$ tal que $B_k \cap M_k = \varnothing$ y $B_{k+1} \subset B(p_k, \frac{\epsilon_k}{2}) \subset B_k$, para $k \geq 1$. Como $e_k < 2^{-k}$, la sucesión de los centros (p_k) es de Cauchy y converge a algún $p \in X$, ya que X es un espacio de Banach.

Además, si $n > m$ entonces $B_n \subset B(p_m, \frac{\epsilon_m}{2})$, de donde

$$\begin{aligned} \|p_m - p\| &\leq \|p_m - p_n\| + \|p_n - p\| \\ &< \frac{\epsilon_m}{2} + \|p_n - p\| \to \frac{\epsilon_m}{2}, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $p \in B_m$ para cada $m \geq 1$. Como $B_m \subset \overline{M_m}^C$, se tiene que $p \notin M_m$ para cada $m \geq 1$, de donde

$$p \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k = X.$$

Pero esto contradice que $p \in X$. Por tal razón, X es no magro en sí mismo. $\square$

3.2. Operadores lineales y acotados

En álgebra lineal y análisis funcional, particularmente en teoría espectral, los operadores lineales juegan un papel muy importante.

Definición 3.14. Se dice que un operador $T\colon V \longrightarrow W$ con V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ es lineal, si para cada $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Además, los operadores lineales tienen asociados dos conjuntos importantes, el kernel y la imagen.

Definición 3.15. Si $T\colon X \longrightarrow Y$ es un operador, se denotará por $\mathcal{R}(T)$ al rango o imagen de T, es decir,

$$\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : T(x) = y, \text{ para algún } x \in X\}.$$

Se dice que un operador T es sobreyectivo cuando $\mathcal{R}(T) = Y$.

Definición 3.16. Se dice que un operador $T\colon X \longrightarrow Y$, con X, Y espacios vectoriales es inyectivo, si $T(x_1) = T(x_2) \implies x_1 = x_2$, en este caso al operador $T^{-1}\colon \mathcal{R}(T) \longrightarrow X$ que mapea a $y_0 \in \mathcal{R}(T)$ en $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) = y_0$ se le llama operador inverso de T y se dice que T tiene inverso o que T es invertible.

Si un operador es inyectivo y sobreyectivo, se dice que es biyectivo.

Definición 3.17. Sea $T\colon V \longrightarrow W$ un operador lineal. Al conjunto

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in V\colon T(x) = 0\}$$

se le conoce como kernel del operador T. Por la proposición 3.3 se sigue que $\mathcal{N}(T)$ no es vacío.

Resulta que el kernel y la imagen de un operador lineal $T\colon X \longrightarrow Y$, con X y Y espacios vectoriales, son subespacios vectoriales de X y Y, respectivamente.

Además, se cumple que

$$\dim X = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{R}(T), \tag{3.2}$$

cuya demostración se encuentra en [9] y [10].

De la ecuación 3.2 se deducen las desigualdades

$$\dim \mathcal{R}(T) \leq \dim X \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{N}(T) \leq \dim X. \tag{3.3}$$

Si $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$, se dice que T es un operador de rango finito.

Proposición 3.3. *Sea $T\colon V \longrightarrow W$ un operador lineal con V, W espacios vectoriales. Se cumple que*

$$T(0) = 0.$$

Demostración. Sea $v \in V$ un vector cualquiera. Como T es lineal, se tiene que

$$T(0) = T(v - v) = T(v) - T(v) = 0. \qquad \square$$

Teorema 3.2.1. *Si X, Y son espacios vectoriales y $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador lineal, entonces*

1) $T^{-1}\colon \mathcal{R}(T) \longrightarrow X$, con $\mathcal{R}(T) \subseteq Y$, existe si y solo si $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

2) Si T^{-1} existe, entonces es lineal.

Demostración.

1) Supóngase que $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $T(x_1) = T(x_2)$. Como T es lineal, entonces $T(x_1 - x_2) = T(x_1) - T(x_2) = 0$, luego por hipótesis $x_1 - x_2 = 0$, es decir $x_1 = x_2$, por lo que T es inyectivo y por lo tanto existe T^{-1}.

   Recíprocamente, supóngase que T^{-1} existe, es decir T es inyectivo. Sea $x \in X$ tal que $T(x) = 0$. Por la proposición 3.3 se tiene que $T(0) = 0$, pero como T es inyectivo, necesariamente $x = 0$, es decir $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

2) Supóngase que $T^{-1}\colon \mathcal{R}(T) \longrightarrow X$ existe. Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $T^{-1}(y_1) = x_1$ y $T^{-1}(y_2) = x_2$.

   Luego, $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$, es decir,

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}(y_1) + \beta T^{-1}(y_2). \qquad \square$$

Definición 3.18. Sea $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador con X, Y espacios vectoriales normados. Se dice que T es continuo en $x_0 \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $\|x - x_0\| \leq \delta$ entonces $\|T(x) - T(x_0)\| \leq \epsilon$.

Además, se dice simplemente que T es continuo cuando T es continuo en todo $x \in X$.

Teorema 3.2.2. *Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador. El operador T es continuo en un punto $x \in X$ si y solo si cualquier sucesión contenida en X tal que $x_n \to x$ cumple que $T(x_n) \to T(x)$.*

Demostración. Supóngase que T es continuo en un punto $x \in X$ y sea (x_n) una sucesión en X tal que $x_n \to x$. Sea $\epsilon > 0$. Como T es continuo en x, existe δ tal que si $\|y - x\| < \delta$ entonces $\|T(y) - T(x)\| < \epsilon$.

Por otro lado, como (x_n) converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $\|x_n - x\| < \delta$, pero esto implica que $\|T(x_n) - T(x)\| < \epsilon$, de donde la sucesión $T(x_n) \to T(x)$.

Recíprocamente, supóngase que $T(x_n) \to T(x)$ siempre que $x_n \to x$. Si T no es continuo en x, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$, existe $y \in X$ tal que $\|y - x\| < \delta$ pero $\|T(y) - T(x)\| \geq \epsilon$.

En particular, considérese $\delta = \frac{1}{n}$, luego existe una sucesión $(x_n) \in X$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$ pero $\|T(x_n) - T(x)\| \geq \epsilon$. De donde $x_n \to x$ pero $T(x_n)$ no converge a $T(x)$, pero esto contradice la hipótesis que $T(x_n) \to T(x)$, por lo que T debe ser continuo. $\square$

Teorema 3.2.3. *Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador. El operador T es continuo si y solo si la imagen inversa de cualquier conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X.*

Demostración. Supóngase que T es continuo y sea $A \subseteq Y$ un conjunto abierto. La imagen inversa de A es el conjunto

$$T^{-1}(A) = \{x \in X \colon T(x) \in A\}.$$

Sea $x \in T^{-1}(A)$, entonces $T(x) \in A$, como A es abierto, existe una bola abierta $B(T(x), \epsilon) \subseteq A$ para algún $\epsilon > 0$. Como T es continuo, existe un $\delta > 0$ tal que, si $\|y - x\| < \delta$ entonces $\|T(y) - T(x)\| < \epsilon$, es decir, si $y \in B(x, \delta)$ entonces $T(y) \in B(T(x), \epsilon) \subseteq A$. De donde la bola $B(x, \delta)$ está contenida en $T^{-1}(A)$. Ya que $x \in T^{-1}(A)$ es arbitrario, se tiene que $T^{-1}(A)$ es abierto.

Recíprocamente, supóngase que T es un operador tal que las imágenes inversas de los conjuntos abiertos en Y son conjuntos abiertos en X. Sea $x \in X$ y sea $\epsilon > 0$, el conjunto $B = B(T(x), \epsilon)$ es abierto en Y, así que $T^{-1}(B)$ es abierto en X.

Como $x \in T^{-1}(B)$, existe un $\delta > 0$ tal que la bola $B(x, \delta)$ está contenida en $T^{-1}(B)$, es decir, si $y \in B(x, \delta)$ entonces $T(y) \in B(T(x), \epsilon)$, en otras palabras, si $\|y - x\| < \delta$ entonces $\|T(y) - T(x)\| < \epsilon$. Como $x \in X$ es arbitrario, se tiene que el operador T es continuo. □

Definición 3.19. Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador lineal. El operador T se dice que es acotado si existe un número real $c > 0$ tal que para cada $x \in X$,

$$\|Tx\| \leq c \|x\| . \tag{3.4}$$

Al menor número real que cumple esta condición, se le llama norma del operador y se escribe $\|T\|$.

Proposición 3.4. *Si T es un operador acotado definido sobre un espacio normado X, entonces*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| , \tag{3.5}$$

en donde $x \in X$.

Demostración. Se debe probar que el número

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

satisface la desigualdad en 3.4 y que no existe un número menor que la satisfaga. Si $x = 0$, el resultado es inmediato, ya que T es un operador lineal.

Sean $x \neq 0$ y

$$z = \frac{x}{\|x\|}.$$

Nótese que $\|z\| = 1$. Como el supremo de un conjunto de números reales es cota superior de los elementos del conjunto, entonces

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|Tz\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| .$$

Luego,

$$\|Tx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \|x\| ,$$

y como $x \neq 0$ es arbitrario, se satisface la desigualdad en 3.4.

Supóngase que existe un

$$c < \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

que satisface la desigualdad, entonces por la definición de supremo, existe z con $\|z\| = 1$ tal que $c < \|Tz\|$, de donde $c\|z\| < \|Tz\|$, pero esto es una contradicción, ya que por hipótesis c satisface la desigualdad en 3.4 para cualquier x. $\square$

El siguiente lema, cuya demostración puede ser encontrada en [9], será de utilidad para probar que para ciertos espacios normados, todos los operadores lineales definidos en ellos son acotados.

Lema 3.2. *Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en X de dimensión finita, entonces existe $c > 0$ tal que para cualquier conjunto $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de números complejos se cumple que*

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \geq c(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|).$$

Teorema 3.2.4. *Si X es un espacio normado de dimensión finita, entonces todo operador lineal definido sobre X es acotado.*

Demostración. Sean $n \geq 1$ la dimensión de X y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de X.

Sea

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$$

cualquier elemento de X y T un operador lineal definido sobre X.

