



**Universidad de San Carlos de Guatemala**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Escuela de Ciencias**

**TEORÍA Y APLICACIÓN DE UN RESONADOR MAGNÉTICO  
EN EL CAMPO DE LA FÍSICA MÉDICA. COMO GENERADOR  
DE IMÁGENES DEL INTERIOR DEL CUERPO HUMANO PARA  
DIAGNÓSTICO MÉDICO**

**Gustavo Adolfo Santos Orozco**

**Asesorado por: Lic. César Antonio Izquierdo Merlo**

**Lic. Erick Estuardo Hernández García**

**Guatemala, septiembre de 2006**

**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**



**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**TEORIA Y APLICACIÓN DE UN RESONADOR MAGNÉTICO EN EL CAMPO DE LA  
FÍSICA MÉDICA, COMO GENERADOR DE IMAGENES DEL INTERIOR DEL CUERPO  
HUMANO PARA DIAGNÓSTICO MÉDICO**

TRABAJO DE GRADUACIÓN

PRESENTADO A LA JUNTA DIRECTIVA DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
POR

**GUSTAVO ADOLFO SANTOS OROZCO**

ASESORADO POR: Lic. CÉSAR ANTONIO IZQUIERDO MERLO  
Lic. ERICK ESTUARDO HERNÁNDEZ GARCÍA

AL CONFERÍRSELE EL TÍTULO DE  
**LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA**

GUATEMALA, SEPTIEMBRE DE 2006

**UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**



**NÓMINA DE JUNTA DIRECTIVA**

DECANO	Ing. Murphy Olympo Paiz Recinos
VOCAL I	Inga. Glenda Patricia García Soria
VOCAL II	Lic. Amahán Sánchez Álvarez
VOCAL III	Ing. Julio David Galicia Celada
VOCAL IV	Br. Kenneth Issur Estrada Ruiz
VOCAL V	Br. Elisa Yazminda Vides Leiva
SECRETARIA	Inga. Marcia Ivonne Véliz Vargas

**TRIBUNAL QUE PRACTICÓ EL EXAMEN GENERAL PRIVADO**

DECANO	Ing. Sydney Alexander Samuels Milson
EXAMINADOR	Lic. Cesar Antonio Izquierdo Merlo
EXAMINADOR	Lic. Jorge de la Torre Paniagua
EXAMINADOR	Lic. Carlos Antonio Castellanos Santos
SECRETARIO	Ing. Carlos Humberto Pérez Rodríguez

## **HONORABLE TRIBUNAL EXAMINADOR**

Cumpliendo con los preceptos que establece la ley de la Universidad de San Carlos de Guatemala, presento a su consideración mi trabajo de graduación titulado:

### **TEORIA Y APLICACIÓN DE UN RESONADOR MAGNÉTICO EN EL CAMPO DE LA FÍSICA MÉDICA, COMO GENERADOR DE IMÁGENES DEL INTERIOR DEL CUERPO HUMANO PARA DIAGNÓSTICO MÉDICO,**

tema que me fuera asignado por la Coordinación de la Carrera de Licenciatura en Física Aplicada y aprobado por la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería, el 21 de Septiembre de 2005.

**Gustavo Adolfo Santos Orozco**



Guatemala, 14 de julio de 2006

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta  
Director Escuela de Ciencias  
Facultad de Ingeniería  
USAC

Señor Director:

Por este medio informo que el estudiante de la licenciatura en Física Aplicada, Gustavo Adolfo Santos Orozco, fue asesorado por los suscriptores en su trabajo de graduación titulado "TEORÍA Y APLICACIÓN DE UN RESONADOR MAGNÉTICO EN EL CAMPO DE LA FÍSICA MÉDICA, COMO GENERADOR DE IMÁGENES DEL INTERIOR DEL CUERPO HUMANO PARA DIAGNÓSTICO MÉDICO".

Habiendo cumplido con los objetivos y metas propuestos por este trabajo, hemos procedido a la aprobación del mismo. Por lo que el contenido, conclusiones y recomendaciones de este trabajo es responsabilidad, tanto del autor como de sus asesores.

Atentamente,

Lic. Erick Hernández García

colegiado 3731  
Asesor

Lic. Erick Hernández  
Físico Médico

Lic. César Izquierdo Merlo

Asesor

César Antonio Izquierdo Merlo  
Licenciado en Física Aplicada  
Colegiado 3.190  
MS en Didáctica de la Física



Guatemala, 04 de septiembre del 2006

FACULTAD DE INGENIERIA

*Ing. José Alberto Boy Piedrasanta*  
DIRECTOR, ESCUELA DE CIENCIAS  
FACULTAD DE INGENIERIA  
USAC, Ciudad

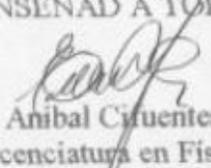
Estimado ingeniero Boy:

Me dirijo a usted para informarle que he realizado la revisión del trabajo de graduación "TEORIA Y APLICACIÓN DE UN RESONADOR MAGNÉTICO EN EL CAMPO DE LA FÍSICA MÉDICA, COMO GENERADOR DE IMAGENES DEL INTERIOR DEL CUERPO HUMANO PARA DIAGNÓSTICO MÉDICO", presentado por el estudiante Gustavo Adolfo Santos Orozco y considerando que cumple con los objetivos de la carrera de Licenciatura en Física Aplicada, le doy mi aprobación.

Muy Atentamente,



"ID Y ENSEÑAD A TODOS"

  
Lic. Edgar Anibal Cifuentes Anléu  
Coordinador, Licenciatura en Física Aplicada  
Departamento de Física

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS  
DE GUATEMALA



FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE CIENCIAS

El Director de la Escuela de Ciencias de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, después de conocer el dictamen de los asesores, con el visto bueno del Coordinador de la Licenciatura en Física Aplicada al trabajo de graduación del estudiante **GUSTAVO ADOLFO SANTOS OROZCO**, titulado "TEORÍA Y APLICACIÓN DE UN RESONADOR MAGNÉTICO EN EL CAMPO DE LA FÍSICA MÉDICA, COMO GENERADOR DE IMÁGENES DEL INTERIOR DEL CUERPO HUMANO PARA DIAGNÓSTICO MÉDICO", procede a la autorización del mismo.

Ing. José Alberto Boy Piedrasanta  
Director Escuela de Ciencias



Guatemala, 03 de octubre de 2006

Universidad de San Carlos  
de Guatemala

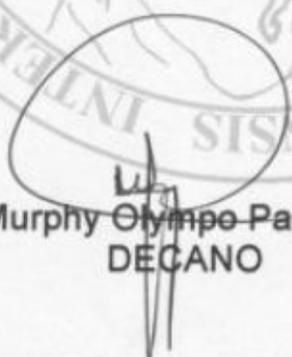


Facultad de Ingeniería  
Decanato

Ref. DTG.347.06

El Decano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de San Carlos de Guatemala, luego de conocer la aprobación por parte del Director de la Escuela de Ciencias, al trabajo de graduación titulado: **TEORÍA Y APLICACIÓN DE UN RESONADOR MAGNÉTICO EN EL CAMPO DE LA FÍSICA MÉDICA, COMO GENERADOR DE IMÁGENES DEL INTERIOR DEL CUERPO HUMANO PARA DIAGNÓSTICO MÉDICO**, presentado por el estudiante universitario **Gustavo Adolfo Santos Orozco**, procede a la autorización para la impresión del mismo.

IMPRÍMASE.

  
Ing. Murphy Olimpo Paiz Recinos  
DECANO



Guatemala, Octubre de 2006

/cc

*Todo por ti, Carolingia Mía*  
Dr. Carlos Martínez Durán  
2006: Centenario de su Nacimiento

Agarrado de tu mano vencí la muerte y conquisté la vida; en el  
pináculo de mi existencia únicamente puedo darte las gracias

-A la memoria de mi madre-

# ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	v
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
GLOSARIO	ix
RESUMEN	xi
OBJETIVOS	xiii
INTRODUCCIÓN	xv
<b>1. HERRAMIENTAS PARA LA DESCRIPCIÓN CLÁSICA DE LA RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción de la materia a nivel microscópico . . . . .	2
1.1.1. Descripción cuántica del átomo . . . . .	3
1.2. Conceptos del electromagnetismo . . . . .	4
1.2.1. Fuerza eléctrica y campo eléctrico . . . . .	5
1.2.2. Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico . . . . .	7
1.2.3. Fuerza magnética y campo magnético . . . . .	8
1.2.4. Fuerza magnética sobre conductores eléctricos . . . . .	10
1.2.5. Dipolo magnético . . . . .	11
1.2.6. Momento magnético de una espira de corriente . . . . .	12
1.2.7. Momento magnético de un sistema microscópico . . . . .	13
1.2.8. Momento magnético y su relación con el momentum angular .	15
1.2.9. Energía de un dipolo en un campo magnético . . . . .	16
1.2.10. Ondas electromagnéticas . . . . .	17
1.3. Magnetismo en la materia . . . . .	20
1.3.1. Magnetización . . . . .	21

<b>2.</b>	<b>DESCRIPCIÓN CLÁSICA DE LA RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR</b>	<b>25</b>
2.1.	Sistemas físicos en movimiento oscilatorio . . . . .	25
2.2.	Resonancia en sistemas oscilantes . . . . .	26
2.3.	Precesión de una partícula con espín $\frac{1}{2}$ . . . . .	28
2.4.	Precesión de un conjunto de espines $\frac{1}{2}$ . . . . .	30
2.5.	Resonancia magnética de un conjunto de partículas de espín $\frac{1}{2}$ . . . . .	31
2.6.	Interacción de un conjunto espines $\frac{1}{2}$ con su entorno . . . . .	34
<b>3.</b>	<b>DESARROLLO CUÁNTICO DE LA RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR</b>	<b>39</b>
3.1.	Partícula con espín $\frac{1}{2}$ en un campo magnético uniforme . . . . .	39
3.1.1.	Resonancia magnética de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ . . . . .	42
3.2.	Interacción magnética de un conjunto de partículas de espín $\frac{1}{2}$ . . . . .	46
3.2.1.	Resonancia de un conjunto de partículas de espín $\frac{1}{2}$ . . . . .	47
<b>4.</b>	<b>DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES DE UN EQUIPO DE RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR UTILIZADO EN MEDICINA</b>	<b>49</b>
4.1.	Descripción de los componentes básicos de un resonador magnético . . . . .	49
4.1.1.	Imán superconductor . . . . .	50
4.1.2.	Bobinas Compensadoras . . . . .	52
4.1.3.	Bobinas de Gradientes . . . . .	53
4.1.4.	Sonda de Radiofrecuencia . . . . .	56
4.2.	Sistema de protección del equipo de RMN . . . . .	59
4.2.1.	Escudo electromagnético . . . . .	59
4.2.2.	Escudo magnético . . . . .	59
4.3.	Descripción del funcionamiento del equipo de RMN . . . . .	60
<b>5.</b>	<b>PROCESO DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES</b>	<b>63</b>
5.1.	Características de los principales núcleos utilizados RMN . . . . .	63
5.1.1.	Sensibilidad magnética . . . . .	63
5.1.2.	Concentración fisiológica relativa . . . . .	64

5.2.	Proceso de estimulación y secuencias de excitación . . . . .	64
5.2.1.	Caída por Inducción Libre (CIL) . . . . .	66
5.2.2.	Secuencia de Hahn o eco de espín (SE) . . . . .	67
5.2.3.	Secuencia de Inversión Recuperación (IR) . . . . .	69
5.2.4.	Secuencia Turbo Espín-Eco (TSE) . . . . .	70
5.3.	Gradientes de selección . . . . .	71
5.4.	Selección del corte . . . . .	73
5.4.1.	Orientación del corte . . . . .	73
5.4.2.	Posición del corte . . . . .	74
5.4.3.	Espesor y perfil del corte . . . . .	74
5.5.	Reconstrucción de una imagen de RMN . . . . .	75
5.5.1.	Reconstrucción por el método de Fourier . . . . .	76
5.5.2.	Codificación de fase . . . . .	77
5.5.3.	Codificación por frecuencia . . . . .	78
5.5.4.	Representación de la señal . . . . .	78
5.5.5.	Muestreo . . . . .	80
5.5.6.	Construcción del espacio k . . . . .	82
<b>CONCLUSIONES</b>		<b>85</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>		<b>87</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>		<b>88</b>
<b>APÉNDICE</b>		<b>91</b>



# ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

## FIGURAS

1.	Fuerza eléctrica entre partículas cargadas . . . . .	5
2.	Campo eléctrico generado por una partícula cargada . . . . .	6
3.	Campo magnético generado por una partícula en movimiento . . . . .	8
4.	Fuerza magnética sobre una partícula en movimiento . . . . .	9
5.	Espira de corriente en un campo magnético uniforme . . . . .	12
6.	Movimiento orbital de una partícula cargada . . . . .	14
7.	Onda electromagnética . . . . .	19
8.	Espectro electromagnético . . . . .	19
9.	Comportamiento magnético de la materia . . . . .	20
10.	Generación de la magnetización . . . . .	22
11.	Momento magnético promedio de un sistema de dipolos . . . . .	24
12.	Oscilación y resonancia en un columpio . . . . .	26
13.	Precesión y resonancia de un trompo . . . . .	27
14.	Precesión de un espín en un campo magnético uniforme . . . . .	29
15.	Precesión de $\vec{M}$ en torno al campo efectivo $\vec{B}_{eff}$ . . . . .	32
16.	Precesión de $\vec{M}$ en torno a $X^*$ . . . . .	33
17.	Resonancia del espín vista en el sistema de referencia XYZ . . . . .	33
18.	Anulación de $M_{xy}$ por desfase en la precesión de sus espines . . . . .	36
19.	Evolución temporal de la magnetización . . . . .	38
20.	Sistema de referencia en movimiento de precesión . . . . .	40
21.	Resonador magnético . . . . .	50
22.	Dispositivo de imán superconductor . . . . .	51
23.	Espira y bobina de corriente . . . . .	51
24.	Sistema de bobinas compensadoras . . . . .	53
25.	Sistema de bobinas de gradientes . . . . .	54

26.	Sistema integrado de bobinas de gradientes . . . . .	55
27.	Sistema de bobinas secundarias . . . . .	56
28.	Circuitos de radiofrecuencia . . . . .	57
29.	Esquema de los dispositivos de un equipo de RMN . . . . .	60
30.	Características de los principales isótopos utilizados en RMN .	64
31.	Proceso de estimulación y obtención de señales RMN . . . . .	65
32.	Secuencia Caída por Inducción Libre (CIL) . . . . .	67
33.	Refase en la precesión de espines . . . . .	68
34.	Secuencia de Hann o Eco de Espín (SE) . . . . .	69
35.	Secuencia Inversión Recuperación (IR) . . . . .	70
36.	Secuencia Turbo Espín-Eco (TSE) . . . . .	71
37.	Gradientes en las direcciones X, Y, Z . . . . .	72
38.	Tipos de orientación en los cortes seleccionados . . . . .	74
39.	Posición y espesor de un corte . . . . .	75
40.	Espacio k . . . . .	76
41.	Desfase en la precesión de espines . . . . .	77
42.	Mustreo de un eco . . . . .	80
43.	Reconstrucción de imagen . . . . .	82

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\rho$	Densidad volumétrica de carga eléctrica
$\epsilon_0$	Constante de permitividad del espacio libre
$c$	Velocidad de la luz
$\vec{J}$	Vector densidad de corriente
$\mu_0$	Constante de permeabilidad magnética
$\vec{D}$	Vector Desplazamiento eléctrico
$\vec{H}$	Vector intensidad magnética
$\nabla$	Operador nabra
$\nabla^2$	Operador de Laplace
$\sum_i^n$	Sumatoria de una serie
$\partial$	Derivada parcial
$\langle \rangle$	Valor promedio de una magnitud
$\vec{r}_{cm}$	Vector Posición del centro de masa

$\  \ $	Magnitud de una cantidad vectorial o numero complejo
$i$	Numero imaginario
$  \rangle$	Ket en la notación de Dirac
$\hat{H}$	Operador Hamiltoniano
$Tr( )$	Traza de una matriz u operador
$\langle  $	Bra en la notación de Dirac
$\langle   \rangle$	Bracket en la notación de Dirac
$\tanh$	Función tangente hiperbólica
$h$	Constante de Planck
$\hbar$	Constante de Planck —tachada—
$\frac{d^*}{dt}$	Derivada de un magnitud vectorial en un sistema giratorio
$\hat{\rho}$	Operador de densidad de estados
$\kappa$	Constante de Boltzman
$\vec{M}$	Vector Magnetización
$\vec{L}$	Vector Momentum Angular

## GLOSARIO

<b>Corriente alterna</b>	Corriente eléctrica variable que alterna su polaridad cada medio ciclo.
<b>Cuanto</b>	Magnitud física que es continua a nivel macroscópico, pero que se presenta discreta en el nivel microscópico de la naturaleza.
<b>Distribución de Maxwell-Boltzman</b>	Función de distribución que representa el número de estados accesibles de un sistema como función de su energía y temperatura.
<b>Enfoque macroscópico</b>	Punto de vista de un fenómeno desde la perspectiva la experiencia común.
<b>Equilibrio termodinámico</b>	Condición de equilibrio que se establece en un sistema termodinámico, caracterizado porque todos los puntos del mismo se encuentran a la misma temperatura.
<b>Fuerza central</b>	Fuerza en dirección paralela o antiparalela a la recta que une a dos cuerpos en mutua interacción.

<b>Mecánica Cuántica</b>	Parte de la física que estudia los fenómenos microscópicos de la naturaleza donde se manifiestan de manera notable, las propiedades corpuscular y ondulatoria de la materia.
<b>Momentum angular</b>	Se define como el producto vectorial de los vectores: cantidad de movimiento lineal y vector de posición de una partícula.
<b>Operador</b>	Aplicación matemática que transforma un elemento de un espacio vectorial en otro elemento, el cual pertenece al mismo espacio.
<b>Partícula</b>	Representación matemática de un cuerpo material por medio de un punto.
<b>Pulsos de RF</b>	Emisión de ondas de radiofrecuencia a través de una antena durante períodos de tiempo muy breves.
<b>Radiación</b>	Transmisión de energía de un punto a otro por medio de un flujo de partículas o de ondas.
<b>Torque</b>	Se define como el producto vectorial de los vectores: fuerza aplicada a una partícula y el vector de posición que ubica a la partícula respecto de un eje de referencia.

# RESUMEN

La adquisición de imágenes, por medio de la técnica de la Resonancia Magnética Nuclear, es una valiosa herramienta de apoyo clínico en el diagnóstico de diversos tipos de patologías a nivel tisular. El propósito primordial de éste trabajo, es proporcionar los fundamentos teóricos en el desarrollo de esta técnica, a través de la descripción del fenómeno que la hace posible y del sistema diseñado para generarlo.

En el primer capítulo, se hace un breve desarrollo de los principales conceptos que son utilizados para describir desde la perspectiva de la física clásica, el fenómeno de la Resonancia Magnética Nuclear (RMN).

El segundo capítulo es la descripción del fenómeno, la cual esta basada en un enfoque vectorial denominado: **desarrollo clásico de la RMN**.

En el tercer capítulo, se hace una breve descripción de la formulación más rigurosa del fenómeno, la cual se encuentra enmarcada en el contexto de principios y leyes de la física cuántica. Esta descripción se denominada: **desarrollo cuántico de la RMN**.

En el cuarto capítulo, se hace la descripción de los principales componentes que constituyen un resonador magnético. Esta descripción contempla los fundamentos físicos sobre los cuales se cimienta el funcionamiento de cada elemento, así como la función de cada uno de ellos.

Finalmente, en el quinto capítulo, se describe el proceso general en la adquisición de una imagen, proporcionando las características principales de los procesos de estimulación, los procesos de selección de cortes y codificación de las señales generadas para la reconstrucción final de la imagen.



# OBJETIVOS

## General

- Presentar los fundamentos teóricos y técnicos en el proceso de adquisición de imágenes por medio de un resonador magnético.

## Específicos

1. Describir clásica y cuánticamente el fenómeno de la resonancia magnética nuclear.
2. Describir cada uno de los componentes que forman parte de un resonador magnético, proporcionando las bases físicas sobre las cuales se cimienta su funcionamiento.
3. Describir brevemente, el proceso de adquisición de una imagen de diagnóstico médico, utilizando la técnica de la RMN.
4. Desarrollar los diferentes temas de esta obra, haciendo especial énfasis en el aspecto didáctico de su presentación, con el fin de proporcionar una herramienta de consulta al medio de profesionales involucrados en el diagnóstico médico por imágenes.



# INTRODUCCIÓN

La RMN, es una técnica de adquisición de imágenes para diagnóstico médico, que utiliza las señales emitidas por el cuerpo humano al inducirse en éste, el fenómeno de la Resonancia Magnética Nuclear por medio de un resonador magnético.

La importancia en el desarrollo de una obra que contemple la descripción teórica del proceso de adquisición de imágenes utilizando ésta técnica, radica en la fuente de consulta que la misma representará en un futuro inmediato, a una buena parte de profesionales y técnicos involucrados en el diagnóstico médico por imágenes, y como medio para aminorar las deficiencias de material de consulta bibliográfica sobre temas de física médica.

Actualmente, en Guatemala, la física médica es una profesión de muy lenta aceptación, debido en gran parte al desconocimiento de la existencia de la misma y del aporte que ésta brinda a la medicina, especialmente en radiología y radioterapia.

Es propósito primordial de éste trabajo, proporcionar un documento de apoyo que posea el alcance didáctico necesario para la presentación de temas de física médica a diverso público de profesionales.

Con tal fin, se ha echo uso de diversos recursos visuales, tales como: gráficas y dibujos y de elementos comparativos de los cuales se pueden mencionar las analogías. Esto permite la presentación de los temas expuestos, sin perder la esencia de las ideas contenidas en los mismos, lo cual se traduce en la presentación de un documento con cualidades para la enseñanza.



# 1. HERRAMIENTAS PARA LA DESCRIPCIÓN CLÁSICA DE LA RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR

La resonancia magnética nuclear (RMN), es un fenómeno físico que tiene lugar en el interior del núcleo atómico. Lo experimentan los núcleos con propiedades magnéticas como: el espín resultante no nulo y el momento magnético. Este fenómeno se origina cuando los núcleos con estas propiedades, interactúan con campos magnéticos estáticos y variables en el tiempo.

En éste capítulo, se desarrollaran los conceptos necesarios para proporcionar la descripción clásica de la RMN. Esta descripción conocida como: **desarrollo clásico de la Resonancia Magnética**, es un enfoque vectorial del fenómeno en el cual se utiliza el concepto macroscópico de magnetización.

El contenido de del capítulo contempla los siguientes temas:

La descripción de la materia a nivel microscópico: con el fin de determinar las características principales de los átomos e isótopos utilizados en experimentos de RMN.

El desarrollo de conceptos del electromagnetismo tales como: campo eléctrico, campo magnético, ondas electromagnéticas y momento magnético de una partícula. Conceptos que son utilizados para describir la interacción de la materia con los medios magnéticos. Y la descripción del origen del magnetismo en la materia: para desarrollar el concepto vectorial de magnetización.

## 1.1. Descripción de la materia a nivel microscópico

La materia desde el punto de vista de las transformaciones físicas y químicas, esta constituida por unidades estructurales formadas de moléculas y átomos. El átomo como una unidad fundamental, es un sistema microscópico constituido por tres tipos diferentes de partículas: protones, neutrones y electrones.

Los protones  $p$ : son partículas con una masa de  $1.672 \times 10^{-27}$  Kg que poseen una propiedad fundamental denominada: *carga eléctrica*, la cual en el caso de estos se denomina: *carga positiva*.

Los neutrones  $n$ : son partículas con una masa de  $1.674 \times 10^{-27}$ kg ligeramente diferente de la masa del protón y que no presentan carga eléctrica alguna.

Los protones y neutrones se encuentran concentrados en una región del átomo denominada: **núcleo atómico**.

Los electrones  $e$ : son partículas fundamentales cuya masa es  $1/1837$  de la masa del protón. Poseen una carga eléctrica denominada: *carga negativa* cuyo tamaño es igual a la del protón pero con signo opuesto al de éste.

Los electrones, se mueven alrededor del núcleo en regiones de energía bien definida y el número de estos en un átomo es el mismo que el de protones en su núcleo. Esta cantidad sirve para caracterizar a cada elemento químico de la naturaleza y se denomina: **número atómico  $Z$** .

La mayor parte de la masa de un átomo esta constituida principalmente de la masa del núcleo. El tamaño de esta masa está representada por un número, el cual indica la cantidad de protones y neutrones que hay en el núcleo. Este número se denomina: **número de masa  $A$** .

A los elementos químicos que tienen igual número atómico pero diferente número de masa se les denomina: **isótopos**.

### 1.1.1. Descripción cuántica del átomo

Los electrones en un átomo, se distribuyen alrededor del núcleo orbitando en regiones de energía bien definida. Cada una de estas regiones pertenece a un nivel de un arreglo energético denominado: **niveles de energía**. Cada nivel de energía de éste arreglo, se encuentra espaciado del nivel anterior y posterior por un múltiplo entero de una unidad fundamental o mínima de energía.

A la disposición que toman los electrones en los diferentes niveles de energía de un átomo se denomina: **configuración electrónica**. Esta disposición o configuración, está representada para cada electrón por una serie de números denominados: **números cuánticos**. Los números cuánticos: especifican el nivel de energía en el que se encuentra el electrón, la orientación de la orbita o región electrónica asociada al nivel, el momentun angular o momento de giro de la misma y el espín del electrón.

El espín, es una propiedad intrínseca de las partículas y de los sistemas microscópicos como los núcleos atómicos. Tiene similitud con el momentum angular de un objeto macroscópico que gira sobre su propio eje, aunque carece de esta imagen a nivel microscópico, debido a las restricciones en la forma en que se describen las partículas a éste nivel. Sin embargo, muchas de las propiedades del espín tienen un análogo con las propiedades del momentum angular.

En el nivel microscópico de la naturaleza, el cual es descrito por la física cuántica, dos de las magnitudes características del espín como son: el módulo y la orientación, exhiben el fenómeno de la cuantización. En éste fenómeno, los valores que toman cada una de estas magnitudes se presentan en forma discreta como múltiplos enteros de una unidad mínima. De igual manera, a éste nivel, el módulo del espín únicamente puede medirse como una proyección sobre algún eje de referencia.

El espín del núcleo o espín nuclear, puede ser detectado en aquellos átomos e isótopos que presentan un número atómico impar. Por el contrario, éste no es detectado en los átomos e isótopos que presentan un número de masa y un número atómico par.

En un sistema nuclear, el espín está representado por el número cuántico  $S$ , el cual puede tomar los valores  $0, 1/2, 1, 3/2, 5/2, \dots S$ . Para un núcleo con número cuántico de espín  $\frac{1}{2}$ , los valores posibles de la proyección de su espín sobre algún eje de referencia son:  $\frac{1}{2}\hbar$  y  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Donde  $\hbar$  es una constante fundamental de la naturaleza denominada: **constante de Planck**.

## 1.2. Conceptos del electromagnetismo

El **electromagnetismo** estudia los fenómenos de interacción de los cuerpos que poseen carga eléctrica. La carga eléctrica o cantidad de electricidad, es una propiedad fundamental de la materia y se manifiesta en la misma de dos maneras diferentes, las cuales son denominadas: carga negativa ( $-$ ) y carga positiva ( $+$ ).

La carga negativa, es portada por los electrones en los átomos y tiene un valor para cada electrón de  $1.62 \times 10^{-19}$  Coulombs. La carga positiva, tiene igual magnitud que la de los electrones (pero con signo opuesto) y es portada por los protones en el núcleo atómico.

Las partículas que poseen carga eléctrica, pueden atraerse o repelerse entre sí de acuerdo al siguiente principio de interacción que siguen sus cargas: cargas de diferente signo se atraen y cargas de igual signo se repelen.

En la materia que no exhibe un comportamiento eléctrico a nivel macroscópico, el número de cargas eléctricas de ambos tipos es el mismo. Cualquier exceso de uno de estos dos tipos de carga, generara un desequilibrio en el sistema que romperá con la neutralidad eléctrica, dando paso a que la materia presente una carga neta por exceso. La magnitud total de esta carga, se presenta como un múltiplo entero de una unidad mínima de carga que es la carga del electrón  $e$ .

Las partículas con carga eléctrica, experimentan dos tipos de interacción que dependen de su estado de movimiento y del sistema de referencia donde éste sea descrito. Los dos tipos de interacción observados en la naturaleza son: **fuerza eléctrica y fuerza magnética**.

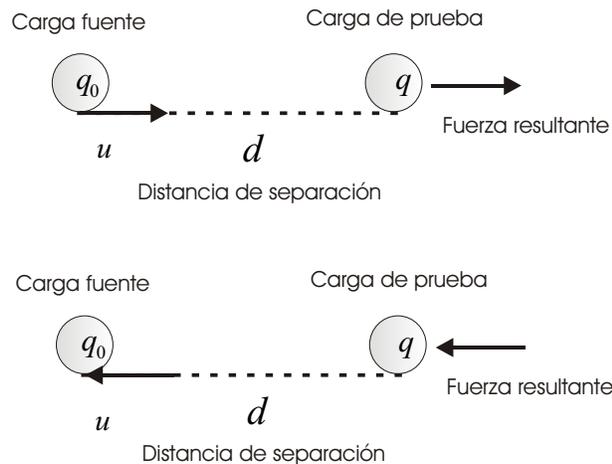
### 1.2.1. Fuerza eléctrica y campo eléctrico

La interacción entre dos partículas cargadas que se encuentran en reposo para algún observador inercial, es descrita por la **ley de Coulomb** y se denomina: **fuerza eléctrica**. Esta ley establece: que la fuerza eléctrica que experimenta la partícula con carga  $q$ , por la acción a distancia de la partícula con carga  $q_0$ , la cual se encuentra separada de la primera una distancia  $d$ , es proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación de las partículas.

$$\vec{F} = k \frac{q_0 q}{d^2} \vec{u} \quad (\text{newton})$$

En esta ecuación,  $k$  es una constante de proporcionalidad elegida adecuadamente para hacer compatible de ambos lados las unidades de la ecuación. El vector unitario  $\vec{u}$ , es un vector tangente a la línea que une ambas cargas y su dirección está especificada por el principio de atracción y repulsión, es decir, si la carga fuente tiene igual signo que la carga de prueba, la fuerza sobre la partícula portadora de la carga de prueba será repulsiva, si es negativa esta fuerza será atractiva.

Figura 1: Fuerza eléctrica entre partículas cargadas

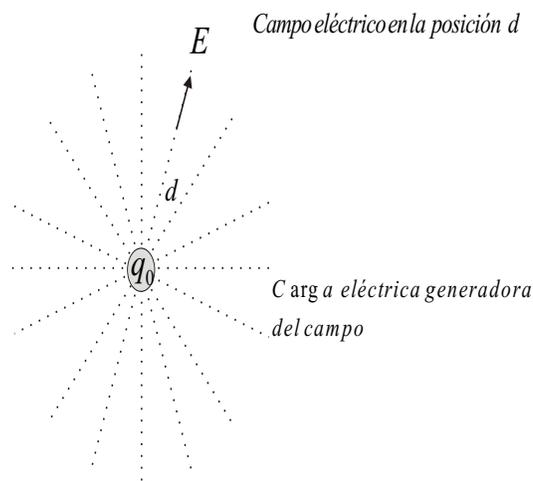


La partícula con la carga fuente, origina en todos los puntos del espacio a su alrededor, una acción a distancia sobre cualquier cuerpo cargado que sea colocado en estos puntos. Esta acción es independiente de la carga de los cuerpos y solamente depende de la magnitud de la carga fuente  $q_0$  y de la distancia de ésta al punto donde se coloque la partícula con la carga de prueba  $q$ . A esta acción se denomina: **campo eléctrico**  $\vec{E}$  y es una **función vectorial**, es decir, una función que asigna un vector a cada punto del espacio. La misma se define de la siguiente manera:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\text{Fuerza eléctrica sobre } q}{\text{Carga de prueba } q} = k \frac{q_0}{d^2} \vec{u} \quad \left( \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}} \right)$$

El símbolo de límite utilizado en esta expresión, indica que la magnitud de la carga de prueba debe de ser muy pequeña comparada con la magnitud de la carga fuente, de tal manera que esta no perturbe la distribución de la misma en el cuerpo que la contiene. En función del campo eléctrico, la fuerza que experimenta la partícula portadora de la carga de prueba puede escribirse como:  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Figura 2: Campo eléctrico generado por una partícula cargada



### 1.2.2. Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

Para crear un sistema de partículas cargadas, es necesario que un agente externo invierta energía para colocar a cada partícula en su posición final en el sistema. Esta energía, es almacenada por el mismo y adopta una nueva forma que depende de la configuración espacial que cada partícula ha adquirido. Esta energía se denomina: **energía potencial eléctrica**.

Para crear un sistema de dos partículas cargadas, solamente se requiere que el agente externo, realice trabajo para colocar a una de las partículas en una posición fija con respecto de la otra. Para una partícula en reposo con carga  $q_0$ , éste agente externo debe realizar trabajo sobre la partícula con carga  $q$ , en contra de la fuerza eléctrica  $q\vec{E}(r)$  que la partícula en reposo ejerce sobre ésta. La energía potencial asociada puede ser representada de la siguiente manera:

$$U(r) = -q \int_{r_{ref}}^d \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

En esta expresión, el símbolo  $\int$  denota la suma de todos los trabajos que la fuerza externa debe realizar sobre la partícula con la carga de prueba a través de los pequeños desplazamientos  $d\vec{r}$ . Esta fuerza, es igual a la producida por la partícula con la carga fuente sobre la partícula de prueba en todos los puntos de su trayectoria, pero en sentido contrario a la misma. Los valores  $r_{ref}$  y  $d$ : son los respectivos límites de la suma y representan las posiciones inicial y final de la partícula.

La energía potencial puede expresarse también, como el producto de la carga de la partícula de prueba  $q$ , por una función escalar que depende únicamente del valor de la carga de la partícula fuente y del punto de prueba. Esta función se denomina: **potencial eléctrico  $V(\mathbf{r})$**  y se define de la siguiente manera:

$$V(r) = \frac{\text{Energía potencial eléctrica}}{\text{Carga de prueba}} = \frac{U(r)}{q} \quad \left( \frac{\text{joules}}{\text{coulomb}} \right)$$

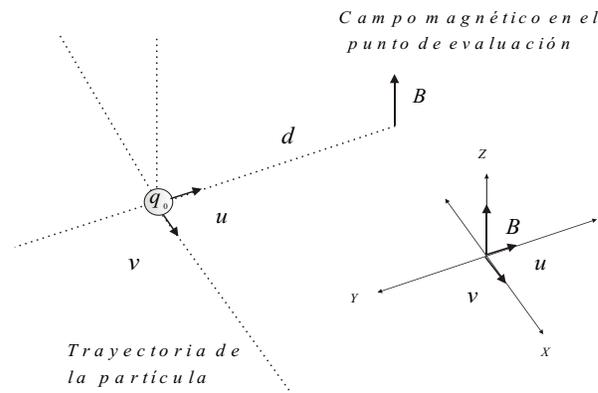
En términos del potencial eléctrico, la energía potencial para el sistema de dos partículas cargadas puede escribirse como:  $U(r) = qV(r)$ .

### 1.2.3. Fuerza magnética y campo magnético

Las partículas cargadas experimentan además de la fuerza de Coulomb, otro tipo de interacción originado por el movimiento de cuerpos cargados cercanos a estas. Esta interacción depende tanto del movimiento de la partícula portadora de la carga fuente como, del movimiento de la partícula portadora de la carga de prueba, y la misma se denomina: **fuerza magnética**.

Al igual que en la fuerza eléctrica, la fuerza magnética también puede ser expresada por la acción a distancia de un campo con la carga de la partícula de prueba. Este campo depende de la magnitud de la carga  $q_0$  de la partícula fuente, de la velocidad  $\vec{v}$  con que ésta se mueve y del cuadrado de la distancia de separación de ésta al punto de prueba  $d$ . La dirección de éste campo, es perpendicular al plano que forman los vectores velocidad y el vector unitario que ubica al punto de prueba con respecto a la partícula fuente. Este campo se denomina: **campo magnético** y se ilustra en la siguiente figura.

Figura 3: Campo magnético generado por una partícula en movimiento

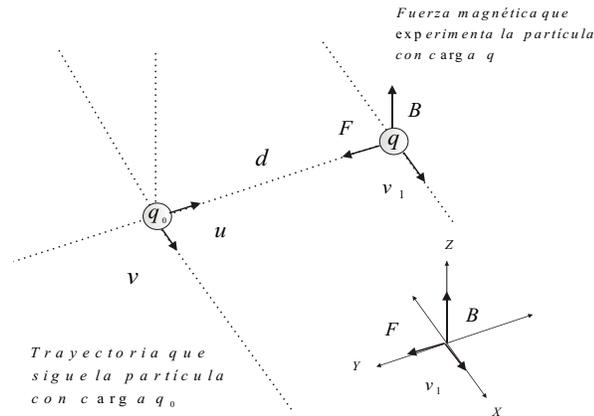


Matemáticamente, la expresión vectorial para el campo magnético originado por la partícula con carga fuente  $q_0$ , puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi d^2} (\vec{v} \times \vec{u}) \quad (\text{tesla})$$

La fuerza magnética que una partícula cargada experimenta al interactuar con el campo magnético que la partícula fuente ha creado, es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula de prueba y al campo originado por la primera. Esto se ilustra en la siguiente figura:

Figura 4: Fuerza magnética sobre una partícula en movimiento



Si la partícula de prueba posee una carga  $q$  y se mueve con una velocidad  $v_1$ , la fuerza magnética que esta experimenta por la acción del campo originado por la partícula fuente puede expresarse de la siguiente manera:

$$\vec{F} = q\vec{v}_1 \times \vec{B}$$

Si se adiciona a ésta expresión la interacción de Coulomb, la cual siempre se encuentra presente entre partículas cargadas, puede escribirse una expresión más general la cual incluye tanto la interacción eléctrica como la magnética (electromagnética), esta expresión se denominada: **fuerza de Lorentz** y matemáticamente puede ser representada de la siguiente manera:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_1 \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

#### 1.2.4. Fuerza magnética sobre conductores eléctricos

Según la capacidad para conducir partículas cargadas en su interior, la materia se divide en dos tipos de materiales denominados: conductores y no conductores.

Los conductores: son un tipo de material en el cual las partículas cargadas, pueden moverse con relativa facilidad bajo la acción de los campos eléctricos. Los materiales no conductores: por el contrario, tienen poca respuesta a la acción de los campos eléctricos. Las partículas cargadas asociadas a estos materiales, se encuentran fuertemente ligadas a sus estructuras moleculares, lo que hace difícil su traslación de un punto a otro.

El movimiento de partículas cargadas, ya sea en el vacío o en el interior de un material conductor, puede expresarse adecuadamente utilizando el concepto de **corriente eléctrica**, la cual se define de la siguiente manera:

$$I = \frac{\text{Cantidad de carga que atraviesa una región}}{\text{Tiempo empleado en atravesar la región}} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (\text{amperios}) \quad (1.2)$$

Al establecerse una diferencia de potencial entre dos puntos de un medio conductor o en el espacio vacío, entre los mismos se originará un campo eléctrico que es el que moviliza a las partículas con carga y produce la corriente. La corriente pueden estar constituida por el movimiento de electrones, protones o bien por iones. En un material conductor, la corriente eléctrica es debida al movimiento de electrones.

Los electrones en el interior de un material conductor, reaccionan también a la acción de los campos magnéticos. La fuerza que experimentan por la acción de estos campos, es transmitida a las paredes del conductor y puede ser expresada por una extensión de la ecuación (1.1) aplicada a un conductor en forma de alambre.

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (1.3)$$

En esta ecuación, el símbolo  $d\vec{l}$  representa un segmento vectorial del alambre que transporta la corriente  $I$  sobre el cual se ejerce la fuerza magnética  $d\vec{F}$ .

### 1.2.5. Dipolo magnético

La corriente eléctrica generada en el interior de un alambre conductor, da origen a campos magnéticos que rodean el espacio exterior al mismo. La distribución espacial de estos campos, define circunferencias centradas en el alambre en cuyos puntos el campo magnético es tangente y de igual magnitud. Los radios de éstas circunferencias y la intensidad del campo están en relación inversa uno con respecto del otro, es decir, a mayor radio menor intensidad de campo. Estos campos son perpendiculares a la dirección de la corriente y su intensidad puede ser expresada por la siguiente ecuación:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad (1.4)$$

A nivel microscópico, existen otros tipos de corrientes que no necesariamente están relacionadas con el flujo de una cantidad grande de partículas cargadas. Las mismas, pueden ser originadas por un movimiento en trayectoria cerrada de una partícula cargada o bien por el movimiento intrínseco de ésta. Éste tipo de corrientes microscópicas generan campos magnéticos en el espacio que las rodea, y constituyen un sistema magnético denominado: **dipolo magnético**.

La intensidad del campo magnético generado por un dipolo, disminuye con el aumento de la distancia del dipolo al punto de evaluación y puede escribirse de la siguiente manera:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\vec{\mu}}{d^3} + \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{d})\vec{d}}{d^5} \right) \quad (1.5)$$

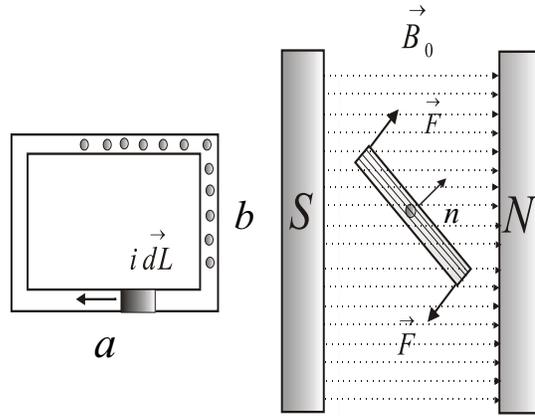
En esta expresión,  $\vec{\mu}$  es un vector que caracteriza las propiedades geométricas del circuito que forman las trayectorias de las partículas cargadas, y se denomina: **momento magnético del sistema**.

Aunque el concepto de trayectoria y de forma geométrica en el mundo microscópico es algo inexistente, el momento magnético en sistemas de microcorrientes sí es detectado y medido.

### 1.2.6. Momento magnético de una espira de corriente

Considere la disposición del siguiente sistema electromagnético: una **espira rectangular**, la cual está constituida por una bobina de alambre conductor en la cual se transporta una corriente eléctrica de intensidad  $I$ . Esta es colocada en la región entre dos imanes permanentes donde existe un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . El campo interacciona con los electrones de la corriente, los cuales experimentan una fuerza magnética que es transmitida a las paredes del alambre conductor de la bobina. La disposición de éste sistema se muestra en la siguiente figura:

Figura 5: Espira de corriente en un campo magnético uniforme



Al pivotar a la espira en la parte media del segmento  $a$ , la fuerza magnética ejercida en éste y los otros segmentos, da origen a un torque magnético el cual con la ayuda de la ecuación (1.3), puede calcularse de la siguiente manera:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (1.6)$$

En esta expresión,  $\vec{r}$  es un vector perpendicular dirigido desde el eje donde se calcula el torque al punto que ubica al elemento de corriente  $I d\vec{l}$  donde actúa la fuerza magnética. Esta fuerza realiza un torque efectivo, únicamente en los elementos transversales de la espira que son paralelos al eje de referencia.

Con las observaciones anteriores y tomando en cuenta que el campo magnético es un vector constante, el torque total calculado sobre los elementos efectivos de corriente puede escribirse de la siguiente manera:

$$\vec{\tau} = (Iab)\vec{n} \times \vec{B}$$

Esta ecuación, define un nuevo vector cuyo módulo está constituido por el producto de la corriente de la espira y el área efectiva de la misma  $A=ab$ . Su dirección es perpendicular al plano de la espira y paralela al vector unitario  $\vec{n}$ . Este vector se denomina: **momento magnético**.

$$\vec{\mu} = IA\vec{n} \quad (\text{amperios} \cdot \text{m}^2) \quad (1.7)$$

Utilizando el momento magnético definido en la ecuación (1.7), el torque que experimenta la espira de corriente puede ser escrito de la siguiente manera:

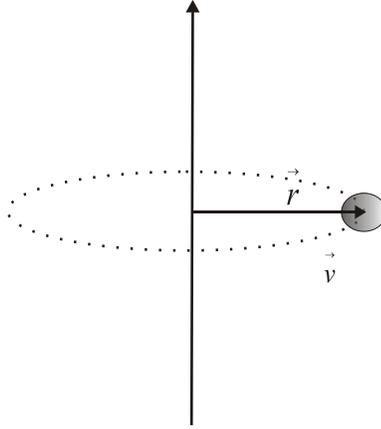
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (1.8)$$

### 1.2.7. Momento magnético de un sistema microscópico

Como se ha mencionado en la sección (1.2.5), las corrientes eléctricas no están limitadas únicamente al flujo de un gran número de partículas cargadas, como en el caso de los conductores eléctricos macroscópicos, el movimiento orbital de una sola carga eléctrica genera por sí misma una corriente eléctrica, y su orbita tiene asociado un momento magnético constante. Para ilustrar esta situación considere el siguiente sistema orbital:

Una partícula con carga  $q$  se mueve por la acción de una fuerza central en una orbita circular de radio  $r$ . La acción de esta fuerza, origina un cambio en la orientación de la partícula sin alterar la magnitud de la velocidad con la que esta se mueve, lo que origina que la misma adquiera un movimiento circular con velocidad angular constante, como se ilustra en la siguiente figura:

Figura 6: Movimiento orbital de una partícula cargada



El movimiento de la partícula por cada punto de su trayectoria, genera una corriente eléctrica instantánea, la cual se puede calcular utilizando la definición dada por la ecuación (1.2)

$$I = \frac{\text{Carga eléctrica que pasa por una región}}{\text{Tiempo empleado en pasar por la región}} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{T}$$

En esta ecuación,  $T$  es el período del movimiento orbital de la partícula, el cual está relacionado con la trayectoria que esta describe y su velocidad, por medio de la siguiente expresión:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Combinando éste resultado con el área efectiva de la orbita  $\pi r^2$ , el momento magnético se puede escribir como:

$$\mu = \frac{qvr}{2} \tag{1.9}$$

### 1.2.8. Momento magnético y su relación con el momentum angular

El sistema de corriente orbital estudiado anteriormente, puede utilizarse para investigar la relación que existe entre el momento magnético de un sistema microscópico con su momentum angular.