Como T es lineal, se cumple que

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \left\| T(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} T(\xi_k e_k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \, \|T(e_k)\| \leq \max_k \|T(e_k)\| \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \,.\end{aligned}$$

Como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ son linealmente independientes por ser una base, por el lema 3.2 existe $c > 0$ tal que

$$c(|\xi_1| + \cdots + |\xi_n|) \leq \|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n\| = \|x\| \,,$$

de donde

$$\|T(x)\| \leq \max_k \frac{\|T(e_k)\|}{c} \|x\| .$$

Por lo que el operador T es acotado. $\square$

Teorema 3.2.5. *Sea $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador lineal, en donde X, Y son espacios normados. Entonces*

1) El operador T es continuo si y solo si es acotado.

2) Si T es continuo en un punto, entonces es continuo.

Demostración.

1) Si $T = 0$ el resultado es inmediato.

Sea $T \neq 0$, luego $\|T\| \neq 0$. Supóngase que T es acotado y considérese a cualquier $x_0 \in X$.

Sea $\epsilon > 0$. Como T es lineal, se tiene que para cualquier $x \in X$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta,$$

en donde

$$\delta = \frac{\epsilon}{\|T\|},$$

se cumple que

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(x_0)\| &= \|T(x - x_0)\| \\ &\leq \|T\| \, \|x - x_0\| \\ &< \|T\| \, \delta \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

de donde T es continuo.

Recíprocamente, supóngase que T es continuo y sea $x_0 \in X$. Luego, para $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| \leq 1,$$

cuando $\|x - x_0\| \leq \delta$.

Sean $y \neq 0 \in X$ y

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}.$$

Como $\|x - x_0\| = \delta$ y T es lineal, se cumple que

$$\begin{aligned}
1 &\geq \|T(x) - T(x_0)\| \\
&= \|T(x - x_0)\| \\
&= \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right) \right\| \\
&= \frac{\delta}{\|y\|} \|T(y)\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|T(y)\| \leq c \|y\|,$$

en donde $c = \dfrac{1}{\delta}$, es decir, T es un operador acotado.

2) Si T es continuo en un punto $x_0 \in X$, por la demostración del inciso 1) se obtiene que también es acotado.

De igual manera, por el inciso 1), el operador T es continuo. $\square$

Si X, Y son espacios normados sobre un mismo campo, denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales acotados definidos sobre X con rango en Y.

Si además para $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$ se define la suma como

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x),$$

y el producto de $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ por un escalar α como

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x),$$

es inmediato que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio vectorial sobre el mismo campo que X y Y.

Si $X = Y$, por simplicidad se escribirá $\mathcal{B}(X, X)$ únicamente como $\mathcal{B}(X)$.

Teorema 3.2.6. *El espacio vectorial $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado con la norma definida como*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|. \tag{3.6}$$

Demostración. Como $\|T(x)\| \geq 0$ para cada $x \in X$, el supremo también cumple la desigualdad, así que $\|T\| \geq 0$. Además, si $T = 0$ entonces

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|0\| = 0.$$

De igual manera, si

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = 0,$$

entonces $\|Tx\| \leq 0$ para cada $x \in X$, pero como $0 \leq \|Tx\|$ para cada $x \in X$, se tiene que $\|T(x)\| = 0$ para cada $x \in X$, es decir $T = 0$. Por otro lado, se cumple que

$$\begin{aligned}
\|\alpha T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|\alpha T(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \, \|T(x)\| \\
&= |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \\
&= |\alpha| \, \|T\| .
\end{aligned}$$

Finalmente, sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|T_1 + T_2\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x) + T_2(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|=1} (\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|) \\
&= \sup_{\|x\|=1} \|T_1(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2(x)\| \\
&= \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\| .
\end{aligned}$$

De lo anterior, la aplicación $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma, por lo que el espacio vectorial $\mathcal{B}(X,Y)$ es un espacio normado. $\square$

Teorema 3.2.7. *Si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X,Y)$ también lo es.*

Demostración. Sea (T_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(X,Y)$, así que para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| < \epsilon$ para $m, n > N$. Luego, para cada $x \in X$ y $m, n > N$ se cumple que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_1 - T_2)(x)\| \leq \|T_1 - T_2\| \, \|x\| < \epsilon \, \|x\| .$$

Para cualquier $x \in X$ fijo y $\tilde{\epsilon} > 0$ dado se puede elegir $\epsilon_x > 0$ tal que $\epsilon_x \|x\| < \tilde{\epsilon}$. Luego,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \tilde{\epsilon}, \tag{3.7}$$

es decir, la sucesión $(T_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en Y, pero por hipótesis Y

es de Banach, así que $T_n(x) \to y$ para algún $y \in Y$. El límite y depende de x, así que queda definido un operador $T\colon X \longrightarrow Y$ en donde $T(x) = y$.

El operador T es lineal, ya que

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_1(x_1) + \beta T_2(x_2)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x_1) + \lim_{n\to\infty} \beta T_n(x_2) \\ &= \alpha T(x_1) + \beta T(x_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $\|T_n(x) - T(x)\| < \epsilon \|x\|$ para $n, m > N$ y como la norma es una aplicación continua, para cada $x \in X$ y $n > N$ se cumple que

$$\begin{aligned} \|(T_n - T)x\| = \|T_n(x) - T(x)\| &= \left\|T_n(x) - \lim_{m\to\infty} T_m(x)\right\| \\ &= \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \epsilon \|x\|, \end{aligned}$$

es decir, el operador $T_n - T$ es acotado, de donde $T = T_n - (T_n - T)$ también es un operador acotado.

De lo anterior, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Además, al tomar supremos sobre todos los x tal que $\|x\| = 1$, de la desigualdad $\|(T_n - T)(x)\| < \epsilon \|x\|$ se obtiene que $\|T_n - T\| < \epsilon$, de esto $T_n \to T$, es decir, la sucesión de operadores $(T_n) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ converge a un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Como la sucesión de Cauchy (T_n) era arbitraria, se concluye que $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio de Banach. $\square$

Lema 3.3. *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ con X espacio normado, entonces*

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n .$$

Demostración. Se procederá por inducción. Para $n = 1$ es trivial.

Sea $k \geq 1$ tal que $\left\|T^k\right\| \leq \|T\|^k$. Haciendo uso de la proposición 3.4, de la definición de norma de un operador y de la hipótesis de inducción, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left\|T^{k+1}\right\| &= \sup_{\|x\|=1} \left\|T^{k+1}(x)\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\|T^k(T(x))\right\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \left\|T^k\right\| \|T(x)\| = \left\|T^k\right\| \|T\| \\ &\leq \|T\|^{k+1}, \end{aligned}$$

completando la demostración. $\square$

Teorema 3.2.8. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ con X espacio de Banach. Si $\|T\| < 1$, entonces el operador lineal $(I-T)^{-1}$ existe y es acotado, además está definido en todo X y*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \dots\ , \tag{3.8}$$

en donde la serie es convergente en la norma definida en $\mathcal{B}(X)$.

Demostración. Por el lema 3.3 se tiene que $\|T^j\| \leq \|T\|^j$.

La serie $\sum \|T\|^j$ es una serie geométrica y converge si $\|T\| < 1$, por lo tanto la serie en 3.8 es absolutamente convergente para $\|T\| < 1$, de donde la serie también es convergente, ya que $\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach debido al teorema 3.2.7 (este resultado es una generalización de la proposición 1.1 y su demostración se encuentra en [9]).

Por lo tanto, el operador lineal $S = I + T + T^2 + \dots$ es un elemento de $\mathcal{B}(X)$, únicamente falta probar que $S = (I-T)^{-1}$.

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^n) &= (I+T+T^2+\cdots+T^n)(I-T)\\ &= I - T^{n+1}.\end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ se obtiene que $T^{n+1} \to 0$, ya que $\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1}$ y $\|T\| < 1$, de donde

$$(I-T)S = S(I-T) = I,$$

es decir, $S = (I-T)^{-1}$. $\square$

Definición 3.20. Sea $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador con X, Y espacios vectoriales. Se dice que T es un operador abierto si $T(A)$ es un conjunto abierto en Y para cada conjunto abierto A en X.

Definición 3.21. Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador lineal. A T se le conoce como operador lineal cerrado si su gráfica

$$\mathcal{G}(T) = \{(x,y)\colon x \in X, y = T(x)\}$$

es un conjunto cerrado en el espacio normado $X \times Y$ con la norma definida como $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$.

Lema 3.4. *Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ con X,Y espacios de Banach y $B_0 = \{x \in X \colon \|x\| < 1\}$ es la bola unitaria abierta en X, entonces $T(B_0)$ contiene una bola abierta centrada en $0 \in Y$.*

Demostración. Considérese la bola abierta $B_1 = B(0, \frac{1}{2}) \in X$. Para cada $x \in X$ existe un $k \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que

$$\frac{k}{2} > \|x\|,$$

es decir,

$$x \in B\left(0, \frac{k}{2}\right) = kB\left(0, \frac{1}{2}\right) = kB_1,$$

de donde $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1$. Como T es sobreyectivo y lineal, se tiene que

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(kB_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{T(kB_1)}.$$

Nótese que al usar las clausuras no se está agregando ningún elemento, ya que la unión es todo el conjunto Y. Ya que Y es un espacio de Banach, por el Teorema de categoría de Baire, Y es no magro en sí mismo.

Por tal razón, para algún $k \in \mathbb{N}$ el conjunto $\overline{kB_1}$ es de interior no vacío, es decir, $k\overline{T(B_1)}$ contiene una bola abierta, pero esto implica que también $\overline{T(B_1)}$ contiene una bola abierta. Sea

$$B^* = B(y_0, \epsilon) \subset \overline{T(B_1)}$$

dicha bola abierta, para algún $y_0 \in \overline{T(B_1)}$ y $\epsilon > 0$. Luego,

$$B^* - y_0 = B(0, \epsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0.$$

Sea $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$. Se tiene que $y + y_0 \in \overline{T(B_1)}$, también $y_0 \in \overline{T(B_1)}$, así que existen $u_n = T(w_n), v_n = T(z_n) \in T(B_1)$ tales que $u_n \to y + y_0$ y $v_n \to y_0$. Como $w_n, z_n \in B_1$ y B_1 es de radio $\frac{1}{2}$, se tiene que

$$\|w_n - z_n\| \leq \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

de donde $w_n - z_n \in B_0$. Por otro lado, se tiene que $T(w_n - z_n) = T(w_n) - T(z_n) = u_n - v_n \to y$, de donde $y \in \overline{T(B_0)}$. Como $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ es arbitrario, se obtiene que

$$\overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_0)},$$

pero como $B^* - y_0 = B(0,\epsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0$, entonces

$$B^* - y_0 = B(0,\epsilon) \subset \overline{T(B_0)}.$$

Sea $B_n = B(0, 2^{-n}) \in X$. Como T es lineal, se sigue que $\overline{T(B_n)} = 2^{-n}\overline{T(B_0)}$, así que

$$V_n = B(0, 2^{-n}\epsilon) \subset 2^{-1}\overline{T(B_0)} = \overline{T(B_n)}.$$

Por otro lado, sea $y \in V_1$, como $V_1 \subset \overline{T(B_1)}$, se tiene que $y \in \overline{T(B_1)}$. Como y es un punto límite de $T(B_1)$, existe $v \in T(B_1)$ tal que $\|y - v\| < \frac{\epsilon}{4}$. Ya que $v \in T(B_1)$, existe $x_1 \in B_1$ tal que $v = T(x_1)$, por lo tanto

$$\|y - T(x_1)\| < \frac{\epsilon}{4}.$$

De lo anterior, se tiene que $y - T(x_1) \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}$. Análogamente, existe $x_2 \in B_2$ tal que

$$\|(y - T(x_1)) - T(x_2)\| < \frac{\epsilon}{8},$$

de donde $y - T(x_1) - T(x_2) \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$. Inductivamente, para cada $n \geq 1$ se puede elegir $x_n \in B_1$ tal que

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| < \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \text{ cuando } n \to 0. \tag{3.9}$$

Sea $z_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Como $x_k \in B_k$, se tiene que $\|x_k\| < \frac{1}{2^k}$, así que para $n > m$ se cumple que

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} \to 0 \text{ cuando } m \to 0.$$

Por lo tanto, la sucesión (z_n) es de Cauchy. Como $(z_n) \subset X$ y X por ser espacio de Banach es completo, entonces $z_n \to x$ para algún $x \in X$.

Además $x \in B_0$, ya que

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Como T es continuo, se tiene que $T(z_n) \to T(x)$, pero de la igualdad en 3.9 se sigue que

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| \to 0,$$

de donde $T(x) = y$.

Por lo tanto $y \in T(B_0)$. Como $y \in V_1$ es arbitrario, se tiene que

$$B\left(0, \frac{\epsilon}{2}\right) = V_1 \subseteq T(B_0),$$

es decir, la imagen de la bola abierta unitaria en X contiene una bola abierta centrada en $0 \in Y$. □

Teorema 3.2.9 (Teorema del mapeo abierto)**.** *Sean X, Y espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es sobreyectivo, entonces es un operador abierto.*

Demostración. Sean $A \in X$ un conjunto abierto y sea $y \in Y$. Como T es sobreyectivo, existe $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Como A es abierto, contiene una bola abierta centrada en x.

Por lo tanto, $A - x$ contiene un bola abierta centrada en $0 \in X$, sean $r > 0$ el radio de dicha bola y $k = \frac{1}{r}$. Luego, $k(A - x)$ contiene a la bola $B(0, 1)$. Por el lema 3.4, se sigue que $T(k(A - x)) = k(T(A) - T(x))$ contiene una bola abierta centrada en $0 \in Y$, al igual que $T(A) - T(x)$.

Por lo tanto, $T(A)$ contiene una bola abierta centrada en $T(x) = y$. Como $y \in T(A)$ es arbitrario, se tiene que $T(A)$ es abierto. □

Corolario 3.1. *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ con X, Y espacios de Banach. Si T es un operador biyectivo, entonces T^{-1} es continuo y acotado.*

Demostración. Como T es biyectivo, es en particular inyectivo, por lo que el operador T^{-1} existe. El operador también es sobreyectivo, así que por el teorema del mapeo abierto, T mapea los conjuntos abiertos de X en conjuntos abiertos en Y.

Pero T es el operador inverso de T^{-1}, es decir, las preimágenes de conjuntos abiertos en X son conjuntos abiertos en Y, así que por el teorema 3.2.3 el operador T^{-1} es continuo. Además, por el teorema 3.2.1, T^{-1} es lineal.

Finalmente, por el teorema 3.2.5, se sigue que T^{-1} es acotado, ya que es lineal y continuo. □

Es importante notar que el corolario anterior podría aplicarse aún cuando el operador $T \colon X \longrightarrow Y$ aparentemente no es biyectivo por falta de sobreyectividad.

Esta situación se soluciona considerando al operador $T\colon X \longrightarrow \mathcal{R}(T)$, ya que la imagen de un operador lineal es un subespacio vectorial del contradominio.

Luego, para aplicar el corolario únicamente se necesita que el operador sea inyectivo, o bien, que el kernel sea $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

Teorema 3.2.10 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean X, Y espacios de Banach y $T\colon A \longrightarrow Y$ un operador lineal cerrado, en donde $A \subseteq X$. Si A es cerrado, entonces el operador T es acotado.*

Demostración. Sea (z_n) una sucesión de Cauchy en $X \times Y$, en donde $z_n = (x_n, y_n)$. Luego, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \epsilon, \text{ para cada } m, n > N,$$

de donde las sucesiones (x_n) y (y_n) son de Cauchy en X y Y, respectivamente.

Como X, Y son espacios de Banach, existen $x \in X$ y $y \in Y$ tal que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, de donde $z_n \to z = (x, y)$, ya que

$$\|z_n - z\| = \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

y para cada $\epsilon > 0$, tanto $\|x_n - x\|$ y $\|y_n - y\|$ se pueden hacer más pequeños que $\frac{\epsilon}{2}$. Como la sucesión de Cauchy (z_n) es arbitraria y converge a un $z \in X \times Y$, se sigue que $X \times Y$ es un espacio de Banach.

Por otro lado, por hipótesis T es un operador lineal cerrado, es decir, su gráfica $\mathcal{G}(T)$ es un conjunto cerrado en $X \in Y$. Por el teorema 3.1.6, $\mathcal{G}(T)$ es un espacio de Banach.

Considérese el operador $P\colon \mathcal{G}(T) \longrightarrow A$ definido como

$$P(x, T(x)) = x.$$

El operador P es biyectivo, de hecho su inverso $P^{-1}\colon A \longrightarrow \mathcal{G}(T)$ es el operador $P^{-1}(x) = (x, T(x))$.

Luego, por el teorema del mapeo abierto y el corolario 3.1, se tiene que P^{-1} es un operador acotado, de donde, existe $b > 0$ tal que

$$\|(x, T(x))\| \leq b\,\|x\| \text{ para cada } x \in A.$$

Por lo tanto, T también es acotado, ya que

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &\leq \|x\| + \|T(x)\| \\ &= \|(x, T(x))\| \\ &\leq b\,\|x\|\,,\end{aligned}$$

para cada $x \in A$. $\square$

Teorema 3.2.11. *Sean X, Y espacios normados. Sea $T\colon A \longrightarrow Y$ un operador lineal con $A \subseteq X$. El operador T es cerrado si y solo si cuando una sucesión (x_n) contenida en A que cumple $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$, también se cumple que $x \in A$ y $T(x) = y$.*

Demostración. Por el teorema 3.1.1, $\mathcal{G}(T)$ es un conjunto cerrado si y solo si se tiene que $\mathcal{G}(T) = \overline{\mathcal{G}(T)}$, en particular $\overline{\mathcal{G}(T)} \subseteq \mathcal{G}(T)$. Luego, por definición de operador cerrado, T es un operador lineal cerrado si y solo si $\overline{\mathcal{G}(T)} \subseteq \mathcal{G}(T)$, que es equivalente a que para cada $z = (x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ se cumple que $x \in A$ y $T(x) = y$.

Por el teorema 3.1.2, se tiene que $z = (x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ si y solo si existe una sucesión $z_n = (x_n, T(x_n))$ contenida en $\mathcal{G}(T)$ tal que $z_n \to z$, es decir, $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$. Por lo tanto, T es un operador cerrado si y solo si cuando una sucesión (x_n) contenida en A cumple que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$, también debe cumplir que $x \in A$ y $T(x) = y$. $\square$

Corolario 3.2. *Sea $T\colon A \longrightarrow Y$ un operador lineal cerrado con $A \subseteq X$ y X, Y espacios normados. Si T^{-1} existe, entonces es cerrado.*

Demostración. Sea $z = (y, x) \in \overline{\mathcal{G}(T^{-1})}$, por el teorema 3.1.2, existe una sucesión $z_n = (y_n, x_n)$ contenida en $\mathcal{G}(T^{-1})$ tal que $z_n \to z$, es decir, existe una sucesión $z_n = (T(x_n), x_n)$ con $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$.

Como T es cerrado, por el teorema 3.2.11, se cumple que $x \in A$ y $T(x) = y$, de donde $z = (y, x) \in \mathcal{G}(T^{-1})$.

Como $z \in \overline{\mathcal{G}(T^{-1})}$ es arbitrario, el conjunto $\mathcal{G}(T^{-1})$ contiene todos sus puntos de acumulación y por lo tanto es cerrado, de donde el operador T^{-1} es cerrado. $\square$

Teorema 3.2.12. *Sea $T\colon A \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado con $A \subseteq X$ y X, Y espacios normados.*

1) Si A es cerrado en X entonces T es un operador cerrado.

2) Si T es un operador cerrado y Y es un espacio de Banach entonces A es un conjunto cerrado en X.

Demostración.

1) Sea (x_n) una sucesión en A tal que $x_n \to x \in X$ y $T(x_n) \to y \in Y$. Por el teorema 3.1.2 se cumple que $x \in \overline{A}$ y por el teorema 3.1.1 se tiene que $\overline{A} = A$, ya que A es cerrado, de donde $x \in A$.

   Por otro lado, el operador T es continuo, ya que es lineal y acotado, entonces $T(x_n) \to T(x)$, de donde $T(x) = y$. Por el teorema 3.2.11, el operador T es cerrado.

2) Sea $x \in \overline{A}$, por el teorema 3.1.2 existe una sucesión (x_n) contenida en A tal que $x_n \to x$. Como T es acotado se cumple que

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| = \|T(x_m - x_n)\| \leq \|T\| \, \|x_m - x_n\|,$$

   de donde la sucesión $T(x_n)$ contenida en Y es de Cauchy, ya que (x_n) es convergente. Como Y es un espacio de Banach, $T(x_n) \to y \in Y$. Como T es cerrado, por el teorema 3.2.11, $x \in A$ y $T(x) = y$, es decir $x \in A$.