Debido a que la fuerza externa que actúa en el sistema orbital es una fuerza central, la misma no produce torque alguno y el momentum angular del sistema debe permanecer invariante, es decir, su módulo y dirección no cambian con el tiempo. Esto permite escribir la magnitud del momentum angular de la siguiente manera:

$$L = mrv$$

En esta expresión,  $m$  es la masa de la partícula y  $v$  la magnitud de la velocidad con la que esta se mueve. Finalmente combinando éste resultado con la ecuación (1.9) se obtiene la relación buscada:

$$\mu = \frac{q}{2m}L = \gamma L \tag{1.10}$$

La constante  $\gamma$  que aparece en esta expresión, es una propiedad característica del sistema microscópico y se denomina: **constante girómagnética**.

La relación (1.10), establece que el módulo del momento magnético es proporcional al módulo del momentum angular, y su dirección paralela o antiparalela (según el signo de la carga) a la dirección de éste.

Como se ha mencionado en la sección (1.1), las partículas atómicas como los electrones, protones y neutrones y el núcleo mismo visto como una partícula, poseen un momento angular intrínseco denominado espín. Este momento de espín también tiene asociado un momento magnético de módulo invariable, al igual que una constante girómagnética característica de cada partícula.

### 1.2.9. Energía de un dipolo en un campo magnético

Como lo indica la ecuación (1.8), los sistemas que poseen un momento magnético  $\vec{\mu}$ , experimentan un torque magnético al entrar en interacción con un campo magnético constante  $\vec{B}$ .

$$\vec{\tau}_{mag} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Este torque, en el caso de una partícula con momento magnético neto, tiene la tendencia de alinear al momento magnético de ésta en dirección paralela al campo. La energía almacenada en el sistema campo-partícula, puede obtenerse calculando el trabajo que un agente externo debe realizar para cambiar la orientación del momento magnético respecto al campo. Esta energía de configuración se denomina **energía potencial magnética**, la cual puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= - \int_{\theta_{ref}}^{\theta} \tau_{ext} d\theta \\ &= - \int_{\theta_{ref}}^{\theta} \mu B \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

En esta expresión,  $\tau_{ext}$  es la magnitud del torque que el agente externo debe ejercer para cambiar la orientación del momento magnético, de un ángulo de referencia  $\theta_{ref}$  a un ángulo  $\theta$  final. Si se define arbitrariamente la energía potencial en el ángulo de referencia como nula, la energía del sistema en la orientación  $\theta$  puede escribirse como:

$$U(\theta) = -\mu B \cos\theta$$

La cual vectorialmente puede expresarse de la siguiente manera:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{1.11}$$

### 1.2.10. Ondas electromagnéticas

Gran parte de los fundamentos del electromagnetismo están contenidos en un cuerpo de leyes representadas por cuatro ecuaciones denominadas: **ecuaciones de Maxwell**. Con estas leyes se puede dar explicación a la mayor parte de los fenómenos de electricidad y magnetismo que se observan en la naturaleza a diferentes niveles. Estas leyes son:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.13)$$

$$\nabla \times \vec{H} = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.15)$$

Las ecuaciones de Maxwell, predicen la existencia de una perturbación eléctrica y magnética que viaja en el espacio libre a la velocidad de la luz, esta perturbación es denominada: **onda electromagnética**.

Un ejemplo simple de un movimiento ondulatorio u onda, lo constituyen las perturbaciones originadas en el agua de un estanque al caer sobre él algún objeto. En el mismo, se podrá observar pequeñas formaciones circulares u olas que se alejan del punto de impacto del objeto con la superficie del agua. Estas olas representan la deformación del medio en el que la onda viaja y también sirve para caracterizarla.

Si se dejase un pequeño corcho en el agua del estanque, se observará como esté al paso de una ola asciende a una altura máxima para luego descender a su nivel inicial. La altura máxima que puede alcanzar la ola se denomina: **amplitud de onda**, y al ritmo con que asciende y descende el corcho se denomina: **frecuencia de oscilación** de la onda  $\nu$ , la cual se mide en ciclos/segundo o **Hertz**. La distancia de separación que hay entre ola y ola, sirve para determinar la longitud de la perturbación y se denomina: **longitud de onda**  $\lambda$ .

Estos dos parámetros, longitud de onda y frecuencia, sirven para caracterizar completamente a una onda. La ecuación básica que describe a cualquier movimiento ondulatorio se denomina: **ecuación de onda** y se escribe de la siguiente manera:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.16)$$

En esta ecuación,  $\phi$  representa la magnitud física que caracteriza al medio que experimenta la perturbación.

La aplicación de la operación vectorial del **rotacional** sobre la **ley de Ampère**, ecuación (1.14), y el uso de las ecuaciones constitutivas para el espacio vacío  $D = \epsilon_0 E$  y  $B = \mu_0 H$ , combinada apropiadamente con la **ley de inducción de Faraday**, ecuación (1.15), y la identidad vectorial  $\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2$ , demuestran que el campo magnético  $\vec{B}$  cumple con la siguiente ecuación de onda

$$\nabla^2 B - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \quad (1.17)$$

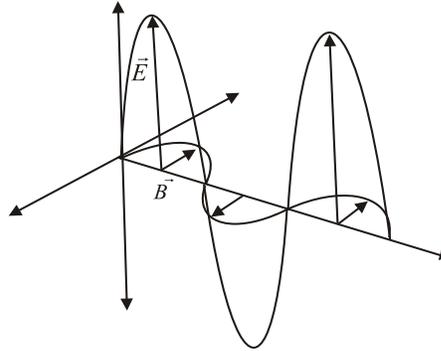
Un procedimiento similar efectuado sobre la ecuación (1.15), demuestra que el campo eléctrico también cumple con una ecuación de onda semejante.

En una onda electromagnética, los campos eléctricos y magnéticos oscilan de forma perpendicular entre sí y con respecto a la velocidad de propagación de la onda, de acuerdo a la siguiente relación vectorial:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{c} \times \vec{E}) \quad (1.18)$$

Una solución simple para la ecuación de onda, expresada por la ecuación (1.17), la constituye una onda armónica. Las ondas armónicas: son soluciones matemáticas de una longitud de onda y frecuencia característica. En la siguiente figura, se ilustra gráficamente la forma característica de una onda electromagnética armónica.

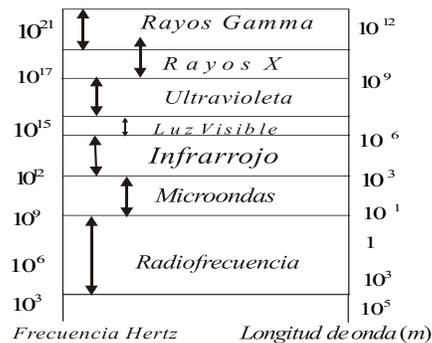
Figura 7: Onda electromagnética



Las ondas electromagnéticas abarcan un intervalo enorme de longitudes de onda. Las hay desde aquellas con  $\lambda$  de varios kilómetros hasta otras con  $\lambda$  del orden de picómetros. Debido a que la frecuencia y la longitud de onda están relacionadas por medio de la velocidad de propagación  $c = \lambda\nu$ , la ondas suelen clasificarse en regiones de escala de frecuencia. A este arreglo se le denomina: **espectro electromagnético**.

Las ondas de **radiofrecuencia**, abarcan intervalos de longitud de onda y de frecuencia que oscila entre  $10^5$  a  $10^{-1}$  metros y  $10^3$  a  $10^9$  GHz. Estas ondas están asociadas a la radiocomunicaciones terrestres.

Figura 8: Espectro electromagnético



En la naturaleza a nivel microscópico (molecular, atómico y nuclear), la materia y las ondas tienen un comportamiento similar. Las ondas en determinadas situaciones se comportan como partículas y de igual manera las partículas se comportan como ondas. Este tipo de comportamiento es llamado: **dualidad onda-partícula**. A la partícula asociada a una onda electromagnética se le denomina: **fotón** o cuanto de radiación electromagnética, y su energía en términos de la frecuencia de oscilación de su onda es:

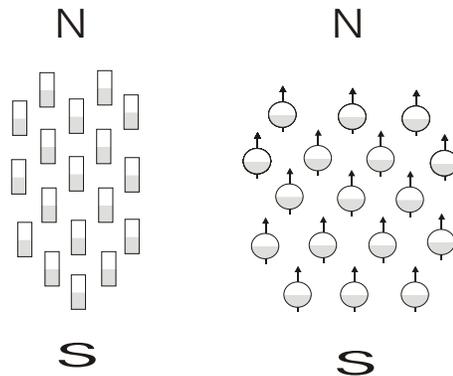
$$E = h\nu_0 = \hbar\omega_0 \quad (1.19)$$

### 1.3. Magnetismo en la materia

El magnetismo en la materia, tiene su origen en el interior del núcleo atómico. Los núcleos y partículas con un momento angular de espín no nulo, tienen asociado a éste un momento magnético el cual es responsable de su comportamiento magnético. Estas partículas se comportan como pequeños imanes permanentes o dipolos magnéticos.

Si un núcleo tiene número atómico y número de masa ambos impares, el mismo presentará un momento magnético neto lo que originará que éste se comporte como un imán microscópico.

Figura 9: Comportamiento magnético de la materia



### 1.3.1. Magnetización

Desde el punto de vista macroscópico, el comportamiento magnético de la materia está representado por una función vectorial denominada: **magnetización**. Esta función, es una descripción estadística del número de dipolos o imanes microscópicos que hay en un pequeño elemento de volumen de materia. Cada uno de estos elementos, está representado por el momento magnético medio que caracteriza al conjunto de dipolos en el volumen, y puede ser descrito por un punto matemático. Cada promedio de estos, es ponderado por el número de dipolos que hay en el punto correspondiente, y por la fracción del volumen que éstos ocupan en la muestra.

$$\vec{M} = \frac{\# \text{ dipolos en un punto muestra} \times \text{momento magnético medio de un dipolo}}{\text{volumen que ocupa la muestra}}$$

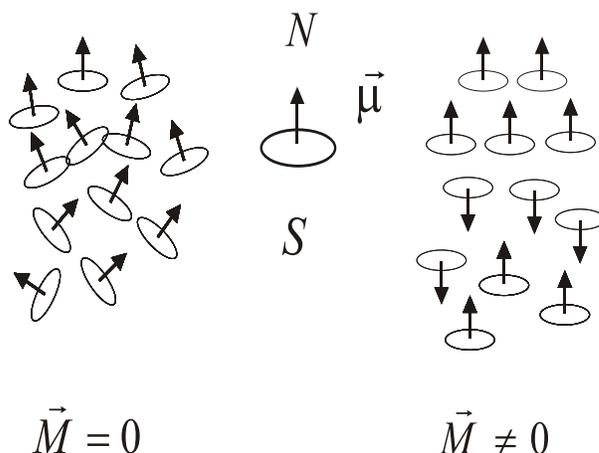
$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \langle \vec{\mu} \rangle_i$$

Para una muestra de materia constituida por núcleos de espín  $\frac{1}{2}$ , la presencia de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , origina que el momento magnético de los dipolos nucleares adopte una de sus dos orientaciones posibles. Cada una de estas orientaciones, define un estado energético los cuales con la ayuda de la ecuación (1.11) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$E_- = -\mu_z B_z, \quad E_+ = \mu_z B_z \quad (1.20)$$

En estas ecuaciones,  $E_+$  representa el estado de mayor energía, y  $E_-$  el estado de menor energía. En la materia desmagnetizada, es decir, que no exhibe un comportamiento magnético a nivel macroscópico, los dipolos magnéticos se encuentran orientados totalmente al azar. Cuando un campo magnético es aplicado a la muestra de dipolos, los mismos se distribuyen en sus dos orientaciones posibles y el valor promedio del momento magnético en cada punto de la muestra, estará determinado por la diferencia entre los dipolos que se distribuyen en una u otra dirección. Esto conlleva a que la magnetización esté orientada en la dirección del dipolo predominante. Este fenómeno se ilustra en la siguiente figura.

Figura 10: Generación de la magnetización



En una muestra  $N$  de dipolos, los cuales ocupan un volumen  $\Delta V$ , existe una cantidad  $N_-$  de espines con momento magnético  $-\mu_z$ , y  $N_+$  espines con momento magnético  $+\mu_z$ . En el equilibrio termodinámico del sistema de espines con un campo magnético uniforme  $B$ , éste elemento de volumen estará caracterizado por el valor promedio de su momento magnético, el cual puede calcularse de la siguiente manera:

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{N_+ \vec{\mu}_z + N_- \vec{\mu}_z}{N} \quad (1.21)$$

$$= P_+ \vec{\mu}_z - P_- \vec{\mu}_z \quad (1.22)$$

En la última expresión, ecuación (1.22),  $P_+$  y  $P_-$  representan las probabilidades de que el momento magnético tome el valor  $+\mu_z$  y  $-\mu_z$  respectivamente. Si la interacción entre los dipolos es lo suficientemente débil como para considerarlos independientes entre sí, estas probabilidades pueden calcularse utilizando la función de distribución de **Maxwell-Boltzman**.

$$P = ce^{\frac{-E}{\kappa T}} \quad (1.23)$$

En esta ecuación,  $E$  representa la energía del sistema que en el caso de los espines, está dada por la ecuación (1.20). El producto de la constante de Boltzman  $\kappa = 1.38 \times 10^{-23}$  (joules/kelvin) con la temperatura absoluta  $T$  del sistema, es la medida de la energía térmica que existe en el elemento de volumen  $\Delta V$ , como resultado de la interacción con su entorno, el cual está constituido de moléculas y átomos. La constante  $c$  depende de la temperatura del medio y representa un factor de normalización.

Sustituyendo la ecuación (1.23) en la ecuación(1.22), se obtiene el siguiente resultado para el momento magnético medio.

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \mu_z \tanh \left( \frac{-\mu_z B_z}{\kappa T} \right) \quad (1.24)$$

Multiplicando esta ecuación por el número  $N$ , el cual representa la cantidad de dipolos magnéticos por unidad de volumen contenidos en un punto de la muestra, puede escribirse la expresión para la magnetización del sistema de espines de la siguiente manera:

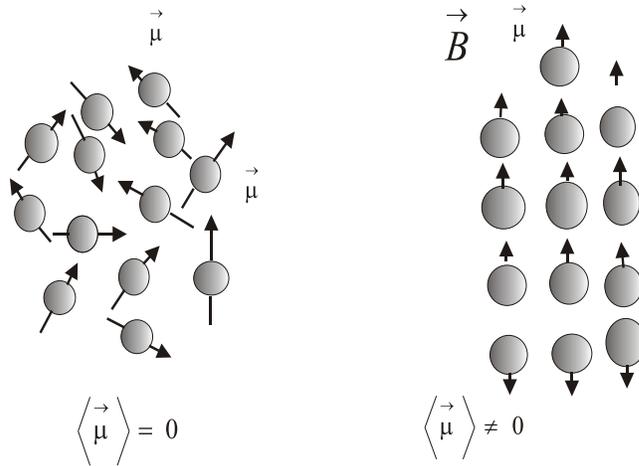
$$\vec{M} = N \mu_z \tanh \left( \frac{-\mu_z B_z}{\kappa T} \right) \quad (1.25)$$

En el equilibrio térmodinámico con el campo magnetico  $B$  orientado sobre el eje  $Z$  de un sistema coordenado  $XYZ$ , el sistema de espines tienden a alcanzar su configuración de menor energía. En esta configuración, el sistema se encontrará con una mayor poblacion de espines con componente de momento magnético  $-\mu_z$  paralela al campo  $B_z$ , y por lo tanto el momento magnético medio deberá señalar en el sentido positivo del campo  $\vec{B}$ .

La orientación del momento magnético medio, queda caracterizada por el parámetro  $\frac{-\mu_z B_z}{\kappa T}$ , el cual mide la razón entre la energía de espín y la energía térmica del sistema.

Si la temperatura en la muestra es muy alta, es decir,  $\frac{-\mu_z B_z}{\kappa T} \ll 1$ , la probabilidad de que el momento magnético del dipolo sea paralelo al campo es casi la misma de que sea antiparalelo. En éste caso, los dipolos se encontrarán distribuidos totalmente al azar en la muestra, de tal manera que el momento magnético promedio deberá ser nulo. Esto se ilustra en la siguiente figura.

Figura 11: Momento magnético promedio de un sistema de dipolos



Por otra parte, si la temperatura es muy pequeña, es decir,  $\frac{-\mu_z B_z}{\kappa T} \gg 1$ , es mucho más probable que el momento magnético sea paralelo al campo que antiparalelo. En éste caso,  $\langle \vec{\mu} \rangle \approx \vec{\mu}_z$  y en correspondencia la magnetización se reduce a:

$$\vec{M} = N\vec{\mu}_z \quad (1.26)$$

Que es su máximo valor posible o valor de saturación, el cual es independiente del campo  $\vec{B}$  y de la temperatura  $T$ .

## 2. DESCRIPCIÓN CLÁSICA DE LA RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR

En el capítulo anterior, se han desarrollado las herramientas necesarias para proporcionar la descripción clásica de la Resonancia Magnética Nuclear (RMN). En este capítulo, se procederá a desarrollar de manera reconstructiva en orden de ideas, la descripción de este fenómeno.

### 2.1. Sistemas físicos en movimiento oscilatorio

Un sistema simple del cual pueden extraerse las características principales de un movimiento oscilatorio, lo constituye el movimiento de vaivén de la silla de un columpio. En un columpio, la silla de éste se mece de un extremo a otro alcanzando la misma altura en ambos extremos. El ángulo máximo que la silla puede formar con la vertical, sirve para determinar cuanto se ha desplazado esta del equilibrio en ambos lados y se denomina: **amplitud de oscilación**. El ritmo con que la silla se mueve de un extremo a otro, es una propiedad inherente de cada sistema y se denomina: **frecuencia de oscilación**, la cual se mide en ciclos /segundo o Hertz. Estas dos propiedades: amplitud y frecuencia, sirven para caracterizar completamente a un movimiento oscilatorio.

Otro movimiento oscilatorio con características muy particulares, lo constituye el movimiento de **precesión** que realiza un trompo. Un trompo puede girar libremente sobre su eje y permanecer así, hasta que las asperezas de la superficie en la que se encuentra girando lo van deteniendo paulatinamente. En éste punto de su movimiento, se puede observar que el trompo se inclina y su cabeza comienza a hacer un movimiento circular describiendo las paredes de un cono. Este tipo de movimiento es la precesión y la misma se realiza con una frecuencia de oscilación característica, la cual corresponde a la velocidad angular con la que se mueve la cabeza del trompo. La amplitud en este tipo de movimiento, es el desplazamiento angular máximo que el eje del trompo ha formado con la vertical.

## 2.2. Resonancia en sistemas oscilantes

La resonancia es un fenómeno que puede ser medido y detectado tanto a nivel macroscópico como al nivel microscópico de la naturaleza. Lo experimentan los sistemas físicos que se encuentran en movimiento oscilatorio, caracterizados por una amplitud y frecuencia de oscilación. Este fenómeno es originado cuando un agente externo al sistema, entra en interacción directa con éste, modificando la amplitud de las oscilaciones. Esta interacción es efectiva cuando la frecuencia de acción con la que actúa el agente externo, es igual a la frecuencia natural de oscilación del sistema físico.

Los dos sistemas macroscópicos, estudiados anteriormente, pueden ser utilizados para mostrar como es inducida la resonancia en un sistema oscilatorio.

En la siguiente figura, se puede observar a un niño que se encuentra meciendo en la silla de un columpio, al cuidado de su padre. Con el paso del tiempo, los efectos de fricción en el sistema de sujeción de la silla, hacen que esta disminuya la amplitud de sus oscilaciones. Para contrarrestar éste efecto, el niño le pide a su padre que le impulse nuevamente. El padre observa que para ser efectivo el impulso y aumentar más la amplitud de oscilación, debe entrar en sincronía con el movimiento de vaivén de la silla e impulsarla periódicamente, es decir, hacerla resonar a base de impulsos periódicos.

Figura 12: Oscilación y resonancia en un columpio

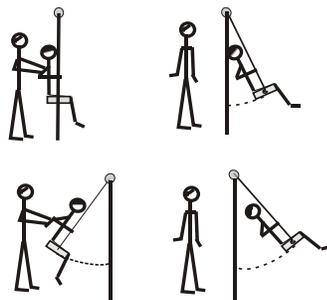
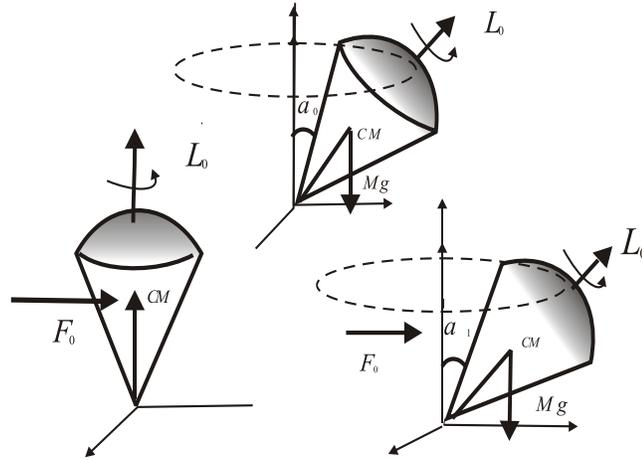


Figura 13: Precesión y resonancia de un trompo



En esta figura se muestra un pequeño trompo que se encuentra girando verticalmente, con su vector momentun angular  $\vec{L}_0$  paralelo a su eje de simetría. Sobre el centro de masa de éste, se aplica una pequeña fuerza horizontal  $\vec{F}_0$  que hace inclinarlo un ángulo  $\alpha_0$ . Esta inclinación conlleva al centro de masa ha desplazarse de su posición de equilibrio, lo que da origen a un torque.

$$\frac{dL}{dt} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g}$$

El torque reorienta constantemente al eje del trompo, en dirección perpendicular al plano que forman los vectores  $\vec{r}_{cm}$  y  $M\vec{g}$ , lo que da origen al movimiento de precesión.

Si el trompo se encuentra precesando con una frecuencia de oscilación  $\omega_0$ , la resonancia del mismo se obtendrá introduciendo pequeños impulsos periódicos de fuerza  $\vec{F}_0$ , aplicados de forma perpendicular cada  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  segundos. Estos impulsos permiten observar una segunda inclinación  $\alpha_1$  del trompo, una tercera inclinación  $\alpha_3$ , ... una enésima inclinación  $\alpha_n$ , correspondiente con el número  $n$  de impulsos aplicados.

En los dos ejemplos anteriores, se ha ilustrado como se puede inducir la resonancia en un sistema oscilatorio a través de la acción efectiva de un agente externo. Este agente entrega energía al sistema el cual posteriormente la cede a sus alrededores por medio de sus mecanismos de emisión. En general, un sistema de partículas tienden a volver a su estado de equilibrio por medio de estos mecanismos, los cuales se denominan: **mecanismos de relajación**

### 2.3. Precesión de una partícula con espín $\frac{1}{2}$

A nivel microscópico y en presencia de campos magnéticos constantes, los sistemas con espín como los núcleos atómicos y las partículas que lo constituyen, tienen un comportamiento similar al de pequeños trompos que precesan a una frecuencia característica.

Para describir éste fenómeno, considere el movimiento de una partícula con espín  $\frac{1}{2}$  y momento magnético  $\vec{\mu}$ , en presencia de un campo magnético constante  $\vec{B}_0$ , el cual es paralelo al eje Z de un sistema coordenado XYZ elegido como sistema de referencia. El momento magnético interactúa con el campo y la partícula experimenta un torque magnético, el cual con la ayuda de la ecuación (1.8) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{L}_s}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0$$

Utilizando la relación que existe entre el momento magnético y el momentum angular para una partícula de espín  $\frac{1}{2}$ , la cual esta expresada en la ecuación (1.10), puede modificarse esta ultima expresión para representar la interacción de la partícula con el campo, únicamente en términos del momento magnético  $\vec{\mu}$  y del campo magnético  $\vec{B}_0$ .

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \times \vec{B}_0 \quad (2.1)$$

Ahora, haciendo unos pequeños cálculos del álgebra vectorial sobre la ecuación (2.1), puede obtener una idea clara de la naturaleza del movimiento de la partícula en su interacción con el campo magnético.

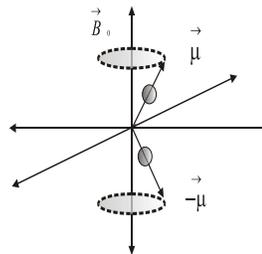
Multiplicando en términos del producto escalar entre vectores ambos lados de la ecuación (2.1), una primera vez por el vector momento magnético  $\vec{\mu}$ . Y nuevamente sobre la misma ecuación (2.1) una segunda vez ahora por el vector  $\vec{B}_0$ , se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{d\|\mu\|^2}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d(\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0)}{dt} = 0 \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) establece que el módulo del momento magnético es constante. Por su parte la ecuación (2.3) establece que el valor del producto interno de los vectores  $\vec{\mu}$  y  $\vec{B}_0$ , es fijo e independiente del tiempo. Esto solamente puede suceder si ambos vectores forman el mismo ángulo entre si en todo momento. Como el campo magnético es un vector fijo, se concluye que es el momento magnético el que realiza un movimiento de giro alrededor de éste campo. Este tipo de movimiento es una precesión y la misma se realiza con una velocidad angular constante  $\omega_0$ .

Figura 14: Precesión de un espín en un campo magnético uniforme



Para determinar la magnitud de la precesión del espín, pueden referirse las observaciones de su movimiento a un sistema coordenado en movimiento de rotación<sup>1</sup>, un sistema que gire con la misma velocidad angular con la que lo hace el momento magnético de la partícula. El respectivo cambio a éste sistema coordenado proporciona el siguiente resultado:

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\vec{\mu} \times \vec{\omega}_0 \quad (2.4)$$

Comparando éste resultado con la ecuación (2.1), puede observarse que la magnitud de la frecuencia de precesión es:

$$\omega_0 = -\gamma B_0 \quad (2.5)$$

La cual se denomina: **frecuencia de Larmour**.

#### 2.4. Precesión de un conjunto de espines $\frac{1}{2}$

Considere una pequeña muestra de materia, la cual está caracterizada por contener una abundante cantidad de núcleos con espín  $\frac{1}{2}$ . Esta muestra es colocada en una región donde existe un campo magnético uniforme de intensidad  $\vec{B}_0$ , el cual es paralelo al eje Z de un sistema coordenado XYZ.

Desde un punto de vista microscópico, cada punto de esta muestra contiene un número muy grande de espines que se encuentran en equilibrio térmico con su entorno inmediato, el cual esta constituido por el resto de la muestra. Macroscópicamente cada uno de estos puntos está caracterizado por el valor promedio de momento magnético que toma el conjunto de espines en cada punto.

Este valor promedio, permite representar el movimiento global del conjunto de espines en cualquier punto de la muestra de la siguiente manera:

$$\frac{d\langle\vec{\mu}\rangle}{dt} = \gamma\langle\vec{\mu}\rangle \times \vec{B}_0 \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>La descripción de éste sistema se desarrolla en el apéndice A

Multiplicando esta ecuación por el número  $N$ , el cual representa el número de espines por unidad de volumen contenidos en cada punto de la muestra, la misma puede escribirse como:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M} \times \vec{B}_0 \quad (2.7)$$

Esta ecuación, muestra que el movimiento de un conjunto de espines en un campo magnético uniforme, puede ser descrito macroscópicamente por la precesión del vector magnetización  $\vec{M}$ .

## 2.5. Resonancia magnética de un conjunto de partículas de espín $\frac{1}{2}$

Para una muestra de átomos con espín  $\frac{1}{2}$  los cuales precesan a una frecuencia de Larmour característica, la resonancia de estos puede ser representada en cada punto de la muestra a través de la resonancia de su magnetización en dichos puntos.

En el equilibrio térmico, la magnetización en cada punto de la muestra se encuentra totalmente paralela al campo  $\vec{B}_0$ , y la misma está constituida principalmente por las componentes  $\mu_z$  de todos los espines que la constituyen. Las componentes  $\mu_x$  y  $\mu_y$  no contribuyen al estado energético y se encuentran distribuidas aleatoriamente por lo que sus valores promedios son nulos.

La aplicación de un agente externo sobre el sistema, hace inclinar a la magnetización y la misma comienza a precesar como lo indica la ecuación ( 2.7). Este agente externo es un nuevo campo magnético  $\vec{B}_1(t)$ , el cual por analogía con el movimiento de precesión y resonancia del trompo, debe aplicarse de forma perpendicular al campo original. Si se desea que éste campo haga inclinar aún más a la magnetización (hacerla resonar), el campo debe girar y perseguir a la magnetización. La ecuación de movimiento para la magnetización bajo estas condiciones puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M} \times [\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)] \quad (2.8)$$

Los efectos del campo  $\vec{B}_1$  sobre la magnetización, pueden apreciarse mejor si se enfocan las observaciones desde un sistema de referencia en movimiento de rotación  $X^*Y^*Z^{*1}$ . Un sistema en el cual el campo  $\vec{B}_1$  sea un vector independiente del tiempo. Haciendo el cambio de representación a éste sistema de referencia móvil, la ecuación de movimiento puede reescribirse de la siguiente manera:

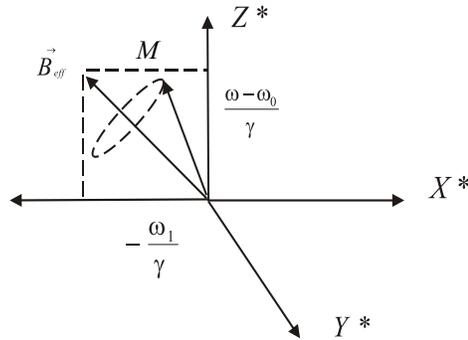
$$\frac{d^*\vec{M}}{dt} = \vec{M} \times [\Delta\omega k^* - \omega_1 i^*] \quad (2.9)$$

En donde se han hecho las sustituciones  $\omega_0 = \gamma B_0$ ,  $\omega_1 = \gamma B_1$  y  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ , siendo  $\omega$  la frecuencia de oscilación con la que gira el campo  $\vec{B}_1$ . Ahora, si se hace la sustitución  $\vec{B}_{eff} = \frac{1}{\gamma}[\Delta\omega k^* - \omega_1 i^*]$  la ecuación de movimiento adopta la forma definitiva:

$$\frac{d^*\vec{M}}{dt} = \gamma\vec{M} \times \vec{B}_{eff} \quad (2.10)$$

Esta ecuación la cual es similar a la ecuación (2.7), muestra que el movimiento de la magnetización vista desde el sistema de referencia giratorio, es un movimiento de precesión en torno al campo magnético efectivo  $\vec{B}_{eff}$ .

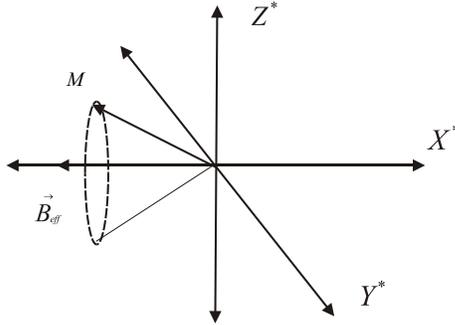
Figura 15: Precesión de  $\vec{M}$  en torno al campo efectivo  $\vec{B}_{eff}$



<sup>1</sup>La descripción de éste sistema se da en el apéndice A

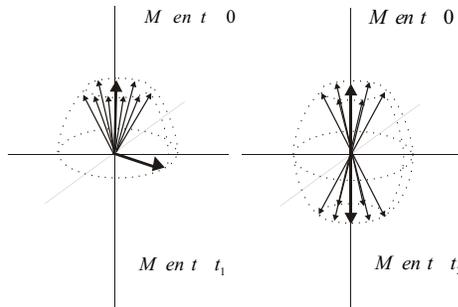
Si la frecuencia de oscilación con la que gira el campo  $\vec{B}_1$  se aproxima a la frecuencia de oscilación de la magnetización  $\omega_0$ , es decir,  $\Delta\omega = 0$ . La magnetización realizara su movimiento de precesión alrededor del campo efectivo  $\vec{B}_{eff} = -\frac{\omega_1}{\gamma}$ , el cual ahora es paralelo al eje  $X^*$ . Esto se puede observar en la siguiente figura:

Figura 16: Precesión de  $\vec{M}$  en torno a  $X^*$



Introduciendo los tiempos de observación  $t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  y  $t_2 = \frac{\pi}{\omega_1}$ , en los cuales la magnetización ha girado un ángulo  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$  radianes respectivamente, las observaciones trasladadas al sistema de referencia original muestran los siguientes resultados.

Figura 17: Resonancia del espín vista en el sistema de referencia XYZ



En la figura anterior se han ilustrado cuales son los efectos del campo oscilante  $\vec{B}_1$  sobre la magnetización  $\vec{M}$ . Si la perturbación de este campo se hace efectiva en un tiempo  $t_1$ , la magnetización que en un inicio es paralela al campo  $\vec{B}$  cambiará su dirección inicial hasta encontrarse completamente sobre el plano XY, precesando alrededor del eje Z. Si esta perturbación es efectiva en un tiempo  $t_2$ , la magnetización cambiará drásticamente de orientación y la misma se encontrara ahora abajo del plano XY, precesando alrededor del eje  $-Z$ .

## 2.6. Interacción de un conjunto espines $\frac{1}{2}$ con su entorno

Los resultados de la sección (1.3), pueden ser utilizados para investigar como el entorno inmediato al conjunto de espines, influye marcadamente en el proceso de retorno al equilibrio de la magnetización, fuera de la resonancia.

En ausencia total de perturbación magnética, los espines de una muestra de materia se encuentran distribuidos totalmente al azar. La presencia del campo magnético  $\vec{B}_0$  crea una redistribución de los espines en dos estados de energía bien definidos.

$$\begin{aligned} E_- &= \vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = \mu_z B_0 \\ E_+ &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\mu_z B_0 \end{aligned}$$

Cuando el sistema ha alcanzado el equilibrio termodinámico, la diferencia entre las poblaciones de estos estados es la que determina el sentido de la magnetización, la cual se encontrará totalmente paralela al campo externo, es decir,  $\vec{M} = M_z$ . Ahora, cuando es introducido el campo magnético giratorio  $\vec{B}_1$ , la magnetización se inclina y comienza a precesar en torno al campo  $\vec{B}_0$ . Esto da lugar a que aparezcan componentes transversales de magnetización  $M_{xy}$ .

Después de que la perturbación de éste campo ha cesado, las respectivas componentes de la magnetización en cada punto de la muestra, comenzarán a retornar a sus valores de equilibrio cediendo energía a su entorno inmediato.

Como se ha mencionado en la sección (2.1), todos los sistemas de partículas tienden a alcanzar su estado de equilibrio o de mínima energía a través de una serie de mecanismos denominados: **mecanismos de relajación**. En el caso del sistema de espines, hay dos mecanismos de relajación característicos, los cuales están relacionados con las componentes de magnetización  $M_z$  y  $M_{xy}$ .

La **magnetización longitudinal**  $M_z$ , retorna a su valor de equilibrio por medio de un mecanismo de relajación denominado: **relajación espín-retículo**. Este mecanismo es el resultado de un intercambio energético entre el sistema de espines y el entorno próximo que los contiene, el cual es llamado: **red o reservorio**.

Cuando la magnetización es estimulada a resonar por medio del campo  $\vec{B}_1$ , el sistema de espines que la conforma en cada punto, absorbe energía selectivamente de las ondas de radiofrecuencia de donde se origina el campo. Esta selectividad consiste en que únicamente se absorbe energía de las ondas, cuya frecuencia sea igual a la frecuencia de precesión de los espines. En éste proceso, una parte los espines que se encuentran en el estado de menor energía  $E_-$ , son promovidos al estado de mayor energía  $E_+$  por la absorción de un cuanto de energía  $E = \hbar\omega_0$ . El desbalance en el número de estados, origina que la magnetización longitudinal disminuya de su valor de equilibrio  $M_0$  al nuevo valor  $M_z$ .

El retorno al equilibrio, es un proceso que depende de las características de la muestra de materia en estudio. Estas características como: el tipo y tamaño de las moléculas, influyen marcadamente en el tiempo que le toma a la magnetización en recobrar su valor de equilibrio. Este proceso puede ser representado matemáticamente de la siguiente manera:

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1} \quad (2.11)$$

En esta ecuación,  $T_1$  es un parámetro que resume todas las características de la muestra de materia y se denominada: **tiempo de relajación longitudinal**.

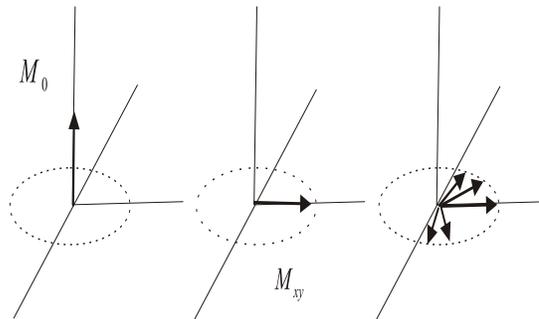
En términos del tiempo de relajación  $T_1$ , la solución de la ecuación (2.11) puede escribirse de la siguiente manera:

$$M_z = M_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \quad (2.12)$$

Esta ecuación muestra que la evolución de la magnetización al equilibrio, sucede de una forma exponencial a un ritmo determinado por el tiempo de relajación  $T_1$ . En éste tiempo, la magnetización se recupera aproximadamente en un 63 % de su valor de equilibrio.

La magnetización transversal  $M_{xy}$ , retorna a su valor de equilibrio por medio de un mecanismo de relajación llamado: **relajación dipolo-dipolo**. Este mecanismo es atribuido a la acción de los dipolos moleculares y nucleares cercanos a la muestra de espines. Los dipolos según la ecuación (1.5), generan campos magnéticos internos los cuales perturban la homogeneidad del campo externo  $\vec{B}_0$ . Esta perturbación en el campo, origina que los espines en los distintos puntos del volumen analizado precesen a diferentes frecuencias de Larmour, dando como resultado un desfase que tiende a hacer desaparecer la magnetización  $M_{xy}$ .

Figura 18: Anulación de  $M_{xy}$  por desfase en la precesión de sus espines



El tiempo que le toma a la magnetización transversal en retornar a su valor inicial, incluye tanto la interacción de los dipolos cercanos como la influencia de la inhomogeneidad del campo magnético externo, éste tiempo se denomina: **tiempo de relajación transversal**  $T_2$ , y la ecuación de movimiento que describe el proceso de relajación se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{dM_{xy}}{dt} = -\frac{M_{xy}}{T_2} \quad (2.13)$$

Y su respectiva solución es:

$$M_{xy} = M_{xy} e^{-\frac{t}{T_2}} \quad (2.14)$$

Tomando en cuenta los mecanismos de relajación longitudinal y transversal, como la interacción total de los campos  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ , la descripción del movimiento de las componentes de la magnetización, puede obtenerse resolviendo una serie de ecuaciones diferenciales que reúnen estos elementos, estas ecuaciones son denominadas: **ecuaciones de Bloch**.

$$\frac{dM_x}{dt} = (\vec{M} \times \vec{B})_x - \frac{M_x}{T_2} \quad (2.15)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = (\vec{M} \times \vec{B})_y - \frac{M_y}{T_2} \quad (2.16)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = (\vec{M} \times \vec{B})_z - \frac{M_0 + M_x}{T_1} \quad (2.17)$$

Con los valores iniciales de  $\vec{M}$  tomados apropiadamente, las soluciones de estas ecuaciones para un pulso  $\frac{\pi}{2}$  pueden escribirse como:

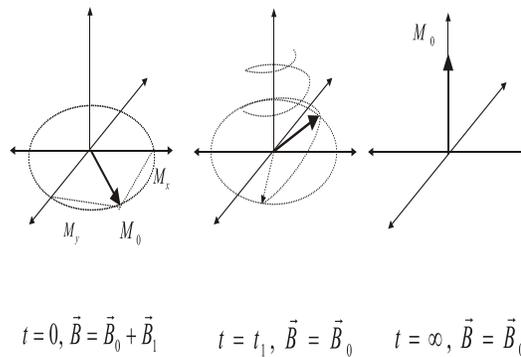
$$M_x = M_0 e^{-\frac{t}{T_2}} \cos(\omega_0 t) \quad (2.18)$$

$$M_y = M_0 e^{-\frac{t}{T_2}} \text{sen}(\omega_0 t) \quad (2.19)$$

$$M_z = M_0 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad (2.20)$$

Estas ecuaciones, describen la evolución de las componentes de la magnetización en todo momento después de aplicado un pulso de campo magnetico.

Figura 19: Evolución temporal de la magnetización



Como puede observarse en esta figura, la acción del campo magnético  $\vec{B}_1$  presente en un tiempo  $t = 0$ , hace inclinar la magnetización longitudinal  $M_0$  hacia el plano XY. En éste momento, la componente transversal de la magnetización es enteramente  $M_0 = M_{xy}$ . En un tiempo posterior  $t = t_1$  en el que la acción del campo  $\vec{B}_1$  ha cesado, los espines componentes de la magnetización transversal comienzan a perder la coherencia de fase. Este desfase es originado por la falta de uniformidad en el campo  $\vec{B}_0$  y por el efecto de los dipolos moleculares y nucleares propios de la muestra analizada. El desfase origina que los espines se habrán en abanico y su aporte en el promedio se anule, lo que origina la disminución la magnetización transversal.

Por su parte, la magnetización longitudinal después de que ha terminado la perturbación del campo oscilante  $B_1$ , comienza a recobrar su valor inicial como resultado de la energía cedida a la red de parte de sus espines componentes.

### 3. DESARROLLO CUÁNTICO DE LA RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR

El estudio de los fenómenos microscópicos de la naturaleza, se encuentra enmarcado en el cuadro de leyes y principios que proporciona la física cuántica. Debido a la naturaleza del fenómeno de la RMN, éste es el marco de estudio donde puede expresarse de una mejor manera éste fenómeno.

#### 3.1. Partícula con espín $\frac{1}{2}$ en un campo magnético uniforme

Un átomo cuyo núcleo posee espín  $\frac{1}{2}$ , es introducido en una región espacial donde existe un campo magnético uniforme de intensidad  $\vec{B}_0$ , el cual es paralelo al eje Z de un sistema coordenado XYZ utilizado como sistema de referencia. El momento magnético de la partícula interactúa con el campo dando origen a un sistema magnético con dos niveles de energía bien definidos.

Desde un punto de vista clásico, la energía de este sistema puede escribirse como el producto escalar de los vectores: momento magnético  $\vec{\mu}$  y el campo  $\vec{B}_0$ . Si además se utiliza la relación existente entre el momento magnético y el momento angular, la cual está expresada en la ecuación (1.10), la energía puede escribirse como:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\mu_z B_0 = -\gamma B_0 L_z$$

El análogo cuántico de esta expresión, se obtiene al hacer la sustitución de las magnitudes clásicas por sus operadores cuánticos equivalentes. Utilizando la relación  $\omega_0 = \gamma B_0$  la energía de éste sistema puede escribirse como:

$$\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z \tag{3.1}$$

En esta ecuación,  $\hat{S}_z$  es el operador de espín en la dirección Z, el cual es análogo a la componente Z del momento angular, y  $\hat{H}$  es el operador hamiltoniano que representa la energía total del sistema.

Los valores propios y kets propios de la representación matricial del hamiltoniano para éste sistema son respectivamente:

$$\hat{H}|+\rangle = +\frac{\hbar\omega_0}{2}|+\rangle \text{ y } \hat{H}|-\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2}|-\rangle \quad (3.2)$$

Estos valores son independientes del tiempo y de la orientación espacial del sistema coordinado utilizado para su representación. El estado de la partícula en la representación dada por los ket propios del hamiltoniano del sistema, puede escribirse de la siguiente manera:

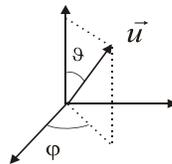
$$|\psi\rangle = c_1|+\rangle + c_2|-\rangle \quad (3.3)$$

En ésta ecuación se puede observar que el efecto del campo magnético sobre la partícula, es crear un sistema con dos estados probables de energías:

$$E_+ = +\frac{\hbar\omega_0}{2} \text{ y } E_- = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (3.4)$$

La naturaleza del movimiento de la partícula puede determinarse de una mejor manera, si los efectos del campo magnético son analizados desde un sistema de referencia diferente. La dirección de éste sistema esta especificada por el vector unitario  $\vec{u}$ , el cual es paralelo al momento magnético de la partícula.

Figura 20: Sistema de referencia en movimiento de precesión



El observable de espín en éste sistema de referencia, se puede obtener proyectando el operador de espín total  $\widehat{S}$  en la recta determinada por el vector  $\vec{u}$ . Matemáticamente ésta operación puede representarse de la siguiente manera:

$$S_u = S \cdot u = (S_x) \text{sen} \theta \cos \phi + (S_y) \text{sen} \theta \text{sen} \phi + (S_z) \cos \theta$$

Los kets propios de este observable son respectivamente:

$$|+\rangle_u = \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} |+\rangle + \text{sen} \frac{\theta}{2} e^{\frac{\phi}{2}} |-\rangle \quad (3.5)$$

$$|-\rangle_u = -\text{sen} \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{\phi}{2}} |-\rangle$$

Si en un inicio ( $t = 0$ ) el estado del sistema es descrito por el ket representado en la ecuación (3.5), en un tiempo posterior ( $t = t_1$ ) éste estado habrá evolucionado en el tiempo. Debido a que el hamiltoniano del sistema es un operador independiendo del tiempo, ésta evolución puede determinarse aplicando la ecuación de Schrodinger al ket  $|+\rangle_u$ .

$$|+\rangle_u(t) = \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} e^{-\frac{iE_+ t}{\hbar}} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{\phi}{2}} e^{\frac{iE_- t}{\hbar}} |-\rangle \quad (3.6)$$

Utilizando las ecuaciones (3.4) que relacionan las energías de los estados  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  con la **frecuencia de Borh**, la representación del estado del sistema en su evolución temporal puede escribirse como:

$$|+\rangle_u(t) = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\frac{\phi+\omega_0 t}{2})} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\phi+\omega_0 t}{2})} |-\rangle \quad (3.7)$$

La interpretación de esta ecuación puede darse de la siguiente manera: en el estado  $|+\rangle_u$ , la orientación del momento magnético de la partícula está determinado por los ángulos  $\theta$  y  $\phi(t)$ . El ángulo  $\theta$ , es el ángulo que el vector  $\vec{u}$  forma con el campo magnético y su valor es constante. El ángulo  $\phi(t) = \phi + \omega_0 t$  el cual varía con el tiempo, está asociado al movimiento de giro que el momento magnético realiza alrededor del campo. Este tipo de movimiento es una precesión y la misma se realiza a una frecuencia de oscilación constante  $\omega_0$ .