   Como $x \in \overline{A}$ es arbitrario, se tiene que A contiene todos sus puntos de acumulación, por lo que es cerrado. □

Existe otro tipo de operadores lineales que son de particular interés, ya que sus propiedades son parecidas a las de un operador lineal en un espacio de dimensión finita, es decir, sus propiedades pueden considerarse como una generalización en dimensión infinita, particularmente algunas relacionadas con teoría espectral.

Dichos operadores son llamados operadores compactos.

Definición 3.22. Sea $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador lineal con X, Y espacios normados. Se dice que T es un operador compacto si la sucesión de imágenes $T(x_n)$ de cualquier sucesión acotada (x_n) en X tiene una subsucesión convergente en Y.

A partir de la definición de operador compacto, es inmediato que la suma de operadores compactos es un operador compacto, también que la multiplicación de un escalar por un operador compacto resulta ser un operador compacto, es decir, los operadores compactos entre dos espacios normados forman un espacio vectorial.

Además, la siguiente proposición proporciona una forma de construir operadores compactos por medio de la composición.

Teorema 3.2.13. *Sean W, X, Y, Z espacios normados y $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador compacto. Si $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ y $R \in \mathcal{B}(W, X)$, entonces los operadores $ST\colon X \longrightarrow Z$ y $TR\colon W \longrightarrow Y$ son compactos.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión acotada en X. Como T es compacto, la subsucesión $y_n = T(x_n)$ tiene una subsucesión $y_{n_k} = T(x_{n_k})$ que converge a un algún $y \in Y$.

Como S es lineal y acotado, por el teorema 3.2.5 se tiene que S es continuo, luego por el teorema 3.2.2, se tiene que $S(y_{n_k}) \to S(y) \in Z$, es decir, la sucesión $ST(x_n)$ tiene una subsucesión que converge en Z y como (x_n) es una sucesión arbitraria en X, se tiene que el operador ST es compacto.

De igual manera, sea (w_n) una sucesión acotada en W. Existe $C > 0$ tal que $\|w_n\| \leq C$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como R es acotado se sigue que

$$\|R(w_n)\| \leq \|R\| \, \|w_n\| \leq \|R\| \, C,$$

de donde la sucesión $R(w_n) \subset X$ es acotada. Luego, como T es compacto, la sucesión $T(R(w_n))$ tiene una subsucesión que converge en Y.

Como (w_n) es una sucesión arbitraria en W, se tiene que el operador TR es compacto. □

Teorema 3.2.14. *Si $T\colon X \longrightarrow Y$ es un operador compacto, con X, Y espacios normados, entonces es acotado y por lo tanto continuo.*

Demostración. Supóngase que el operador T no es acotado, entonces por la proposición 3.4 se tiene que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \infty,$$

de donde, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|T(x_n)\| > n$, es decir, la sucesión $T(x_n)$ no es acotada.

Por otro lado, la sucesión (x_n) es acotada porque todos sus términos son de norma 1. Luego, como T es compacto se sigue que la sucesión $T(x_n)$ tiene una subsucesión convergente en Y, pero esto no es posible, porque la sucesión $T(x_n)$ no es acotada.

Por lo tanto, el operador T debe ser acotado y por el teorema 3.2.5, también es continuo. □

Teorema 3.2.15. *Sea $T\colon X \longrightarrow Y$ un operador lineal con X, Y espacios normados.*

1) Si T es acotado y $\dim T(X) < \infty$, entonces T es un operador compacto.

2) Si $\dim X < \infty$, entonces T es un operador compacto.

Demostración.

1) Sea (x_n) una sucesión acotada en X. Existe $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como T es acotado, se cumple que

$$\|T(x_n)\| \leq \|T\| \, \|x_n\| \leq \|T\| \, C,$$

   de donde el conjunto de imágenes $T(x_n)$ es acotado. De igual manera $\overline{T(x_n)}$ es acotado.

   Por otro lado, como $\dim T(X) < \infty$, por el teorema 3.1.4, el conjunto $\overline{T(x_n)}$ es compacto, ya que es cerrado y acotado. Luego, cualquier sucesión en $\overline{T(x_n)}$ tiene una subsucesión convergente en $\overline{T(x_n)}$, en particular, la sucesión $T(x_n)$ tiene una subsucesión convergente en Y.

   Como la sucesión (x_n) es arbitraria, el operador T es compacto.

2) Como $\dim X < \infty$, el operador T es acotado por el teorema 3.2.4, además es cierto que $\dim T(X) < \dim X$, por lo que haciendo uso del inciso anterior se sigue que T es compacto. □

El siguiente teorema asegura que la compacidad del operador identidad únicamente depende de la dimensión del espacio vectorial en donde está definido.

Proposición 3.5. *Sea X un espacio normado. El operador identidad $T \colon X \longrightarrow X$ es compacto si y solo si X es de dimensión finita.*

Demostración. Supóngase que I es compacto y que X es de dimensión infinita. Por el teorema 3.1.5, la bola unitaria cerrada $E = \{x \in X \colon \|x\| \leq 1\}$ no es compacta, de donde existe una sucesión acotada (x_n) contenida en E tal que ninguna de sus sucesiones converge en E.

Por otro lado, como T es compacto, la sucesión $x_n = I(x_n)$ tiene una subsucesión x_{n_k} que converge a algún $x \in X$, pero como $\|x_{n_k}\| \leq 1$ para cada $n_k \in \mathbb{N}$, necesariamente debe cumplirse que $\|x\| \leq 1$, es decir, $x \in E$, contradiciendo el hecho que ninguna subsucesión de (x_n) converge en E, de donde X debe ser de dimensión finita.

El recíproco es inmediato a partir del teorema 3.2.15. □

3.3. Teoría espectral para operadores lineales acotados

Definición 3.23. Sea X un espacio normado complejo y $T\colon X \longrightarrow X$ un operador lineal. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, el operador resolvente de T asociado a λ se define como

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}. \tag{3.10}$$

Definición 3.24. Sea $X \neq \{\varnothing\}$ un espacio normado complejo y $T\colon X \longrightarrow X$ un operador lineal. El conjunto resolvente $\rho(T)$ de T es el conjunto formado por los números complejos λ tales que

1) $R_\lambda(T)$ existe.

2) $R_\lambda(T)$ es acotado.

3) $R_\lambda(T)$ está definido en un conjunto denso en X.

A los elementos de $\rho(T)$ se les llama valores regulares de T.

Definición 3.25. El espectro de un operador $\sigma(T)$ es el complemento del conjunto resolvente.

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T). \tag{3.11}$$

A los elementos de $\sigma(T)$ se les llama valores espectrales de T.

El espectro $\sigma(T)$ está particionado en 3 conjuntos disjuntos:

1) El espectro puntual o espectro discreto $\sigma_p(T)$ es el conjunto de los λ tales que $R_\lambda(T)$ no existe.

   A los elementos de $\sigma_p(T)$ se les llama valores propios de T.

2) El espectro continuo $\sigma_c(T)$ es el conjunto de los λ tales que $R_\lambda(T)$ existe y está definido sobre un conjunto denso en X, pero no es acotado.

3) El espectro residual $\sigma_r(T)$ es el conjunto de los λ tales que $R_\lambda(T)$ existe pero no está definido sobre un conjunto denso en X, sin importar si es o no acotado.

A partir de este punto, se asumirá que el dominio de los operadores es distinto al espacio vectorial trivial.

Nótese que la definición de espectro y conjunto resolvente se hizo para operadores lineales en general sobre un espacio vectorial normado cualquiera, es decir, el operador T no necesariamente es acotado, de igual manera, el espacio vectorial X puede ser de Banach o simplemente un espacio normado.

El interés principal de la teoría espectral es conocer para qué tipos de operadores y de espacios normados existe cada uno de los espectros.

El siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [9], afirma algo de mucha importancia, la existencia de al menos un valor espectral para cierta clase de operadores.

Teorema 3.3.1. *Si X es un espacio de Banach y $T \in \mathcal{B}(X)$, entonces $\sigma(T) \neq \varnothing$.*

Teorema 3.3.2. *Sean X un espacio de Banach, $T\colon X \longrightarrow X$ un operador lineal y $\lambda \in \rho(T)$. Si el operador T es cerrado o acotado, entonces $R_\lambda(T)$ está definido en todo X y es acotado.*

Demostración. Supóngase que T es cerrado y sea (x_n) una sucesión contenida en X tal que $x_n \to x \in X$ y $T(x_n) \to y$. Por el teorema 3.2.11 se cumple que $T(x) = y$, ya que T es cerrado, de donde $(T-\lambda I)(x_n) = T(x_n) - \lambda x_n \to T(x) - \lambda x = (T-\lambda I)(x)$, por lo que el operador $T - \lambda I$ también es cerrado.

Como $\lambda \in \rho(T)$, existe $R_\lambda(T)$, es acotado y además es cerrado, por el corolario 3.2. Por el teorema 3.2.12, el dominio B de $R_\lambda(T)$ es cerrado, ya que $R_\lambda(T)$ es un operador cerrado y acotado, y X es un espacio de Banach, de donde $B = \overline{B}$.

Por otro lado, como $\lambda \in \rho(T)$, se tiene que $\overline{B} = X$, ya que el dominio de $R_\lambda(T)$ es denso. Por lo tanto $B = X$, es decir, $R_\lambda(T)$ está definido sobre todo X y es acotado.

Ahora supóngase que T es acotado, el dominio del operador T es cerrado, ya que es todo X, así que por el teorema 3.2.12, T es cerrado y del caso anterior, se deduce el resultado. □

Los valores propios tienen particular interés en la teoría espectral, dado que con ellos es posible definir cierta clase de subespacios vectoriales, además existe una forma de caracterizarlos como se muestra a continuación.

Teorema 3.3.3. *Sea $T\colon X \longrightarrow X$ un operador lineal con X espacio normado. Se tiene que $R_\lambda(T)$ existe y es lineal si y solo si $\mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$.*

Demostración. El resultado es inmediato a partir del teorema 3.2.1. □

Proposición 3.6. *Sea $T\colon X \longrightarrow X$ un operador lineal con X espacio normado. Se tiene que $\lambda \in \sigma_p(T)$ si y solo si $(T - \lambda I)x = 0$ para algún $x \in X$ distinto de cero.*

Demostración. Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, por definición se tiene que no existe $R_\lambda(T)$, luego por el teorema 3.3.3 se tiene que el kernel de $T - \lambda I$ no es solo cero, es decir, existe $x \neq 0$ tal que $(T - \lambda I)x = 0$.

Recíprocamente, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ para el cual existe un $x \in X$ distinto de cero tal que $(T - \lambda I)x = 0$, nuevamente por el teorema 3.3.3, $R_\lambda(T)$ no existe, así que $\lambda \in \sigma_p(T)$. □

La proposición 3.6 es equivalente a que λ es un valor propio del operador T si existe un $x \neq 0$ tal que $T(x) = \lambda x$. A dicho $x \in X$ se le conoce como vector propio asociado al valor propio λ.

Resulta que un valor propio λ no tiene un solo vector propio asociado, ya que si $T(x) = \lambda x$ también se cumple que $T(\beta x) = \lambda(\beta x)$ para cualquier escalar β. Además, si $x, y \in X$ son tales que $T(x) = \lambda x$ y $T(y) = \lambda y$, se obtiene que $T(x+y) = \lambda(x+y)$, ya que T es un operador lineal.

De lo anterior, los vectores propios asociados a un mismo valor propio forman un espacio vectorial, el cual es llamado el subespacio propio de T asociado a λ y se denota por V_λ, cuya dimensión es llamada la multiplicidad geométrica de λ y es simplemente la dimensión del kernel del operador $T - \lambda I$, es decir,

$$\dim V_\lambda = \dim \mathcal{N}(T - \lambda I).$$

Proposición 3.7. *Sea $n \geq 1$ y sean $x_1, \ldots, x_n$ vectores propios, distintos de cero, correspondientes a diferentes valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de un operador lineal $T\colon X \longrightarrow X$, con X espacio vectorial. El conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ constituye un conjunto de vectores linealmente independientes.*

Demostración. Se procederá por inducción. El enunciado es cierto para $n = 1$, ya que si $\alpha x_1 = 0$, entonces necesariamente $\alpha = 0$, ya que por hipótesis $x_1 \neq 0$.

Supóngase que el enunciado es cierto para algún $k \geq 1$. Sean $x_1, \ldots, x_{k+1}$ vectores propios distintos de cero, asociados a diferentes valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$ tales que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0. \tag{3.12}$$

De lo anterior, se obtiene que

$$\lambda_{k+1}\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1}\alpha_{k+1} x_{k+1} = 0. \tag{3.13}$$

Por otro lado, como $x_1, \ldots, x_{k+1}$ son vectores propios del operador lineal T, al aplicar T a ambos miembros de la ecuación 3.12 se obtiene que

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0. \tag{3.14}$$

Luego, al restar la ecuación 3.14 de la ecuación 3.13 se obtiene que

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)x_k = 0.$$

Por hipótesis de inducción, los vectores $x_1, \ldots, x_k$ son linealmente independientes, de donde

$$\alpha_1(\lambda_{k-1} - \lambda_1) = \cdots = \alpha_k(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0,$$

pero los números $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ son distintos entre sí, así que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Luego, se sigue que

$$\alpha_{k+1} x_{k+1} = 0,$$

pero el vector x_{k+1} es distinto de cero, de donde $\alpha_{k+1} = 0$.

De lo anterior, los vectores $x_1, \ldots, x_{k+1}$ son linealmente independientes, completando la demostración. $\square$

La proposición 3.7 es incluso válida para una sucesión infinita de vectores propios no nulos asociados a una sucesión de valores propios distintos entre sí.

Teorema 3.3.4. *El conjunto resolvente $\rho(T)$ de un operador lineal acotado T en un espacio de Banach es abierto. Por consiguiente, el espectro $\sigma(T)$ es cerrado.*

Demostración. Si $\rho(T) = \varnothing$ entonces es abierto. Supóngase que $\rho(T) \neq 0$ y sea $\lambda_0 \in \rho(T)$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} T - \lambda I &= T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I \\ &= (T - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}). \end{aligned}$$

Además, por el teorema 3.3.2, se tiene que $R\lambda_0$ es acotado, ya que T es acotado.

Sea $V = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}$, por el teorema 3.2.8 el operador V tiene inverso si $|\lambda - \lambda_0| \, \|R_{\lambda_0}\| = \|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\| < 1$.

Luego, V^{-1} existe si

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|},$$

y por consiguiente, también existe $(T - \lambda I)^{-1}$ para cadas los $\lambda \in \mathbb{C}$ que cumplan la desigualdad anterior, ya que

$$V^{-1} R_{\lambda_0} = V^{-1}(T - \lambda_0 I)^{-1} = ((T - \lambda_0 I)V)^{-1} = (T - \lambda I)^{-1},$$

de donde la bola abierta

$$B\left(\lambda_0, \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}\right)$$

está contenida en $\rho(T)$.

Como $\lambda_0 \in \rho(T)$ es arbitrario, se sigue que el conjunto resolvente $\rho(T)$ es un conjunto abierto y el espectro $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ es un conjunto cerrado. $\square$

Teorema 3.3.5. *El espectro $\sigma(T)$ de un operador lineal acotado T sobre un espacio de Banach X está contenido en la bola cerrada $\overline{B}(0, \|T\|)$.*

Demostración. Sea $\lambda \neq 0$ y $k = \dfrac{1}{\lambda}$. Se tiene que el operador $(T - \lambda I)^{-1}$ existe si y solo si $(I - kT)^{-1}$ existe, ya que

$$(T - \lambda I) = -\frac{1}{\lambda}(I - kT).$$

Por el teorema 3.2.8, el operador $(I - kT)^{-1}$ existe si

$$\frac{1}{|\lambda|}\|T\| = \|kt\| < 1,$$

es decir, si $|\lambda| > \|T\|$ entonces el operador $(T - \lambda I)^{-1}$ existe, además es acotado y está definido en todo X, de donde

$$A = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\} \subseteq \rho(T).$$

Por lo tanto, el espectro $\sigma(T)$ al ser el complemento de $\rho(T)$, debe estar contenido en el complemento de A, es decir,

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\} = \overline{B}(0, \|T\|). \qquad \square$$

El teorema 3.3.2 enuncia que para cierto tipo de operadores, sus operadores resolventes están definidos sobre todo el espacio, el cual debe ser de Banach.

La siguiente proposición, cuya demostración puede ser hallada en [7], es más general en el sentido que el espacio no necesariamente debe ser de Banach, sin embargo se necesita que el operador sea compacto, además presenta condiciones necesarias y suficientes para que los operadores resolventes estén definidos sobre todo el espacio.

Dicha proposición será utilizada en la demostración del importante teorema sobre la naturaleza de los valores espectrales de los operadores compactos.

Proposición 3.8. *Sea $T\colon X \longrightarrow X$ un operador compacto, con X espacio normado. El operador $(T-I)^{-1}$ existe, es acotado y está definido sobre todo X si y solo si $\mathcal{N}(T-I)=\{0\}$.*

Teorema 3.3.6. *Sea $T\colon X \longrightarrow X$ un operador compacto, con X espacio normado.*

1) Si X es de dimensión infinita, entonces 0 es un valor espectral de T.

2) Todos los valores espectrales no nulos de T son valores propios de T.

3) Los valores propios de T tienen multiplicidad geométrica finita.

4) El espectro de T es contable. Si es infinito, sus elementos no nulos pueden ordenarse en una sucesión (λ_n), tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \quad y \quad \lambda_n \to 0.$$

Demostración.

1) Si 0 no es un valor espectral, entonces existe $T^{-1}=(T-0I)^{-1}$, el cual es lineal y acotado por el teorema 3.2.1 y por el corolario 3.1, respectivamente.

   Luego, por el teorema 3.2.13 se tiene que el operador identidad $I=TT^{-1}$ es compacto y por la proposición 3.5, X debe ser de dimensión finita, lo cual contradice la hipótesis, de donde 0 debe ser un valor espectral de T.

2) Sea $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ un valor espectral de T. Supóngase que λ no es un valor propio de T. Por la proposición 3.6 se sigue que no existe $x \neq 0$ tal que $(T-\lambda I)x=0$.

   Luego, como $\lambda \neq 0$, se tiene que

$$\{0\}=\mathcal{N}(T-\lambda I)=\mathcal{N}(T/\lambda - I),$$

de donde, por la proposición 3.8, el operador $(T/\lambda - I)^{-1}$ está definido sobre todo X y es acotado, pero

$$(T/\lambda - I)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(T - \lambda I)^{-1},$$

de donde el operador $(T-\lambda I)^{-1}$ es acotado y está definido sobre todo X, es decir $\lambda \notin \sigma(T)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, todos los valores espectrales no nulos de T son valores propios de T.

3) Sea $\lambda \in \sigma_p(T)$. La multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del kernel de $T - \lambda I$, el cual es un subespacio vectorial de X.

Se procederá a probar que la bola unitaria cerrada en $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ es compacta, luego por el teorema 3.1.5 se obtendrá que $\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) < \infty$.

Sea
$$E = \{x \in \mathbb{N}(T - \lambda I) : \|x\| \leq 1\},$$
y sea (x_n) una sucesión en E. Como la sucesión (x_n) es acotada y T es un operador compacto, la sucesión $T(x_n)$ tiene una subsucesión $T(x_{n_k})$ que converge a algún elemento de X.

Por otro lado, como $x_n \in \mathcal{N}(T - \lambda I)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$T(x_n) - \lambda x_n = 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde
$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}T(x_{n_k}),$$
ya que $\lambda \neq 0$. Por consiguiente, la subsucesión (x_{n_k}) converge a algún elemento de X.

Por el teorema 3.1.1, el límite de la subsucesión (x_{n_k}) pertenece a E, ya que E es un conjunto cerrado, por lo tanto la bola unitaria cerrada en $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ es compacta, de donde $\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) < \infty$ y la multiplicidad geométrica de λ es finita.

4) Solamente es necesario probar que para cada $\epsilon > 0$, existe únicamente una cantidad finita de valores espectrales λ de T tales que $|\lambda| \geq \epsilon$.

Por el absurdo, supóngase que existe $\epsilon > 0$ para el cual existe una sucesión (λ_n) de valores espectrales, distintos entre sí, de T tales que $|\lambda_n| \geq \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por el inciso 2), todos los λ_n son valores propios de T, así que existen x_n distintos de cero tales que $T(x_n) = \lambda_n x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por la proposición 3.7, los vectores x_n son linealmente independientes.

Sea M_n el conjunto generado por los vectores $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Todo $x \in M_n$ tiene una representación única como combinación lineal de elementos de M_n, es decir, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Luego,

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1},$$

es decir,

$$(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1} \text{ para cada } x \in M_n. \tag{3.15}$$

Por otro lado, los conjuntos M_n son cerrados, por ser de dimensión finita y son tales que $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n$. Por el Lema de Riesz, existe una sucesión $(y_n) \in X$ tal que $y_n \in M_n$, $\|y_n\| = 1$ y

$$\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \text{ para cada } x \in M_{n-1}.$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$ y sea $z = \lambda_n y_n - T(y_n) + T(y_m)$.