### 3.1.1. Resonancia magnética de una partícula de espín $\frac{1}{2}$

Una partícula cuyo núcleo posee espín  $\frac{1}{2}$  se introduce en una región donde existe un campo magnético uniforme de intensidad  $B_0$ . El estado de ésta partícula, representado en la base de kets propios del observable  $\hat{S}_z$ , queda representado de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle \quad (3.8)$$

Como se demostró en la sección (3.1), la acción de un campo magnético uniforme sobre una partícula de espín  $\frac{1}{2}$ , induce a su momento magnético a adquirir un movimiento de precesión en torno a éste campo. Ahora se investigará cual es el efecto de introducir un campo magnético giratorio  $\vec{B}_1(t)$  en el sistema formado por la partícula y el campo original, y de forma perpendicular a éste. Primero debe observarse que el hamiltoniano del sistema en este nuevo sistema de referencia, es ahora un operador dependiente del tiempo.

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ &= -\gamma \hat{S} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)) \end{aligned}$$

Haciendo la respectiva expansión del producto escalar del operador  $\hat{S}$  con los vectores  $\vec{B}_0$  y  $\vec{B}_1$ , se obtiene el siguiente resultado:

$$\hat{H}(t) = \omega_0 \hat{S}_z + \omega_1 (\cos(\omega t) \hat{S}_x + \text{sen}(\omega t) \hat{S}_y)$$

En ésta ecuación,  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$  y  $\hat{S}_z$  son los respectivos operadores del observable de espín total  $\hat{S}$  asociados a las direcciones espaciales X, Y, Z respectivamente. En términos de estos observables, la matriz que representa al hamiltoniano del sistema puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & \omega_0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Sustituyendo éste resultado en la ecuación de Schrodinger y aplicándola al ket dado en la ecuación (3.8), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones acopladas:

$$i \frac{da_+(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{2} a_+(t) + \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} a_-(t) \quad (3.10)$$

$$i \frac{da_-(t)}{dt} = \frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t} a_+(t) + \frac{\omega_0}{2} a_-(t) \quad (3.11)$$

La resolución de éste sistema involucra un tratamiento con un hamiltoniano que depende del tiempo. Para evitar esta situación, puede hacerse el cambio de representación a un sistema de referencia en movimiento de rotación. Esto puede obtenerse aplicando un operador de rotación que traslade las observaciones a un sistema de referencia en movimiento de precesión alrededor del eje Z. El operador que representa esta operación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\widehat{R}(t) = e^{-i\omega t \frac{S_z}{\hbar}}$$

La aplicación de éste operador sobre el vector de estado representado en la ecuación (3.8), deja el siguiente par de relaciones para sus respectivas amplitudes de probabilidad:

$$b_+(t) = e^{-i\omega t} a_+ \quad (3.12)$$

$$b_-(t) = e^{-i\omega t} a_- \quad (3.13)$$

Sustituyendo estos resultados en las ecuaciones (3.10 y 3.11), el sistema de ecuaciones acopladas puede reescribirse de la siguiente forma:

$$i \frac{db_+(t)}{dt} = -\frac{\Delta\omega_0}{2} b_+(t) + \frac{\omega_1}{2} b_-(t) \quad (3.14)$$

$$i \frac{db_-(t)}{dt} = \frac{\omega_1}{2} b_+(t) + \frac{\Delta\omega_0}{2} b_-(t) \quad (3.15)$$

Lo que permite escribir la representación matricial del hamiltoniano en el sistema de referencia en rotación de la siguiente forma:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) muestra que el hamiltoniano del sistema, descrito en el marco de referencia giratorio, es ahora un operador independiente del tiempo, y sus respectivos valores propios son:

$$E_1 = -\frac{\hbar}{2}\Delta\omega \quad y \quad E_2 = \frac{\hbar}{2}\Delta\omega \quad (3.17)$$

Desde el punto de vista cuántico, la resonancia tiene lugar cuando hay una transición de estado entre los estado accesibles de un sistema cuántico. Esta transición es originada por la absorción selectiva de cuantos de energía por parte del sistema, los cuales provienen de la radiación de radiofrecuencia emitida por una antena.

Si en un inicio  $t = 0$  el estado del sistema es descrito por ket  $|\psi\rangle$ , el cual se encuentra en uno de sus estados accesibles, por ejemplo:

$$|\psi(t = 0)\rangle = |+\rangle$$

El correspondiente ket en el sistema giratorio, según las ecuaciones (3.12 y 3.13) estará dado como:

$$|\bar{\psi}(t = 0)\rangle = |+\rangle$$

Recordando que para una rotación representada por el operador  $\hat{R}(t) = e^{-i\omega t \frac{S_z}{\hbar}}$ , existe asociada a la misma un cambio de estado el cual estará representado por el ket:

$$|\bar{\psi}\rangle = b_+|+\rangle + b_-|-\rangle$$

Bajo las condiciones establecidas, la resonancia ocurrirá cuando haya una transición del estado  $|+\rangle$  al estado  $|-\rangle$ . La probabilidad  $P_{+-}$  de que esta transición ocurra en un tiempo posterior  $t$  puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 P_{+-} &= \| \langle - | \psi(t) \rangle \|^2 \\
 &= \| a_-(t) \|^2 \\
 &= \| b_-(t) \|^2 \\
 &= \| \langle - | \bar{\psi}(t) \rangle \|^2
 \end{aligned}$$

Esta probabilidad puede calcularse sustituyendo los valores propios del hamiltoniano (expresados en la ecuación 3.17) en la fórmula de **Rabí**<sup>2</sup>. La formula de Rabí es una expresión matemática que se utiliza para calcular la probabilidad de transición en sistemas cuánticos bajo pequeñas perturbaciones, y esta expresada de la siguiente manera:

$$P_{+-}(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \Delta\omega^2} \sin^2 \left( \sqrt{(\omega_1^2 + \Delta\omega^2)} \frac{t}{2} \right) \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) proporciona información de carácter probabilístico sobre el comportamiento del sistema ante las pequeñas perturbaciones originadas por el campo oscilante  $b_1(t)$ . En un inicio ( $t = 0$ ) cuando la perturbación del campo aún no ha ocurrido, la probabilidad de transición entre estados es nula y el sistema permanecerá en el estado  $|+\rangle$  indefinidamente. Al paso de un breve tiempo, ésta probabilidad oscilará sinusoidalmente entre los valores 0 y  $(\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \Delta\omega^2})$ . Si la frecuencia de oscilación del campo es mucho mayor que la frecuencia de Larmour, es decir,  $\| \Delta\omega \| \gg \| \omega_1 \|$  la probabilidad continuará siendo nula. Si la frecuencia se acerca ligeramente a la frecuencia de resonancia  $\Delta\omega \approx 0$  la amplitud de las oscilaciones aumentará considerablemente. La condición de resonancia se satisface cuando la frecuencia externa iguala a la frecuencia natural del sistema  $\Delta\omega = 0$ , entonces existe una clara certeza de que ocurrirá una transición hacia el estado  $|-\rangle$ . Esta transición se hará efectiva cada  $t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega_1}$  segundos, donde  $n$  es un entero.

---

<sup>2</sup>La deducción de esta fórmula se encuentra en el apéndice B

### 3.2. Interacción magnética de un conjunto de partículas de espín $\frac{1}{2}$

El estudio de la resonancia para un conjunto de partículas de espín  $\frac{1}{2}$ , puede hacerse a través del cálculo de sus magnitudes observables promedio por medio de el operador de densidad.

Una muestra de partículas cuyos núcleos poseen espín  $\frac{1}{2}$ , es introducida en una región donde existe un campo magnético uniforme de intensidad  $B_0$ . Cada uno de los espines experimenta una interacción con el campo y forma un subsistema energético el cual es descrito por el hamiltoniano  $\hat{H}_0$ . Si la interacción entre los espines es lo suficientemente débil como para considerarlos independientes entre sí, cada subsistema está descrito por un vector de estado que representa a un ensemble puro, el cual es una combinación lineal de los vectores propios  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$  del hamiltoniano.

El macrosistema compuesto por los subsistemas puros, presenta una situación de mezcla de estados en la cual el sistema no puede ser representado por un único vector de estado, por lo que es necesario recurrir a una descripción estadística.

En el equilibrio termodinámico con su entorno y a una temperatura absoluta  $T$ , el sistema de espines tiene una probabilidad  $Z^{-1}e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa T}}$  de encontrar espines en el estado  $|+\rangle$  y una probabilidad  $Z^{-1}e^{\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa T}}$ , de encontrar espines en el estado  $|-\rangle$ . La matriz que representa al operador de densidad para este sistema puede escribirse como:

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa T}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa T}} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

La función ( $Z = e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa T}} + e^{\frac{\hbar\omega_0}{2\kappa T}}$ ) que aparece en esta ecuación, es un factor de normalización el cual representa el número total de estados accesibles al sistema y se denominada **función de partición**.

Con la ayuda de la **matriz de densidad** se pueden calcular los valores medios de las componentes del momento magnético en el macrosistema de espines. Utilizando la relación espín-momento magnético (expresada en la ecuación 1.10), y calculando la traza del producto matricial de los operadores  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$ , y  $\hat{S}_z$  con la matriz de densidad, se obtienen los siguientes resultados:

$$\langle \hat{S}_x \rangle = Tr(\rho S_x) = 0 \quad (3.20)$$

$$\langle \hat{S}_y \rangle = Tr(\rho S_y) = 0 \quad (3.21)$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle = Tr(\rho S_z) = \frac{\hbar}{2} \tanh \frac{\hbar\omega_0}{\kappa T} \quad (3.22)$$

Estas ecuaciones concuerdan con los resultados experimentales obtenidos para la medición de la magnetización macroscópica, la cual está definida en términos de los valores medios de espín de la siguiente manera:

$$\vec{M} = N\gamma \langle \hat{S}_z \rangle$$

Los valores medios de las componentes  $\hat{S}_x$  y  $\hat{S}_y$ , están asociados a los efectos de interferencia de las amplitudes cuánticas de los estados base  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$ . En el equilibrio térmico, la precesión de los espines no tienen coherencia alguna y las faces de sus componentes muestran una alta entropía, por lo que el promedio de sus valores de espín en estas direcciones es nulo.

### 3.2.1. Resonancia de un conjunto de partículas de espín $\frac{1}{2}$

Considere nuevamente un sistema de partículas con espín  $\frac{1}{2}$  en un campo magnético uniforme de intensidad  $B_0$ . Sobre éste sistema es aplicado un campo magnético giratorio  $b_1(t)$ , el cual origina que las componentes del espín  $\mu_x$  y  $\mu_y$  de todas las partículas adquieran coherencia de fase en su movimiento de precesión, dando paso a que cada microsistema pueda ser representado por uno de los estados  $|\pm\rangle_x$  y  $|\pm\rangle_y$  asociados a estas componentes.

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |+\rangle \pm |-\rangle ] \text{ y } |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |+\rangle \pm i|-\rangle ]$$

El vector de estado para cada subsistema puede construirse a partir de una rotación del sistema original al plano XY, seguida de una rotación alrededor del eje Z, la cual, está determinada por la frecuencia de precesión  $\omega_0$ . En éste subsistema el vector de estado queda representado de la siguiente manera:

$$|\bar{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\omega_0}{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\omega_0}{2}}|-\rangle$$

Nuevamente cada uno de estos vectores de estado representa un ensemble puro, y el conjunto total de estos subsistemas constituyen el macrosistema, el cual muestra una situación de mezcla de estados. La matriz de densidad que representa el macrosistema puede escribirse como:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & e^{i\frac{\omega_0}{2}} \\ e^{-i\frac{\omega_0}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Ahora, con esta matriz pueden ser calculados los valores medios de las componentes de espín del macrosistema. Estos valores son:

$$\langle \hat{S}_z \rangle = Tr(\rho S_z) = 0 \quad (3.24)$$

$$\langle \hat{S}_y \rangle = Tr(\rho S_y) = \frac{\hbar}{2} \text{sen}(\omega_0 t) \quad (3.25)$$

$$\langle \hat{S}_x \rangle = Tr(\rho S_x) = \frac{\hbar}{2} \text{cos}(\omega_0 t) \quad (3.26)$$

Nuevamente existe concordancia entre las predicciones teóricas expresadas por estas ecuaciones, con los resultados experimentales obtenidos para la reorientación de la magnetización bajo un pulso  $\frac{\pi}{2}$ . En efecto, la componente de magnetización longitudinal  $\vec{M} = \gamma N \langle \hat{S}_z \rangle$  se anula por el efecto del campo, quedando únicamente la componente transversal  $\vec{M}_\perp = \gamma N \langle \hat{S}_\perp \rangle$  la cual esta asociada a los valores medios  $\langle \hat{S}_x \rangle$  y  $\langle \hat{S}_y \rangle$ .

## 4. DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES DE UN EQUIPO DE RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR UTILIZADO EN MEDICINA

La función principal de un equipo de resonancia magnética, como instrumento de ayuda en el diagnóstico médico, es la de crear las condiciones necesarias para generar y controlar el fenómeno de la RMN en el cuerpo humano.

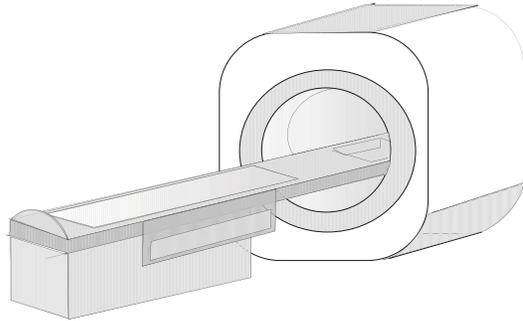
En este capítulo se describirá cada uno de los principales componentes que forman parte de un equipo de RMN, proporcionando las bases físicas de su funcionamiento y la función que realizan.

### 4.1. Descripción de los componentes básicos de un resonador magnético

Un resonador magnético es un sistema de dispositivos mecánicos, eléctricos y electrónicos compuesto por los siguientes componentes: un imán superconductor, un sistema de bobinas compensadoras, un sistema de bobinas de gradiente y un sistema de antenas emisor-receptor denominado: sonda de radiofrecuencia.

Todos los elementos que conforman el resonador están conectados de forma mecánica y electrónica, y los mismos son controlados por medio de una computadora que se encuentra en el exterior de la sala de examen. En la siguiente figura se ilustra la forma característica de un resonador magnético utilizado en el diagnóstico médico por imágenes.

Figura 21: Resonador magnético



#### 4.1.1. Imán superconductor

Este es un imán que está constituido por una serie de embobinados de alambre construido de una aleación metálica superconductora, los cuales se encuentran sumergidos en un medio que contiene helio líquido a una temperatura de 4.2 K.

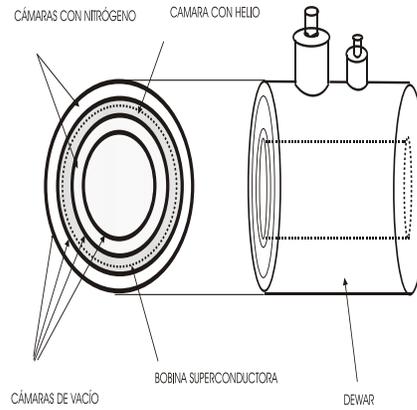
Todo el conjunto de bobinas se encuentra dentro de un contenedor grande y aislado. Este contenedor tiene una estructura lisa y brillante muy similar a un termo y se conoce con el nombre de: **Dewar**

En el interior del Dewar existe una serie de tres cámaras, la primera y la tercera de ellas se encuentran llenas de nitrógeno tan frío que se ha condensado en forma líquida. Estas capas de nitrógeno actúan como un aislante térmico entre la temperatura ambiente del exterior y la cámara interna.

La segunda cámara se encuentra llena de helio líquido a una temperatura aproximada de 4.2 K. En el interior de esta cámara es donde se encuentran suspendidas las bobinas superconductoras.

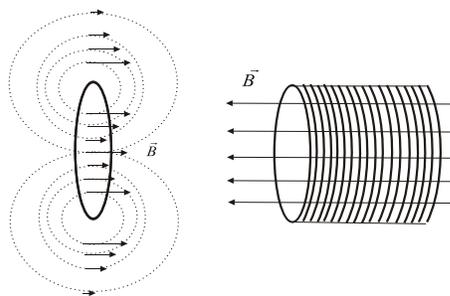
Esta serie de cámaras se encuentran separadas entre sí y del exterior por cámaras adicionales de vacío. La siguiente figura ilustra la disposición de todo el sistema.

Figura 22: Dispositivo de imán superconductor



Una bobina esta constituida por una serie de devanados circulares de alambre conductor en donde puede fluir una corriente eléctrica. La corriente eléctrica genera campos magnéticos en el espacio interior y exterior de la bobina. Esto se ilustra en la siguiente figura.

Figura 23: Espira y bobina de corriente



Los campos magnéticos generados en cada espira son tangentes en cada punto a las circunferencias imaginarias cuyo centro es el alambre conductor. La magnitud de los campos decae de manera inversamente proporcional al radio de cada circunferencia, y puede ser calculado utilizando la **ley de Ampere** (ecuaciones 1.4 y 1.14) aplicadas a cada espira conductora. El aporte total de todas las espiras crea en el interior de toda la bobina un campo magnético aproximadamente uniforme y constante.

Una bobina superconductora mantiene el mismo principio de una bobina de alambre conductor, la misma genera campos magnéticos por la corriente que circula en ella. La diferencia principal es que cada espira de alambre de esta clase de bobina, está construida de una aleación metálica superconductora.

La **superconductividad** es un fenómeno en el cual ciertas aleaciones de materiales, se comportan como conductores perfectos cuando se enfrían hasta una temperatura de 10 K. No exhiben resistencia alguna al paso de una corriente o dicho de otra manera, la conductividad del material es infinita. Por lo tanto, una corriente eléctrica puede fluir en el material sin disipaciones considerables de energía en forma de calor.

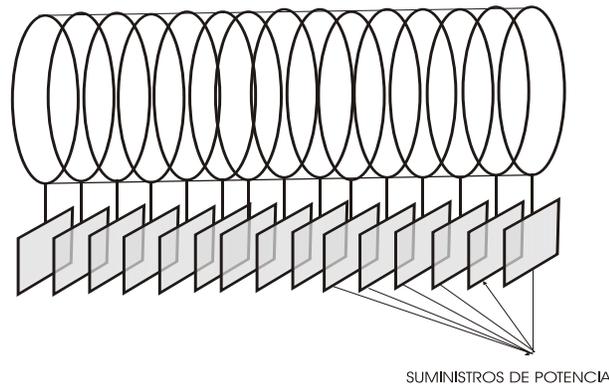
La función principal de un imán superconductor es generar un campo magnético uniforme en la región interior del resonador. Uno de estos imanes puede generar campos magnéticos de hasta 4 teslas de intensidad.

#### 4.1.2. Bobinas Compensadoras

En la abertura principal del imán superconductor se encuentra un tambor de hasta treinta arrollamientos individuales de alambre conductor llamados: bobinas de compensación, cada una con su propio suministro de potencia.

Los principios del funcionamiento de las bobinas compensadoras son los mismos de una bobina común, la misma produce un campo magnético por el paso de una corriente eléctrica, la cual es generada por una fuente de potencia externa. La siguiente figura ilustra la disposición de estas bobinas.

Figura 24: Sistema de bobinas compensadoras



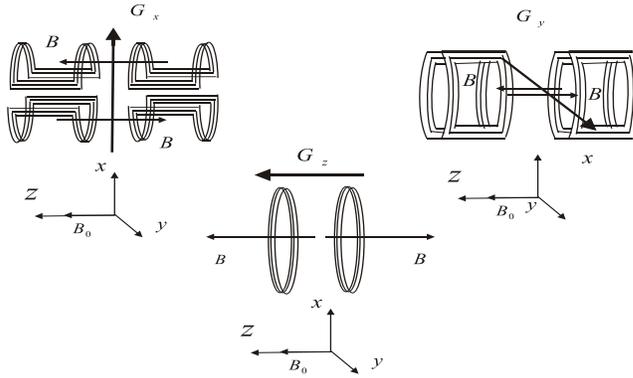
Una vez que el imán principal alcanza su potencia de campo, la corriente y la polaridad de cada bobina compensadora se ajusta para producir la homogeneidad máxima del campo magnético. A esto se le denomina: **compensación de imán**.

#### 4.1.3. Bobinas de Gradientes

Estas son tres tipos de embobinados móviles que se utilizan para proporcionar incrementos lineales de campo magnético en las direcciones espaciales X, Y, Z. Estos incrementos son adicionados al campo original  $\vec{B}_0$  a partir de un origen de referencia y en la dirección determinada como positiva, y sustraídos al mismo en la dirección opuesta o negativa.

Los principios del funcionamiento de una bobina de gradiente siguen siendo los mismos de una bobina común y es generar un campo magnético al paso de una corriente eléctrica. Una de las características resaltantes de este sistema de bobinas, es el diseño y la disposición geométrica de las mismas para poder producir los incrementos lineales de campo magnético. En la siguiente figura se muestran las formas características de estas bobinas.

Figura 25: Sistema de bobinas de gradientes



La primera bobina está compuesta por cuatro espiras o circuitos conductores paralelos en pares. Cada espira de corriente está diseñada de tal forma que los elementos conductores forman el perímetro de una hoja semicilíndrica. En cada bobina circula una corriente eléctrica de la misma intensidad. En el primer par de bobinas, la dirección de la corriente en cada una de ellas es en sentido contrario al de la otra. La misma situación es para el siguiente par de bobinas. Únicamente llevan la misma dirección de corriente las bobinas contiguas.

Los campos magnéticos generados en el interior de los extremos semicirculares de las bobinas contiguas, se superponen a lo largo del eje X del sistema de referencia del resonador, proporcionando un incremento lineal aditivo a  $\vec{B}_0$  por encima del origen de referencia, y sustractivo en la dirección opuesta.

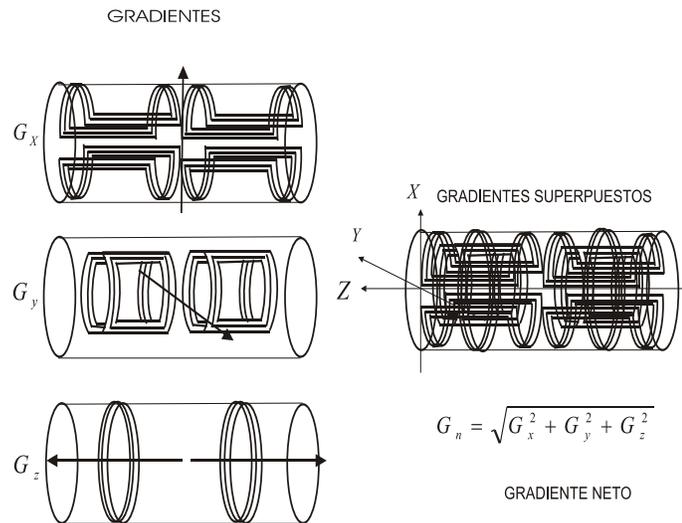
El segundo tipo de bobina de gradiente, está constituido por cuatro circuitos de alambre conductor diseñados en forma rectangular arqueados en los extremos más pequeños. Cada par de circuitos es colocado en forma paralela uno en contra del otro y alrededor del cilindro de soporte. En cada par de circuitos de estas bobinas se transporta corriente eléctrica de la misma intensidad y dirección. Únicamente llevan diferente dirección de corriente los circuitos contiguos.

La función principal de estas bobinas, es adicionar incrementos lineales en la intensidad del campo original  $\vec{B}_0$  en la dirección  $+Y$ , y sustraer incrementos lineales en la dirección  $-Y$ .

La tercer tipo de bobinas está constituido por dos circuitos de alambre conductor diseñados en forman de dos espiras circulares. En cada una de estas bobinas circula corriente eléctrica de la misma intensidad pero de sentidos opuestos. Estas bobinas pueden acercarse o alejarse una con respecto de la otra a lo largo del eje  $Z$  del sistema de referencia. Éste movimiento genera pequeños incrementos de campo que son adicionados al campo original  $\vec{B}_0$  en el espacio interior que separa a las dos bobinas en la dirección  $+Z$ , y sustraídos del mismo en la dirección  $-Z$ .

El sistema completo formado por las tres bobinas de gradiente, estaá contenido en un soporte especial que permite la movilización de las bobinas a lo largo y alrededor del mismo. La disposición final del sistema se ilustra en la siguiente figura.

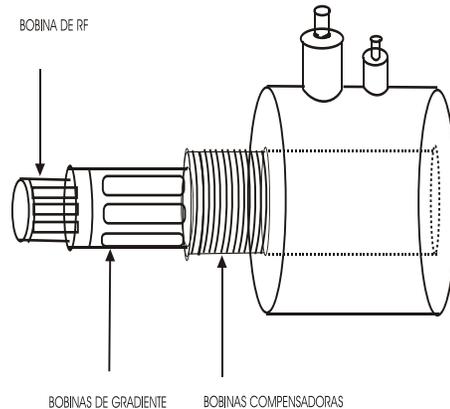
Figura 26: Sistema integrado de bobinas de gradientes



#### 4.1.4. Sonda de Radiofrecuencia

Este dispositivo está constituido por una bobina emisora y receptora de señales de radiofrecuencia. La unidad compuesta por la bobina antena y el material de soporte se conoce como **Sonda de RF**. La sonda de RF está situada dentro de las bobinas de gradiente y lo más cerca posible del paciente. La siguiente figura ilustra como está dispuesta la bobina de RF en el sistema total denominado **Bobinas Secundarias**.

Figura 27: Sistema de bobinas secundarias



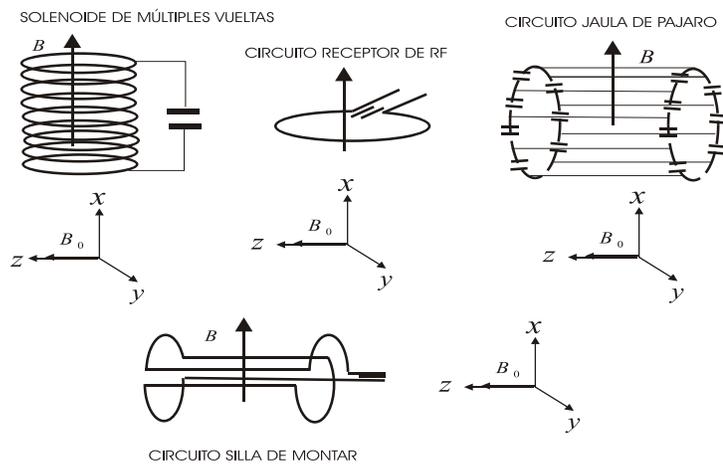
La antena emisora-receptora está constituida por diferentes tipos de embobinados que forman circuitos especiales. Estos circuitos son los encargados de generar la señal de radiofrecuencia necesaria para producir la resonancia en la materia. También son los encargados de recibir las señales generadas por la materia en su transición fuera de la resonancia.

Los circuitos de la sonda de RF están clasificados en dos tipos denominados: circuitos de volumen y circuitos superficiales. Los circuitos de volumen como su nombre lo dice, están diseñados para el estudio de zonas del cuerpo que abarcan un volumen determinado como por ejemplo: la cabeza, el tórax, región abdominal etc.

Los circuitos superficiales: son antenas bastante sensibles a la RF y son utilizados para el estudio de zonas de interés bien limitadas. Estos circuitos deben colocarse lo más próximo posible al paciente para delimitar la región de captación de señales, ya que el entorno fuera de la región de exploración puede afectar notablemente las señales recibidas.

En la siguiente figura se ilustra la forma característica de los diversos circuitos emisores y receptores utilizados en RMN.

Figura 28: Circuitos de radiofrecuencia



Los circuitos transmisores funcionan principalmente con corriente eléctrica oscilante o alterna. Estos circuitos son los encargados de generar las señales de RF que servirán para estimular a los núcleos de la materia a entrar en resonancia. De acuerdo a la teoría electromagnética, el movimiento acelerado de cargas eléctricas genera ondas eléctricas y magnéticas que son perpendiculares entre si, como lo indican las ecuaciones ( 1.14 y 1.15). Una corriente eléctrica oscilante o alterna, es un caso especial de movimiento acelerado de cargas, por lo tanto, éste tipo de corrientes generan también ondas electromagnéticas.

El circuito en forma de jaula que oportunamente se denomina **jaula de pájaro**, es el circuito de volumen más homogéneo que se utiliza para exploración de las zonas del cráneo. Tiene la doble función transmisor- receptor y puede generar señales de RF a la mayor parte de la cabeza. El campo magnético asociado a este circuito es perpendicular al campo principal  $B_0$ .

El circuito en forma de **silla de montar**, es un circuito de volumen que emite pulsos de radiofrecuencia al paso de una corriente alterna. El campo magnético generado por esta circuito es también perpendicular al campo principal.

Un solenoide es un embobinado especial de múltiples vueltas de alambre conductor que tiene la doble función emisor-receptor de ondas de radiofrecuencia. El paso de una corriente alterna por un solenoide y que oscile en un ancho de banda de radiofrecuencias, genera ondas electromagnéticas del mismo ancho de banda. Los campos magnéticos asociados a estas ondas son perpendiculares al campo del imán principal.

El funcionamiento de un circuito receptor está fundamentado en la **ley de inducción de Faraday** (ecuación 1.15). Según esta ley, el cambio en el tiempo que experimenta el flujo magnético que atraviesa el área de un circuito, induce un voltaje eléctrico en el interior del conductor que forma dicho circuito.

Una analogía simple para comprender el concepto del cambio temporal del flujo magnético, es imaginar el torrente de agua que fluye por el área de una tubería. En un momento puede estar pasando un pequeño volumen de agua a una gran velocidad ocupando toda el área. Por otra parte este mismo volumen de agua puede estar pasando a un ritmo más lento ocupando una menor parte del área. En ambos casos el flujo es el mismo pero el ritmo es diferente.

La retorno al equilibrio de la magnetización transversal  $M_{xy}$  en su proceso de relajación, produce un cambio en el flujo magnético que atraviesa el área de la bobina del circuito receptor. Éste cambio en el flujo magnético genera un voltaje eléctrico que es detectado por la bobina receptora.

## 4.2. Sistema de protección del equipo de RMN

Dependiendo del diseño del equipo de RMN puede ser necesario un escudo contra interferencias. Los escudos contra interferencia: son disposiciones o arreglos especiales realizados a los recintos donde se encuentran los equipos de RMN. Proporcionan protección contra los agentes electromagnéticos externos que puedan producir distorsión en la operación del equipo.

Debido a que los equipos de RMN son bastante sensibles a los campos magnéticos externos, las estructuras y acabados de las salas de examen son tratados con materiales no magnéticos. Por ejemplo: las barras de refuerzo de hierro son sustituidas por barras de cloruro polivinílico (PVC) en las vigas de cemento.

Además, todas las entradas eléctricas de la sala poseen filtros eléctricos para eliminar las frecuencias de interferencia y las cañerías son de tubo PVC. La iluminación de la sala es generada por corriente continua para evitar radiación de ondas electromagnéticas por corriente alterna.

### 4.2.1. Escudo electromagnético

El rango de radiofrecuencias utilizadas en imágenes de RMN es muy próximo a las emisiones de radio comerciales, y otras interferencias generadas por los sistemas electrónicos y de transmisión de potencia. Estas interferencias pueden ser lo suficientemente fuertes para enmascarar las débiles señales de RMN procedentes del paciente. Los equipos de RMN están protegidos por un escudo de malla de alambre conductor, construido cuidadosamente alrededor de la maquina de RMN para atenuar las interferencias electromagnéticas externas.

### 4.2.2. Escudo magnético

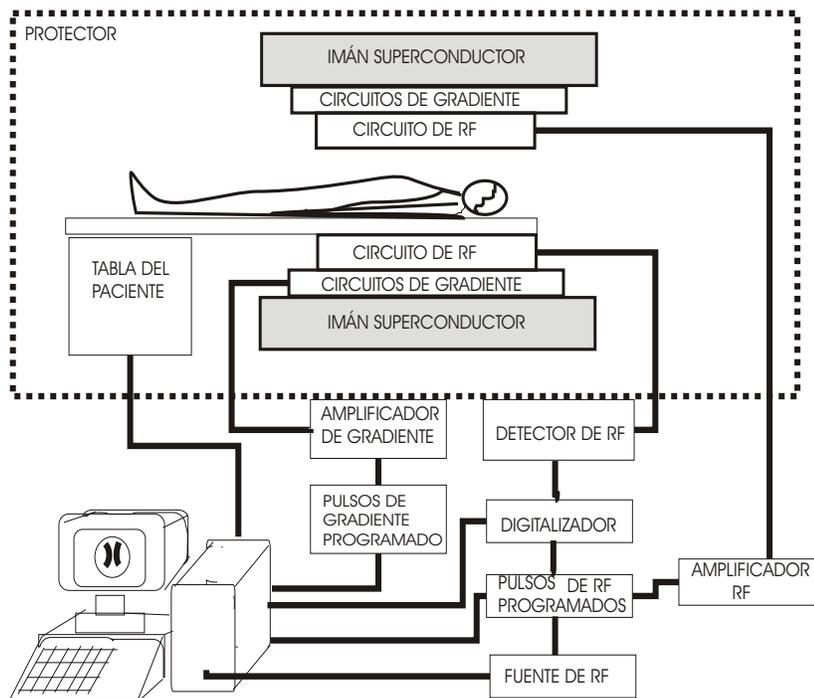
El campo magnético externo de un equipo de RMN es muy intenso. A este campo fuera de la abertura principal donde se encuentra el paciente, se le conoce como: **campo magnético marginal**. Este campo puede interferir en el funcionamiento del equipo mecánico y electrónico de la sala.

La mayoría de los imanes superconductores de un equipo de RMN cuentan con auto escudo de protección. En el interior de la cámara de helio, se encuentran arrollamientos adicionales de material superconductor con polarización inversa de corriente, la cual produce un campo magnético inverso que reduce notablemente el campo magnético marginal.

### 4.3. Descripción del funcionamiento del equipo de RMN

Un equipo de RMN es un sistema de componentes electrónicos y mecánicos cuyo funcionamiento está dirigido y controlado por una computadora. En la siguiente figura se puede apreciar el esquema básico de la organización de un equipo de RMN.

Figura 29: Esquema de los dispositivos de un equipo de RMN



En una sesión típica de RMN, el paciente es colocado en una camilla especial que da a la abertura principal del resonador y la cual es controlada por la computadora. Cuando se ha inmovilizado y asegurado adecuadamente al paciente, la camilla es introducida en el interior del resonador. En éste momento es activado el imán principal y llevado a su valor de operación, y por medio de las bobinas compensadoras se establece la homogeneidad máxima del campo.

Dependiendo de las zonas de exploración y del tipo de corte requerido, las bobinas de gradientes de selección en la dirección específica son activadas. Estos gradientes funcionan como pulsos de duración muy breve y los mismos son previamente amplificados y controlados por la computadora.

Una vez que se ha definido la zona de exploración y el tipo de corte, la muestra es puesta a resonar por medio de los pulsos de RF originados en una fuente, de donde posteriormente son amplificados y enviados a la antena emisora. Todo este proceso es una tarea previamente programada en la computadora.

Las señales emitidas por los tejidos analizados, son codificadas por medio de un gradiente de selección de fase aplicado a una dirección espacial del corte, y por un gradiente de dispersión de frecuencias aplicado en la dirección perpendicular al primero

Después de un tiempo muy breve, las antenas emisoras son conmutadas a antenas receptoras para recibir la señal procedente de la muestra relajada. Esta señal es muestreada y digitalizada para su almacenamiento en el ordenador, donde es ejecutado un programa de reconstrucción de señales que muestra la zona explorada.



## 5. PROCESO DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES

La reconstrucción gráfica del corte de un órgano o tejido del cuerpo humano, es un proceso estructurado que reúne varias etapas. El mismo da inicio con la estimulación, selección y posterior excitación de las zonas de diagnóstico. Continúa con la codificación y recepción de las señales generadas, para luego finalizar con la reconstrucción gráfica de las mismas utilizando las técnicas del análisis de Fourier.

Este capítulo está orientado a proporcionar la descripción básica del proceso de reconstrucción de una imagen de RMN, utilizando las señales generadas en un resonador magnético.

### 5.1. Características de los principales núcleos utilizados RMN

Los tejidos biológicos contienen diferentes tipos de átomos cuyos núcleos reúnen ciertas características que los hacen selectivos a la técnica de la RMN. Estas características son: **la sensibilidad magnética y la concentración fisiológica relativa.**

#### 5.1.1. Sensibilidad magnética

Esta es la medida de la respuesta de los núcleos atómicos a la perturbación de los agentes magnéticos externos y está determinada por el espín nuclear. Los núcleos de átomos e isótopos con un número atómico impar, presentan un espín nuclear resultante no nulo, que los hace sensibles a los campos magnéticos externos. Por el contrario, los núcleos con número de masa y número atómico ambos pares, tienen espín nuclear cero y no son detectables en la RMN. Debido a que el átomo de hidrógeno  $^1H$  demuestra una gran sensibilidad magnética para su detección, éste es utilizado como referencia para otros núcleos y por lo tanto, por definición, el átomo de hidrógeno tiene una sensibilidad 1 o del 100 %.

### 5.1.2. Concentración fisiológica relativa

Esta es la medida de la concentración de los diferentes tipos de átomos e isótopos que se encuentran presentes en los tejidos de órganos y fluidos del cuerpo humano. Su importancia radica en la intensidad de las señales que se pueden obtener y la influencia que ésta tiene en el contraste de una imagen.

La mayor parte de los procesos patológicos atribuidos a tumores, conllevan cambios en las concentraciones de agua en los tejidos de estos, lo que proporciona una región de estudio con un abundante contenido de núcleos de hidrogeno, los cuales permiten obtener una señal de alta intensidad que puede ser diferenciada de la señal de los tejidos sanos. En la siguiente grafica se muestran las principales características de los átomos e isótopos utilizados en RMN.

Figura 30: Características de los principales isótopos utilizados en RMN

ÁTOMO O ISÓTOPO	CONCENTRACIÓN FISIOLÓGICA RELATIVA	SENSIBILIDAD RELATIVA	NÚMERO CUÁNTICO DE ESPÍN	CONSTANTE GIROMAGNÉTICA (MHZ/TESLA)
$^1H$	100	1	$\frac{1}{2}$	42.58
$^{19}F$	$4 \cdot 10^{-6}$	0.84	$\frac{1}{2}$	40.05
$^{31}P$	$7.5 \cdot 10^{-2}$	0.093	$\frac{1}{2}$	11.26
$^{13}C$	$3.0 \cdot 10^{-2}$	0.016	$\frac{1}{2}$	10.71

### 5.2. Proceso de estimulación y secuencias de excitación

Un procedimiento rutinario de adquisición de imágenes de RMN, da inicio colocando al paciente en la camilla que posteriormente es introducida en la abertura principal del resonador. Cuando las condiciones de seguridad para realizar la exploración han sido cubiertas, es activado el imán principal del resonador y llevado a su valor de operación, simultáneamente son activadas las bobinas compensadoras para estabilizar la homogeneidad máxima del campo.

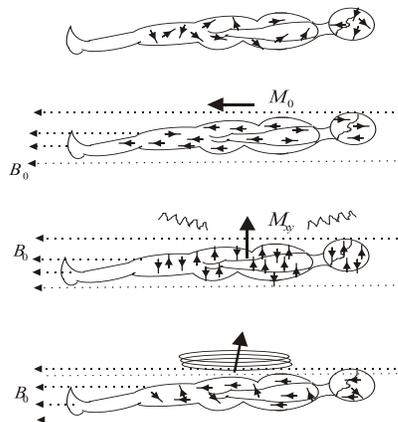
El rango de intensidad del campo magnético utilizado en equipos de RMN, oscila entre 0.012 y 1.5 teslas, proporcionando una anchura de frecuencias de precesión de entre 0.5 y 63.87 MHz.

Los espines nucleares de los tejidos, fluidos y organos del cuerpo del paciente, interactúan con el campo magnético el cual los induce a adquirir un movimiento de precesión. En fracción de segundo estos espines alcanzan el equilibrio termodinámico con su entorno, lo que origina la aparición de magnetización longitudinal  $M_0$  paralela al campo y en todos los puntos interiores del cuerpo del paciente.

Cuando las zonas de diagnóstico son estimuladas con ondas de radiofrecuencia aplicadas en forma de pulsos perpendiculares, los espines de dichas zonas entran en resonancia y la magnetización longitudinal se inclina, lo que origina la aparición de magnetización transversal  $M_{xy}$

Si se coloca una bobina receptora en la superficie del cuerpo del paciente, cercana a las zonas de diagnóstico y después de aplicados los pulsos de estimulación, se puede detectar una señal eléctrica en forma de voltaje la cual es originada por la magnetización transversal al retornar al equilibrio. Esta señal es proporcional a la magnetización total originada en estas zonas y se conoce como: **caída por inducción libre o CIL**.

Figura 31: Proceso de estimulación y obtención de señales RMN



El voltaje inducido<sup>3</sup> en esta bobina originado por un único punto del tejido analizado, puede ser calculado utilizando la ecuación (1.5) combinada con la ley de inducción de Faraday (ecuación 1.15), ambas aplicadas a la bobina receptora. Esto permite escribir dicho voltaje como:

$$V = kM_0 e^{i(\omega_0 t + \phi)} e^{-\frac{t}{T_2}} = V_{re} + V_{im} \quad (5.1)$$

En esta expresión se puede observar que la intensidad de la señal depende del tamaño de la magnetización en la zona de estudio. Esta intensidad está asociada al número de espines contenidos en cada punto de la muestra y proporciona una forma de cuantificar la densidad protónica en los tejidos. De igual manera se puede observar que la señal decae en forma exponencial y su duración depende del tiempo de relajación  $T_2$ , el cual es una característica de cada tejido. La separación de la señal en una parte real y una parte imaginaria, está asociada a la representación de número complejo que a menudo se da a la magnetización  $M_{xy}$ .

Para estimular las zonas de diagnóstico e inducir la resonancia, existen diversas secuencias de pulsos de radiofrecuencia los cuales están relacionados con los tiempos de relajación  $T_1$  y  $T_2$  de la magnetización. Los más utilizados en las técnicas de RMN son: **Caída por Inducción libre CIL**, **secuencia de Hahn o Eco de Espín HSE**, **Inversión Recuperación IR** y **Turbo Espín-Eco TSE**.

### 5.2.1. Caída por Inducción Libre (CIL)

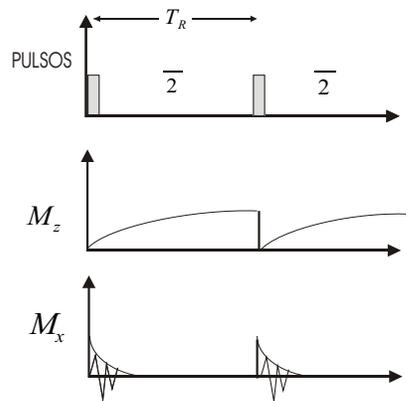
Esta secuencia tiene importancia relevante ya que la misma se encuentra presente en la mayor parte de los procesos de estimulación. En la misma, un pulso de radiofrecuencia  $\frac{\pi}{2}$  hace inclinar a la magnetización longitudinal  $M_0$  hacia el plano XY del sistema de referencia del resonador, dando paso así a la aparición de magnetización transversal  $M_{xy}$ . La señal inducida por esta magnetización en su retorno al equilibrio, decae exponencialmente en un tiempo que incluye tanto los efectos de inhomogeneidad en el campo externo como las perturbaciones intrínsecas creadas por el tejido analizado.

---

<sup>3</sup>El cálculo de éste voltaje se efectúa en el apéndice C

Al intervalo de tiempo que hay entre cada pulso de excitación repetido se denomina: **tiempo de repetición**  $T_R$ . En éste tiempo, la estabilidad de la magnetización longitudinal se recupera aproximadamente hasta una fracción  $(1 - e^{-\frac{T_R}{T_1}})$  de su valor de equilibrio entre cada pulso. En la siguiente figura se muestran las graficas de los pulsos y la señal obtenida para esta secuencia.

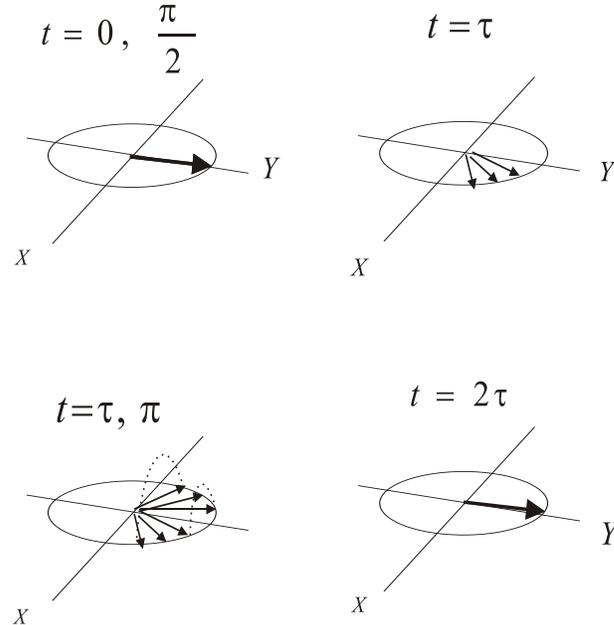
Figura 32: Secuencia Caída por Inducción Libre (CIL)



### 5.2.2. Secuencia de Hahn o eco de espín (SE)

Esta secuencia da inicio con la aplicación de un pulso  $\frac{\pi}{2}$  que hace inclinar a la magnetización longitudinal  $M_0$  al plano XY. Un instante después de aplicado este pulso, los espines que conforman la magnetización transversal  $M_{xy}$  comienzan a perder la coherencia de fase, es decir, comienzan a precesar con diferentes frecuencias de Larmour, esto originado por las inhomogeneidades del campo externo y la acción de los dipolos cercanos, lo que origina una reducción en la magnetización transversal. Un pulso  $\pi$  es aplicado un instante después de que ha empezado el desfase, el mismo origina que los espines giren hacia sus imágenes especulares y los de precesión más rápida alcancen el nivel de los más lentos en el mismo tiempo, con lo que se produce la coherencia de fase nuevamente. Esto puede verse en la siguiente figura.