Luego,

$$T(y_n) - T(y_m) = \lambda_n y_n - z.$$

Por otro lado, como $m \leq n-1$, se tiene que $y_m \in M_m \subset M_{n-1}$, de donde

$$T(y_m) \in M_{n-1}, \tag{3.16}$$

ya que y_m es combinación lineal de los vectores $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ y $T(x_j) = \lambda_j x_j$.

Luego, por 3.15 se sigue que

$$\lambda_n y_n - T(y_n) = -(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1}. \tag{3.17}$$

Por 3.16 y 3.17 se obtiene que $z \in M_{n-1}$, de donde también $x = \lambda_n^{-1} z \in M_{n-1}$, así que

$$\begin{aligned}
\|T(y_n) - T(y_m)\| &= \|\lambda_n y_n - z\| \\
&= |\lambda_n| \, \|y_n - x\| \\
&\geq \frac{1}{2} \, |\lambda_n| \\
&\geq \frac{1}{2}\epsilon.
\end{aligned}$$

Como $m, n \in \mathbb{N}$ son arbitrarios, la sucesión $T(y_n)$ no es de Cauchy y por lo tanto, no tiene subsucesiones convergentes en X, lo cual es una contradicción, ya que la sucesión (y_n) es acotada y el operador T es compacto.

Por lo tanto, para cada $\epsilon > 0$ existe únicamente una cantidad finita de valores espectrales λ de T tales que $|\lambda| \geq \epsilon$.

De esta manera, el espectro de T es contable y en caso de ser infinito, pueden ordenarse de manera decreciente, según su módulo, utilizando la sucesión (ϵ_n) tal que

$$\epsilon_n = \frac{1}{n}.$$

□

Como consecuencia del teorema anterior, se deduce un importante resultado concerniente a la naturaleza de los valores espectrales de un operador definido sobre un espacio de dimensión finita.

Teorema 3.3.7. *Sea $T \colon X \longrightarrow X$ un operador lineal con X espacio normado. Si X es de dimensión finita, entonces $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T)$, es decir, todos los valores espectrales no nulos de T son valores propios. Además el espectro de T es finito.*

Demostración. Como X es de dimensión finita, por el teorema 3.2.15 se sigue que el operador T es compacto, así que por el teorema 3.3.6, todos los valores espectrales no nulos de T son valores propios.

Además, únicamente existe una cantidad finita de valores propios de T, en caso contrario, por la proposición 3.7, existiría un conjunto infinito de vectores propios, los cuales son linealmente independientes en X, pero esto no posible porque X es de dimensión finita.

Además, la dimensión de $\mathcal{N}(T)$ es finita, ya que el kernel de T es un subespacio vectorial de X, o bien, por las desigualdades en 3.3, ya que X es de dimensión finita. □

4. Función espectral zeta

4.1. Funciones zeta

4.1.1. Zeta de Riemann

Una de las funciones zeta más conocidas es la función zeta de Riemann, la cual está definida por

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{4.1}$$

en donde s es un número complejo.

La región de convergencia de la función zeta de Riemann está dada por $\mathrm{Re}(s) > 1$, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}},$$

y por el criterio de convergencia de las p-series se obtiene que $\mathrm{Re}(s) > 1$.

4.1.2. Zeta de Hurwitz

La función zeta de Hurwitz es una extensión de la función zeta de Riemann y está definida por

$$\zeta_H(s,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^s}, \tag{4.2}$$

para $\mathrm{Re}(s) > 1$ y $\mathrm{Re}(q) > 0$. Es inmediato que $\zeta_R(s) = \zeta_H(s,1)$.

4.2. Función espectral zeta y región de convergencia

Sea V un espacio vectorial y $P \colon V \longrightarrow V$ un operador lineal. Se define la función espectral zeta de P como

$$\zeta_\sigma(P,s) = \sum_{\lambda \in \sigma_p \setminus \{0\}} (\dim V_\lambda) \lambda \left|\lambda\right|^{-s-1} + \dim \mathcal{N}(P). \tag{4.3}$$

Es de interés conocer cuándo $\zeta_\sigma(P,s)$ es convergente, para lo cual es necesario analizar por casos el comportamiento asintótico de los valores propios de P y de las dimensiones de sus respectivos subespacios propios, las cuales deben ser siempre finitas para que la ecuación 4.3 tenga sentido, en particular,

$$\dim \mathcal{N}(P) < \infty. \tag{4.4}$$

Por la proposición 1.1, al encontrar la región de convergencia absoluta de la sumatoria en la ecuación 4.3 también se estará hallando una región en donde la función espectral zeta $\zeta_\sigma(P,s)$ es convergente.

4.2.1. Espectro finito

Supóngase que los valores propios del operador P son finitos. En este caso es trivial que la función definida en 4.3 es convergente para cualquier valor complejo de s, ya que la serie

$$\sum_{\lambda\in\sigma_p\setminus\{0\}} (\dim V_\lambda)\lambda\,|\lambda|^{-s-1}$$

es finita. Por lo tanto, la región de convergencia de la función $\zeta_\sigma(P,s)$ está dada por

$$s\in\mathbb{C}. \tag{4.5}$$

4.2.2. Espectro no acotado por arriba

Supóngase que los valores propios del operador P son discretos y pueden ser numerados de manera creciente con respecto a su módulo.

En este caso se considera a los valores propios de tal manera que $(\lambda_n) = O(n^p)$ con $p > 0$, además supóngase que las dimensiones de los subespacios propios crecen de tal manera que

$$(\dim V_{\lambda_n}) = O(n^q) \quad \text{con} \quad q \geq 0,$$

(si las dimensiones están acotadas puede hacerse $q = 0$).

Por lo tanto, existen $c_1, n_1, c_2, n_2 > 0$ tales que

$$|\lambda_n| \leq c_1 n^p \text{ para cada } n \geq n_1 \text{ y } \dim V_{\lambda_n} \leq c_2 n^q \text{ para cada } n \geq n_2. \tag{4.6}$$

Sea $N = \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Si $n \geq N$, por las desigualdades en 4.6 se obtiene que

$$|\lambda_n|^{-\operatorname{Re}(s)} < (c_1 n^p)^{-\operatorname{Re}(s)} \quad \text{y} \quad \dim V_{\lambda_n} < c_2 n^q,$$

de donde

$$\begin{aligned}|\zeta_\sigma(P,s)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(\dim V_{\lambda_n})\,|\lambda_n|^{-Re(s)} + \dim \mathcal{N}(P)\\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1}(\dim V_{\lambda_n})\,|\lambda_n|^{-Re(s)} + c_2(c_1)^{-Re(s)}\sum_{n=N}^{\infty} n^q\ n^{-p\,\mathrm{Re}(s)} + \dim \mathcal{N}(P).\end{aligned}$$

Luego, para que la función $\zeta_\sigma(P,s)$ sea absolutamente convergente solamente se necesita que

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^{q-p\,\mathrm{Re}(s)} < \infty,$$

lo cual es cierto si y solo si $p\,\mathrm{Re}(s) - q > 1$, es decir,

$$\mathrm{Re}(s) > \frac{1+q}{p}. \tag{4.7}$$

4.2.3. Punto de acumulación en cero

Supóngase que los valores propios del operador P son discretos y pueden ser numerados de manera decreciente con respecto a su módulo. En este caso se considera que los valores propios de P son de tal manera que $(\lambda_n) = O(n^{-p})$ con $\lambda_n \to 0$, en donde $p > 0$, además supóngase de nuevo que $(\dim V_{\lambda_n}) = O(n^q)$ con $q \geq 0$.

Por lo tanto, existen $c_1, \delta, c_2, n_0 > 0$ tales que

$$|\lambda_n| \leq c_1 n^{-p} \text{ si } |\lambda_n| < \delta \quad \text{y} \quad \dim V_{\lambda_n} \leq c_2 n^q \text{ para cada } n \geq n_0. \tag{4.8}$$

Como cero es punto de acumulación del espectro de P, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \delta$ para cada $n \geq n_1$.

Sea $N = \max\{n_0, n_1\}$, si $n \geq N$, por la ecuación 4.8 se tiene que

$$|\lambda_n|^{-Re(s)} \leq (c_1 n^{-p})^{-\mathrm{Re}(s)} \quad \text{y} \quad \dim V_{\lambda_n} < c_2 n^q,$$

de donde

$$\begin{aligned}|\zeta_\sigma(P,s)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(\dim V_{\lambda_n})\,|\lambda_n|^{-Re(s)} + \dim \mathcal{N}(P)\\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1}(\dim V_{\lambda_n}\,|\lambda_n|^{-\mathrm{Re}(s)}) + c_2(c_1)^{-\mathrm{Re}(s)}\sum_{n=N}^{\infty} n^q\ n^{p\,\mathrm{Re}(s)}.\end{aligned}$$

Luego, para que la función $\zeta_\sigma(P,s)$ sea absolutamente convergente solamente se necesita que

$$\sum_{n=N}^{\infty} n^{q+p\,\mathrm{Re}(s)} < \infty,$$

lo cual es cierto si y solo si $-q-p\,\mathrm{Re}(s) > 1$, es decir,

$$\mathrm{Re}(s) < -\frac{1+q}{p}. \tag{4.9}$$

4.2.4. Cero e infinito

Supóngase que el espectro tiene a cero e infinito como puntos de acumulación y los valores propios del operador P son discretos de tal manera que se pueden enumerar utilizando a los enteros, en donde $(\lambda_{-n}) \to 0$ y $(\lambda_n) \to \infty$ con $n \in \mathbb{N}$.

En este caso se considera que los valores propios son tales que $O(\lambda_{-n}) = O(n^{-r})$ con $\lambda_{-n} \to 0$ y $O(\lambda_n) = O(n^p)$, en donde $r, p > 0$.

Supóngase además que las dimensiones de los subespacios propios son tales que $(\dim V_{\lambda_{-n}}) = O(n^{q_1})$ y $(\dim V_{\lambda_n}) = O(n^{q_2})$, en donde $q_1, q_2 > 0$.

Debido a 4.7 y 4.9, para que $\zeta_\sigma(P,s)$ sea absolutamente convergente, se necesita que

$$\mathrm{Re}(s) > \frac{1+q_2}{p} \quad \text{y} \quad \mathrm{Re}(s) < -\frac{1+q_1}{r},$$

de donde la región de convergencia absoluta en este caso es vacía.