Figura 33: Refase en la precesión de espines

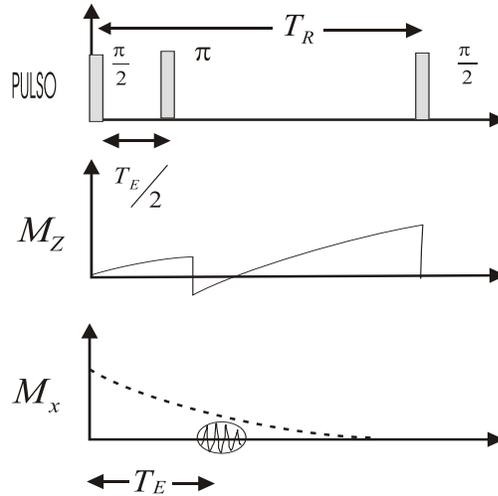


Este comportamiento de los espines ante el pulso de refase, puede imaginarse como una carrera de pista de 100 mts planos, donde cada uno de los corredores tiene una velocidad bien definida. Al poco tiempo de darse la señal de salida, los corredores más rápidos comienzan a aventajar a los lentos, creándose una línea escalonada de posiciones. Si en ese instante los corredores invierten el sentido de su marcha todos volverán al punto de partida en el mismo tiempo.

Al tiempo medido a partir del primer pulso en el cual se ha recuperado la coherencia de fase se denomina: **tiempo de eco**  $T_E$ .

La amplitud de cada eco está determinado por la envolvente funcional  $e^{-\frac{t}{T_2}}$ , en donde  $T_2$  es el tiempo de relajación transversal característico del tejido analizado. En todas las secuencias de excitación la señal obtenida es muestreada sobre los ecos. La siguiente figura muestra la secuencia de excitación de Hann y el eco obtenido.

Figura 34: Secuencia de Hann o Eco de Espín (SE)



### 5.2.3. Secuencia de Inversión Recuperación (IR)

La secuencia IR da inicio con la aplicación de un pulso de excitación  $\pi$  que invierte el sentido de la magnetización longitudinal  $M_0$  al eje  $-Z$ . En ese momento no se detecta señal alguna y la magnetización comienza a retornar al equilibrio de acuerdo a la siguiente forma funcional:

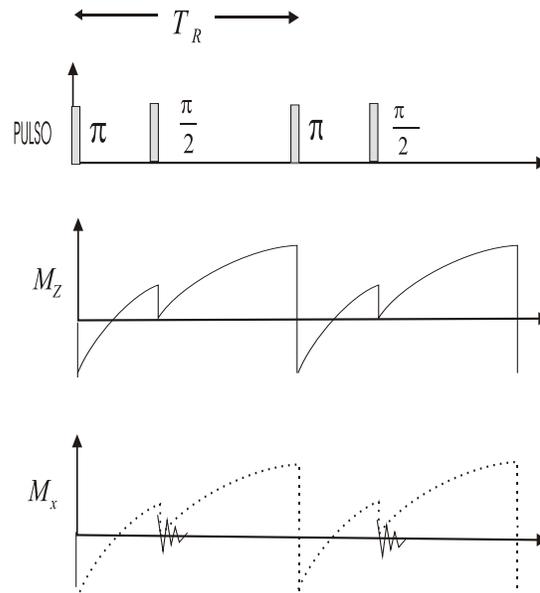
$$M_z = M_0(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}})$$

Durante éste proceso y tras un tiempo denominado: **tiempo de inversión**  $T_I$ , es aplicado un pulso  $\frac{\pi}{2}$  el cual hace inclinar a la magnetización al plano XY. Nuevamente la magnetización retorna al equilibrio, pero de acuerdo a la siguiente forma funcional:

$$M_z = M_0(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}})$$

En éste momento el ciclo continúa como una secuencia de eco de espín en el cual es aplicado un pulso  $\pi$  para refase y producción del eco. La gráfica de la secuencia de pulsos y la señal obtenida se muestran en la siguiente figura.

Figura 35: Secuencia Inversión Recuperación (IR)

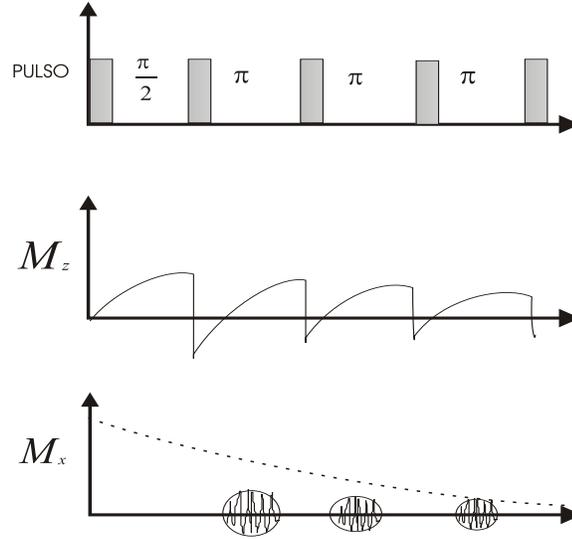


#### 5.2.4. Secuencia Turbo Espín-Eco (TSE)

El ciclo de pulsos de esta secuencia se caracteriza por la aplicación de un pulso de excitación  $\frac{\pi}{2}$  igual que en la secuencia de eco de espín, y la posterior formación de dos o más ecos producidos por pulsos de refase de  $\pi$ . Típicamente en la utilización convencional de la secuencia, se adquieren entre 4 y 32 ecos (siempre más de dos), aunque pueden llegar a 256 en su modalidad single-shot. Al número de ecos originados en esta secuencia, se le denomina: **longitud del tren de ecos, Eco Train Length, ETL, factor turbo o TF**.

Una de las características básicas de esta secuencia es la disminución del **tiempo de adquisición**, el cual es proporcional al factor turbo TF. En esta y en cualquier secuencia de excitación, el tiempo de adquisición de datos  $T_A$  es simplemente el producto del tiempo de repetición del eco  $T_R$  por el número de repeticiones de la secuencia de pulsos. En la siguiente figura se muestran la grafica de los pulsos y de la señal obtenida.

Figura 36: Secuencia Turbo Espín-Eco (TSE)



### 5.3. Gradientes de selección

La intensidad del campo magnético principal en el interior de un resonador, puede hacerse variar adicionando pequeños incrementos de campo los cuales están representados por una función lineal cuya pendiente se denomina: gradiente. Los gradientes representan incrementos de campo por unidad de longitud que se pueden adicionar o restar al campo principal en una posición y dirección determinada. Los mismos se definen de la siguiente manera:

$$\text{Gradiente } G = \frac{\text{incremento de campo magnético}}{\text{incremento en la longitud}} = \frac{\Delta B}{\Delta S}$$

Los gradientes permiten incrementar linealmente la intensidad del campo magnético en la dirección positiva medida respecto a un origen de referencia, y lo disminuyen en la dirección opuesta.

Para un campo magnético orientado en la dirección Z de un sistema de referencia, los gradientes en las tres direcciones espaciales se pueden definir de la siguiente manera:

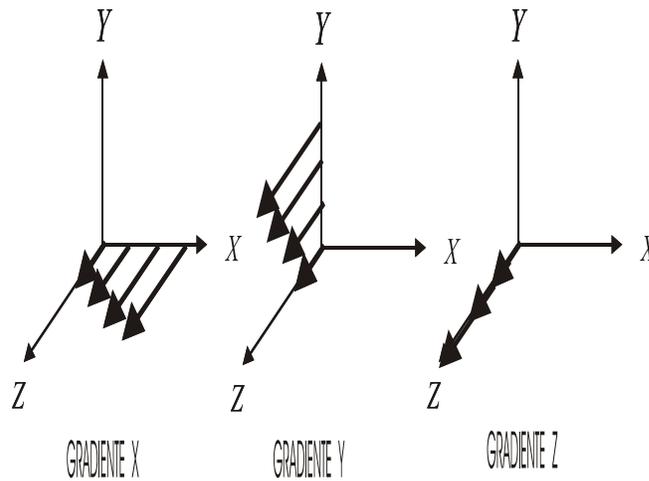
$$G_{zx} = \frac{\Delta B_z}{\Delta x} \quad (5.2)$$

$$G_{zy} = \frac{\Delta B_z}{\Delta y} \quad (5.3)$$

$$G_{zz} = \frac{\Delta B_z}{\Delta z} \quad (5.4)$$

En estas ecuaciones los símbolos  $G_{zx}$ ,  $G_{zy}$  y  $G_{zz}$  representan los incrementos lineales de campo magnético  $B_z$  a lo largo de las direcciones espaciales X, Y, Z respectivamente. La siguiente figura ilustra esta idea.

Figura 37: Gradientes en las direcciones X, Y, Z



La aplicación de un gradiente de campo en una dirección espacial, por ejemplo: en la dirección X, origina que los distintos puntos de la misma a lo largo de éste eje adquieran diferentes frecuencias de precesión.

$$\omega_1 = \gamma(B_0 + G_{zx}x) = \omega_0 + \Delta\omega \quad (5.5)$$

Dos puntos analizados de la muestra en la dirección del gradiente, estarán separados en relación a sus distancias y también con respecto a sus frecuencias como lo muestran las siguientes relaciones:

$$\omega_1 - \omega_0 = \gamma G_{zx} \Delta x \quad (5.6)$$

$$\Delta x = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\gamma G_{zx}} \quad (5.7)$$

Esta es la base sobre la cual descansa el proceso de reconstrucción de imágenes que se utiliza en la técnica de la RMN. Los distintos puntos de un corte analizado pueden ser diferenciados entre sí, por las diferentes frecuencias con las que se encuentran precesando sus espines. Si los pulsos de excitación contienen un ancho de banda de frecuencias igual al contenido en las zonas de estudio, estos puntos resonaran y sus señales proporcionarían información sobre su localización en el corte.

#### 5.4. Selección del corte

El proceso de selección del corte, combina la aplicación de un gradiente de campo magnético con un pulso de radiofrecuencia. El gradiente dispersa las frecuencias de precesión de los espines, de tal forma que un pulso de RF afecte únicamente al corte en estudio y no a toda la muestra.

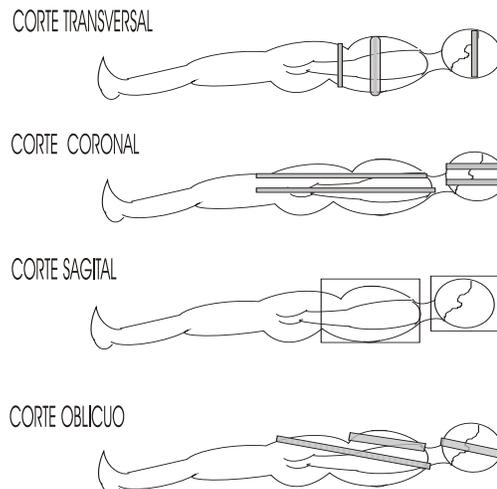
Las características como: la orientación, la posición, el espesor y la forma real del corte, pueden ser determinadas combinando adecuadamente variaciones de gradientes con pulsos de RF.

##### 5.4.1. Orientación del corte

La orientación del corte depende de la dirección del gradiente de campo magnético que se active durante la aplicación del pulso de RF. Los diferentes tipos de orientación de corte reciben nombres especiales de acuerdo al gradiente de selección aplicado, estos tipos son: **corte sagital**, **corte coronal** y **corte axial o trasversal**, los cuales están asociados a los gradientes  $G_{zx}$ ,  $G_{zy}$  y  $G_{zz}$  respectivamente. La combinación de dos o más de estos gradientes produce un cuarto tipo de orientación de corte denominado **corte oblicuo**.

La siguiente figura ilustra la forma característica de estos cortes.

Figura 38: Tipos de orientación en los cortes seleccionados



#### 5.4.2. Posición del corte

La posición de un corte se sitúa donde las frecuencias de precesión de los espines se corresponden con las frecuencias contenidas en el pulso de RF. Esta posición puede ser regulada modificando la frecuencia del pulso aplicado. Por ejemplo: para un gradiente de selección de corte cuya magnitud es de 5 mT/m, la frecuencia contenida en el pulso de RF necesaria para establecer un corte a 100 mm medido desde el origen de referencia, tendrá que ser  $(5\text{mT/m} \times 0.1 \text{ m} \times 42.58 \text{ MHz/T}) = 21.2 \text{ MHz}$  veces mayor que la frecuencia de Larmor en el centro.

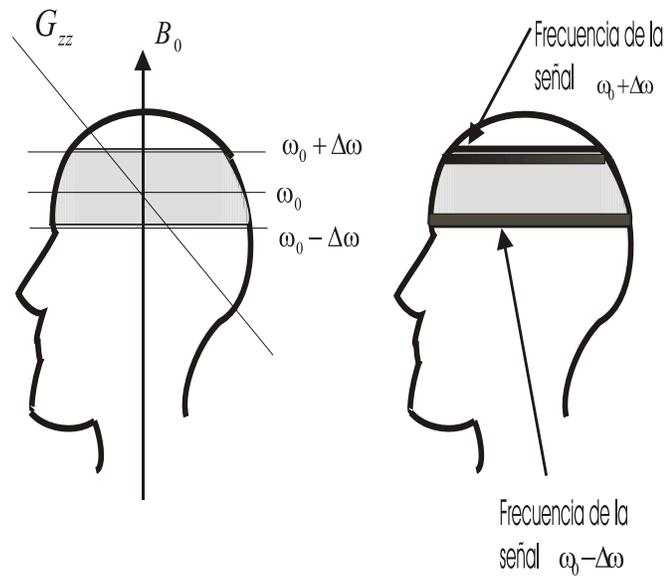
#### 5.4.3. Espesor y perfil del corte

Cuando es aplicado un pulso de radiofrecuencia en las zonas de diagnóstico, la magnetización en dichas zonas es perturbada en un ancho de frecuencias que se corresponden con las frecuencias contenidas en el pulso. Este ancho de banda es el que determina el espesor del corte analizado. De igual manera, la magnitud del gradiente de selección puede ser modificada para ajustarla al espesor del corte deseado.

Por ejemplo: si se desea un corte de 5mm de espesor mediante una secuencia de pulso de 1 kHz de ancho de banda. La magnitud del gradiente de selección deberá ser entonces  $1 \text{ kHz}/(42.58 \text{ MHz/T} \times 5\text{mm})$ , es decir, 4.7 mT/m.

La forma funcional del pulso de RF mayormente utilizado para determinar el espesor de un corte, es la función  $Sinc(\omega t) = \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega t}$ . Este tipo de pulso puede excitar una distribución de espines de forma aproximadamente rectangular.

Figura 39: Posición y espesor de un corte



### 5.5. Reconstrucción de una imagen de RMN

Una imagen de RMN está representada sobre un plano de dos dimensiones, fragmentado en una rejilla de elementos de imagen denominados: **píxeles**. Cada píxel en la imagen está representado por un número entero llamado: **intensidad**, el cual en la mayoría de los casos, es proporcional a la amplitud de la magnetización en la región del corte correspondiente. Cada píxel es almacenado en la unidad de memoria de una computadora, asignándole dos elementos de codificación informática llamados: **bytes u octetos**, los cuales permiten manejar 65536 valores posibles de intensidad.

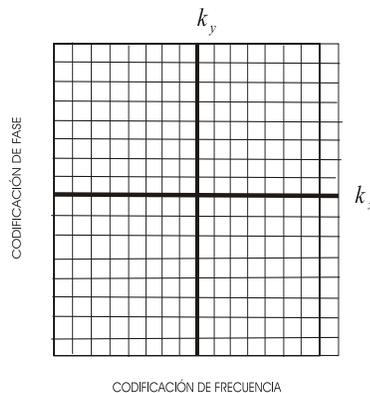
Las rejillas de imagen comúnmente utilizadas en RMN, constan de 256 filas y 256 columnas de píxeles o vóxeles, aunque las hay de otras dimensiones para una menor o mayor resolución en la imagen. Se ha hablado indistintamente de píxel o vóxel para resaltar el hecho de que una imagen de RMN consta de un corte en volumen más que de un plano.

### 5.5.1. Reconstrucción por el método de Fourier

La reconstrucción de una imagen de Resonancia Magnética, utiliza diferentes técnicas para procesar las señales emitidas por un corte del tejido analizado. Estas técnicas permiten identificar la posición y la intensidad de la señal de la región del corte donde fue emitida. La técnica más utilizada en RMN es la de la **transformada bidimensional discreta de Fourier**.

La transformada de Fourier, representa la señal muestreada en un espacio bidimensional denominado: **espacio k**. Este espacio al igual que la rejilla de la imagen, consta de 256 filas por 256 columnas. Cada una de las filas del espacio k está asociada a la fase espacial en la que se encuentra procesando la magnetización transversal, y cada columna a la frecuencia de precesión de la misma. Estos dos términos, frecuencia y fase, están asociados a la forma en que se codifica la información por el método de Fourier.

Figura 40: Espacio k



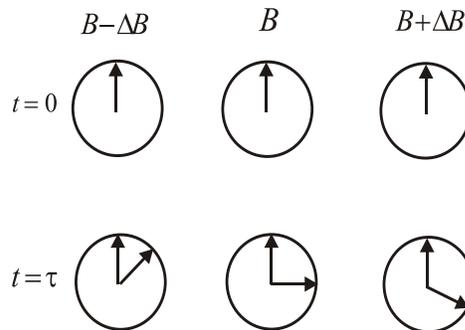
### 5.5.2. Codificación de fase

Cuando es aplicada una secuencia de excitación a una zona de diagnóstico, simultáneamente es aplicado un gradiente de selección que permite determinar la ubicación, el espesor y la orientación del corte. Los respectivos espines del corte elegido precesarán a la misma frecuencia de Larmor. Por ejemplo: si el gradiente de selección es  $G_{zz}$ , el corte se encontrará ubicado en un plano paralelo al plano XY donde se correspondan las frecuencias de radiofrecuencia. Si se aplica un segundo gradiente, ahora en la dirección  $Y$  y antes de muestrear cada eco, el mismo dará origen a que la precesión de los espines varíe linealmente con la coordenada  $Y$ . Este cambio origina un desfase en la precesión de los espines en cada punto a lo largo de dicho eje. Esto puede verificarse analizando la ecuación (5.5) bajo un gradiente  $G_{zy}$ .

$$\omega_1 = (\gamma B + \gamma G_{zy}y) = (\gamma B + \gamma \Delta B) = (\omega_0 + \Delta\omega) \quad (5.8)$$

Como puede verse en esta ecuación, los incrementos de campo  $\Delta B$  producidos por el gradiente  $G_{zy}$ , originan incrementos lineales de frecuencia  $\Delta\omega$ , los cuales producen el desfase en la precesión de los espines. Si el efecto de este gradiente se hace efectivo en un tiempo  $\tau$ , los respectivos espines a lo largo del eje estarán desfasados entre sí un ángulo constante. La siguiente figura ilustra este efecto.

Figura 41: Desfase en la precesión de espines



La codificación de fase llamada también: **vista o perfil**, permite etiquetar la información de cada eco, con la fase en la que se encuentran prepesando los espines que generan la señal de todo un corte. La magnetización transversal en los puntos del corte a lo largo del eje  $Y$ , precesará al ritmo que lo hagan sus respectivos espines componentes.

### 5.5.3. Codificación por frecuencia

La codificación por frecuencia se obtiene al aplicar un gradiente en la dirección  $G_{zx}$ . Este gradiente, el cual es llamado: **gradiente de presentación de datos o gradiente de medida**, es activado mientras se lee un eco. El gradiente origina una dispersión lineal en las frecuencias de precesión de los espines a lo largo del eje  $X$ .

$$\omega(x, y) = \gamma G_x x \quad (5.9)$$

Este gradiente crea un desfase al comienzo del eco que se invierte a lo largo del mismo, de tal manera que en el centro de éste el desfase es cero. En cada punto o momento del muestreo del eco, los espines de la muestra tienen diferente frecuencia en sentido horizontal. En la técnica de la RMN, frecuencia equivale a localización espacial.

### 5.5.4. Representación de la señal

La señal de RMN recolectada en una antena receptora proviene de los ecos muestreados y es básicamente un voltaje eléctrico. Esta señal, está constituida de la contribución de las señales de todos los elementos de volumen que constituyen un corte, y es proporcional a la magnetización en los mismos. Matemáticamente se puede representar esta señal sumando estas contribuciones, las cuales pueden ser expresadas con la ayuda de la ecuación (5.1) de la siguiente manera:

$$S(t) = \sum_{l=0}^N \sum_{r=0}^N M(x_l, y_r, t) e^{(\omega_l(x,y)t + \phi_r(x,y))} \quad (5.10)$$

En esta ecuación, los subíndices ( $l$ ) y ( $r$ ), ubican a la frecuencia de precesión de la magnetización a lo largo de una columna, y al ángulo de fase de la misma a lo largo de una fila respectivamente. Ambos índices abarcan una totalidad de datos que corresponden al tamaño de la rejilla del espacio  $k$ . El término  $M(x_l, y_r, t)$  corresponde a la intensidad de la magnetización en cada punto de la muestra y la misma está caracterizada por el tiempo de relajación del tejido y la secuencia utilizada para la estimulación  $M(x_l, y_r, t) = M_0(x_l, y_r, t)(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})e^{-\frac{t}{T_2}}$ .

La fase  $\phi(x, y)$  y la frecuencia  $\omega(x, y)$ , permiten etiquetar a cada punto de la muestra con un único identificador. Utilizando las ecuaciones (5.8) y (5.9) combinadas con la ecuación (5.10) se puede escribir esta última como:

$$S(t, \tau) = \sum_{l=0}^N \sum_{r=0}^N M(x_l, y_r, t) e^{i(\gamma G_l x_l t + \gamma G_r y_r \tau)} \quad (5.11)$$

En donde  $\tau$ , representa el tiempo en el que la fase de precesión de la magnetización en todos los puntos a cambiado. Ahora, haciendo las siguientes identificaciones:

$$k_x = -\gamma G_x t \quad (5.12)$$

$$k_y = -\gamma G_y \tau \quad (5.13)$$

Y sustituyéndolas en la ecuación (5.11) se obtiene el siguiente resultado.

$$S(k_x, k_y) = \sum_{l=0}^N \sum_{r=0}^N M(x_l, y_r) e^{-i(k_x x_l + k_y y_r)} \quad (5.14)$$

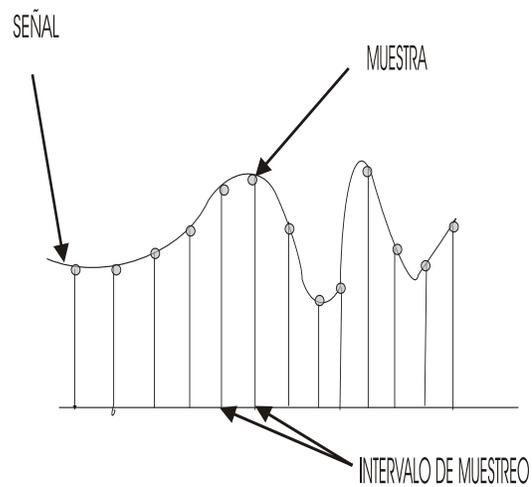
Esta ecuación representa la **transformada de Fourier discreta** de la señal en el dominio de las coordenadas espaciales al dominio de las frecuencias, la cuales están expresadas por las ecuaciones (5.12 y 5.13). La reconstrucción espacial de la señal puede realizarse utilizando la **transformada discreta inversa de Fourier**.

$$M(x_l, y_r) = \sum_{l=0}^N \sum_{r=0}^N S(k_x, k_y) e^{i(k_x x_l + k_y y_r)} \quad (5.15)$$

### 5.5.5. Muestreo

Todas las señales de RMN se digitalizan en un proceso conocido como muestreo. El valor de cada muestra es proporcional al voltaje generado por la señal de RMN. Las señales de voltaje continuas pueden representarse con precisión a través de sus muestras consecutivas, las cuales son tomadas en intervalos de tiempo muy pequeños. Al intervalo de tiempo utilizado entre muestras consecutivas se denomina: **intervalo de muestreo o período de muestreo**  $T_m$ . El número de muestras de cada señal, está asociado al tamaño de la rejilla de imagen y las mismas se miden en los ecos de la señal de RMN. En la siguiente figura se muestra un eco de señal de RMN con sus datos muestrales.