4.2.5. Acotado sin puntos de acumulación

Supóngase que el conjunto de los valores propios del operador P no tiene punto de acumulación pero está acotado. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass se tiene que dicho conjunto de valores propios debe ser finito, por lo que en este caso la región de convergencia de la serie dada por la ecuación 4.3 es todo el plano complejo, es decir,

$$s \in \mathbb{C}. \tag{4.10}$$

4.3. Representaciones integrales

Al encontrar la región de convergencia absoluta de la función espectral zeta definida en 4.3 en cada uno de los casos considerados, en realidad se encontró la región de convergencia de la función

$$\zeta_{|\sigma|}(P,s) = \sum_{\lambda \in \sigma_p \setminus \{0\}} (\dim V_\lambda)\, |\lambda|^{-s} + \dim \mathcal{N}(P), \tag{4.11}$$

la cual se define como la función espectral zeta absoluta de P.

Si P es un operador lineal con kernel de dimension finita, cuyos valores propios distintos de cero pueden ser arreglados en una sucesión (λ_n) tal que $|\lambda_n| \to \infty$, entonces es posible construir una función entera cuyos ceros sean los elementos de la sucesión $(|\lambda_n|)$, haciendo uso de los productos de Weierstrass.

La hipótesis anterior implica que cada valor propio aparece una cantidad finita de veces en la sucesión de valores propios, de hecho aparece el número de veces dado por $\dim V_{\lambda_n}$.

La ecuación 1.25 asegura que la función

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/\,|\lambda_n|)$$

es una función entera, cuyos ceros son los términos de la sucesión $(|\lambda_n|)$ con multiplicidades $\dim V_{\lambda_n}$.

Luego, la función

$$L(z) = z^{-s} \frac{d}{dz} \log F(z)$$

tiene como polos a los ceros de $F(z)$, ya que por el corolario 1.1 es cierto que

$$\frac{d}{dz} \log F(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}.$$

Como $\lambda_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la función $g(z) = z^{-s}$ es analítica en $|\lambda_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que por el teorema 1.4.6 se sigue que

$$\operatorname{Res}(L, |\lambda_n|) = (\dim V_{\lambda_n})|\lambda_n|^{-s}.$$

Por lo tanto, por el teorema 1.4.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{-s} \frac{d}{dz} \log F(z) dz &= \sum_{n=1}^{\infty} (\dim V_{\lambda_n})\, |\lambda_n|^{-s} \\ &= \zeta_{|\sigma|}(P,s) - \dim \mathcal{N}(P), \end{aligned}$$

en donde γ es una circunferencia de radio infinito que contiene a la sucesión $(|\lambda_n|)$

en su interior, pero no a $z = 0$.

Finalmente,

$$\zeta_{|\sigma|}(P, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{-s} \frac{d}{dz} \log F(z) dz + \dim \mathcal{N}(P). \tag{4.12}$$

En particular, por el teorema 3.3.6, los operadores compactos satisfacen las condiciones para la representación en 4.12. Si los valores propios, distintos de cero, de un operador son todos reales positivos, entonces la representación en 4.12 coincide con la función espectral zeta del operador.

Supóngase ahora que la sucesión (λ_n) de los valores propios distintos de cero del operador lineal P es tal que

$$|\lambda_n| \to 0.$$

Nuevamente la hipótesis asegura que cada valor propio aparece una cantidad finita de veces en la sucesión de valores propios, de hecho aparece el número de veces dado por $\dim V_{\lambda_n}$.

La sucesión (a_n) definida por $a_n = 1/|\lambda_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$ es tal que $|a_n| \to \infty$. Luego, por la ecuación 1.25, la función

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n)$$

es una función entera, cuyos ceros son los términos de la sucesión (a_n) con multiplicidades $\dim V_{\lambda_n}$.

Como $\lambda_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la función $g(z) = z^{-s}$ es analítica en $z = a_n = 1/|\lambda_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que por el teorema 1.4.6 se tiene que

$$\operatorname{Res}(L, a_n) = (\dim V_{\lambda_n}) {a_n}^{-s} = (\dim V_{\lambda_n}) |\lambda_n|^s .$$

Por lo tanto, por el teorema 1.4.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z^{-s} \frac{d}{dz} \log F(z) dz &= \sum_{k=1}^{\infty} (\dim V_{\lambda_n}) |\lambda_n|^s \\ &= \zeta_{|\sigma|}(P, -s) - \dim \mathcal{N}(P), \end{aligned}$$

en donde γ es una circunferencia de radio infinito que contiene a la sucesión (a_n) en su interior, pero no a $z = 0$.

Finalmente,

$$\zeta_{|\sigma|}(P,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^s \frac{d}{dz}\log F(z)dz + \dim \mathcal{N}(P). \tag{4.13}$$

Si los valores propios de un operador, distintos de cero, son todos reales positivos, entonces la representación en 4.13 coincide con la función espectral zeta del operador.

La función espectral zeta absoluta también admite una representación por medio de la función gamma, haciendo uso de la transformada de Mellin.

Para tal efecto, supóngase que los valores propios distintos de cero del operador lineal P pueden ser arreglados en una sucesión (λ_n) y considérese la función $H : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\dim V_{\lambda_n}) e^{-|\lambda_n| x}. \tag{4.14}$$

Dicha función es una suma armónica y por lo tanto, su transformada de Mellin está dada por

$$\begin{aligned} H^*(s) &= \left[e^{-x}\right]^*(s) \sum_{n=1}^{\infty} (\dim V_{\lambda_n}) \left|\lambda_n\right|^{-s} \\ &= \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} (\dim V_{\lambda_n}) \left|\lambda_n\right|^{-s}, \end{aligned}$$

de donde

$$\zeta_{|\sigma|}(P,s) = \frac{H^*(s)}{\Gamma(s)} + \dim \mathcal{N}(P). \tag{4.15}$$

Además, al igual que en las representaciones por medio de productos de Weierstrass, la función espectral zeta de P coincide con la expresión en 4.15 cuando los valores propios distintos de cero de P son todos reales positivos.

4.4. Relación con el operador inverso

Sea $T\colon X \longrightarrow X$ un operador lineal, con X espacio vectorial normado, tal que existe el operador T^{-1}.

Sea $\lambda \neq 0$ un valor propio de T. Se sigue que existe un vector $x \in X$ distinto de cero, tal que

$$T(x) = \lambda x.$$

Como por hipótesis existe T^{-1} y es lineal por el teorema 3.2.1, se tiene que

$x = T^{-1}(\lambda x) = \lambda T^{-1}(x)$, de donde

$$T^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x,$$

es decir, el número $\dfrac{1}{\lambda}$ es un valor propio de T^{-1}.

Por otro lado, supóngase que $\alpha \neq 0$ es un valor propio de T^{-1}. Se sigue que existe un vector $y \in X$ distinto de cero, tal que $T^{-1}(y) = \alpha y$.

Luego, como T es lineal se tiene que

$$\begin{aligned} y &= T(\alpha y) \\ &= \alpha T(y), \end{aligned}$$

de donde

$$T(y) = \frac{1}{\alpha}y,$$

es decir, $\alpha = \lambda^{-1}$ para algún $\lambda \in \sigma_p(T)$ distinto de cero.

De lo anterior, se sigue que

$$\sigma_p(T^{-1}) \setminus \{0\} = \{\lambda^{-1} \colon \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}\}.$$

Por otro lado, se cumple que si $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, entonces

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(T^{-1} - \frac{1}{\lambda}T),$$

ya que

$$x \in \mathcal{N}(T - \lambda I) \Leftrightarrow T(x) = \lambda x \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}x = T^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(T^{-1} - \frac{1}{\lambda}T),$$

de donde $\dim V_\lambda = \dim W_{1/\lambda}$, en donde V_λ y $W_{1/\lambda}$ son espacios propios asociados a los operadores T y T^{-1}, respectivamente, ya que la multiplicidad geométrica de un valor propio α de un operador lineal P, es la dimensión de $\mathcal{N}(P - \alpha I)$.

Además, si T^{-1} existe, entonces

$$\dim \mathcal{N}(T^{-1}) = \dim \mathcal{N}(T) = 0,$$

como consecuencia del teorema 3.2.1.

Por lo tanto, si los valores propios no nulos de un operador T, cuyo operador inverso existe, son los elementos de la sucesión (λ_n), entonces

$$\begin{aligned}
\zeta_{|\sigma|}(T^{-1}, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\dim V_{1/\lambda_n}) \left|\lambda_n^{-1}\right|^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\dim V_{\lambda_n}) \left|\lambda_n\right|^{s} \\
&= \zeta_{|\sigma|}(T, -s).
\end{aligned}$$

Nótese el cambio de signo en el argumento de la función espectral zeta absoluta de T y T^{-1}. Esto es consecuencia de que la región de convergencia absoluta de la función espectral zeta se refleja en el eje $\mathrm{Re} = 0$.

Lo anterior sucede porque si los valores propios no nulos (λ_n) del operador T son tales que $(\lambda_n) = O(n^p)$, entonces la región de convergencia absoluta de $\zeta_\sigma(T, s)$ es

$$\mathrm{Re} > \frac{1+q}{p},$$

en donde $q > 0$ es tal que $(\dim V_{\lambda_n}) = O(n^q)$, por la ecuación 4.7.

Luego, los valores propios no nulos $(\alpha_n) = (1/\lambda_n)$ del operador T^{-1} son tales que $(\alpha_n) = O(n^{-p})$ con $\alpha_n \to 0$, por lo que la región de convergencia absoluta de $\zeta_\sigma(T^{-1}, s)$ es

$$\mathrm{Re}(s) < -\frac{1+q}{p},$$

por la ecuación 4.9.

Finalmente, es inmediato que si el espectro puntual de T es finito, entonces la región de convergencia de T y T^{-1} es todo $\mathbb{C}$.

5. Ejemplos

Ejemplo 5.1. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el operador lineal definido por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Por el teorema 3.1.4, el operador T es compacto, así que por el teorema 3.3.7, los valores propios no nulos de P son finitos, de hecho, son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$ al ser las soluciones del polinomio característico de T (para la definición de polinomio característico de un operador lineal y su relación con sus valores propios, revisar en el capítulo 5.1 de [6]).

Resulta que los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 4$, ya que

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4v_1$$

y

$$T(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 4v_2.$$

Además, v_1 y v_2 son linealmente independientes, ya que si $av_1 + bv_2 = 0$, entonces

$$a + b = 0\ ,\ a = 0\ \text{ y } -b = 0\ ,$$

de donde $a = b = 0$ y por lo tanto, se tiene que

$$\dim V_{\lambda_1} = 2.$$

Por otro lado, el vector

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -2$, ya que

$$T(v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2v_3.$$

La multiplicidad geométrica de λ_2 no puede ser mayor que 1, ya que el espacio sobre el cual está definido el operador T es de dimensión 3.

Por lo tanto,

$$\dim V_{\lambda_2} = 1.$$

Por otro lado, como la matriz asociada al operador T es de rango 3 (Para la definición de rango de una matriz y su relación con el kernel del operador lineal asociado, revisar en el capítulo 5.3 de [10]), se tiene que

$$\dim \mathcal{N}(T) = 3 - 3 = 0.$$

Finalmente, por la ecuación en 4.5, la región de convergencia de la función espectral zeta de T es todo el plano complejo y la función está definida por

$$\begin{aligned}\zeta_\sigma(T,s) &= \sum_{k=1}^{2} (\dim V_{\lambda_k}) \lambda_k \left|\lambda_k\right|^{-s-1} + 0 \\ &= (2)(4)(4)^{-s-1} + (1)(-2)(2)^{-s-1} \\ &= 2^{-2s+1} - 2^{-s}.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2. Sea $P\colon \mathcal{C}\,[0,L] \longrightarrow \mathcal{C}\,[0,L]$ el operador lineal definido por

$$P(f) = -\frac{d^2}{dx^2} f(x),$$

en donde $\mathcal{C}\,[0,L]$ es el espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo

$[0, L]$ con norma definida por

$$\|f\| = \text{máx}\{|f(x)| : 0 \leq x \leq L\}. \tag{5.1}$$

(Para la demostración de que la fórmula en 5.1 efectivamente es una norma, revisar el capítulo 2.3 de [3]).

Supóngase además que las funciones f a las que se les aplica el operador P cumplen que

$$f(0) = f(L) = 0. \tag{5.2}$$

Las funciones definidas por

$$f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \tag{5.3}$$

son vectores propios del operador P, soluciones de la ecuación

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \lambda x, \tag{5.4}$$

con valores propios asociados

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \tag{5.5}$$

ya que

$$-\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right).$$

Además, por las condiciones en 5.2 se tiene que las únicas soluciones de la ecuación 5.4 son las funciones indicadas en la ecuación 5.3 y por lo tanto, los únicos valores propios de P son los indicados en la ecuación 5.5, es decir, son los números λ_n, con $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, para cada $n \geq 1$, se tiene que el valor propio λ_n tiene como vectores propios a las funciones $g_n(x)$ y $g_{-n}(x)$, las cuales son linealmente dependientes, ya que

$$\begin{aligned} g_n(x) + g_{-n}(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi n}{L}x\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\dim V_{\lambda_n} = 1 \quad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{N},$$

de donde $(\dim V_{\lambda_n}) = O(n^0)$.

Por otro lado, por la proposición 2.1, la sucesión (λ_n) es de orden de crecimiento $O(n^2)$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2}{n^2} \in \mathbb{R}^+.$$

Como el espectro de P es no acotado por arriba, por la ecuación en 4.7 se tiene que la región de convergencia de $\zeta_\sigma(P,s)$ es

$$\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, el kernel de P está formado por las funciones $f(x)$ tales que

$$-\frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0$$

y que además satisfacen las condiciones en 5.2, es decir,

$$\mathcal{N}(P) = \{f(x) = Ax + B : A, B \in \mathbb{R} \wedge f(0) = f(L) = 0\}.$$

La única función que satisface lo anterior es $f(x) = 0$, de donde

$$\dim \mathcal{N}(P) = 0.$$

Por lo tanto, la función espectral zeta de P está definida por

$$\begin{aligned}
\zeta_\sigma(P,s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (1) \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \left| \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \right|^{-s-1} + 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{L}\right)^{-2s} \\
&= \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} \\
&= \left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2s} \zeta_R(2s).
\end{aligned}$$

Como los valores propios del operador P son todos reales positivos y tienden a infinito, es posible representar a su función espectral zeta por medio de las ecuaciones en 4.12 y 4.15.

Ejemplo 5.3. Sea $K\colon \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ el operador definido por

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots),$$

en donde ℓ^2 es el espacio de las sucesiones de números complejos $x = (x_1, x_2, \dots)$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

con norma definida por

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.6}$$

(Para la demostración de que la fórmula en 5.6 efectivamente es una norma, revisar el capítulo 2.2 de [3]).

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, los números

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \tag{5.7}$$

son valores propios del operador K, ya que para cada $n \geq 1$, el vector $e_n \in \ell^2$ definido por

$$(e_n)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases} \tag{5.8}$$

es tal que

$$\begin{aligned} (K(e_n))_i &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ \frac{1}{n} & \text{si } i = n \end{cases} \\ &= \frac{1}{n}(e_n)_i, \end{aligned}$$

para cada $i \geq 1$, es decir,

$$K(e_n) = \frac{1}{n} e_n.$$

Por otro lado, supóngase que $\lambda \neq 0$ es un valor propio de K distinto de $1/n$, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Se sigue que existe un vector $x \in \ell^2$ distinto de cero, tal que

$$K(x) = \lambda x,$$

es decir,

$$(K(x) - \lambda x)_i = \left(\frac{1}{i} - \lambda\right) x_i = 0 \quad \text{para cada} \quad i \geq 1.$$

Como $\lambda \neq 1/i$ para cada $i \geq 1$, entonces $x_i = 0$ para cada $i \geq 1$, es decir, $x = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, los valores propios del operador K son los indicados en la ecuación 5.7.

Por otro lado, si x es un vector propio asociado al valor propio $1/n$, necesariamente $x = \alpha e_n$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$ y e_n como en la ecuación en 5.8, ya que si

$$K(x) = \frac{1}{n}x,$$

entonces

$$\frac{x_i}{i} = \frac{x_i}{n} \quad \text{para cada} \quad i \geq 1,$$

de donde $x_i = 0$ si $i \neq n$. Luego, $\dim V_{\lambda_n} = 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, de donde $(\dim V_{\lambda_n}) = O(n^0)$.

Por otro lado, por la proposición 2.1, la sucesión (λ_n) es de orden de crecimiento $O(n^{-1})$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n^{-1}} \in \mathbb{R}^+.$$

Como el espectro de K tiene a cero como único punto de acumulación, por la ecuación en 4.9 se tiene que la región de convergencia de $\zeta_\sigma(K, s)$ es $\mathrm{Re}(s) < -1$.

Por otro lado, el kernel de K está formado por las sucesiones $x = (x_1, x_2, \dots)$ en ℓ^2 tales que

$$(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots) = (0, 0, \dots, 0, \dots).$$

La única sucesión que satisface lo anterior es $x = 0$, por lo tanto $\dim \mathcal{N}(K) = 0$,y la función espectral zeta del operador K está definida por

$$\begin{aligned}\zeta_\sigma(K, s) &= \sum_{n=1}^{\infty}(1)\left(\frac{1}{n}\right)\left|\frac{1}{n}\right|^{-s-1} + 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^s = \zeta_R(-s).\end{aligned}$$

Como los valores propios del operador K son todos reales positivos y tienden a cero, es posible representar a su función espectral zeta por medio de las ecuaciones en 4.13 y 4.15.

CONCLUSIONES

1. Para el estudio de la teoría espectral es necesario conocer la estructura del *kernel* y la imagen de un operador lineal, como subespacios vectoriales, así como los teoremas de continuidad de operadores lineales.

2. Para el estudio de las funciones zeta es necesario conocer el criterio de convergencia de las p-series, así como el hecho de que la convergencia absoluta de una serie infinita implica su convergencia.

3. La región de convergencia absoluta de la función espectral zeta de un operador lineal, depende del comportamiento asintótico de los valores propios del operador y es un semiplano, cuyos elementos tienen todos el mismo signo en la parte real.

4. La función espectral zeta de un operador lineal, puede representarse como un producto infinito de Weierstrass o una transformada de Mellin cuando los valores propios no nulos del operador son todos reales positivos, de lo contrario, dichas representaciones corresponden a la función espectral zeta absoluta.

RECOMENDACIONES

1. Utilizar operadores compactos o inversos de operadores compactos, ya que sus valores propios son contables y el comportamiento asintótico de los mismos es conocido.

2. Utilizar operadores con valores propios reales positivos, para que las representaciones por medio de la transformada de Mellin y los productos de Weierstrass coincidan con la función espectral zeta del operador.

3. Emplear los contenidos del capítulo 3 como un curso introductorio de operadores lineales y teoría espectral.

4. Encontrar una forma de extender analíticamente la función espectral zeta de un operador lineal a todo el plano complejo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bertrand J., P. Bertrand y J. Ovarlez. *The Mellin transform.* CRC Press, Boca Raton, 1996.

[2] Ciarlet P. *Introduction to numerical linear algebra and optimisation.* English Edition. Cambridge University Press, Inglaterra, 1989.

[3] Clapp M. *Análisis matemático.* (Colección Papirhos) Instituto de Matemáticas UNAM, México, 2015.

[4] Conway J. *A course in functional analysis.* 2.ª ed. Springer-Verlag, Nueva York, 1990.

[5] Conway J. *Functions of one complex variable.* 2.ª ed. Springer-Verlag, Nueva York, 1978.

[6] Friedberg S., A. Insel y L. Spence *Álgebra lineal.* Tr. Jorge Rodríguez. Publicaciones Cultural S.A., México, 1982.

[7] Hirsch F. y G. Lacombe. *Elements of functional analysis.* Tr. Silvio Levy. Springer-Verlag, Nueva York, 1999.

[8] Kirsten K. y F. Williams. *A window into zeta and modular physics.* (MSRI) Cambridge University Press, Nueva York, 2010.

[9] Kreyszig E. *Introductory functional analysis with applications.* (Wiley Classics Library Edition) Estados Unidos, 1989.

[10] Lang S. *Linear algebra.* 3.ª ed. Springer-Verlag, Nueva York, 2004.

[11] Shakarchi R. y E. Stein. *Complex Analysis.* (Princeton lectures in analysis) Princeton University Press, Nueva Jersey, 2003.

[12] Szpankowski W. *Average case analysis of algorithms on sequences.* John Wiley & Sons Inc., Nueva Jersey, 2001.