Figura 42: Muestreo de un eco



Si el período de muestreo es demasiado grande (frecuencia de muestreo pequeña), la señal estará pobremente representada en el dominio del tiempo por el conjunto de puntos digitalizados; se perderá la evolución temporal de la misma entre dos puntos consecutivos, y la reconstrucción de la esta a partir de los datos digitalizados presentará una clara distorsión armónica. Mientras que cuanto más pequeño sea el período de muestreo, más fielmente estará representada en el dominio del tiempo.

Según el **teorema del muestreo uniforme en el dominio del tiempo o teorema de Nyquist**, una señal continua que no tenga componentes de frecuencias mayores a  $\omega_m$ , la máxima frecuencia contenida en la señal, puede determinarse por completo sin pérdida de información, mediante sus valores separados medidos a intervalos uniformes de tiempo menores de  $T_m = \frac{1}{2\omega_m}$  segundos.

La reconstrucción de una señal muestreada, puede tener lugar multiplicando cada valor de la muestra por una función *sinc*, cuya frecuencia está en correspondencia con el teorema de Nyquist, esta función es denominada: *función de muestreo*. La suma de todas las contribuciones de la muestra bajo este procedimiento, permite reconstruir la forma de la señal de la siguiente manera:

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S(nT) \frac{\sin(\omega_m(t - nT))}{\omega_m(t - nT)} \quad (5.16)$$

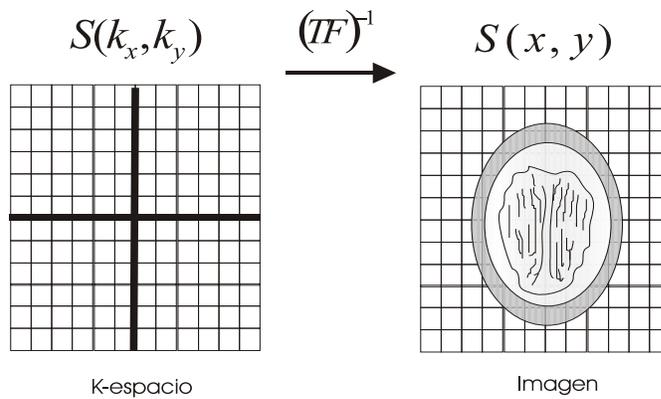
Esta señal continua en el tiempo, puede ser representada en el dominio de la frecuencia por medio de una operación matemática llamada: **transformada de Fourier *TF***. La transformada de Fourier, descompone la señal en sus componentes de frecuencias y la representa gráficamente en un arreglo funcional denominado: *espectro de frecuencias*.

Debido a que cada eco es codificado con una fase diferente, la señal muestreada correspondiente a éste eco, puede ser reconstruida y transformada de su dominio en el tiempo al dominio de las frecuencias en la dirección de codificación de frecuencia, utilizando la transformada inversa de Fourier aplicada a la ecuación (5.16). La señal transformada puede ser utilizada en la ecuación (5.15) para cada eco, con lo cual se puede reconstruir la magnetización de cada punto del corte analizado.

### 5.5.6. Construcción del espacio k

Como se ha mencionado en la sección (5.5.1), el espacio k es la representación matemática de las señales de RMN codificadas por el método de Fourier. Este espacio, también llamado: **matriz de datos crudos o dominio de frecuencia**, consiste en un arreglo rectangular de números cuya transformada de Fourier inversa es la imagen real. Las coordenadas en éste arreglo representan frecuencias y se simbolizadas de la siguiente manera:  $k_x, k_y$ .

Figura 43: Reconstrucción de imagen



Cada fila del espacio k, representa un eco de la señal que está compuesto de diferentes frecuencias y sus correspondientes intensidades. Cada eco contiene 256 muestras correspondientes a 256 frecuencias e intensidades distintas, por lo que cada punto de cada fila representa un punto diferente de muestreo de la señal de cada eco. Por lo tanto, en cada línea del espacio k, está contenida la información de todo el corte o sección. La diferencia entre cada fila es que cada una se adquiere con una codificación de fase distinta.

Convencionalmente se ha establecido que la línea central del espacio k es llenada con la codificación de fase 0. Las sucesivas líneas en orden ascendente representan las codificaciones de fase numeradas: +1 hasta +127 en el extremo superior, y en sentido descendente desde -1 hasta -128 en el inferior.

Cada línea del espacio k corresponde al eco obtenido tras una codificación de fase diferente. Y cada columna corresponde a una frecuencia espacial determinada.

La amplitud de los ecos es máxima en las líneas centrales donde el gradiente aplicado es mayor, y por lo tanto, donde se produce más desfase. El centro del espacio k genera el contraste y la mayor parte de la señal en la imagen. Los extremos aportan el detalle.

Los ecos obtenidos con una codificación igual pero de signo inverso, por ejemplo: la codificación de fase +35 y -35, son simétricos pero invertidos, ello hace que el espacio k sea simétrico desde su línea central o codificación de fase 0 hasta los extremos. Esto se denomina: **simetría hermética o conjugada**. También los ecos son simétricos en su mitad ascendente y descendente. Por lo tanto, el espacio k es simétrico con respecto a su origen.

Aunque no existe una correspondencia directa, entre la localización de los puntos de cada línea del espacio k con la localización de los vóxeles en la imagen final, las diferentes partes del espacio k tienen una correspondencia con las frecuencias espaciales en la imagen.

Los datos cercanos a las líneas centrales corresponden a las bajas frecuencias espaciales y proporcionan información sobre el contraste y contornos, mientras que las líneas extremas lo hacen sobre el detalle fino y la resolución espacial.



## CONCLUSIONES

1. La descripción clásica del fenómeno de la Resonancia Magnética Nuclear, resulta ser la formulación más adecuada para la presentación de éste fenómeno, por la sencillez de los conceptos involucrados en la misma y por la flexibilidad de estos para hacer uso de medios gráficos, como un recurso didáctico utilizado para su explicación.
2. El formalismo cuántico del fenómeno de la Resonancia Magnética Nuclear, reviste la importancia de ser el marco conceptual adecuado para el estudio teórico del fenómeno, sin embargo, su carácter de teoría abstracta le limita a un número muy bajo de profesionales que puedan ser beneficiados con su comprensión. Esto no significa que el aporte de esta formulación no cumple con los objetivos planteados en éste trabajo, por el contrario, la misma abre las posibilidades a que los profesionales con una debida instrucción en física y matemática, puedan avanzar en la comprensión de aspectos más profundos de éste fenómeno como son: el origen de los mecanismos de relajación y la determinación de la composición química de una sustancia a través del análisis de un espectro de RMN.
3. La descripción del funcionamiento de un resonador, como la del proceso de adquisición de imágenes de RMN, ofrecen la visión general de la características principales de una técnica de adquisición de imágenes, lo que representa un avance en el conocimiento de los principios necesarios para comprender otro tipo de técnicas.



## RECOMENDACIONES

1. Continuar con el desarrollo de material bibliográfico que ayude a aminorar las grandes deficiencias de textos de consulta, en las diferentes áreas de estudio que abarca la física médica.
2. Divulgar y promover la existencia de la profesión de la física médica, a través de la creación de cursos orientados a la capacitación de personal médico y técnico en el uso de equipos de diagnóstico médico por imágenes.
3. Proporcionar las condiciones necesarias para el estudio de la física médica en Guatemala.
4. Suscribir al departamento de física, de la Facultad de Ingeniería, a los sitios virtuales que diversas universidades, centros de investigación, instituciones médicas y sociedades de profesionales, tales como: la Sociedad Americana de Físicos Médicos, han puesto a disposición de sus suscriptores para cualquier consulta bibliográfica por catálogo electrónico.



## BIBLIOGRAFÍA

1. Cabezas, Horacio. **Metodología de la Investigación**. Guatemala: Piedra Santa, 2004. 104pp.
2. Callen, Herbert. **Thermodynamics**. U.S.A: John Wiley & Sons, 1960. 360pp.
3. Cohen, Claude y otros. **Quantum Mechanics**. 2nd revised edition (Vol. I). John Wiley & Sons, 1977. 870pp.
4. Cruz Garritz, Diana. **Estructura Atómica Un Enfoque Químico**. U.S.A: Addison-Wisley Iberoamericana, 1991. 820pp.
5. Eco, Humberto. **Técnicas y Procedimientos de Investigación**. México: Gedisa, 1987. 265pp.
6. Feynman, Richard P y otros. **Mecánica Cuántica**. U.S.A: Addison-Wesley Iberoamericana, 1987. 348pp.
7. Hobbie, Russell K. **Intermediate Physics for Medicine and Biology**. 2nd edition. U.S.A: John Wiley & Sons, 1988. 623pp.
8. Hsu, Hwei P. **Análisis de Fourier**. Colombia: Fondo Educativo Interamericano, 1973. 288pp.
9. Mathieson, D W. **Nuclear Magnetic Resonance for Organic Chemists**. Cuba: Edición Revolucionaria Instituto Cubano del Libro, 1971. 187pp.

10. Óreilly, J J. **Principios de Telecomunicaciones**. 2nd edi. U.S.A: Addison-Wesley Iberoamericana, 1994. 173pp.
11. Purcell, Edward M. **Electricidad y Magnetismo**. 2nd edi. España: Reverte S.A, 1990. 472pp
12. Reitz, John R y otros. **Fundamentos de Teoría Electromagnética**. 3ra edi. U.S.A: Addison-Wesley Iberoamericana,1984. 585pp.
13. Salvatierra Palomo, Juan Jose. **Manual de Metodología de la Investigación**. Guatemala: Ediciones Superación, 2000. 108pp.
14. Symon, Keith R. **Mechanics**. 2nd edi. U.S.A: Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1960. 551pp.

## APÉNDICE

### A) Descripción del movimiento de una partícula desde un marco de referencia en movimiento de rotación.

Considere la descripción del movimiento de una partícula por dos observadores distintos. Uno situado en un sistema de referencia cartesiano XYZ fijo, y el otro en un sistema de referencia  $X^*Y^*Z^*$ , el cual gira alrededor del origen común del sistema original. Ambos sistemas describen la posición de la partícula con el mismo vector de posición  $\vec{r}$ , pero con diferente representación de coordenadas  $(x, y, z)$  y  $(x^*, y^*, z^*)$ . En general, la velocidad de la partícula vista desde ambos marcos de referencia será distinta, como lo muestran las siguientes ecuaciones.

$$\vec{r}^f = x' i + y' j + z' k \quad (1)$$

$$\vec{r}^f = x^{*'} i^* + y^{*'} j^* + z^{*'} k^* \quad (2)$$

Si se toma la representación del vector  $\vec{r}$  respecto al marco móvil (ecuación (2)) y se deriva con respecto al tiempo en el marco fijo (ecuación (1)), tomando en cuenta que los vectores unitarios  $(i^*, j^*, k^*)$  son móviles para éste marco de observación. Se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{d\vec{r}^{*'}}{dt} = x^{*'} i^{*'} + y^{*'} j^{*'} + z^{*'} k^{*'} + x^* i^{*' } + y^* j^{*' } + z^* k^{*' } \quad (3)$$

Los tres primeros términos de esta ecuación, representan la derivada del vector  $\vec{r}$  en el marco de referencia giratorio. Los restantes términos, pueden escribirse de otra manera utilizando la expresión de la derivada del vector unitario ( $i$ ) en el sistema de referencia giratorio ( $i^{\dot{}} = \vec{\omega} \times i$ ). Sustituyendo estas expresiones se obtiene:

$$\frac{d\vec{r}^{*'}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (4)$$

## B) Deducción de la formula de Rabí

La formula de Rabí, es una expresión que se utiliza para el cálculo de probabilidad de transición de estados ante pequeñas perturbaciones en el sistema.

El hamiltoniano de un sistema cuántico, en interacción con su entorno a través de una pequeña perturbación, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W} \quad (1)$$

En esta expresión,  $\hat{H}_0$  es el operador hamiltoniano del sistema en ausencia de perturbación y  $\hat{W}$  es el operador que representa la perturbación, la cual puede ser dependiente del tiempo. Para un sistema de espín 1/2 la representación matricial de éste operador puede escribirse como:

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

Donde  $W_{11}$  y  $W_{22}$  son reales y  $W_{12}^* = W_{21}$

Para el hamiltoniano del sistema de espín  $\frac{1}{2}$  en ausencia de perturbación, los respectivos valores propios y vectores propios de éste son:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0|\phi_1\rangle &= E_1|\phi_1\rangle \\ \hat{H}_0|\phi_2\rangle &= E_2|\phi_2\rangle \end{aligned}$$

Como consecuencia de la perturbación presente,  $E_1$  y  $E_2$  no son más los posibles valores de la energía del sistema. Las medidas de la energía del sistema bajo la perturbación, únicamente, pueden dejar los valores  $E_+$  y  $E_-$  de  $\hat{H}$  los cuales difieren de  $E_1$  y  $E_2$ .

Por otra parte, los kets  $\phi_1$  y  $\phi_2$  no son mas kets propios del hamiltoniano total  $\hat{H}$ . Por lo tanto, si en un tiempo  $t = 0$  el sistema se encuentra descrito por el ket  $|\phi_1\rangle$ , existe una probabilidad de que en el tiempo posterior  $t = t_1$  se encuentre descrito por el ket  $|\phi_2\rangle$ . Por lo tanto, el efecto de la perturbación es crear transiciones de estados en el sistema.

### Cambio de origen de los valores propios

Considere la siguiente matriz hermítica que representa al sistema de espín  $\frac{1}{2}$  bajo una pequeña perturbación.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

Con  $H_{11}$ ,  $H_{22}$  reales y  $H_{12} = H_{21}$ . La representación matricial de éste operador, puede escribirse como la suma media de los elementos diagonales, con la suma media de la diferencia de estos.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{(H_{11}+H_{22})}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(H_{22}+H_{11})}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(H_{11}-H_{22})}{2} & H_{12} \\ H_{21} & -\frac{(H_{22}-H_{11})}{2} \end{pmatrix}$$

Con éste arreglo, el operador  $\hat{H}$  puede ser representado como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(H_{11} - H_{22})\hat{I} + \frac{1}{2}(H_{11} - H_{22})\hat{k}$$

Donde  $\hat{I}$ , es el operador identidad y  $\hat{K}$ , es un operador hermítico representado en la base  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ .

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2H_{12}}{H_{11}-H_{22}} \\ \frac{2H_{21}}{H_{11}-H_{22}} & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Si  $|\psi_{\pm}\rangle$  es un eigenket de  $\hat{H}$  y  $\hat{K}$

$$\begin{aligned}\hat{H}|\psi_{\pm}\rangle &= E_{\pm}|\psi_{\pm}\rangle \\ \hat{K}|\psi_{\pm}\rangle &= k_{\pm}|\psi_{\pm}\rangle\end{aligned}$$

Se concluye que:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}(H_{11} - H_{22}) + \frac{1}{2}(H_{11} - H_{22})k_{\pm} \quad (3)$$

### Cálculo de los eigenkets y eigenvalores de $\hat{K}$

Si se define  $\text{tg } \theta = \frac{2H_{12}}{H_{11} - H_{22}}$ , con  $H_{21} = H_{12}e^{i\phi}$ . Entoces la ecuación (2), puede escribirse como:

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 1 & \text{tg } \theta e^{-i\phi} \\ \text{tg } \theta e^{-\phi} & -1 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores de  $\hat{K}$ , se pueden obtener calculando el determinante  $\text{Det}|(\hat{K}) - k\hat{I}| = k^2 - 1 - \text{tg}^2 \theta = 0$ . Esto permite obtener los valores para  $k_{\pm} = \frac{\pm 1}{\cos \theta}$ .

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4|H_{12}|^2}}{H_{11} - H_{22}} \quad (4)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de eigenvalores de  $\hat{H}$  (ecuación (3)), se obtienen los siguientes resultados.

$$\begin{aligned}E_+ &= \frac{(H_{11} + H_{22})}{2} + \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4|H_{12}|^2} \\ E_- &= \frac{(H_{11} + H_{22})}{2} - \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 + 4|H_{12}|^2}\end{aligned}$$

Los cuales pueden sustituirse en el sistema bajo una pequeña perturbación (ecuación (1)). Esto permite reescribir los valores de  $E_+$  y  $E_-$  como:

$$E_+ = \frac{(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22})}{2} + \sqrt{(E_1 + H_{11} - E_2 - W_{22})^2 + 4|W_{12}|^2} \quad (5)$$

$$E_- = \frac{(E_1 + W_{11} + E_2 + W_{22})}{2} - \sqrt{(E_1 + H_{11} - E_2 - W_{22})^2 + 4|W_{12}|^2} \quad (6)$$

Con estos valores, los eigenkets normalizados asociados con  $E_+$  y  $E_-$  los cuales son expresados en la base  $|\phi_1\rangle$  y  $|\phi_2\rangle$  pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} |\psi_+\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\alpha}{2}} |\phi_1\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}} |\phi_2\rangle \\ |\psi_-\rangle &= -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\alpha}{2}} |\phi_1\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}} |\phi_2\rangle \end{aligned}$$

Si se considera al ket  $|\psi\rangle$  del sistema cuyo hamiltoniano es  $\widehat{H}_0$  en el tiempo  $t = 0$ , el mismo estará descrito en la base de kets propios de este hamiltoniano como:

$$|\psi(t)\rangle = a_1(t)|\phi_1\rangle + a_2(t)|\phi_2\rangle$$

En presencia de la perturbación  $\widehat{W}$  la representación del estado del sistema estará dada por el ket:

$$|\psi(t=0)\rangle = \lambda|\psi_+\rangle + \mu|\psi_-\rangle$$

y su evolución con respecto al tiempo puede escribirse como:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iE_+t}{\hbar}} |\psi_+\rangle + e^{\frac{-iE_-t}{\hbar}} |\psi_-\rangle$$

Si se asume que en el tiempo  $t = 0$  el sistema se encuentra en el estado:

$$|\psi(t=0)\rangle = |\phi_1\rangle$$

Entonces, el cálculo de la probabilidad de que en un tiempo ( $t$ ) el sistema se encuentre en el estado  $|\phi_2\rangle$ , es decir  $P_{12}$ , puede obtenerse de la siguiente manera: Expandiendo el ket  $|\psi(0)\rangle$  en la base dada por los kets  $|\psi_+\rangle$  y  $|\psi_-\rangle$  se obtiene:

$$|\psi(0)\rangle = |\phi\rangle = e^{\frac{i\phi}{2}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} |\psi_+\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |\psi_-\rangle \right]$$

Su respectiva evolución en el tiempo esta dada por:

$$|\psi(t)\rangle = |\phi\rangle = e^{\frac{i\phi}{2}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} |\psi_+\rangle - \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}} |\psi_-\rangle \right]$$

Entonces, la amplitud de probabilidad de encontrar al sistema en el estado  $|\phi_2\rangle$  puede escribirse como:

$$\langle \phi_2 | \psi(t) \rangle = e^{\frac{i\phi}{2}} \left[ \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} \langle \phi_2 | \psi_+ \rangle - \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}} \langle \phi_2 | \psi_- \rangle \right] = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}} \right]$$

Lo cual permite calcular la probabilidad  $P_{12}$  como:

$$P_{12} = \frac{1}{2} \sin^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{E_+ - E_- t}{\hbar} \right) \right] = \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{E_+ - E_-}{2\hbar} t \right)$$

Utilizando las ecuaciones (4), (5) y (6)) puede escribirse el resultado final como:

$$P_{12} = \frac{4|W_{12}|^2}{4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2} \sin^2 \left[ \sqrt{(4|W_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2)} \frac{t}{\hbar} \right]$$

**C). Cálculo del voltaje inducido en una bobina por la magnetización transversal en su retorno al equilibrio**

Para estimar el tamaño de la señal inducida en un circuito por un punto del tejido muestra, puede imaginarse al momento magnético medio del punto  $\vec{\mu} = \vec{M}\Delta V$ , rotando en un plano XY de un sistema coordenado XYZ. El voltaje inducido por el campo magnético de éste dipolo, puede calcularse colocando dos bobinas receptoras perpendiculares entre sí, una bobina colocada en plano YZ y la otra en el plano XZ. Este voltaje generado en las bobinas puede calcularse con la ayuda de la ley de inducción de Faraday:

$$V = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Donde  $\Phi$ , es el flujo magnético que atraviesa el área de la bobina, el cual en términos del campo magnético originado por el dipolo, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Phi = -\iint B \cdot dS$$

El cálculo del flujo magnético que atraviesa a una espira, puede simplificarse en gran manera si el campo magnético es expresado en coordenadas esféricas. Utilizando esta representación, el flujo que atraviesa la bobina de área  $a$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\Phi &= -\int B_r 2\pi a^2 \sin\theta d\theta \\ &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\left(\frac{4\pi\mu_x}{a}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\left(\frac{2\pi\mu_x}{a}\right)\end{aligned}$$

En esta expresión, se ha utilizado  $\mu_x$  para el cálculo del voltaje sobre la bobina paralela al plano YZ. De igual forma para calcular el voltaje inducido en la bobina paralela al plano XZ, se utilizara la componente  $\mu_y$ .

Sustituyendo la expresión del momento magnético  $\mu_x = M\Delta V$  en el anterior resultado, el flujo magnético se puede expresar de la siguiente manera.

$$\Phi = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\left(\frac{2\pi M_0\Delta V}{a}\right)e^{\frac{-t}{T_2}}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Ahora, derivando esta expresión con respecto al tiempo, se puede obtener el voltaje inducido en la bobina como:

$$V_x = -\frac{\mu_0\omega_0\Delta V M_0}{2a}e^{\frac{-t}{T_2}}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Y de igual forma para la bobina paralela al plano XZ, se obtiene el siguiente resultado:

$$V_y = -\frac{\mu_0\omega_0\Delta V M_0}{2a}e^{\frac{-t}{T_2}}\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

Si se representa con  $k = -\frac{\mu_0\omega_0\Delta V}{2a}$  los términos similares en ambas expresiones, cada uno de ellos puede escribirse como:

$$V_x = kM_0e^{\frac{-t}{T_2}}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$V_y = kM_0e^{\frac{-t}{T_2}}\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

Estos resultados, pueden ser representado en una sola expresión, utilizando la notación compleja de la siguiente manera:

$$V = V_x + V_y i$$